Autómatas y Lenguajes formales 2019-2

Ejercicio Semanal 1

Sandra del Mar Soto Corderi
Edgar Quiroz Castañeda

1 de febrero del 2019

1. Demuestre las siguientes propiedades de las operaciones sobre cadenas vistas en clase

   - Identidad $v\epsilon = \epsilon v = v$.
     Por como está definida la concatenación, se tiene que $v\epsilon = v$.
     Entonces sólo falta verificar que $\epsilon v = v$.
     Por inducción sobre v.
     - Casp base $v = \epsilon$
       Entonces $\epsilon v = \epsilon\epsilon$
       Y por la definición de concatenación, $\epsilon\epsilon = \epsilon = v$.
       Por lo tanto $\epsilon v = v$
     - Paso inductivo, con hipótesis $\epsilon v = v$.
       Hay que demostrar que $\epsilon(va) = va$, con a un símbolo del alfabeto de v.
       Por la definición de la concatenación, tenemos que $\epsilon(va) = (\epsilon v)a$.
       Y usando la hipótesis, $= va$.
       Por lo que $\epsilon(va) = va$

     Por lo tanto, $v\epsilon = v = \epsilon v$
   - Longitud $|vw| = |v| + |w|$.
     Por inducción sobre w.
     - Caso base $w = \epsilon$
       Entonces $vw = v\epsilon = v$
       Y por la definición de longitud
       $$|vw| = |v| = |v| + 0 = |v| + |\epsilon| = |v| + |w|$$
     - Paso inductivo, con hipótesis $|vw| = |v| + |w|$.
       Hay que demostrar que $|v(wa)| = |v| + |wa|$, con a un símbolo del alfabeto de v.
       Como la concatenación asocia (demostrado en clase), tenemos que $v(wa) = (vw)a$.
       Y por la definición longitud, tenemos que $|(vw)a| = |vw| + 1$.
       Y usando la hipótesis $|vw| + 1 = |v| + |w| + 1$.
       Luego, notemos que $|wa| = |w| + 1$, por la definición de longitud.
       Por lo que $|v(wa)| = |v| + |w| + 1 = |v| + |wa|$.

     Por lo tanto, se cumple que $|vw| = |v| + |w|$.
   - Reversa $(v^R)^R = v$
     Por inducción sobre v
     - Caso base $v = \epsilon$.
       Entonces $(v^R)^R = (\epsilon^R)^R = \epsilon^R = \epsilon = v$, por la definición de reversa.
     - Paso inductivo, con hipótesis $(v^R)^R = v$.
       Hay que demostrar que $((va)^R)^R = va$, con a un símbolo del alfabeto de v.
       Por definición de reversa, $(va)^R = av^R$.
       Luego, utilizando la propiedad de $(uw)^R = w^R u^R$ (demostrada en clase), $(av^R)^R = (v^R)^R a^R$.
       Y usando la hipótesis, $(v^R)^R a^R = va^R$.
       Luego, notemos que $a = \epsilon a$, por la propiedad de identidad.
       Por lo que $a^R = (\epsilon a)^R = a\epsilon^R = a\epsilon = a$.
       Entonces $va^R = va$, por lo que $((va)^R)^R = va$.

     Por lo tanto, siempre se cumple que $(v^R)^R = v$.

2. Da todos los prefijos de las siguientes cadenas

   - 1001
     Los prefijos son
     - 1001, pues $1001 = 1001 \cdot \epsilon$
     - 100, pues $1001 = 100 \cdot 1$
     - 10, pues $1001 = 10 \cdot 01$
     - 1, pues $1001 = 1 \cdot 001$
     - ϵ, pues $1001 = \epsilon \cdot 1001$
   - aaabbb
     Los prefijos son
     - aaabbb, pues aaabbb = aaabbb $\cdot$ ϵ
     - aaabb, pues aaabbb = aaabb $\cdot$ b
     - aaab, pues aaabbb = aaab $\cdot$ bb
     - aaa, pues aaabbb = aaa $\cdot$ bbb
     - aa, pues aaabbb = aa $\cdot$ abbb
     - a, pues aaabbb = a $\cdot$ aabbb
     - ϵ, pues aaabbb = ϵ $\cdot$ aaabbb

3. Da todos los sufijos de las siguientes cadenas

   - 1010
     Los sufijos son
     - 1010, pues $1010 = \epsilon \cdot 1010$
     - 010, pues $1010 = 1 \cdot 010$
     - 10, pues $1010 = 10 \cdot 10$
     - 0, pues $1010 = 101 \cdot 0$
     - ϵ, pues $1010 = 1010 \cdot \epsilon$
   - abbabba
     Los sufijos son
     - abbabba, pues abbabba = $\epsilon\cdot$ abbabba
     - bbabba, pues abbabba = a $\cdot$ bbabba
     - babba, pues abbabba = ab $\cdot$ babba
     - abba, pues abbabba = abb $\cdot$ abba
     - bba, pues abbabba = abba $\cdot$ bba
     - ba, pues abbabba = abbab $\cdot$ ba
     - a, pues abbabba = abbabb $\cdot$ a
     - ϵ, pues abbabba = abbabba $\cdot\epsilon$

4. ¿Porqué ϵ es subcadena de cualquier cadena?
   Sea v aquella subcadena cualquiera.
   Toda subcadena w de v cumple que $v = x_1 w x_2$ para algunas $x_1, x_2 \in \Sigma^*$.
   Así que con $x_1 = v, x_2 = \epsilon$, tenemos que $v = v\epsilon = v\epsilon\epsilon = x_1\epsilon x_2$, por la propiedad de identidad de ϵ.
   Por lo tanto, ϵ es subcadena de cualquier cadena.