Autómatas y Lenguajes formales
Ejercicio Semanal 8

Sandra del Mar Soto Corderi
Edgar Quiroz Castañeda

5 de abril del 2019

1. Dado el siguiente lenguaje: $L = \{w \in \{a, b\}^* | \eta_a(w) = \eta_b(w)\}$ es decir el lenguaje que tiene el mismo número de a's que de b's

   (a) Demuestra que el lenguaje no es regular con el lema del bombeo.

   El lema del Bombeo dice que si L es un lenguaje regular infinito entonces existe un número n $\in \mathbb{N}$, llamado constante de bombeo para L, tal que para cualquier cadena w $\in L$ con $|w| \geq$ n existen cadenas u,v,x tales que:

   i. w = uvx
   ii. $|uv| \leq$ n
   iii. v $\neq \epsilon$
   iv. $\forall m \in \mathbb{N}(uv^m x \in L)$

   Vamos a demostrar por contradicción:

   Supongamos que L es un lenguaje regular y que n es la constante de bombeo tal que cualquier cadena $w \in L$, $|w| \geq n$. Tomemos una w que claramente está en L y tiene longitud mayor a n: $w = a^n b^n, |w| = 2n$. Por hipótesis, $w = uvx$, con $|uv| \leq n$. Y cómo los primeros n caracteres de w son $a's$, tenemos que $uv = a^s, s \leq n$. Entonces, tenemos que

   $$u = a^k,\ v = a^j,\ k \geq 0, j \geq 1, k + j = s$$

   Pues $v \neq \epsilon$. Y como $w = a^n b^n$, tenemos que $x = a^{n-k-j} b^n$

   Si tomamos $m = 4$, por el lema del bombeo, se debe cumplir que $uv^4 x \in L$.

   Pero tenemos que $uv^4 x = a^k a^j a^j a^j a^j a^{n-k-j} b^n = a^{n+3j} b^n$, que estaría el L únicamente cuando $j = 0$, pero $j \geq 1$. Entonces esta cadena no está el L, que es una contradicción al lema del bombeo.

   Por lo tanto, L no es un lenguaje regular ■

   (b) Demuestra que el lenguaje no es regular usando el conjunto estafador.

   Un conjunto infinito $S \subseteq \Sigma^*$ es un conjunto estafador para L si y sólo si $\forall x, y \in S(x \not\equiv_L y)$.

   Sea $S = \{a^i | i \in \mathbb{N}\}$, veamos que S es un conjunto estafador: Sean $a^m, a^n \in S$ con $n \neq m$

   Por un lado tenemos $a^m b^m \in L$
   Por otra parte tenemos $a^n b^m \notin L$

   Por lo tanto $a^m \not\equiv_L a^n$ y S es un conjunto estafador de L.

   Como pudimos encontrar un conjunto estafador de L, concluimos que L no es regular. ■