Autómatas y Lenguajes formales 2019-2

Ejercicio Semanal 2

Sandra del Mar Soto Corderi
Edgar Quiroz Castañeda

Fecha de entrega: 7 de febrero del 2019

1. Una cadena es palíndorma si es de la forma ww^R.

   a) Define el conjunto P de cadenas palíndromas de forma recursiva.

   - ϵ es cadena palíndroma.
   - Si $a \in \Sigma$ y $p \in P$, entonces $apa \in P$
   - Estas son todas las cadenas palíndromas

   b) Enuncia el principio de Inducción generado por la definición del inciso anterior.
   Sea Pr alguna propiedad. Para demostrar que Pr se cumple para todas las cadenas paíndromas, hay que hacer lo siguiente

   - Demostrar directamente que $Pr(\epsilon)$ es verdad.
   - Asumir como hipótesis que si alguna cadena palíndroma es de la forma, apa, entonces $Pr(p)$ es verdad.
   - Demostrar que $Pr(apa)$ es verdad usando la hipótesis del inciso anterior.

   c) Demuestra mediante inducción estrucutral que todas las cadenas palíndromas **de ese tipo** tienen un número par de símbolos.

   - Caso base, con $w = \epsilon$.
     Entonces $|w| = 0 = 2 \cdot 0$.
     Por lo que $w = \epsilon$ tiene una cantidad par de símbolos.
   - La hipótesis es que si awa es cadena palíndorma, entonces w tiene una cantidad par de símbolos, esto es que $|w| = 2k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$
   - Notemos que $a \in \Sigma$ es un símbolo, para también puede considerarse una cadena de un sólo símbolo, por lo que las propiedades válidas para cadenas también son válidas para a.
     En particular, tenemos que $|vw| = |v| + |w|$ (demostrado en la tarea anterior).
     Por lo que $|awa| = |a| + |aw| = |a| + |w| + |a|$.
     Y por la definición de $|\cdot|$, esto anterior es $= 1 + |\epsilon| + |w| + 1 + |\epsilon| = 1 + 0 + |w| + 1 + 0 = |w| + 2$.
     Luego, por la hipótesis de inducción, $|w| = 2k$.
     Por lo que $|awa| = 2k + 2 = 2(k + 1)$, que es un número par.
     Por lo que awa tiene una cantidad par de símbolos.

2. Dada la siguiente definición de árbol binario de elementos del conjunto A

   - Un árbol vacío *void* es un árbol binario.
   - Si T_1 y T_2 son árboles binarios, y c es un elemento de A, entonces $(tree\ T_1, c, T_2)$ es un árbol binario.
   - Estos son todos los árboles binarios.

   Responde a lo siguiente

   a) Define recursivamente la función *aplana* que toma un árbol binario y devuelve una lista de sus elementos con un recorrido *in order*.

   Usando la definición de lista de objetos que está en las notas, podemos definir *aplana* como:
   $aplana$ :: BinTree a $\rightarrow$ [a]
   $aplana\ (void) = []$
   $aplana\ (tree\ T_1, e, T_2) = (aplana\ T_1) + +(e : (aplana\ T_2))$
   Donde ++ es el operador de concatenación en listas.

b) Demuestre que para cualquier árbol binario T se cumple que el número de nodos de T es igual a la longitud de la lista $aplana(T)$.

Primero, consideremos la siguiente función que da la cantidad de nodos de un árbol:
$|\cdot|$ :: BinTree a $\to \mathbb{N}$
$|void| = 0$
$|(tree\ T_1, e, T_2)| = |T_1| + |T_2| + 1$
Ahora, demostremos que $|T| = len(aplana(T))$ por inducción sobre T.

- Caso base: $T = void$
  $|void| = 0$ por la definición de $|\cdot|$
  $aplana(T) = []$ por la definición de $aplana$
  $len(aplana(T)) = len([]) = 0 = |void| = |T|$ por la definición de longitud en listas.
- Hipótesis:
  Sea $(tree\ T_1, e, T_2)$ árbol binario. Entonces, $|T_1| = len(aplana(T_1))$ y $|T_2| = len(aplana(T_2))$
- Hay que demostrar que $|(tree\ T_1, e, T_2)| = len(aplana\ (tree\ T_1, e, T_2))$.
  Tenemos que $aplana(tree\ T_1, e, T_2) = (aplana\ T_1) + +(e : (aplana\ T_2))$, por definición de aplana.
  Luego, $len((aplana\ T_1) + +(e : (aplana\ T_2))) = len(aplana\ T_1) + len(e : (aplana\ T_2))$ por propiedad de la concatenación en listas.
  Y por definición de longitud en listas, $len(e : (aplana\ T_2)) = 1 + len(aplana\ T_2)$.
  Y usando la hipótesis, tenemos que $len(aplana\ T_1) = |T_1|$ y $len(aplana\ T_2) = |T_2|$.
  Por lo que $len(aplana(tree\ T_1, e, T_2)) = |T_1| + 1 + |T_2| = |(tree\ T_1, e, T_2)|$, por definición de $|\cdot|$.

Por lo tanto, se cumple que el número de nodos de cualquier T es igual a la longitud de la lista $aplana(T)$.

3. Considera los lenguajes $L = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 111\}$ y $M = \{00, 01, 001, 11, 0100, 101, 0111\}$.
   Da los lenguajes resultantes de cada inciso

   a) $L \cup M = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 111, 00, 01, 001, 0100, 0111\}$

   b) $M \cap L^R = \{01, 001, 11, 101\}$

   c) $L - (M \cup L^R) = \{10, 100\}$

   d) $(ML)^R =$ {000, 100, 0100, 1100, 00100, 10100, 11100, 010, 110, 0110, 1110, 00110, 10110, 11110, 01100,001100, 101100, 11100, 011, 111, 0111, 1111, 00111, 10111, 11111, 00010, 10010, 010010, 110010, 0010010, 1010010, 1110010, 0101, 1101, 01101, 11101, 001101, 101101, 111101, 01110, 011110, 111110, 0011110, 1011110, 1111110}

   e) $L^2M^R =$ {0000, 0010, 00100, 0011, 000010, 00101, 001110, 0100, 0110, 01100, 0111, 010010, 01101, 011110, 01000, 01010, 010100, 01011, 0100010, 010101, 0101110, 01110, 011100, 01111, 0110010, 011101, 0111110, 010000, 0100100, 010011, 01000010, 0100101, 01001110, 010110, 0101100, 010111, 01010010, 0101101, 01011110, 0111100, 011111, 01110010, 0111101, 01111110, 1000, 1010, 10100, 1011, 100010, 10101, 101110, 1100, 1110, 11100, 1111, 110010, 11101, 111110, 11000, 11010, 110100, 11011, 1100010, 110101, 1101110, 11110, 111100, 11111, 1110010, 111101, 1111110, 110000, 1100100, 110011, 11000010, 1100101, 11001110, 110110, 1101100, 110111, 11010010, 1101101, 11011110, 1111100, 111111, 11110010, 1111101, 11111110, 10000, 10010, 100100, 10011, 1000010, 100101, 1001110, 10110, 101100, 10111, 1010010, 101101, 1011110, 101000, 101010, 1010100, 101011, 10100010, 1010101, 10101110, 1011100, 101111, 10110010, 1011101, 10111110, 1010000, 10100100, 1010011, 101000010, 10100101, 101001110, 1010110, 10101100, 1010111, 101010010, 10101101, 101011110, 10111100, 1011111, 101110010, 10111101, 101111110, 111000, 111010, 1110100, 111011, 11100010, 1110101, 11101110,1110000, 11100100, 1110011, 111000010, 11100101, 111001110, 1110110, 11101100, 1110111, 111010010, 11101101, 111011110, 11111100, 1111111, 111110010, 11111101, 111111110,100000, 1000100, 100011, 10000010, 1000101, 10001110, 100110, 1001100, 100111, 10010010, 1001101, 10011110, 1001000, 1001010, 10010100, 1001011, 100100010, 10010101, 100101110, 10011100, 1001111, 100110010, 10011101, 100111110, 10010000, 100100100,10010011, 1001000010, 100100101, 1001001110, 10010110, 100101100, 10010111, 1001010010, 100101101, 1001011110, 100111100, 10011111, 1001110010, 100111101, 1001111110,1011000, 1011010, 10110100, 1011011, 101100010, 10110101, 101101110, 10110000,101100100, 10110011, 1011000010, 101100101, 1011001110, 10110110, 101101100, 10110111, 1011010010, 101101101, 1011011110, 101111100, 10111111, 1011110010, 101111101, 1011111110, 1111000, 1111010, 11110100, 1111011, 111100010, 11110101, 111101110,11110000, 111100100, 11110011, 1111000010, 111100101, 1111001110, 11110110, 111101100,11110111, 1111010010, 111101101, 1111011110, 111111100, 11111111, 1111110010,111111101, 1111111110}