Autómatas y Lenguajes formales 2019-2

Ejercicio Semanal 1

Sandra del Mar Soto Corderi
Edgar Quiroz Castañeda

1 de febrero del 2019

1. Demuestre las siguientes propiedades de las operaciones sobre cadenas vistas en clase

   - Identidad $v\epsilon = \epsilon v = v$.

     Por como está definida la concatenación, se tiene que $v\epsilon = v$.
     Entonces sólo falta verificar que $\epsilon v = v$.

     Por inducción sobre v.

     – Casp base $v = \epsilon$
       Entonces $\epsilon v = \epsilon\epsilon$
       Y por la definición de concatenación, $\epsilon\epsilon = \epsilon = v$.
       Por lo tanto $\epsilon v = v$

     – Paso inductivo, con hipótesis $\epsilon v = v$.
       Hay que demostrar que $\epsilon(va) = va$, con a un símbolo del alfabeto de v.
       Por la definición de la concatenación, tenemos que $\epsilon(va) = (\epsilon v)a$.
       Y usando la hipótesis, $= va$.
       Por lo que $\epsilon(va) = va$

     Por lo tanto, $v\epsilon = v = \epsilon v$

   - Longitud $|vw| = |v| + |w|$.

     Por inducción sobre w.

     – Caso base $w = \epsilon$
       Entonces $vw = v\epsilon = v$
       Y por la definición de longitud

$$|vw| = |v| = |v| + 0 = |v| + |\epsilon| = |v| + |w|$$

     – Paso inductivo, con hipótesis $|vw| = |v| + |w|$.
       Hay que demostrar que $|v(wa)| = |v| + |wa|$, con a un símbolo del alfabeto de v.
       Como la concatenación asocia (demostrado en clase), tenemos

que $v(wa) = (vw)a$.
Y por la definición longitud, tenemos que $|(vw)a| = |vw| + 1$.
Y usando la hipótesis $|vw| + 1 = |v| + |w| + 1$.
Luego, notemos que $|wa| = |w| + 1$, por la definición de longitud.
Por lo que $|v(wa)| = |v| + |w| + 1 = |v| + |wa|$.

Por lo tanto, se cumple que $|vw| = |v| + |w|$.

- Reversa $(v^R)^R = v$

  Por inducción sobre v

  - Caso base $v = \epsilon$.
    Entonces $(v^R)^R = (\epsilon^R)^R = \epsilon^R = \epsilon = v$, por la definición de reversa.
  - Paso inductivo, con hipótesis $(v^R)^R = v$.
    Hay que demostrar que $((va)^R)^R = va$, con a un símbolo del alfabeto de v.
    Por definición de reversa, $(va)^R = av^R$.
    Luego, utilizando la propiedad de $(uw)^R = w^R u^R$ (demostrada en clase), $(av^R)^R = (v^R)^R a^R$. Y usando la hipótesis, $(v^R)^R a^R = va^R$.
    Luego, notemos que $a = \epsilon a$, por la propiedad de identidad. Por lo que $a^R = (\epsilon a)^R = a\epsilon^R = a\epsilon = a$. Entonces $va^R = va$, por lo que $((va)^R)^R = va$.

  Por lo tanto, siempre se cumple que $(v^R)^R = v$.

item Da todos los prefijos de las siguientes cadenas

- 1001
- aaabbb

item Da todos los sufijos de las siguientes cadenas

- 1010
- abbabba

item ¿Porqué ϵ es subcadena de cualquier cadena?