Autómatas y Lenguajes formales

2019-2

Ejercicio semanal 3

Sandra del Mar Soto Corderi

Edgar Quiroz Castañeda

Fecha de entrega: 15 de febrero del 2019

1. Sea $L \subset \{a, b\}^*$ definido como

$$\frac{}{\epsilon \in L}$$

$$\frac{x \in L}{xa \in L}$$

$$\frac{x \in L}{xba \in L}$$

Demuestre que para toda $x \in L$ se cumple que

a) $n_a(x) \geq n_b(x)$.
Como L tiene una definición recursiva, tiene un principio de inducción estructural.
Entonces, demostremos esta propiedad por inducción.

- Caso base $x = \epsilon$
  Entonces, $n_a(x) = n_a(\epsilon) = 0 = n_b(\epsilon) = n_b(x)$, por lo que en particular, $n_a(x) \geq n_b(x)$
- Hipótesis
  Sea $x \in L$. Entonces, $n_a(x) \geq n_b(x)$.
- Paso inductivo.
  Sea $w \in L$ construida usando una de las reglas recursivas de la definición de L.
  Como hay dos reglas recursivas, entonces hay dos casos para w.
  - Caso 1, $w = xa$.
    Entonces, $n_a(xa) = n_a(x) + 1$ y $n_b(xa) = n_b(x)$.
    Y por hipótesis, tenemos que $n_a(x) \geq n_b(x)$, por lo que que $n_a(x) + 1 > n_b(x)$.
    Y como es mayor, en particular $n_a(xa) = n_a(x) + 1 \geq n_b(x) = n_b(xa)$
  - Caso 2, $w = xba$.
    Entonces, $n_a(xba) = n_a(x) + 1$ y $n_b(xba) = n_b(x) + 1$.
    Y por hipótesis, tenemos que $n_a(x) \geq n_b(x)$, por lo que que $n_a(xba) = n_a(x)+1 \geq n_b(x)+1 = n_b(xba)$.

b) x no contiene la subcadena bb.
Como L tiene una definición recursiva, tiene un principio de inducción estructural.
Pero antes de demostrarla, demostremos una propiedad auxiliar: x no termina en b.
Hay una regla básica y dos recursivas. Veamos que esto se cumple para esas tres reglas.

- Para la regla base, con $x = \epsilon$ tenemos que ϵ no tiene ningún símbolo, por lo que en particular no termina en b.
- Para ambas reglas recursivas, tenemos que $x = wa$ o $w = wba$ para alguna $w \in L$. Como en ambos casos termina en a, no termina en b.

Por lo que ninguna cadena de L termina en b.

Volviendo al problema principal, demostremos la propiedad por inducción.

- Case base $x = \epsilon$.
  Como ϵ no tiene ningún símbolo, entonces en particular no tiene ninguna bb.

- Hipótesis Sea $x \in L$. Entonces, x no tiene como subcadena bb.
- Paso inductivo. Sea $w \in L$ construida usando una de las reglas recursivas de la definición de L.
  Como hay dos reglas recursivas, entonces hay dos casos para w.
  - Caso 1, $w = xa$.
    Por hipótesis, x no tiene como subcadena a bb. Y como a xa sólo se le concatena una a, entonces xa tampoco puede tener como subcadena a bb.
  - Case 2, $w = xba$.
    Por hipótesis, x no tiene como subcadena a bb. Y como a xba sólo se le concatena una ba, y x no termina en b por lo demostrado anteriormente, xba tampoco puede tener como subcadena a bb.

2. Considere las expresiones regulares

$$r = a^* + b^*$$
$$s = ab^* + ba^* + b^*a + (a^*b)^*$$

Da una cadena que cumpla lo siguiente o justifica porque no existe.

a) Que corresponda a r pero no a s.
Proponemos la cadena w = **aaaaaa**

b) Que corresponda a s pero no a r.
Proponemos la cadena w = **abbb**

c) Que corresponda tanto a r como a s.
Proponemos la cadena w = ϵ