

# Caraterização das Coincidências $\gamma\gamma$ do Decaimento $\beta^+$ de $^{22}\text{Na}$ , Estudo das Correlações Angulares e Obtenção de um Sinograma PET

**Grupo 3C:** Miguel Gonçalves (78850), Pedro Pereira (78889), Clara Pereira (79156)

**Instituto Superior Técnico**  
**Mestrado em Engenharia Física Tecnológica**  
**Laboratório de Física Experimental Avançada**

Março de 2016 - 2º Semestre 2015/2016

## Resumo

Utilizou-se um par de detetores de cintilação para estudar correlações angulares das coincidências para uma fonte de  $^{22}\text{Na}$ , concluindo-se que não existem assimetrias significativas e que existe uma área não detetável no porta-amostras. Fez-se um estudo breve dos 2 detetores, concluindo-se que são semelhantes. Estudou-se as coincidências fortuitas concluindo-se que não eram relevantes para janelas temporais baixas. Realizou-se a reconstrução tomográfica para duas fontes (uma com muito maior atividade que a outra). Foram usadas as conclusões anteriores para escolher as posições das fontes (desfasamento de  $90^\circ$ ) de forma a que existissem zonas em que se obtêm contagens de uma das fontes sem interferência da outra- essencial para obter uma reconstrução aceitável, tendo em conta a baixa resolução. É possível distinguir as sinocurvas de cada fonte no sinograma obtido e relacioná-las com a posição relativa destas. Obteve-se uma reconstrução razoável, onde é possível indentificar ambas as fontes.

## 1 Introdução Teórica

O decaimento  $\beta^+$  dá-se em núclídeos com uma relação Z/A (número de prótons vs número de neutrões) bastante elevada que os torna instáveis, sendo-lhes favorável a transformação de um próton num neutrão, segundo a equação:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (1)$$

Quando um positrão é emitido, este vai perdendo energia na matéria através de interações sucessivas (por efeito de Compton) até atingir a energia típica dos electrões atómicos (20-40 keV), formando um estado ligado com um electrão do meio, o positrónio. O positrónio é, no entanto, formado num estado excitado, e depois de sucessivas transições até ao estado de energia mínima (6-7 eV), ocorre a aniquilação do electrão com o positrão. São então emitidos dois  $\gamma$  com energia total igual à soma das energias em repouso das duas partículas (cada uma com 511 keV) em direcções opostas.

Para a detecção da radiação  $\gamma$ , são utilizados detetores de cintilação. Estes detetores são feitos de um material cintilador que é excitado ao ser bombardeado por radiação. Da sua desexcitação resulta a emissão de radiação  $\gamma$  de baixa energia que é convertida num fotomultiplicador num impulso eléctrico (por efeito fotoelétrico). Esse impulso é posteriormente amplificado nos dínodos do fotomultiplicador, sendo o pulso de tensão resultante proporcional à energia da radiação incidente.

Utilizando dois detetores de cintilação é possível detectar os fenómenos de aniquilação, estabelecendo uma janela temporal  $\tau$ , na qual se considera que se 2 eventos ocorrerem dentro desta são coincidentes e são produto duma

aniquilação. Há que ter em conta, no entanto, que nem todas as coincidências se devem a aniquilações - podem ocorrer coincidências fortuitas que seguem uma estatística de *Poisson* e são calculadas através da expressão 2.

$$N_{C_{fort}} = 2N_A N_B \frac{\tau}{\Delta t} \quad (2)$$

em que  $N_A$  e  $N_B$  são, respectivamente, as contagens registadas pelos detetores A e B, e  $\Delta t$  o intervalo de tempo de medição.

Este fenómeno físico tem aplicações diretas na medicina nuclear, a chamada tomografia por emissão de positrões (PET). A técnica consiste em injetar no sangue do paciente uma dose muito pequena de um núclídeo radioativo, que por razões biológico-anatómicas se vai alojar perto de onde se julga encontrar o tumor em estudo. Este núclídeo vai decair por  $\beta^+$ , sendo possível detetar com precisão a sua posição no corpo humano, através do estudo angular das coincidências  $\gamma\gamma$ . Quando é detetada uma coincidência, diz-se que um evento de aniquilação ocorreu num local indeterminado da linha que une a posição de deteção de um fóton à posição de deteção do outro fóton. Esta linha é chamada de Line of Response (LOR). As LORs organizam-se segundo projecções, acumulando as coincidências verdadeiras. A forma mais comum de as representar - e a realizada neste trabalho experimental - é o sinograma.

Um sinograma é uma composição de sinocurvas, sendo uma sinocurva um histograma bidimensional em que se expressam as coincidências em função das dependências angulares. A cada sinocurva corresponde um ponto na imagem reconstruída, que é determinada através de algoritmos estatísticos. Ao sinograma, vão corresponder vários pontos (1 por cada sinocurva), sendo possível obter com precisão a

posição da fonte. Experimentalmente, é sobre as sinocurvas que existe um maior número de eventos, sendo possível identificá-las no histograma com base nisso. Idealmente uma fonte produziria apenas 1 sinocurva bem definida, sendo a sua imagem reconstruída, apenas um ponto - Precisão máxima, uma das razões porque isto não acontece é porque as fontes não são objetos pontuais.

## 2 Esquema da montagem

A realização da experiência envolveu o uso de uma mesa de correlações angulares a partir da qual era possível rodar um dos detectores (detector A) em relação ao outro (detector B) de um ângulo que se definiu como  $\theta$ , sendo também possível rodar o porta-amostras presente entre os dois detectores de um ângulo  $\phi$  - figura 1.

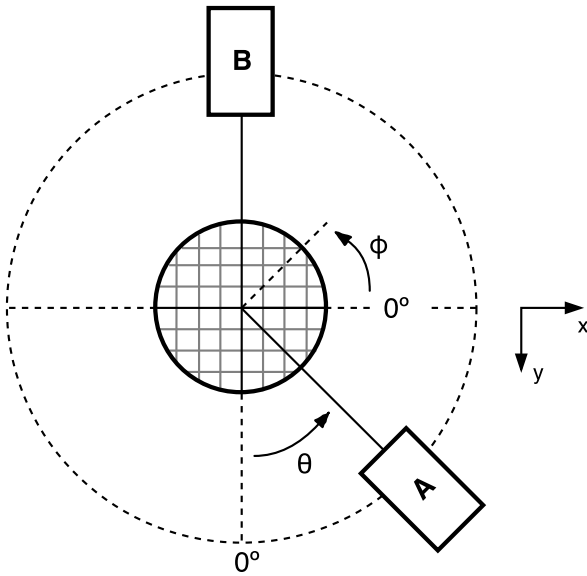


Figura 1: Aparato experimental

Para as medições das contagens provenientes dos detectores A e B, e das coincidências, ligaram-se os detectores aos respectivos amplificadores, estando as restantes ligações representadas na figura 2. Foi necessário no início de cada sessão regular os limites dos monocanais de forma a discriminar apenas a gama de energia correspondente ao pico de aniquilação da fonte de  $^{22}\text{Na}$ , alvo de estudo. Para isso teve de se ligar o Pulser aos amplificadores, sendo todas as restantes ligações iguais. De forma a impôr os limites inferior e superior, adquiriram-se primeiramente os espectros para cada um dos detectores, identificando-se os canais que ficavam a  $3\sigma$  do centróide. Foi então necessário ligar o Pulser ao amplificador A. Seleccionou-se a tensão do Pulser correspondente ao canal do limite inferior, e com o Lower Limit e Upper Limit do monocal, respectivamente, no mínimo e no máximo, aumentou-se o Lower Limit até deixarem de haver contagens. De seguida, com o Pulser numa tensão correspondente ao canal mais energético, procedeu-se do mesmo modo, desta vez diminuindo-se o Upper Limit. Este procedimento foi repetido para o monocal B, ligando-se para isso o Pulser ao amplificador B.

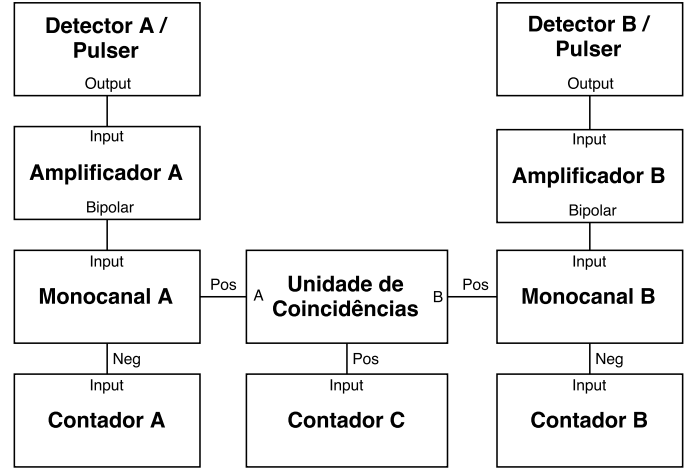


Figura 2: Diagrama da montagem da experiência

## 3 Resultados e Discussão

### 3.1 Estudo do espectro da fonte de $^{22}\text{Na}$

Em primeiro lugar apresenta-se o esquema de decaimento da fonte a ser utilizada ao longo da experiência:

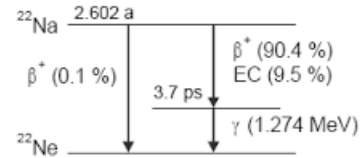


Figura 3: Diagrama do esquema de decaimento do  $^{22}\text{Na}$

Pode inferir-se-se do esquema que a fonte decai exclusivamente por  $\beta^+$ , possuindo uma transição  $\gamma$  de energia  $E=1.274\text{Kev}$  desde um estado excitado até ao fundamental.

Uma aquisição para a fonte de  $^{22}\text{Na}$  permite obter o espectro presente na figura 4.

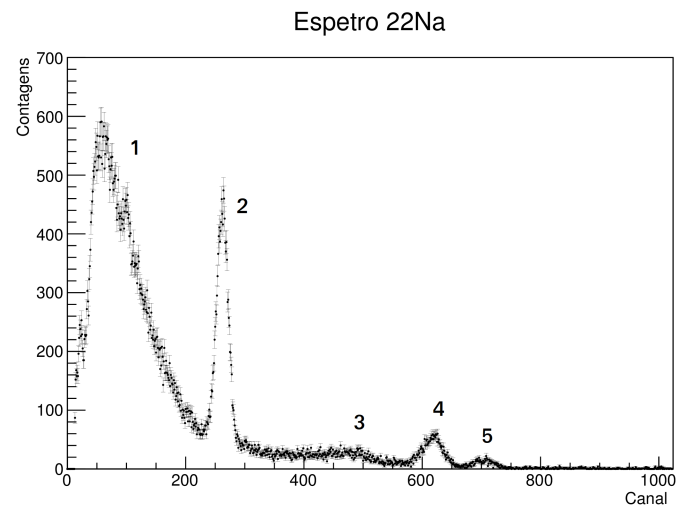


Figura 4

O pico 1 corresponde à corrente negra devido à emissão termoiónica dos dínodos. O pico 2 corresponde ao pico da radiação  $\gamma$  de  $511\text{keV}$  proveniente da aniquilação dos pósitrons emitidos pela fonte de  $^{22}\text{Na}$  na matéria, aquando do

decaimento  $\beta^+$ . O pico 3 corresponde ao joelho de Compton do fóton de 1274keV emitido através de um decaimento  $\gamma$ , sendo que o pico 4 corresponde ao pico de absorção total deste fóton, (ver fig. 3).

Finalmente, o pico 5 corresponde ao pico de absorção total do  $^{40}\text{K}$  da radiação ambiente. Não se conseguiram distinguir no espectro os picos de retrodifusão dos  $\gamma$  de 511keV e de 1274keV (podendo-se no entanto distinguir uma pequena oscilação à direita do pico 1 que pode corresponder à sobreposição de ambos), nem o joelho de Compton do  $\gamma$  de 511keV pois se encontram na região perto do pico 1, em que a corrente negra é dominante.

### 3.2 Correções efectuadas

Obtiveram-se através do *software* os dados relativos ao pico de absorção total de aniquilação para ambos os detectores. Com base nesses dados, foi possível obter a razão entre os eventos sem e com ruído ( $f$ ) através da expressão 3.

$$f = \frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{total}}} \quad (3)$$

Este cálculo foi efectuado de forma a considerar apenas as contagens que são efetivamente do pico de aniquilação.

Todos os valores de contagens ao longo das 4 sessões foram então corrigidos recorrendo a este rácio ( $N_c = N \cdot f$ ), recalculado a cada sessão. Em média, para a fonte de maior actividade obteve-se  $f = 0.720 \pm 0.019$ , e para a fonte de menor actividade  $f = 0.357 \pm 0.049$ .

Para além desta correcção teve de se considerar uma outra, desta vez às taxas de coincidências, de forma a eliminar a possível ocorrência de eventos fortuitos. Ao longo do tratamento de dados descontaram-se sempre as coincidências fortuitas às coincidências medidas:  $N_C = N_{C_{\text{medido}}} - N_{C_{\text{fort}}}$ ; sendo  $N_{C_{\text{fort}}}$  dado pela expressão 2. Note-se que para o  $\tau = 250\text{ns}$  adoptado no decurso do trabalho, as coincidências fortuitas foram muito reduzidas (taxas de contagem da ordem de  $10^{-3} - 10^{-4}\text{s}^{-1}$ ) pelo que esta correcção foi pouco significativa.

### 3.3 Coincidências fortuitas em função da janela de coincidências

Para realizar o estudo das coincidências fortuitas, colocouse o detector A em  $\theta = 90^\circ$  e a fonte no centro do porta-amostras de forma que todas as coincidências medidas fossem coincidências fortuitas.

Efectuou-se então um estudo das coincidências fortuitas em função da janela temporal de coincidências ( $\tau$ ). Efectuaram-se aquisições de 300s. Os resultados encontram-se na tabela 1.

$\tau(\mu\text{s})$	$N_A$	$N_B$	$N_C$	$N_{C_{\text{teo}}}$
0.10	$10550 \pm 102.71$	$10592 \pm 102.92$	$3 \pm 1.73$	$0.074 \pm 0.010$
0.25	$10231 \pm 101.15$	$10073 \pm 100.36$	$2 \pm 1.41$	$0.172 \pm 0.002$
1.25	$10472 \pm 102.33$	$10024 \pm 100.12$	$5 \pm 2.24$	$0.875 \pm 0.012$
6.25	$10446 \pm 102.21$	$10246 \pm 101.22$	$6 \pm 2.45$	$4.460 \pm 0.062$

Tabela 1: Número de coincidências fortuitas obtidas experimentalmente e o seu valor expectável teoricamente, para diferentes  $\tau$

Ao observar os dados desta tabela torna-se flagrante o desajuste do modelo teórico à realidade. Este resultado, no entanto, não nos permite concluir nada acerca da lei (2) dado o número reduzido de ensaios, tanto para diferentes  $\tau$  como para cada um deles (apenas um ensaio para 4  $\tau$ 's diferentes). Ora, esta lei é de carácter estatístico, sendo que seria preciso um numero de ensaios bastante mais elevado para cada janela temporal para poder comprová-la (ou rejeitá-la), ou para ter sequer um resultado significativo estatisticamente.

Por este motivo, destaca-se a discrepância entre os valores previstos teoricamente e os obtidos no laboratório que nos impede de tentar sequer provar alguma proporcionalidade com a expressão (2), abstendo-nos, no entanto, de concluir que a lei é totalmente incapaz de descrever a realidade.

### 3.4 Eficiência do fotopico

Colocou-se a fonte no eixo de rotação dos detectores, distanciada de 20.8cm de cada detector - condição mantida em toda a experiência. Efectuaram-se as medições das contagens em cada detector e das coincidências. Começou-se por fazer aquisições de 40s, 50s e 60s para  $\theta = 0^\circ$ . A partir destas medições, calcularam-se as eficiências do fotopico para os detectores A e B através das expressões :

$$\epsilon_{iA} = \frac{R_C}{R_B} \quad (4)$$

$$\epsilon_{iB} = \frac{R_C}{R_A} \quad (5)$$

As eficiências calculadas para cada detector encontram-se na tabela 2 para diferentes tempos de aquisição.

$\Delta t(s)$	$\epsilon_{iA}(\%)$	$\epsilon_{iB}(\%)$
40	$39.76 \pm 2.24$	$41.44 \pm 2.56$
50	$38.32 \pm 2.00$	$41.43 \pm 2.40$
60	$41.04 \pm 1.92$	$42.92 \pm 2.28$

Tabela 2: Eficiências do fotopico para os detectores A e B

Dentro dos erros estatísticos, não se pode concluir que as eficiências dos detectores são diferentes.

Fez-se então uma média dos três valores de eficiência para A e B de forma a determinar se as eficiências dos dois eram estatisticamente compatíveis. Os resultados encontram-se na tabela seguinte:

$\overline{\epsilon_{iA}}(\%)$	$\overline{\epsilon_{iB}}(\%)$
$39.70 \pm 2.83$	$41.93 \pm 3.51$

Tabela 3: Eficiências médias para os detectores A e B

Tal como se pode verificar, os valores  $\epsilon_{iA}$  e  $\epsilon_{iB}$  encontram-se incluídos no erro um do outro. É por isso plausível concluir que os dois detectores, sendo iguais, possuem também uma eficiência igual.

Calculou-se por fim a média dos dois valores para se obter uma melhor aproximação da eficiência de ambos os detectores, tendo-se obtido  $\epsilon_i = 40.82 \pm 1.83\%$ .

### 3.5 Correlação angular em $\theta$ das coincidências - fonte centrada

Com a fonte na mesma posição que no passo anterior, efectuaram-se medições para vários ângulos  $\theta$ .

Representaram-se graficamente as coincidências em função de  $\theta$  - figura 5.

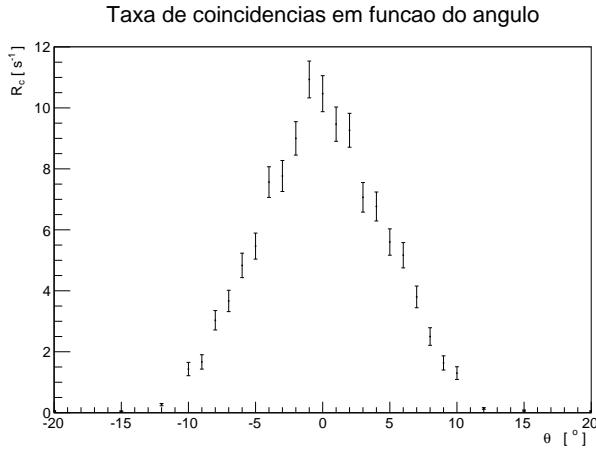


Figura 5: Taxa de coincidências em função de  $\theta$

A partir destes dados, calcularam-se alguns parâmetros estatísticos relevantes, apresentados na tabela 4.

$\theta_{méd}$	Variância	Assimetria	Curtose
$0.08 \pm 0.42$	20.82	0.0064	2.82

Tabela 4: Parâmetros estatísticos da distribuição angular

Repare-se que a assimetria é próxima de 0 e o *curtose* próximo de 3 (valores característicos de uma distribuição normal), o que indica que a distribuição angular é aproximadamente gaussiana. Efectuou-se assim um ajuste dos dados a uma gaussiana - figura 6.

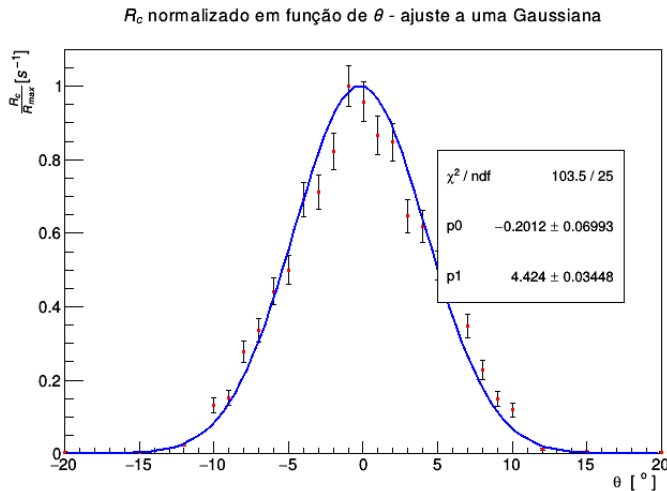


Figura 6: Taxa de coincidências em função de  $\theta$

Obteve-se  $\chi^2_\nu = 4.14$ , valor relativamente elevado, o que indica que a gaussiana não descreve a distribuição com rigor.

De facto, apesar de esta distribuição ser certamente semelhante a uma gaussiana, não pode ser concluído que o seja. Esta semelhança advém de a largura da entrada do detector ser superior ao comprimento de onda dos  $\gamma$  detectados em muitas ordens de grandeza. Deste modo, a forma da distribuição depende do ângulo sólido de detecção, e portanto do tamanho do detector e da distância da fonte a este. No nosso caso, a distribuição obtida foi mais "achatada" que uma gaussiana (o que é apoiado pelo *curtose* obtido, que é ligeiramente inferior a 3). Num caso ideal, fonte pontual e detetor de largura infinitesimal, teríamos uma distribuição do tipo Delta de Dirac.

### 3.6 Correlações angulares em $\theta$ - fonte des-centrada

#### 3.6.1 Eixo Dos Detetores

Com o detector móvel em  $\theta = 0^\circ$ , variou-se a posição da fonte segundo o eixo dos detectores, obtendo-se os dados representados na figura 7.

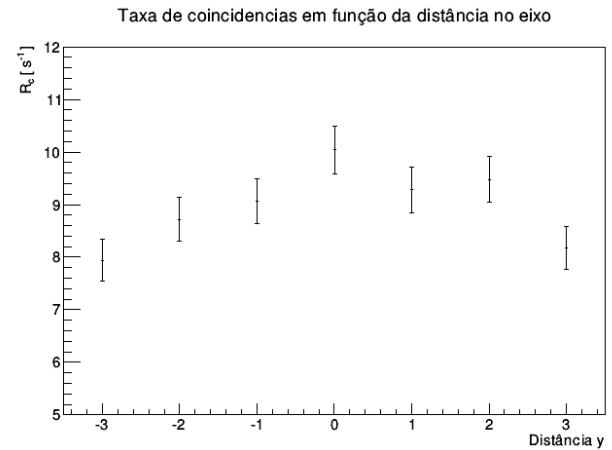


Figura 7: Taxa de coincidências em função da posição. Cada unidade de distância em y corresponde a  $1.27 \pm 0.01$  cm

Os pontos simétricos ( $y=a$  e  $y=-a$ ) possuem taxas de coincidências compatíveis estatisticamente (dentro do erro) a uma distribuição simétrica, não sendo possível concluir nada relativamente a assimetrias.

A diminuição progressiva do valor das taxas de contagens era expectável, já que, apesar da fonte se manter na linha do eixo dos detectores, a sua aproximação a um deles provoca uma diminuição do ângulo sólido de detecção do outro (e vice-versa).

Deste modo, apesar de existirem mais contagens da parte do detector mais próximo, as contagens do outro diminuem de igual forma, não havendo correspondência para a maior parte dos  $\gamma$  captados pelo primeiro, e diminuindo a probabilidade de acontecimentos serem considerados coincidências.

#### 3.6.2 Eixo Perpendicular ao dos Detetores - Correlação com $\theta$

Começou-se por medir a distribuição angular das coincidências segundo  $\theta$ , com a fonte posicionada no plano equidistante dos dois detectores. Efectuaram-se medições para 7 posições distintas, sendo que o plot dos dados já corrigidos encontra-se na figura 8.

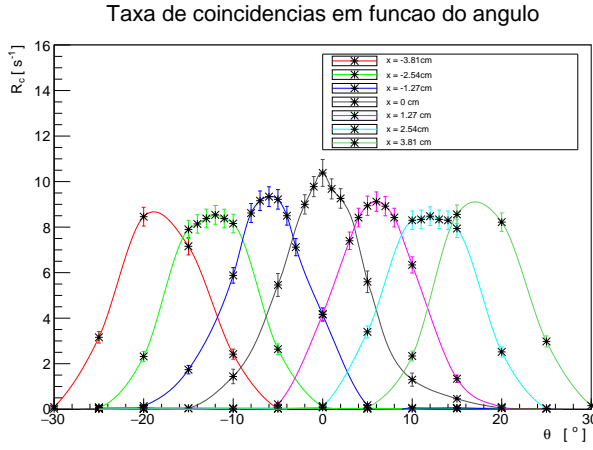


Figura 8: Taxa de coincidências em função de  $\theta$

Os pontos estão unidos por linhas interpoladas por meras questões de distinção entre os pontos associados a cada posição. Perto dos máximos foram feitas mais medições, onde foi possível (para mais de  $15^\circ$  já não havia divisões de  $1^\circ$  em  $1^\circ$ ), de forma a determinar o centróide com mais precisão.

Analisando o gráfico, para  $d \neq 0$ , nota-se um desvio do máximo da curva de coincidências. Colocando num gráfico o  $\theta_{med}$  (o centróide angular de cada distribuição de  $d$ ) em função da distância em  $x$ , nota-se um perfil linear, sugerindo o seguinte ajuste:

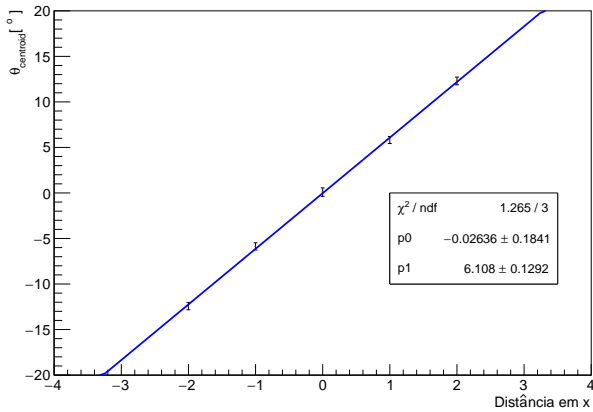


Figura 9:  $\theta_{med}$  em função de  $x$ . Cada unidade de  $x$  corresponde a  $1.27 \pm 0.01$  cm.

o  $\chi^2/\nu$  indica um bom ajuste com subestimação de erros (considerou-se um erro desprezável em  $x$ ). O facto de a ordenada na origem ser compatível com o zero, permite concluir que por cada unidade de distância ( $\pm d$ ) - sensivelmente 1.27 cm - que se desloca a fonte em  $x$ , o seu máximo de coincidências se desloca  $\pm(6.11 \pm 0.13)^\circ$ .

### 3.7 Coincidências em função do ângulo $\phi$

Para 3 distâncias ao centro do porta-amostras (as mesmas utilizadas anteriormente), variou-se o ângulo  $\phi$ , com o detector em  $\theta = 0^\circ$ . Os resultados obtidos para cada posição, para além de se encontrarem representados no formato utilizado anteriormente, estão também num gráfico polar com os respectivos erros representados a vermelho.

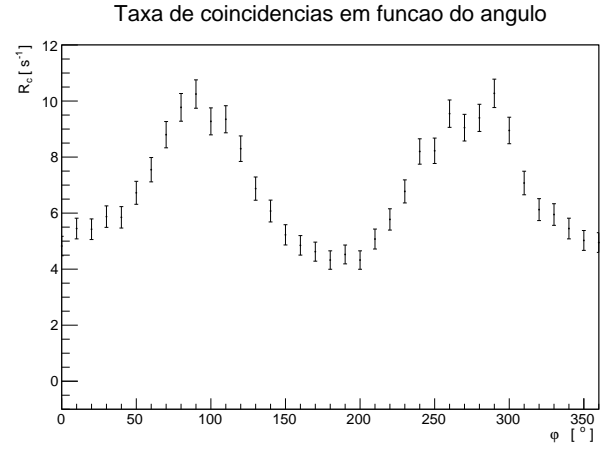


Figura 10: Taxa de coincidências em função de  $\phi$  ( $x = 1.27$  cm)

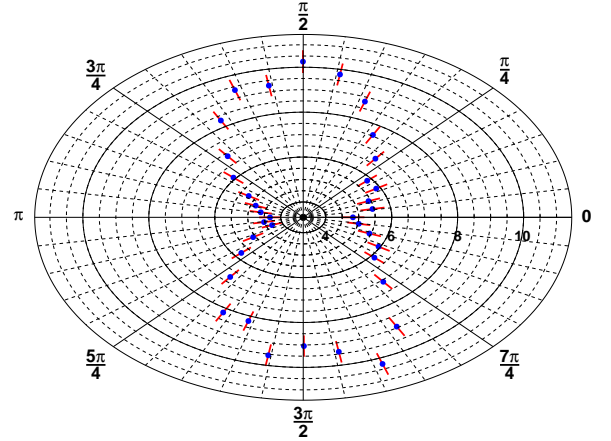


Figura 11: Taxa de coincidências em função de  $\phi$  ( $x = 1.27$  cm) - Gráfico polar

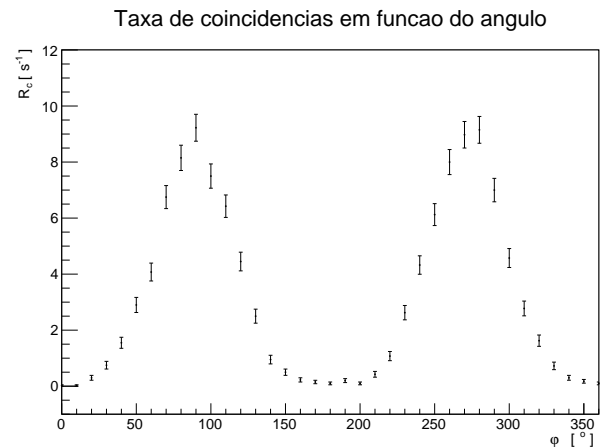


Figura 12: Taxa de coincidências em função de  $\phi$  ( $x = 2.54$  cm)

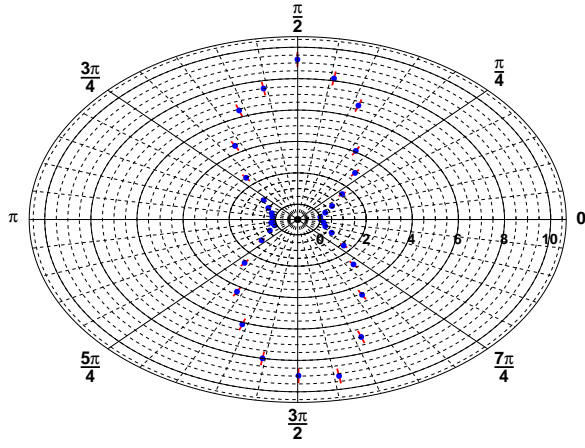


Figura 13: Taxa de coincidências em função de  $\phi$  ( $x = 2.54\text{cm}$ ) - Gráfico polar

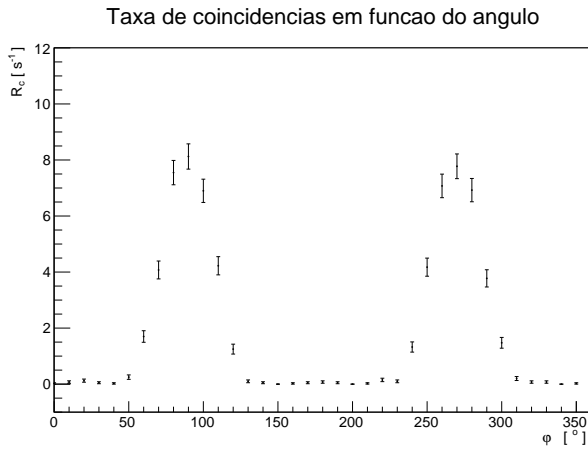


Figura 14: Taxa de coincidências em função de  $\phi$  ( $x = 3.81\text{cm}$ )

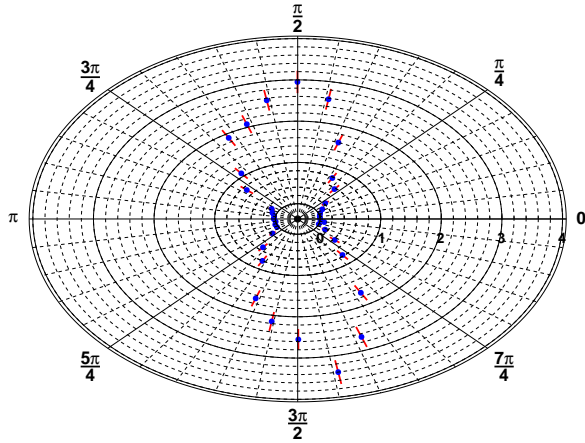


Figura 15: Taxa de coincidências em função de  $\phi$  ( $x = 3.81\text{cm}$ ) - Gráfico polar

### 3.7.1 Análise dos gráficos - Assimetrias

Para estudar as assimetrias, fez-se um estudo estatístico. Determinaram-se os 3 primeiros momentos - valor esperado, desvio padrão e assimetria - para diferentes intervalos angulares, para cada uma das posições estudadas. Definiram-se

as posições 1, 2 e 3 por ordem crescente de distância ao centro do porta-amostras.

Intervalo	$\theta_{med}(^{\circ})$	$\sigma(^{\circ})$	Assimetria
[0,360]	$180.5 \pm 6.6$	104.6	-0.004
[0,180]	$88.9 \pm 4.3$	48.4	-0.003
[180,360]	$92.5 \pm 4.2$	48.2	-0.060
[90,270]	$178.4 \pm 5.4$	61.2	0.037
[0,90]U[270,360]	$181.6 \pm 11.0$	130.9	-0.026

Tabela 5: Estudo estatístico para a posição 1

Intervalo	$\theta_{med}(^{\circ})$	$\sigma(^{\circ})$	Assimetria
[0,360]	$181.9 \pm 8.9$	95.0	0.015
[0,180]	$89.1 \pm 3.5$	26.1	0.074
[180,360]	$91.7 \pm 3.4$	26.3	-0.080
[90,270]	$179.9 \pm 9.4$	74.7	0.001
[0,90]U[270,360]	$182.8 \pm 13.2$	109.4	-0.044

Tabela 6: Estudo estatístico para a posição 2

Intervalo	$\theta_{med}(^{\circ})$	$\sigma(^{\circ})$	Assimetria
[0,360]	$177.7 \pm 11.2$	92.0	0.034
[0,180]	$89.2 \pm 3.0$	17.5	-0.020
[180,360]	$89.8 \pm 3.0$	17.1	-0.681
[90,270]	$179.7 \pm 12.5$	80.6	0.004
[0,90]U[270,360]	$175.8 \pm 13.2$	101.2	0.072

Tabela 7: Estudo estatístico para a posição 3

De notar que para o intervalo [180,360] se subtraiu 180 ao valor médio de forma a ser comparável com o intervalo [0,180].

Também é de referir que as assimetrias são calculadas em relação ao valor médio da distribuição, para cada intervalo.

Concluiu-se que não existem assimetrias notórias em relação aos valores médios das distribuições para todos os intervalos, excepto para a posição 3 para o intervalo [180,360], onde se obteve um valor anormal para a assimetria, que, de facto, pode ser notada ao analisar a figura 15 onde se vê claramente a assimetria em relação a  $270^{\circ}$  no intervalo [180,360]. Talvez se tenha devido a um ligeiro desvio na posição das fontes em relação às posições iniciais ( $\phi=0$ ). Para intervalos de dimensão semelhante [0,180] e [180,360] ou [90,270] e [0,90]U[270,360] os  $\theta_{med}$  são idênticos, dentro do erro.

Não é, então, possível concluir que há assimetrias.

### 3.7.2 Estimativa dos limites de área de detecção e resolução angular

De forma a estimar a área não detectável no porta-amostras, analisaram-se os gráficos das figuras 12 e 14. Para estas duas posições da fonte em relação ao centro do porta-amostras, existem regiões angulares em que as taxas de coincidências são praticamente nulas. Tendo esse facto



por base, pode-se utilizar os dados para estimar a área não detectável.

Para isso, começaram por se estimar para cada um dos gráficos as regiões angulares não detectáveis. Atentou-se primeiramente nos gráficos que continham regiões em que as taxas de contagem se anulavam ( $d = 2.54\text{cm}$  e  $d = 3.81\text{cm}$ ). Assim, para estas distâncias, considerou-se o estudo efectuado para os intervalos  $[0,180]$  e  $[180,360]$  (presente nas tabelas 6 e 7), estando a cada intervalo associada uma distribuição angular com centróides e desvios-padrão apresentados nas tabelas referidas. Assim, com base nestas distribuições, considerou-se para cada uma a região angular detectável contida no intervalo  $[\theta_{med} - 3\sigma, \theta_{med} + 3\sigma]$ . Nas regiões fora destes intervalos, as taxas de contagem são desprezáveis e portanto não é possível a detecção da fonte forte. Obtiveram-se então os intervalos angulares não detectáveis (complementares aos detectáveis), apresentados na tabela 8.

Distância(cm)	Intervalos angulares ( $^\circ$ )
2.54	$[-9.4 \pm 3.4, 10.8 \pm 3.5]$ e $[170.6 \pm 3.5, 192.8 \pm 3.4]$
3.81	$[-38.9 \pm 3.0, 36.7 \pm 3.0]$ e $[141.7 \pm 3.0, 218.5 \pm 3.0]$

Tabela 8: Regiões angulares com taxas de coincidência desprezáveis

Com base nestes intervalos, calcularam-se as equações das retas que passam pelos pontos extremos de detecção de ambas as posições, constituindo estas uma estimativa para a fronteira da área de detecção do porta-amostras - demonstradas na figura 16 a vermelho. Na mesma figura, a título representativo, estão demonstrados dois exemplos de pontos extremos de detecção (pontos a azul).

A região não detectável estimada encontra-se representada na figura 16.

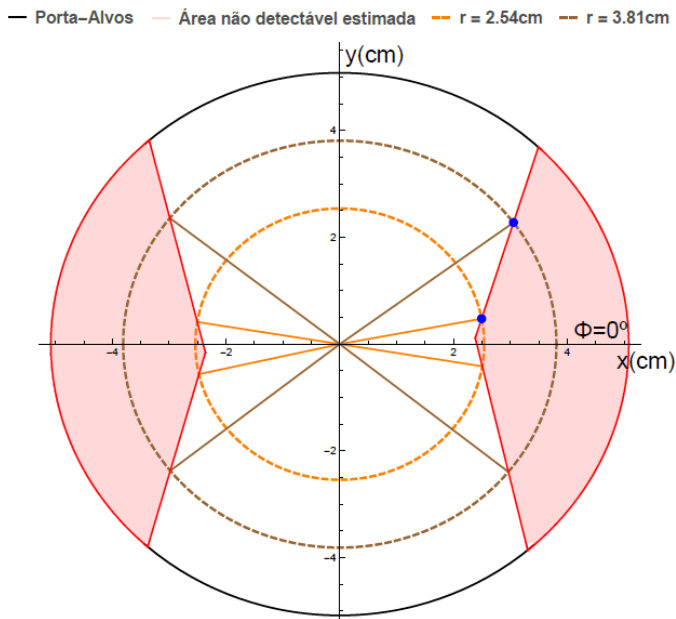


Figura 16: Área não detectável estimada

É de notar que a área não detectável estimada envolve sempre distâncias ao centro do porta-alvos maiores que  $d=1.27\text{cm}$ . As taxas de coincidência medidas para esta distância (figura 10) nunca foram nulas. Assim, podemos

ter a certeza que pelo menos a área correspondente a  $d \leq 1.27\text{cm}$  é detectável, o que vai de encontro à estimativa efectuada.

Se fizermos uma abordagem teórica à resolução angular, percebemos que, usando o facto de que os  $\gamma$  provenientes da aniquilação são emitidos em direcções diametralmente opostas, a área detectável seria a representada no esquema da figura 17 a traços vermelhos. Nesta figura ilustra-se também o ângulo sólido de detecção nulo para uma fonte na região não detectável, a tracejado.

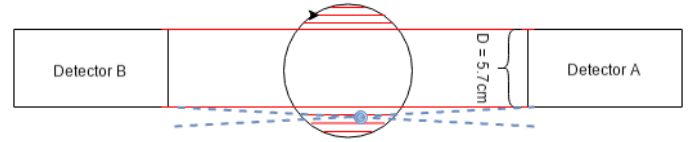


Figura 17: Área não detectável teórica

A não coerência com os resultados experimentais pode dever-se ao detector não registar contagens a partir de um determinado ângulo sólido que, apesar de ser não nulo, estará associado a uma probabilidade de detecção muito baixa - o que está relacionado também com a eficiência intrínseca dos detectores. Este raciocínio é apoiado pelo facto de haver uma região em que as taxas de contagem são nulas para a posição da fonte correspondente a uma distância de  $2.54\text{cm}$  ao centro. Teoricamente, uma vez que o raio do detector é cerca de  $2.85\text{cm}$ , devia haver contagens para esta posição para qualquer  $\phi$ , o que não se verifica.

No entanto, o facto de se ter apenas estudado duas posições com regiões angulares com contagens nulas, limita bastante a análise experimental, estando portanto esta associada a um erro elevado, permitindo apenas dar alguma intuição sobre a área detectável. A sua validade está, portanto, restringida a uma região perto dos pontos utilizados para a descrever, constituindo a região mais afastada deles uma extrapolação não válida uma vez que a partir de  $|x| = D$  não é possível a detecção de aniquilações.

### 3.7.3 Análise da fonte de $^{22}\text{Na}$ de menor actividade - fonte 2 <sup>1</sup>

Colocou-se a fonte 2 a  $2.54\text{cm}$  do centro do porta-amostras, variando-se novamente o ângulo  $\phi$ . Os resultados obtidos encontram-se representados na figura 18.

<sup>1</sup>Com a introdução de uma nova fonte, define-se a fonte utilizada anteriormente (mais forte) como fonte 1; e a nova fonte, de menor actividade como fonte 2

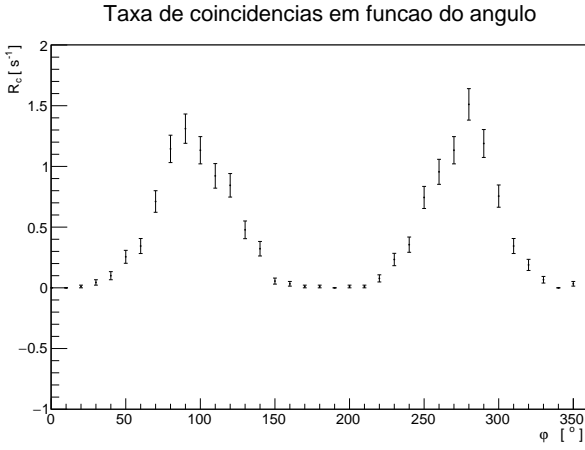


Figura 18: Fonte de menor actividade

### 3.8 Obtenção de um Sinograma

De forma a obter um sinograma em que fosse possível distinguir as posições das fontes 1 e 2, foi necessário utilizar os estudos efectuados anteriormente com vista a uma escolha eficaz das posições das fontes.

Para uma maior distinguibilidade das fontes na reconstrução, decidiu-se utilizar uma fase entre elas de  $90^\circ$ . Desta forma, quando uma das fontes está na posição em que as contagens para ela medidas são máximas, a outra está numa posição em que as contagens para ela medidas são mínimas (ver figura 19).

Para além da fase, foi também necessário escolher a posição das fontes relativamente ao centro do porta-amostras. Para isso, sobrepueram-se os gráficos obtidos para a fonte mais forte com o obtido para a mais fraca, impondo uma fase de  $90^\circ$  num deles, sendo que o gráfico obtido em que a sobreposição era menor foi o da figura 19. É no entanto de notar que este tipo de estudo está restringido a  $\theta = 0^\circ$ , e  $\phi = 0^\circ$ . Ainda assim, para outros ângulos  $\theta$  e  $\phi$  temos também várias situações semelhantes à indicada a exemplo ilustrativo.

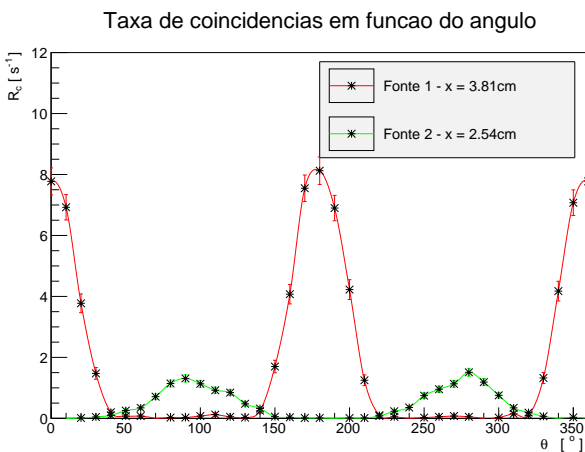


Figura 19: Sobreposição dos gráficos das fontes 1 e 2, para as posições, respectivamente,  $x = 3.81cm$  e  $x = 2.54cm$  -  $\theta = 0^\circ$

Colocaram-se assim as fontes 1 e 2 no porta-amostras com uma fase de  $90^\circ$  entre elas, sendo que se posicionaram, respectivamente, a  $3.81cm$  e a  $2.54cm$  do centro do porta-amostras:



Figura 20: Posições escolhidas para as Fontes

Com base na geometria dos detectores e do porta-alvos, deduziu-se uma expressão aproximada para um modelo teórico que permite obter as curvas teóricas correspondentes a uma dada posição no porta-amostras. Obteve-se a expressão 6 (que se encontra deduzida no *logbook*). A dedução desta expressão teve como ponto fundamental o conceito de linha de resposta (LOR) - para uma dada posição da fonte, as coincidências medidas vão ser máximas quando o detector A se encontra alinhado com a linha de resposta que passa pelo detector B e pela fonte. Impondo essa restrição aos graus de liberdade  $\theta$  e  $\phi$ , é possível obter a expressão 6 para as sinocurvas.

$$\cos(\phi + \varphi) = \frac{d \sin(\theta)}{d_{AB}(1 + \cos(\theta))} \quad (6)$$

em que  $d = 20.8cm$  é a distância de cada um dos detectores ao centro do porta-amostras,  $d_{AB}$  é a distância da fonte ao centro do porta-amostras e  $\varphi$  é a fase da fonte relativamente a  $\phi$ .

Através dos dados adquiridos na sessão laboratorial, construiu-se uma matriz de dados  $(\theta, \phi)$ , sendo possível fazer o sinograma presente na figura 21.

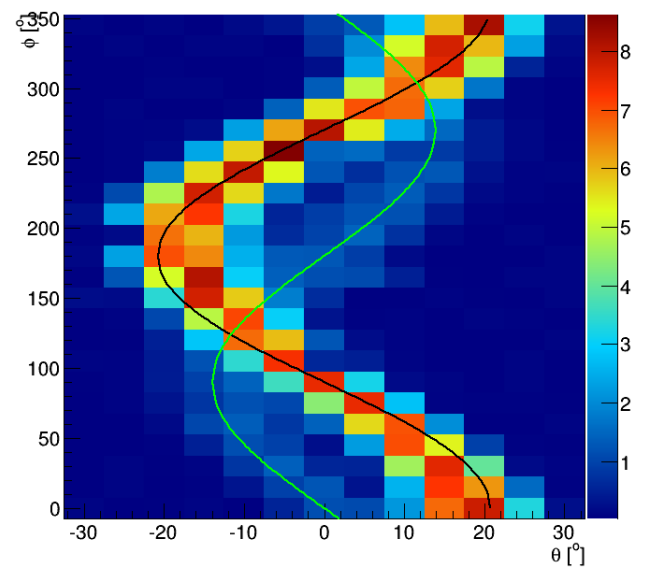


Figura 21: Sinograma relativo às posições escolhidas para as fontes de  $^{22}Na$  e respectivas curvas teóricas

Juntamente com o sinograma, fez-se o gráfico das curvas



teóricas para as fontes 1 (a preto) e 2 (a verde), utilizando-se a expressão 6, sendo que para a fonte 1,  $d_{AB} = 3.81\text{cm}$  e  $\varphi = 0^\circ$  (o ângulo da fonte 1 coincide com  $\phi$ ) e para a fonte 2  $d_{AB} = 2.54\text{cm}$  e  $\varphi = 90^\circ$  (a fonte 2 encontra-se com uma fase de  $90^\circ$  de  $\phi$ ).

É possível distinguir duas curvas com forma sinusoidal, uma mais pronunciada (em tons mais avermelhados) - curva 1 - e outra menos (em tons de azul claro) - curva 2. Nota-se também uma fase de cerca de  $90^\circ$  entre as curvas, como seria de esperar. Os resultados experimentais estão também de acordo com as curvas teóricas, o que valida o modelo teórico encontrado. Pode-se assim inferir que a curva 1 corresponde à fonte 1 e a 2 à fonte 2.

A partir do sinograma anterior foi possível efectuar uma reconstrução tomográfica através de *software* fornecido pelos docentes, estando esta representada de duas formas diferentes nos gráficos das figuras 24 e 23. Do *software* obtivemos a reconstrução com coordenadas X e Y nos eixos dos gráficos foram definidas como:  $X = \theta$  para  $\phi = 0^\circ$ ;  $Y = \theta$  para  $\phi = 90^\circ$ . Fez-se uma

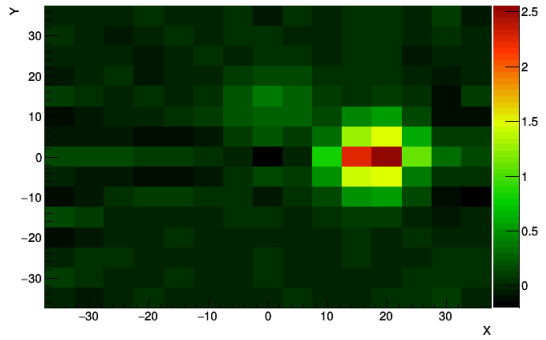


Figura 22: Reconstrução tomográfica

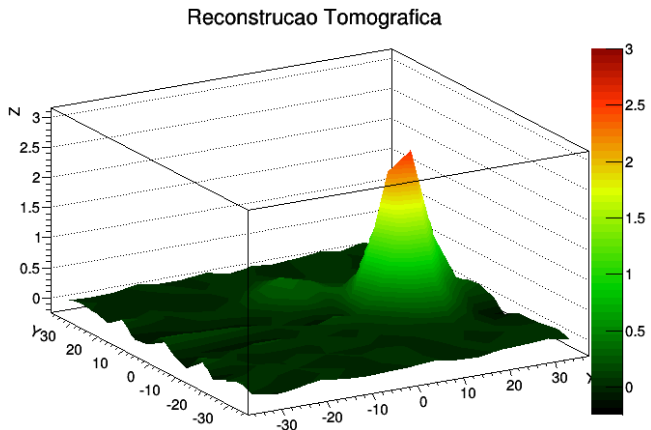


Figura 23: Reconstrução tomográfica - representação 3D

A partir da reconstrução tomográfica, é possível identificar a fonte 1 como estando na região  $X \in [10, 30]$  e  $Y \in [-10, 10]$ ; e a fonte 2, na região  $X \in [-5, 5]$  e  $Y \in [5, 20]$ .

Através da fórmula (6) foi possível converter as coordenadas ( $X = \theta$  para  $\phi = 0^\circ$ ;  $Y = \theta$  para  $\phi = 90^\circ$ ) para (x,y) em cm, obtendo-se o seguinte:

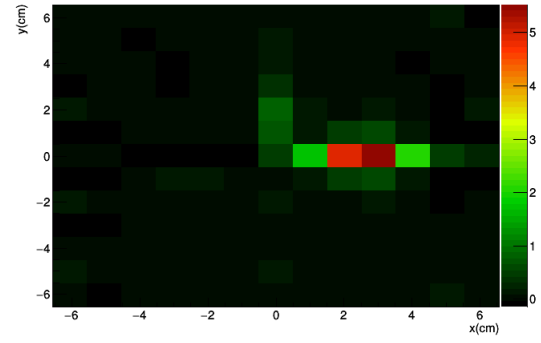


Figura 24: Reconstrução tomográfica, eixos em cm

Nota-se de imediato uma certa dispersão, sendo difícil precisar as posições das fontes e comparar com o caso real. Isto advém da baixa resolução (tem de se usar bins muito grandes pois tem-se poucos dados), concluindo-se que o mais correto é usar uma argumentação baseada em rácios com as coordenadas ( $X = \theta$  para  $\phi = 0^\circ$ ;  $Y = \theta$  para  $\phi = 90^\circ$ ), que se faz de seguida.

Efectuou-se então um estudo estatístico com base nos dados da reconstrução tomográfica, estimando-se as posições das fontes forte e fraca. Para isso, calcularam-se os centróides em X e em Y nas regiões mencionadas anteriormente.

Estas regiões foram também escolhidas de forma a realizar cálculos com o máximo de desacoplamento possível entre as duas fontes.

Obtiveram-se assim os resultados da tabela 9.

Fonte	$X_{med}$	$Y_{med}$
1	$17.98 \pm 1.12$	$-0.08 \pm 1.21$
2	$0.38 \pm 2.47$	$12.69 \pm 3.14$

Tabela 9: Estudo estatístico dos dados da reconstrução tomográfica

Nota-se da tabela anterior que o erro de  $Y_{med1}$  cobre o 0, bem como o erro de  $X_{med2}$  - consistente com a posição de ambas as fontes. Para além disso,  $\frac{X_{med}}{Y_{med}} = 0.71 \pm 0.18$ , que cobre  $\frac{2}{3}$ , razão entre as distâncias das fontes 2 e 1. Repare-se que esta conclusão tem em conta o facto de que X e Y são, respectivamente, proporcionais a x e y.

Realça-se no entanto que apesar dos resultados terem sido coerentes com a disposição escolhida para as fontes, o erro associado é bastante elevado, não sendo possível assim uma precisão satisfatória.

O aumento de precisão podia ser concretizado com a aquisição de um maior número de dados. Isto implicaria uma diminuição da dimensão de cada célula do histograma, e consequentemente, um aumento de precisão. Para além disso, seria também importante a utilização de um tempo de aquisição superior, o que implicaria um menor erro relativo nas contagens das coincidências e, consequentemente, um menor erro na estimativa das posições das fontes.

## 4 Conclusão

A extensão deste trabalho e a forma exaustiva como se estudou o comportamento das taxas de coincidências

para diferentes posições e ângulos permitiu retirar inúmeras conclusões no decurso da experiência.

A primeira destas diz respeito às correcções às taxas de contagens utilizando o factor multiplicativo  $f$ , que se estimou, ao longo de toda a experiência, ser aproximadamente  $f \simeq 0.720 \pm 0.019$  (fonte de maior actividade). Este valor pode ser comparado com o valor obtido para a fonte menos activa utilizada nas últimas duas sessões, obtendo-se  $f \simeq 0.357 \pm 0.049$ , que, como se pode depreender, possui um sinal com uma percentagem de ruído muito superior (cerca de 36%), o que é consistente com a sua fraca actividade.

De seguida, do estudo das coincidências fortuitas concluiu-se que estas não eram relevantes - sempre que as coincidências tinham contagens consideráveis, ter as fortuitas em conta era realizar uma correcção fina. Contudo, ao realizar um estudo destas, verificou-se (apesar do baixo número de ensaios - tabela 1) que o valor previsto teoricamente para estas foi consistentemente inferior ao valor obtido experimentalmente. Nota-se no entanto, que para um estudo estatístico conclusivo e rigoroso, seria necessário efectuar várias medições para cada janela temporal estudada e calcular o valor médio das distribuições correspondentes às contagens medidas.

Relativamente às eficiências intrínsecas dos detectores, verificou-se que os valores obtidos para os dois detectores são estatisticamente compatíveis (ambos com cerca de 40%), assim como as contagens obtidas em cada um para  $\phi = 0$ , tornando-se assim plausível que estas sejam idênticas.

Quanto aos estudos efectuados das contagens obtidas para diferentes ângulos ou distâncias, obteve-se que a distribuição da correlação angular das coincidências é mais achatada que uma gaussiana, que a taxa de contagens diminui simetricamente relativamente à distância ao eixo dos detectores, e que a variação da distância no plano equidistante aos 2 detectores faz variar o  $\theta$  onde ocorre o máximo da curva de coincidências.

Também se concluiu não haver assimetrias consideráveis.

Para uma melhor resolução angular os detectores deviam estar mais afastados da fonte e ainda ter uma blindagem de forma a diminuir o ângulo sólido que está a ser detetado.

Em relação ao sinograma concluiu-se que se se tivesse utilizado um desfasamento de  $180^\circ$  ter-se-iam obtido sinogramas correspondentes a cada fonte mais distinguíveis. Ao ter escolhido uma fase de  $90^\circ$ , conseguimos distingui-las pois apesar de terem a região de maior amplitude para  $\theta$  com o mesmo sinal, têm-na para diferentes valores de  $\phi$ , ficando uma sobre a outra. Contudo, existe alguma interferência e não é trivial a distinção, só se tornando óbvia após comparar com o modelo teórico. Com uma fase de  $180^\circ$ , as regiões de maior amplitude existiriam nos mesmos  $\phi$  mas para  $\theta$  com sinais opostos, sendo trivial a distinção. Contudo, e devido às justificações utilizadas para a escolha da fase de  $90^\circ$ , previu-se que a reconstrução seria de menor qualidade no caso de ter sido escolhida uma fase de  $180^\circ$ , pois iriam haver mais regiões em que iria haver contagens de ambas as fontes. Para o caso com fase de  $90^\circ$ , existem regiões para as quais existem contagens apenas de uma fonte ou da outra - (figura 19). Na reconstrução obtida conseguem distinguir-se as duas fontes, sendo a fonte mais intensa distinguida claramente da mais fraca (mais ténue) - figura 24. Na reconstrução 3D, figura 23, conseguimos distinguir melhor a fonte fraca do ruído circundante. Concluiu-se então que a reconstrução foi bem sucedida.

Para melhorar o resultado, deveria ter-se colocado a fonte fraca na posição 1, mantendo a fonte forte na posição 3. Desta forma aumentava-se a excentricidade das sinocurvas e reduzia-se a (já baixa) interferência das contagens da outra fonte nas regiões onde só devia existir contagens de uma.

Uma maior precisão na reconstrução tomográfica seria possível com uma diminuição do passo utilizado para os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  (maior número de pontos experimentais adquiridos), bem como um aumento do tempo de aquisição.

## Referências

- [1] Tennelec, *Annihilation Radiation Coincidence Studies with  $^{22}\text{Na}$*
- [2] IST, Professores João Mendanha Dias e Marta Fajardo, *Guia Experimental*
- [3] IST, Professor Sérgio Ramos, *Slides das Aulas Teóricas*
- [4] Universidade de Coimbra, Hugo Fernandes, *Tese de Mestrado (Cap. 2 Pag.3-16)*
- [5] ESTeSL, Professor Luís Freire, *Slides das Aulas de 2010/2011 ao curso de Engenharia Biomédica do IST*