Autómatas y Lenguajes formales
Ejercicio Semanal 7

Sandra del Mar Soto Corderi
Edgar Quiroz Castañeda

22 de marzo del 2019

1. Para cada ANFD, resuelve los siguientes incisos.
   (a) Construye un autómata mínimo equivalente, mostrando paso a paso el proceso de construcción.
   (b) Da una expresión regular α correspondiente al lenguaje aceptado por el autómata usando el método de ecuaciones características.

1. Autómata 1

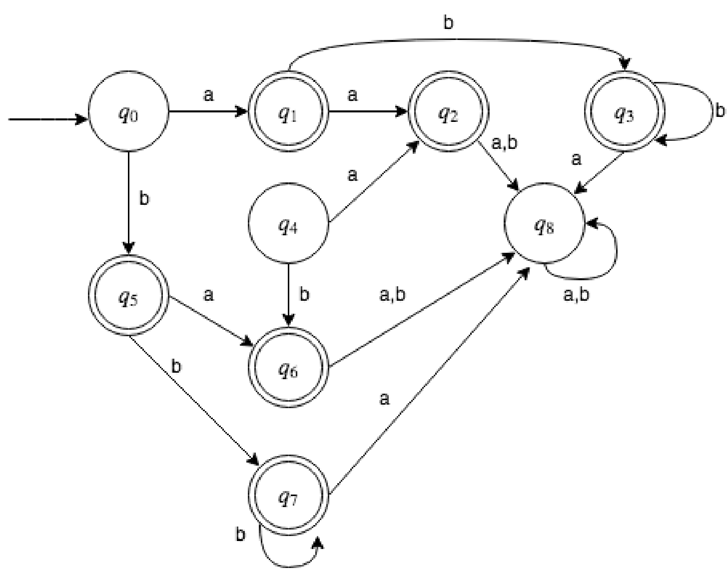

Figure 1: El autómata M

(a) Autómata mínimo
Para minimizar el autómata, primero quitamos los estados inaccesibles, podemos ver que no hay manera de acceder a q_4, así que lo eliminamos del autómata y eliminamos las transiciones hacia el.

Comencemos con la partición inducida por $[\equiv_0] = \{A = F, B = Q \setminus F\}$.
Evaluando δ para obtener las clases de $\equiv_1$

A	q_1	q_2	q_3	q_5	q_6	q_7
a	A	B	B	A	B	B
b	A	B	A	A	B	A

B	q_0	q_8
a	B	A
b	B	A

De A se refinan tres nuevas clases , y de B se refinan dos nuevas clases.
Por lo que $[\equiv_1] = \{B = \{q_0\}, F = \{q_8\}, C = \{q_1, q_5\}, D = \{q_2, q_6\}, E = \{q_3, q_7\}\}$.
Hay que evaluar δ en los elementos de C, D, E para obtener las clases de $\equiv_2$.

C	q_1	q_5
a	D	D
b	E	E

D	q_2	q_6
a	G	G
b	G	G

E	q_3	q_7
a	G	G
b	E	E

Entonces $[\equiv_2] = \{C, D, E\}$.
No se genera ningún refinamiento, por lo que el proceso ya ha acabado.
El autómata mínimo entonces es:

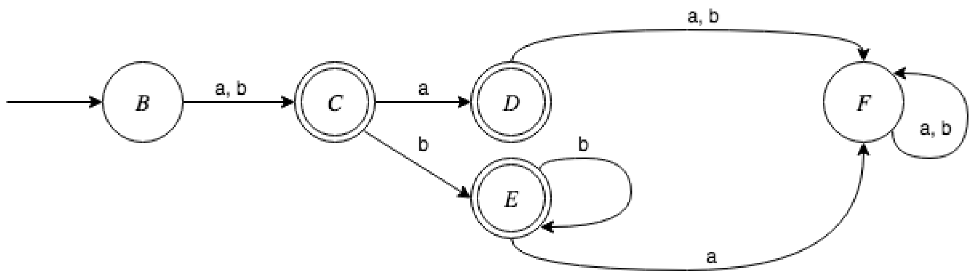

Figure 2: El autómata mínimo M'

(b) Expresión regular usando el sistema de ecuaciones característico:
Consideremos: $B = 0, C = 1, D = 2, E = 3, F = 4$. Definimos el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned}
L_0 &= aL_1 + bL_1 \\
L_1 &= aL_2 + bL_3 + \epsilon \\
L_2 &= aL_4 + bL_4 + \epsilon \\
L_3 &= aL_4 + bL_3 + \epsilon \\
L_4 &= aL_4 + bL_4
\end{aligned}$$

Simplificamos algunas de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
L_0 &= (a+b)L_1 \\
L_2 &= (a+b)L_4 + \epsilon \\
L_4 &= (a+b)L_4
\end{aligned}$$

Aplicamos el lema de Arden en L_4

$$\begin{aligned}
L_4 &= (a+b)L_4 \\
L_4 &= (a+b)L_4 + \varnothing \\
L_4 &= (a+b)(a+b)^*\varnothing + \varnothing \\
L_4 &= \varnothing
\end{aligned}$$

Sustituimos L_4 en L_3 aplicamos el lema de Arden en L_3

$$\begin{aligned}
L_3 &= aL_4 + bL_3 + \epsilon \\
L_3 &= a\varnothing + bL_3 + \epsilon \\
L_3 &= \varnothing + bL_3 + \epsilon \\
L_3 &= bL_3 + \epsilon \\
L_3 &= b(b^*\epsilon) + \epsilon \\
L_3 &= bb^* + \epsilon \\
L_3 &= b^*
\end{aligned}$$

Sustituimos L_4 en L_2

$$\begin{aligned}
L_2 &= (a+b)L_4 + \epsilon \\
L_2 &= (a+b)\varnothing + \epsilon \\
L_2 &= \varnothing + \epsilon \\
L_2 &= \epsilon
\end{aligned}$$

Sustituimos L_2 y L_3 en L_1

$$L_1 = aL_2 + bL_3 + \epsilon$$
$$L_1 = a(\epsilon) + b(b^*) + \epsilon$$
$$L_1 = a + (bb^* + \epsilon)$$
$$L_1 = a + b^*$$

Sustituimos L_1 en L_0

$$L_0 = (a + b)L_1$$
$$L_0 = (a + b)(a + b^*)$$

Por lo tanto, la expresión regular correspondiente al lenguaje aceptado es: $\alpha = (a + b)(a + b^*)$

2. Autómata 2

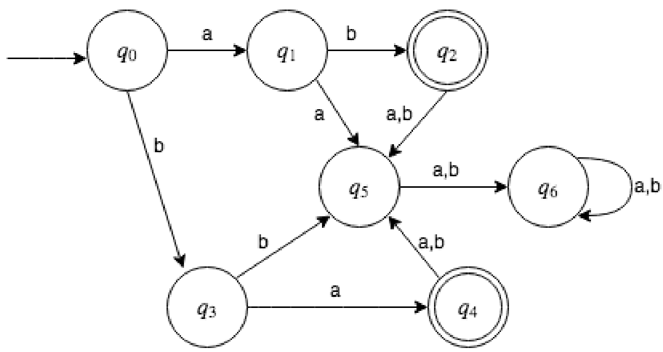

Figure 3: El autómata A

(a) Autómata mínimo
Comencemos con la partición inducida por $[\equiv_0] = \{A = F, B = Q \setminus F\}$.
Evaluando δ para obtener las clases de $\equiv_1$

A	q_2	q_4
a	B	B
b	B	B

B	q_0	q_1	q_3	q_5	q_6
a	B	B	A	B	B
b	B	A	B	B	B

A no cambia, y de B se refinan tres nuevas clases.
Por lo que $[\equiv_1] = \{A, C = \{q_0, q_5, q_6\}, D = \{q_1\}, E = \{q_3\}\}$.
Cómo D y E son unitarios, sólo hay que evaluar δ en los elementos de C para obtener las clases de $\equiv_2$.

C	q_0	q_5	q_6
a	D	C	C
b	E	C	C

Entonces $[\equiv_1] = \{A, D, E, G = \{q_0\}, H = \{q_5, q_6\}\}$. Evaluando δ sobre H para obtener las clases de $\equiv_3$

H	q_5	q_6
a	H	H
b	H	H

Por lo que no se generó ningún refinanmiento, por lo que el proceso ya ha acabado.
El autómata mínimo entonces es

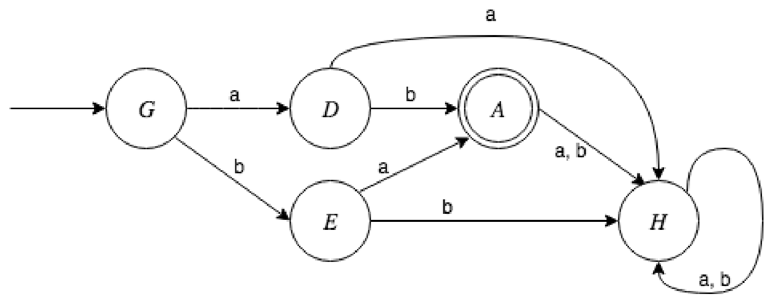

Figure 4: El autómata mínimo A'

(b) Expresión regular

Consideremos: $G = 0, D = 1, E = 2, A = 3, H = 4$. Definimos el sistema de ecuaciones a resolver:

$$
\begin{aligned}
L_0 &= aL_1 + bL_2 \\
L_1 &= aL_4 + bL_3 \\
L_2 &= aL_3 + bL_4 \\
L_3 &= aL_4 + bL_4 + \epsilon = (a+b)L_4 + \epsilon \\
L_4 &= aL_4 + bL_4 = (a+b)L_4
\end{aligned}
$$

Usando el lema de Arden, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&L_4 = (a+b)^*\varnothing = \varnothing \\
&\implies L_3 = (a+b)\varnothing + \epsilon = \epsilon \\
&\implies L_2 = a\epsilon + b\varnothing = a \\
&\implies L_1 = a\varnothing + b\epsilon = b \\
&\implies L_0 = ab + ba
\end{aligned}
$$