

Autómatas y Lenguajes formales 2019-2

Ejercicio Semanal 1

Sandra del Mar Soto Corderi
Edgar Quiroz Castañeda

1 de febrero del 2019

1. Demuestre las siguientes propiedades de las operaciones sobre cadenas vistas en clase

- Identidad $v\epsilon = \epsilon v = v$.

Por como está definida la concatenación, se tiene que $v\epsilon = v$.

Entonces sólo falta verificar que $\epsilon v = v$.

Por inducción sobre v .

- Caso base $v = \epsilon$

Entonces $\epsilon v = \epsilon\epsilon$

Y por la definición de concatenación, $\epsilon\epsilon = \epsilon = v$.

Por lo tanto $\epsilon v = v$

- Paso inductivo, con hipótesis $\epsilon v = v$.

Hay que demostrar que $\epsilon(va) = va$, con a un símbolo del alfabeto de v .

Por la definición de la concatenación, tenemos que $\epsilon(va) = (\epsilon v)a$.

Y usando la hipótesis, $= va$.

Por lo que $\epsilon(va) = va$

Por lo tanto, $v\epsilon = v = \epsilon v$

- Longitud $|vw| = |v| + |w|$.

Por inducción sobre w .

- Caso base $w = \epsilon$

Entonces $vw = v\epsilon = v$

Y por la definición de longitud

$$|vw| = |v| = |v| + 0 = |v| + |\epsilon| = |v| + |w|$$

- Paso inductivo, con hipótesis $|vw| = |v| + |w|$.

Hay que demostrar que $|v(wa)| = |v| + |wa|$, con a un símbolo del alfabeto de v .

Como la concatenación asocia (demostrado en clase), tenemos que $v(wa) = (vw)a$.

Y por la definición longitud, tenemos que $|(vw)a| = |vw| + 1$.

Y usando la hipótesis $|vw| + 1 = |v| + |w| + 1$.

Luego, notemos que $|wa| = |w| + 1$, por la definición de longitud.

Por lo que $|v(wa)| = |v| + |w| + 1 = |v| + |wa|$.

Por lo tanto, se cumple que $|vw| = |v| + |w|$.

- Reversa $(v^R)^R = v$

Por inducción sobre v

- Caso base $v = \epsilon$.

Entonces $(v^R)^R = (\epsilon^R)^R = \epsilon^R = \epsilon = v$, por la definición de reversa.

- Paso inductivo, con hipótesis $(v^R)^R = v$.

Hay que demostrar que $((va)^R)^R = va$, con a un símbolo del alfabeto de v .

Por definición de reversa, $(va)^R = av^R$.

Luego, utilizando la propiedad de $(uw)^R = w^R u^R$ (demostrada en clase), $(av^R)^R = (v^R)^R a^R$.

Y usando la hipótesis, $(v^R)^R a^R = va^R$.

Luego, notemos que $a = \epsilon a$, por la propiedad de identidad.

Por lo que $a^R = (\epsilon a)^R = a\epsilon^R = a\epsilon = a$.

Entonces $va^R = va$, por lo que $((va)^R)^R = va$.

Por lo tanto, siempre se cumple que $(v^R)^R = v$.

2. Da todos los prefijos de las siguientes cadenas

- 1001

Los prefijos son

- 1001, pues $1001 = 1001 \cdot \epsilon$
- 100, pues $1001 = 100 \cdot 1$
- 10, pues $1001 = 10 \cdot 01$
- 1, pues $1001 = 1 \cdot 001$
- ϵ , pues $1001 = \epsilon \cdot 1001$

- aaabbb

Los prefijos son

- aaabbb, pues $aaabbb = aaabbb \cdot \epsilon$
- aaabb, pues $aaabbb = aaabb \cdot b$
- aaab, pues $aaabbb = aaab \cdot bb$
- aaa, pues $aaabbb = aaa \cdot bbb$
- aa, pues $aaabbb = aa \cdot abbb$
- a, pues $aaabbb = a \cdot aabbb$
- ϵ , pues $aaabbb = \epsilon \cdot aaabbb$

3. Da todos los sufijos de las siguientes cadenas

- 1010

Los sufijos son

- 1010, pues $1010 = \epsilon \cdot 1010$
- 010, pues $1010 = 1 \cdot 010$
- 10, pues $1010 = 10 \cdot 10$
- 0, pues $1010 = 101 \cdot 0$
- ϵ , pues $1010 = 1010 \cdot \epsilon$

- abbabba

Los sufijos son

- abbabba, pues $abbabba = \epsilon \cdot abbabba$
- bbabba, pues $abbabba = a \cdot bbabba$
- babba, pues $abbabba = ab \cdot babba$
- abba, pues $abbabba = abb \cdot abba$
- bba, pues $abbabba = abba \cdot bba$
- ba, pues $abbabba = abbab \cdot ba$
- a, pues $abbabba = abbabb \cdot a$
- ϵ , pues $abbabba = abbabba \cdot \epsilon$

4. ¿Porqué ϵ es subcadena de cualquier cadena?