

## Mecânica dos Fluidos I

### MEAer

**Escoamento compressível unidimensional em regime permanente - 2014/12/13**

João Henriques // [joaochenriques@tecnico.ulisboa.pt](mailto:joaochenriques@tecnico.ulisboa.pt)

### Programa 2014/2015

1. Introdução
2. Equações para escoamento compressível unidimensional em regime permanente
3. Velocidade do som
4. Escoamento adiabático e escoamento isentrópico
5. Escoamento isentrópico com variação de área
6. Ondas de choque normais
7. Tuberias convergentes e divergentes

## Bibliografia

- Bibliografia consultada nesta apresentação

- [1] Shapiro, A.H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Volume 1, The Ronald Press Company, 1953
- [2] André, J.M., *Mecânica dos Fluidos I - Apontamentos de Escoamentos Compressíveis*, 2013.
- [3] Fox, R.W., McDonald, A.T., *Introduction to Fluid Mechanics*, 8th Edition, John Wiley & Sons, 2011.
- [4] White, F.M., *Fluid Mechanics*, 4th Edition, McGraw-Hill, 1998.

## Modelo de gás perfeito

- **Equação de estado**

$$p = \rho RT = \frac{1}{v} RT \quad (1)$$

com

$$\rho = \frac{1}{v}$$

sendo  $v$  o volume específico

- “específico”  $\equiv$  por unidade de massa

- Tomando logaritmos

$$\ln p = -\ln v + \ln R + \ln T = \ln \rho + \ln R + \ln T$$

e diferenciando obtemos

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dv}{v} + \frac{dT}{T} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (2)$$

## Modelo de gás perfeito

### ► Energia interna

$$e = e(v, T)$$

para um gás perfeito a energia interna,  $e$ , depende apenas da temperatura

$$\left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = 0$$

$$de = \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv + \underbrace{\left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v}_{c_v} dT = c_v dT$$

$$e_2 - e_1 = \int_1^2 c_v dT = c_v (T_2 - T_1) \quad (3)$$

## Modelo de gás perfeito

### ► Entalpia

$$h = h(v, T) = e + pv = e + RT = e + \frac{p}{\rho} \quad (4)$$

⇒ depende apenas da temperatura

$$\left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)_T = 0$$

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)_T dv + \underbrace{\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p}_{c_p} dT = c_p dT$$

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 c_p dT = c_p (T_2 - T_1) \quad (5)$$

## Modelo de gás perfeito

- ▶ Constantes do gás

$$c_p \equiv \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{dh}{dT} = \frac{d}{dT} (e + pv) = \frac{de}{dT} + \frac{d}{dT} (RT) = c_v + R$$

Usando a definição

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (6)$$

obtemos

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (7)$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (8)$$

- ▶ No caso geral

$$R = \frac{\Lambda}{M} \quad (9)$$

sendo  $\Lambda = 8314 \text{ J/kmol K}$  e  $M$  o massa molecular do gás em (kg/kmol)

## Modelo de gás perfeito

- ▶ Da teoria cinética dos gases

$$\gamma = \frac{n+2}{n} \quad (10)$$

- ▶ gases monoatômicos  $n = 3 \rightarrow \gamma = 5/3$
- ▶ gases diatomicos  $n = 5 \rightarrow \gamma = 7/5$

- ▶ Para o ar (21%  $\text{O}_2$  mais 78%  $\text{N}_2$ )

$$\gamma = 1.4$$

$$R = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = 718 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = 1005 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$$

## Modelo de gás perfeito

### ► Variações de **entropia**

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (11)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (12)$$

integrando e usando as Eqs. (6), (8) e (1)

$$\int_1^2 ds = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - \int_1^2 R \frac{dp}{p} \quad (13)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = c_v \ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^\gamma \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\gamma} \right] \quad (14)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma-1} \right] \quad (15)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (16)$$

## Modelo de gás perfeito

### ► **Processo isentrópico** $ds = s_2 - s_1 = 0 \rightarrow$ limite de um processo real adiabático

#### ► Da Eq. (14)

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right) = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (17)$$

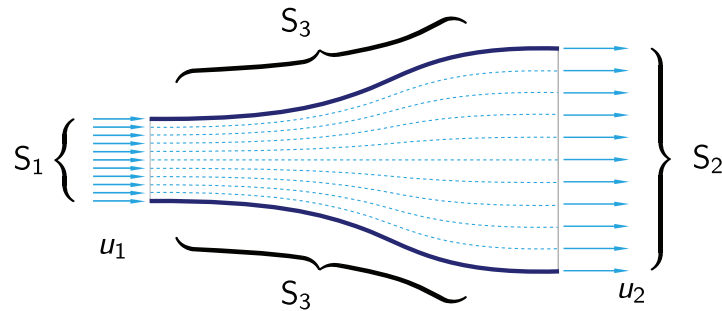
#### ► Da Eq. (15)

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right) = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} \quad (18)$$

#### ► Da Eq. (16)

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right) = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \quad (19)$$

## Relações integrais para um volume controle



- **Balço de massa** - equação da continuidade na forma integral

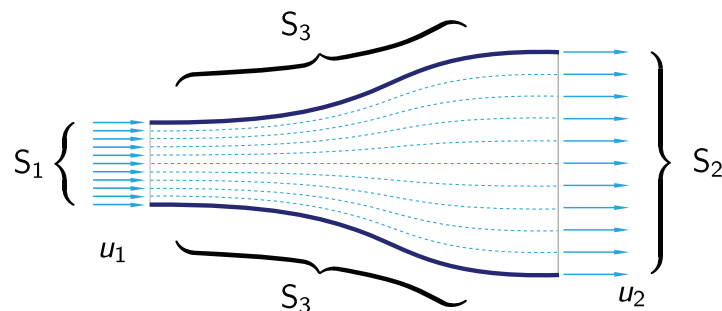
$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\text{permanente}=0} + \int_{S_c} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = 0$$

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \underbrace{-\rho_1 u_1 A_1}_{S_1} + \underbrace{\rho_2 u_2 A_2}_{S_2} + \underbrace{0}_{S_3}$$

$$\rho_2 u_2 A_2 - \rho_1 u_1 A_1 = 0 \quad (20)$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 \quad (21)$$

## Relações integrais para um volume controle

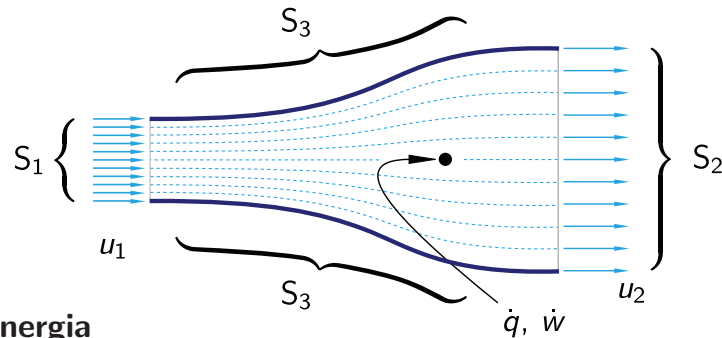


- **Balço de quantidade de movimento segundo x**

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV}_{\text{permanente}=0} + \int_{S_c} \rho u (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = - \underbrace{\int_{S_c} p n_x dS}_{(A)} + \underbrace{\int_{V_c} \rho g_x dV}_{(B)} + \int_{S_c} (\mathbf{Tn})_x dS$$

- Em escoamentos de alta velocidade usualmente  
 $(A) \gg (B) \Rightarrow$  **desprezamos (B)**

## Relações integrais para um volume controle



### ► Balanço de energia

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} dV}_{\text{permanente}=0} + \int_{S_c} \rho \varepsilon (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = - \underbrace{\int_{S_c} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS}_{(A)} + \underbrace{\int_{V_c} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV}_{(B)} + \int_{S_c} \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{u} dS + \dot{Q} + \dot{W}$$

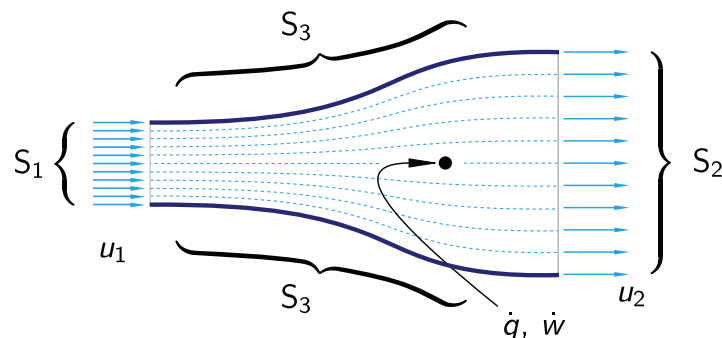
### ► A energia total por unidade de massa definida por

$$\varepsilon = e + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \quad (22)$$

### ► $\dot{Q}$ é o calor trocado com o exterior

### ► $\dot{W}$ é o trabalho realizado/extraído sobre o fluido (**excluindo forças viscosas**)

## Relações integrais para um volume controle



### ► Em escoamento de alta velocidade usualmente $(A) \gg (B) \Rightarrow$ desprezamos $(B)$

$$\int_{S_c} \rho \varepsilon (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \underbrace{-\rho_1 \varepsilon_1 u_1 A_1}_{S_1} + \underbrace{\rho_2 \varepsilon_2 u_2 A_2}_{S_2} + \underbrace{0}_{S_3}$$

### ► Uma vez que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ em $\Gamma_3$

$$-\int_{S_c} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \underbrace{p_1 u_1 A_1}_{S_1} - \underbrace{p_2 u_2 A_2}_{S_1} + \underbrace{0}_{S_3}$$

### ► Pela mesma razão e por termos perfis uniformes $T = 0$ em $S_1$ e em $S_2$

$$\int_{S_c} \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{u} dS = 0$$

## Relações integrais para um volume controle

- Equação de conservação de energia segundo x

$$\rho_2 \varepsilon_2 u_2 A_2 - \rho_1 \varepsilon_1 u_1 A_1 = \dot{Q} + \dot{W}' + p_1 u_1 A_1 - p_2 u_2 A_2$$

em que

$$\dot{W}' = \dot{W} + \int_{S_3} \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{u} dS$$

- Usando o balanço de massa

$$\dot{m}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \dot{Q} + \dot{W}' + \dot{m} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$

$$\left( \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left( \varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \left( e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left( e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = q + w'$$

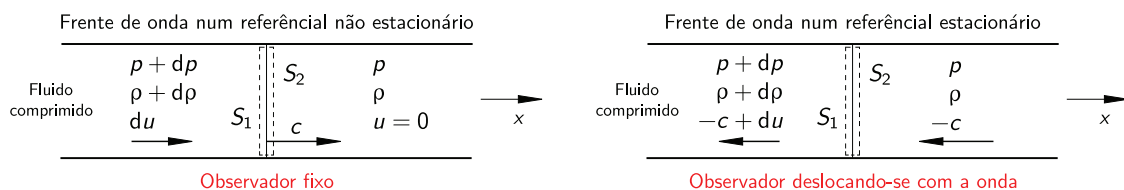
onde

$$\frac{\dot{Q} + \dot{W}'}{\dot{m}} = q + w'$$

- usando as definições de energia interna e entalpia, Eq. (4),

$$(h_2 + \frac{1}{2} u_2^2) - (h_1 + \frac{1}{2} u_1^2) = q + w' \quad (23)$$

## Velocidade de propagação da onda de pressão



- Balanço de massa

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = 0$$

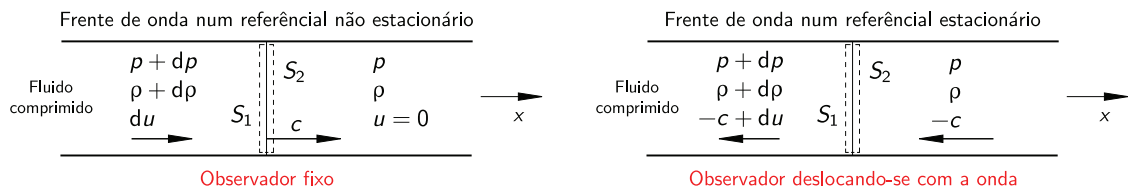
$$(\rho + d\rho)(-c + du)(-1)A + \rho(-c)A = 0$$

- desprezando o termo de ordem superior,  $(du dp)$ , resulta

$$du = c \frac{dp}{\rho} \quad (24)$$



## Velocidade de propagação da onda de pressão



- Balanço de quantidade de movimento

$$\int_{S_c} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_c} p \mathbf{n} dS$$

$$(\rho + d\rho) \rho (-c + du)^2 (-1)A + \rho (-c)^2 A = (p + dp) A - pA$$

- expandindo e substituindo a definição de  $du$ , Eq. (24),

$$c^2 d\rho - c^2 \frac{d\rho^3}{\rho^2} + c^2 \frac{d\rho^2}{\rho} = dp$$

- desprezando o termos de ordem superior,  $d\rho^2$  e  $d\rho^3$ ,

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (25)$$

## Velocidade do som e número de Mach

- Para um processo isentrópico, da Eq. (19),

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$$

- Tomando o logaritmo e diferenciando

$$\ln p - \gamma \ln \rho = \text{const}$$

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (26)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}$$

- Substituindo em (25)

$$c^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma RT \quad (27)$$

- Para escoamento incompressível  $d\rho = 0$

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \infty$$

## Velocidade do som e número de Mach

- ▶ Significado físico do número de Mach

- ▶ Razão de velocidades - medida da assimetria do escoamento

$$\text{Ma} = \frac{u}{c} \quad (28)$$

- ▶ Forças de inércia  $\Rightarrow$  caudal de quantidade de movimento

$$\int \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \sim \rho u^2 L^2$$

- ▶ Forças elásticas  $\Rightarrow$  forças de pressão

$$\int p \mathbf{n} dS \sim p L^2$$

- ▶ Relação entre as forças de inércia e as forças elásticas

$$\frac{F_{\text{inercia}}}{F_{\text{elastica}}} = \frac{\rho u^2 L^2}{p L^2} = \frac{u^2}{\left(\frac{p}{\rho}\right)} \propto \frac{u^2}{\left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)} = \frac{u^2}{c^2} = \text{Ma}^2$$

## Regimes do escoamento

- ▶ Critério de escoamento incompressível

$$\text{Ma} = \frac{u}{c} \ll 1$$

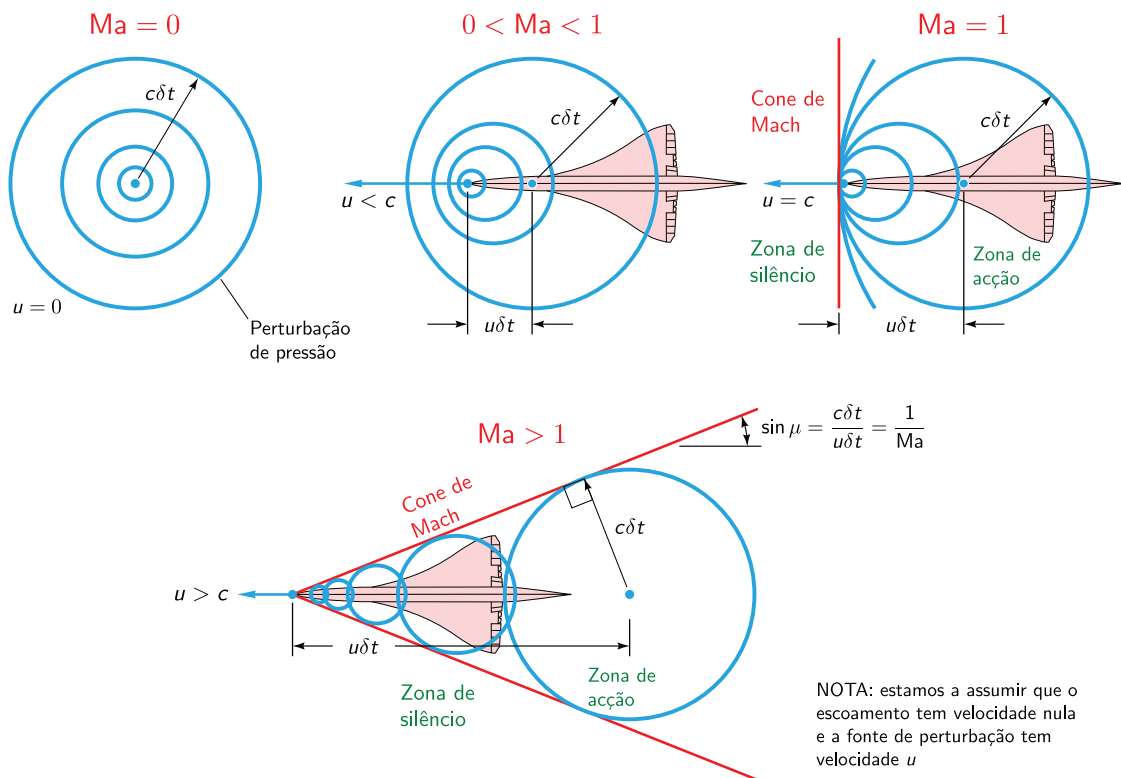
- ▶ Escoamentos externos

- ▶ incompressível  $0.0 < \text{Ma} < 0.3$
  - ▶ subsónico  $0.3 < \text{Ma} < 0.8$
  - ▶ transónico  $0.8 < \text{Ma} < 1.2$
  - ▶ supersónico  $1.2 < \text{Ma} < 3.0$
  - ▶ hipersónico  $3.0 < \text{Ma}$

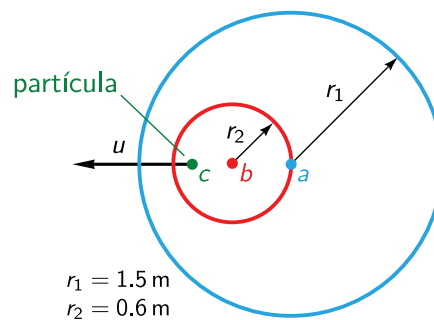
- ▶ Escoamentos internos

- ▶ subsónico  $\text{Ma} < 1$
  - ▶ supersónico  $\text{Ma} > 1$

## Propagação de ondas sonoras

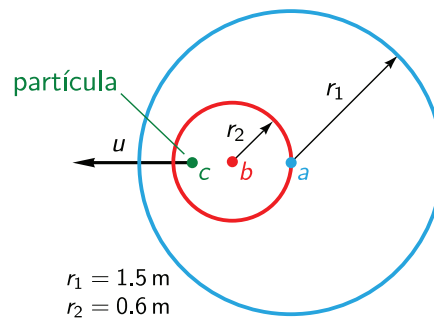


### Exemplo 1



A figura mostra a posição de duas ondas sonoras geradas por uma partícula que se desloca a uma velocidade constante no ar em repouso, à temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . Determine a velocidade da partícula.

## Exemplo 1

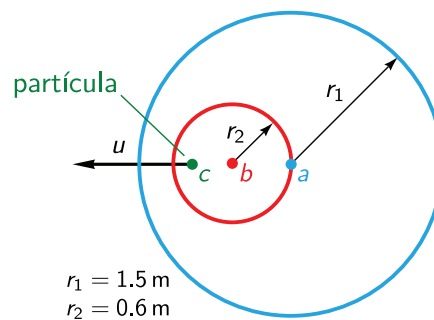


A figura mostra a posição de duas ondas sonoras geradas por uma partícula que se desloca a uma velocidade constante no ar em repouso, à temperatura de 20°C. Determine a velocidade da partícula.

- A velocidade do som,  $c$ , é

$$c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 293} = 343.1 \text{ m/s}$$

## Exemplo 1



- Seja  $\delta t_1$  o tempo que a partícula demora entre o ponto  $a$  e  $b$ , e  $\delta t_2$  o tempo decorrido para que a perturbação originada em  $b$  atinja um raio  $r_2$
- Logo

$$r_2 = c \delta t_2 = u \delta t_1$$

$$r_1 = c (\delta t_1 + \delta t_2)$$

$$\text{Ma} = \frac{u \delta t_1}{c (\delta t_1 + \delta t_2) - c \delta t_2} = \frac{u \delta t_1}{c \delta t_1} = \frac{r_2}{r_1 - r_2} = \frac{0.6}{1.5 - 0.6} = 0.67$$

$$u = \text{Ma} \times c = 0.67 \times 343.1 = 228.7 \text{ m/s}$$

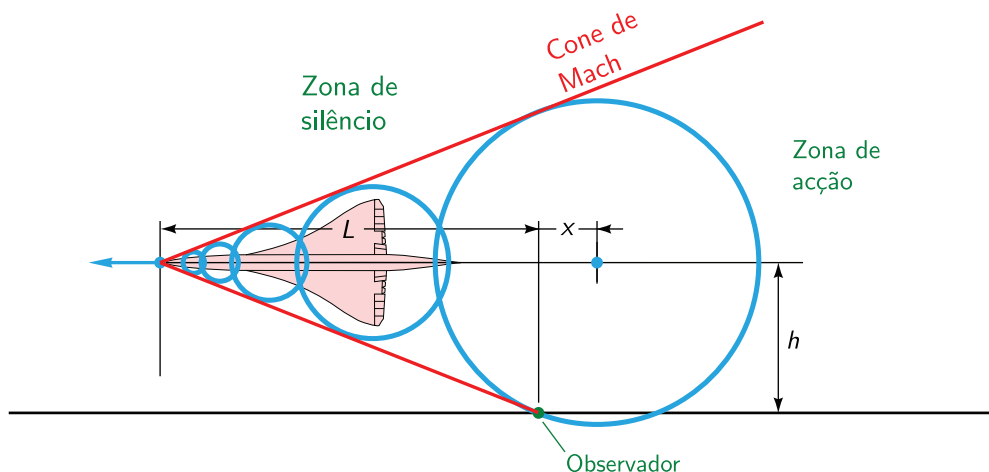
## Exemplo 2

Um avião supersónico deslocando-se em linha recta a velocidade constante e a uma altitude de  $h = 1.5$  km, passa por cima de um observador que só o ouve quando este se encontra já numa posição  $L = 3$  km à sua frente.

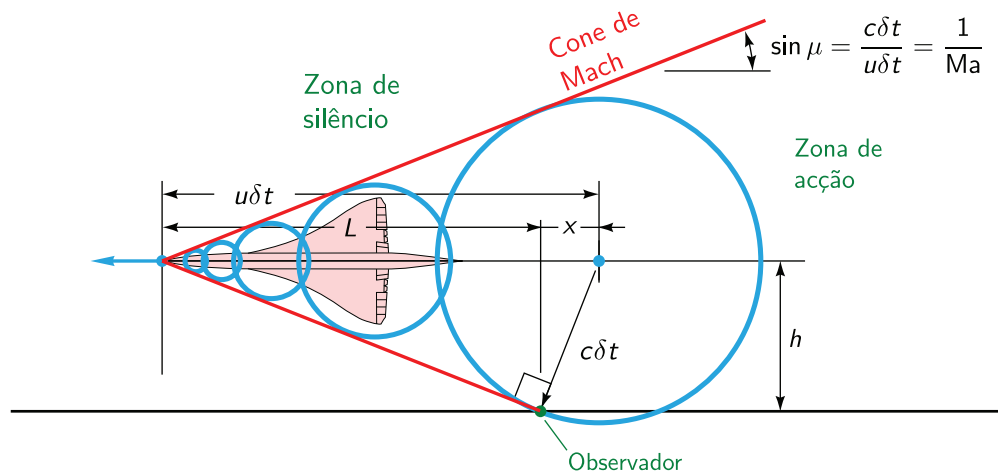
Para simplificar, admita que o movimento do avião produz uma perturbação de pressão pontual, de pequena amplitude, e ignore a variação da velocidade do som com a altitude.

- Determine o número de Mach a que se desloca o avião e o ângulo de Mach da respectiva onda de pressão;
- A posição do avião quando este produziu o som ouvido em primeiro lugar pelo observador.

## Exemplo 2



## Exemplo 2



$$\mu = \arctan \frac{1.5}{3.0} = 26.5^\circ$$

$$Ma = \frac{1.0}{\sin \mu} = 2.24$$

$$x = h \tan \mu = 0.748 \text{ km}$$

**NOTA:** o cone de Mach é tangente a todas as circunferências

## Propriedades em condições de estagnação

- Propriedades que podem ser obtidas se o escoamento for desacelerado até à condição de velocidade zero num processo irreversível e adiabático

- **Entalpia de estagnação**

$$h_0 = \left( h + \frac{1}{2} u^2 \right)$$

da Eq. (23) para escoamento adiabático  $q = w = 0$

$$\left( h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) = \left( h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right)$$

logo

$$h_{02} = h_{01} \quad (29)$$

- Considerando 0 K como a temperatura de referência

$$h = c_p T$$

resulta

$$T_1 + \frac{u_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{u_2^2}{2c_p} \quad (30)$$

## Propriedades em condições de estagnação

- Definimos a **temperatura de estagnação**  $T_0$  como a temperatura que o escoamento atingiria se fosse desacelerado **adiabaticamente** até  $u = 0$

$$h_0 = c_p T_0 = h + \frac{1}{2} u^2 \quad (31)$$

$$T_0 = T + \frac{1}{2c_p} u^2 \quad (32)$$

usando a definição de  $c_p$ , Eq. (8),

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{1}{2c_p T} u^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{\gamma R T} u^2$$

- Com a definição de velocidade do som, Eq. (27), podemos escrever a **temperatura de estagnação** como

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 \quad (33)$$

## Propriedades em condições de estagnação isentrópicas

- **Pressão de estagnação isentrópica** - se a desaceleração até condições de estagnação for **adiabática e isentrópica**, podemos usar a Eq. (17) para obter

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (34)$$

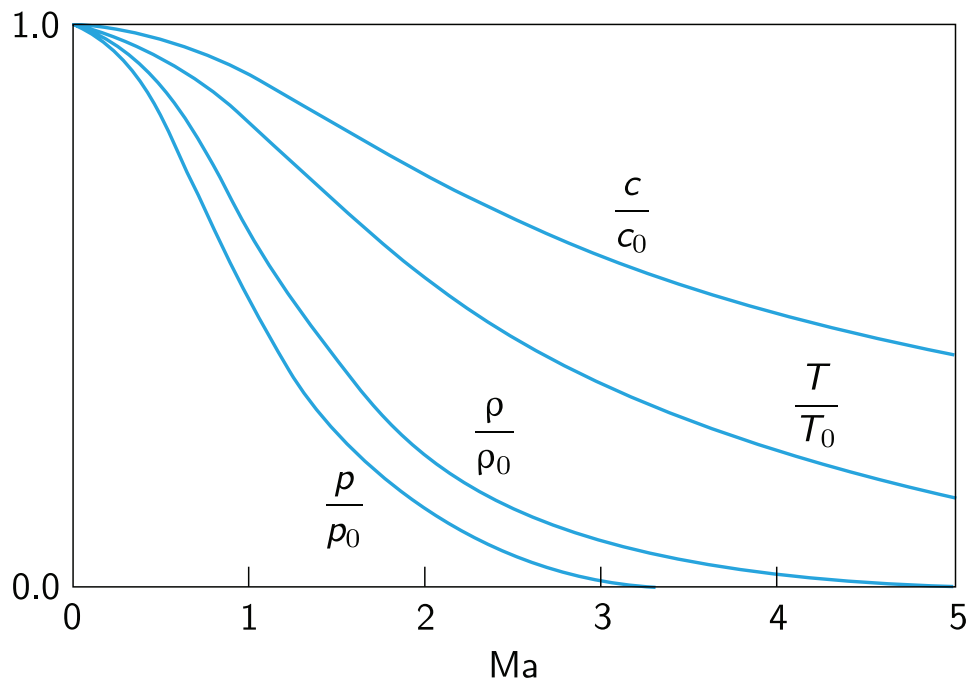
- **Massa volúmica de estagnação isentrópica** - usando a Eq. (19) obtemos

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (35)$$

- Usando (33) definimos a velocidade do som em condições de estagnação

$$\left( \frac{c_0}{c} \right)^2 = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \quad (36)$$

## Propriedades em condições de estagnação isentrópicas



## Escoamento isentrópico

**Em escoamento isentrópico a pressão de estagnação é constante**

Seja  $p_{01}$  e  $p_{02}$  a pressão de estagnação nas secções 1 e 2

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} = \left( \frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left( \frac{T_1}{T_{01}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1 \quad (37)$$

porque  $T_0 = T_{01} = T_{02}$  (ver Eq. (29))



### Exemplo 3

Considere um tubo de Pitot utilizado para a medição da velocidade de um avião subsónico. No caso da pressão total registada pelo tubo de Pitot ser 84 kPa e as condições de pressão e temperatura num ponto infinitamente a montante do avião serem respectivamente de 70 kPa e  $-50^\circ$ , qual é a velocidade do avião.

### Exemplo 3

Considere um tubo de Pitot utilizado para a medição da velocidade de um avião subsónico. No caso da pressão total registada pelo tubo de Pitot ser 84 kPa e as condições de pressão e temperatura num ponto infinitamente a montante do avião serem respectivamente de 70 kPa e  $-50^\circ$ , qual é a velocidade do avião.

Partindo da Eq. (32)

$$T_0 = T_1 + \frac{1}{2c_p} u_1^2 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2c_p(T_0 - T_1)} \quad (38)$$

Da Eq. (34) temos

$$T_0 = T_1 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 223 \left( \frac{84}{70} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 234.9 \text{ K}$$

logo

$$u_1 = \sqrt{2 \times 1005 \times (234.9 - 223)} = 154.7 \text{ m/s} \quad (39)$$

## Escoamento isentrópico com variação de área

- ▶ Por definição de escoamento isentrópico  $\Rightarrow ds = 0$

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} = 0$$

$$dh = \frac{dp}{\rho} \quad (40)$$

- ▶ Para escoamento adiabático  $\Rightarrow h_0 = \text{const}$

$$dh_0 = d\left(h + \frac{1}{2}u^2\right) = dh + udu = 0$$

$$dh = -udu \quad (41)$$

substituindo (41) em (40) e dividindo por  $u$

$$\frac{dp}{\rho u^2} = -\frac{du}{u} \quad (42)$$

## Escoamento isentrópico com variação de área

- ▶ da equação da continuidade

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

usando (42) e (26)

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho u^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} dp + \frac{dp}{\rho u^2} = -\frac{1}{\rho c^2} dp + \frac{dp}{\rho u^2}$$

$$dA = A(1 - \text{Ma}^2) \frac{dp}{\rho u^2}$$

usando outra vez (42)

$$dA = -A(1 - \text{Ma}^2) \frac{du}{u}$$

## Escoamento isentrópico com variação de área

- ▶ Relações área-velocidade e área-pressão

$$\frac{dA}{du} = (Ma^2 - 1) \frac{A}{u} \quad (43)$$

$$\frac{dA}{dp} = - (Ma^2 - 1) \frac{A}{\rho u^2} \quad (44)$$

- ▶ Das Eqs. (43) e (44) podemos concluir que

- ▶ Para  $Ma < 1$

$$\frac{dA}{dp} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{du} < 0$$

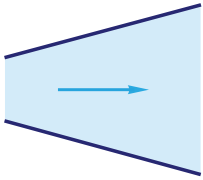
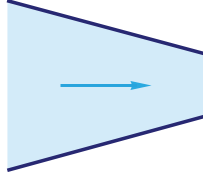
- ▶ Para  $Ma = 1$  (condições sónicas  $\Rightarrow$  na área mínima)

$$\frac{dA}{dp} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{du} = 0$$

- ▶ Para  $Ma > 1$

$$\frac{dA}{dp} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{du} > 0$$

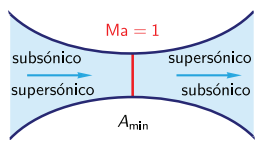
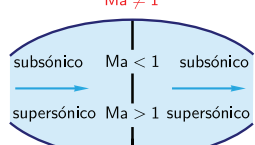
## Escoamento isentrópico com variação de área

geometria	subsónico $Ma < 1$	supersónico $Ma > 1$
	$du < 0$ $dp > 0$ difusor	$du > 0$ $dp < 0$ tubeira
	$du > 0$ $dp < 0$ tubeira	$du < 0$ $dp > 0$ difusor

$Ma < 1$	$Ma = 1$	$Ma > 1$
$\frac{dA}{dp} > 0$ e $\frac{dA}{du} < 0$	$\frac{dA}{dp} = 0$ e $\frac{dA}{du} = 0$	$\frac{dA}{dp} < 0$ e $\frac{dA}{du} > 0$

## Escoamento isentrópico com variação de área

	$dA < 0$	$dA = 0$	$dA > 0$	$u$ em $A_{\min}$
	$du > 0$ $dp < 0$	$du > 0$ $dp < 0$ $(Ma = 1)$	$du > 0$ $dp < 0$	em aceleração
	$du < 0$ $dp > 0$	$du < 0$ $dp > 0$	$du < 0$ $dp > 0$	em desaceleração
	$dA > 0$	$dA = 0$	$dA < 0$	$u$ em $A_{\max}$
	$du < 0$ $dp > 0$	$du = 0$ $dp = 0$ $(Ma \neq 1)$	$du > 0$ $dp < 0$	mínimo
	$du > 0$ $dp < 0$	$du = 0$ $dp = 0$	$du < 0$ $dp > 0$	máximo

$Ma < 1$	$Ma = 1$	$Ma > 1$
$\frac{dA}{dp} > 0$ e $\frac{dA}{du} < 0$	$\frac{dA}{dp} = 0$ e $\frac{dA}{du} = 0$	$\frac{dA}{dp} < 0$ e $\frac{dA}{du} > 0$

- ▶ No bojo quando temos  $dA > 0$ ,  $Ma < 1$  e estamos em desaceleração,  $du < 0$ , não podemos passar de forma descontínua para  $Ma = 1$  em  $dA = 0$
- ▶ O mesmo raciocínio se aplica para  $dA > 0$ ,  $Ma > 1$  e estamos em aceleração,  $du > 0$

## Valores críticos ( $Ma=1$ )

- ▶ Fazendo  $Ma = 1$  e usando  $\gamma = 1.4$ , obtemos para as Eqs. (33), (36), (34) e (35)

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{c^{*2}}{c_0^2} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0.8333 \quad (45)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.5283 \quad (46)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 0.6339 \quad (47)$$

- ▶ **NOTA:** O asterisco como índice superior, \*, indica que a propriedade é definida para condições sônicas  $\Rightarrow Ma = 1$

## Velocidades de referência

- ▶ **Velocidade máxima** - partindo de (32),  $T = 0$

$$u_{\max} = \sqrt{2c_p T_0} \quad (48)$$

- ▶ **Velocidade do som à temperatura de estagnação**

$$c_0 = \sqrt{\gamma R T_0} \quad (49)$$

- ▶ **velocidade crítica**  $u^* = c^*$  - velocidade a número de Mach 1

$$u^* = c^* = \sqrt{\gamma R T^*} \quad (50)$$

- ▶ Fazendo os rácios entre as três velocidades, para  $\gamma = 1.4$ , obtemos

$$\frac{c^*}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} = 0.913 \quad (51)$$

$$\frac{u_{\max}}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} = 2.24 \quad (52)$$

$$\frac{u_{\max}}{c^*} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 2.45 \quad (53)$$

## Velocidades de referência

- ▶ Equação da energia na forma cinética

$$h_0 = c_p T + \frac{1}{2} u^2 = \frac{c_p}{\gamma R} \gamma R T + \frac{1}{2} u^2$$

logo

$$h_0 = \frac{1}{\gamma - 1} c^2 + \frac{1}{2} u^2 \quad (54)$$

$$h_0 = \frac{1}{2} u_{\max}^2 = \frac{1}{\gamma - 1} c_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c^{*2}$$

## Caudal mássico por unidade de área

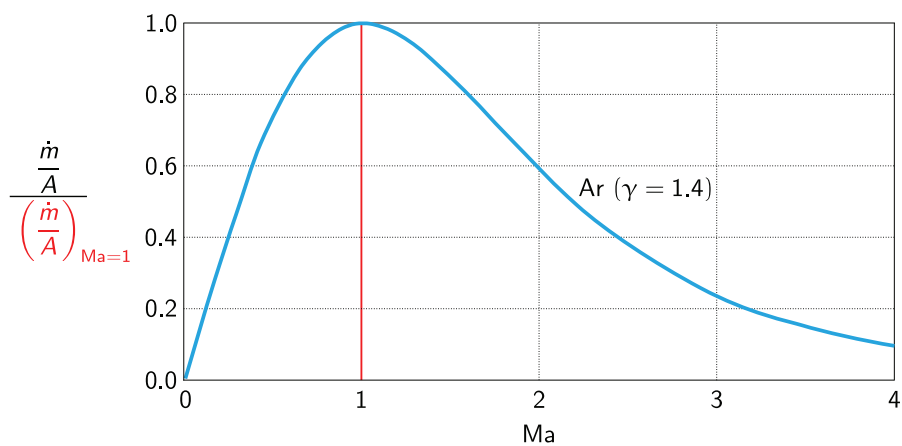
- Caudal mássico por unidade de área

$$\begin{aligned}\frac{\dot{m}}{A} &= \rho u \\ &= \frac{p}{RT} u \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{u}{\sqrt{\gamma RT}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \frac{p}{p_0} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \text{Ma} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

resultando uma função que depende apenas de Ma

$$\frac{\dot{m}}{A} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \text{Ma} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (55)$$

## Caudal mássico por unidade de área



- Da Eq. (55) verifica-se

- Para um dado número Mach o caudal é proporcional a  $p_0/\sqrt{T_0}$
- Dadas as condições de estagnação  $T_0$  e  $p_0$ , o caudal mássico por unidade de área,  $\dot{m}/A$ , é máximo para  $\text{Ma} = 1$

## Caudal mássico por unidade de área

- Máximo caudal mássico por unidade de área

$$\frac{\dot{m}}{A^*} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (56)$$

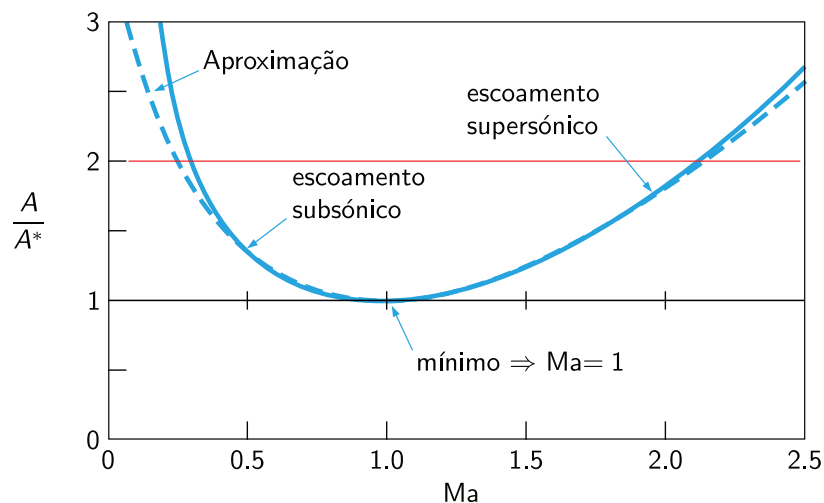
para ar  $\gamma = 1.4$  e  $R = 287 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$

$$\frac{\dot{m}}{A^*} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} = 0.0404 \quad (57)$$

- É conveniente introduzir a definição de **razão de áreas**

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\left( \frac{\dot{m}}{A^*} \right)}{\left( \frac{\dot{m}}{A} \right)} = \frac{1}{\text{Ma}} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (58)$$

## Caudal mássico por unidade de área

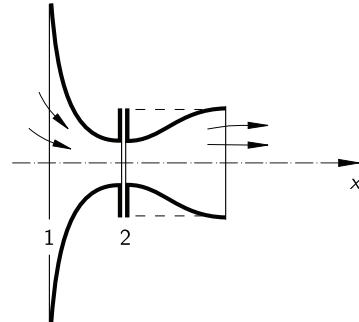


Podemos aproximar a Eq. (58) por (ver [4])

$$\text{Ma} \approx \begin{cases} 1 - 0.88 \left( \ln \frac{A}{A^*} \right)^{0.45}, & \text{Ma} < 1 \text{ e } 1.0 < \frac{A}{A^*} < 1.34 \\ 1 + 1.2 \left( \frac{A}{A^*} - 1 \right)^{0.5}, & \text{Ma} > 1 \text{ e } 1.0 < \frac{A}{A^*} < 2.9 \end{cases} \quad (59)$$

## Exemplo 4

Considere um escoamento de ar num Venturi com uma área da garganta de  $A_2 = 0.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ , e uma área da entrada de  $A_1 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Sabendo que a pressão e a temperatura na entrada são  $p_1 = 2.1 \times 10^6 \text{ Pa}$  e  $T_1 = 590 \text{ K}$ , e que a pressão na garganta é  $p_2 = 1.68 \times 10^6 \text{ Pa}$ , determine o caudal mássico escoado. Considere o escoamento isentrópico.



## Exemplo 4

Considere um escoamento de ar num Venturi com uma área da garganta de  $A_2 = 0.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ , e uma área da entrada de  $A_1 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Sabendo que a pressão e a temperatura na entrada são  $p_1 = 2.1 \times 10^6 \text{ Pa}$  e  $T_1 = 590 \text{ K}$ , e que a pressão na garganta é  $p_2 = 1.68 \times 10^6 \text{ Pa}$ , determine o caudal mássico escoado. Considere o escoamento isentrópico.

### Resolução

- Podemos calcular imediatamente  $T_1$  via a Eq. (1)

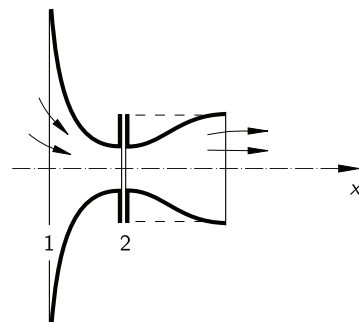
$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 12.4 \text{ kg/s}$$

- Sendo um processo isentrópico

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right) = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1}$$

- Como temos as áreas, usando a Eq. da continuidade (20) e as relações isentrópicas obtemos

$$\frac{u_2^2}{u_1^2} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$





## Exemplo 4

- Podemos agora calcular  $u_1$  através do energia (30)

$$\frac{u_1^2}{2c_p} - \frac{u_2^2}{2c_p} = T_2 - T_1$$

$$\frac{u_2^2}{2c_p} \left(1 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\right) = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

- Consequentemente

$$\frac{u_2^2}{2c_p} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] = T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

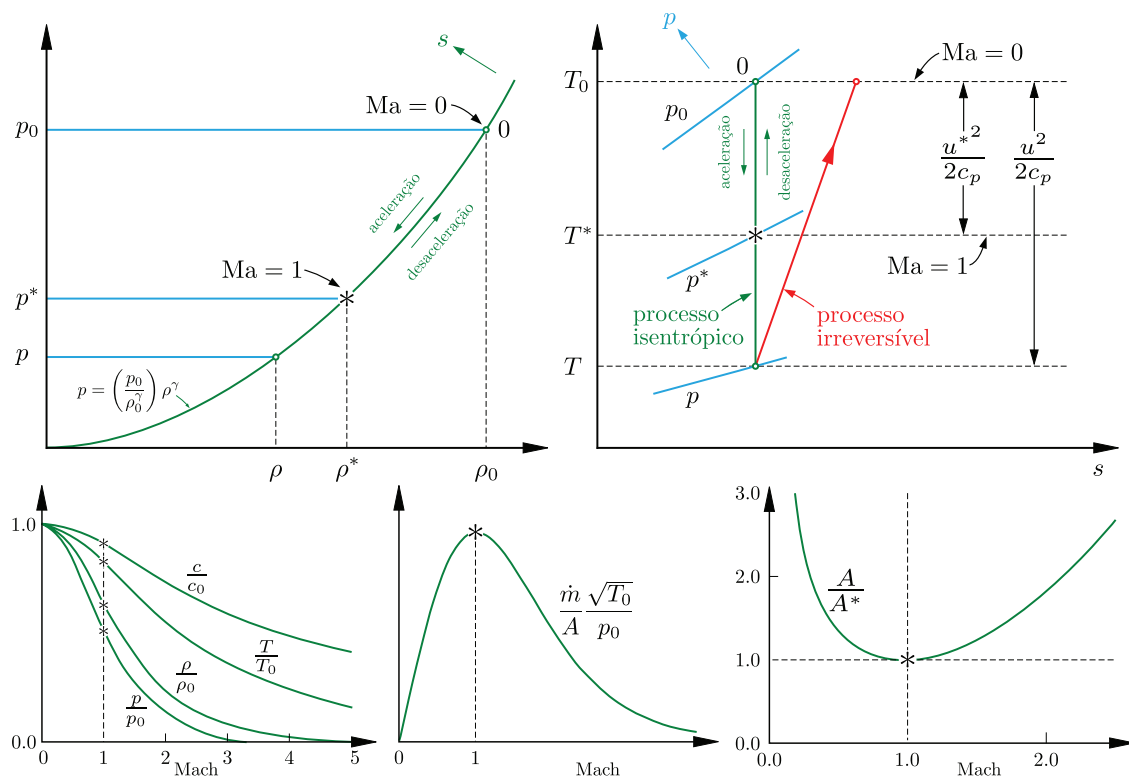
$$u_1^2 = 2c_p T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] \bigg/ \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] = 3481 \text{ (m/s)}^2$$

logo

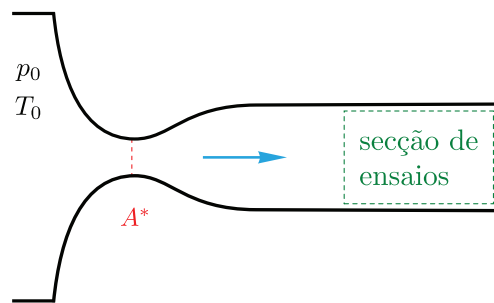
$$u_1 = 59 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 u_1 = 1.75 \text{ kg/s}^{-1}$$

## Estados num escoamento isentrópico



## Exemplo 5



Consideremos o túnel supersónico representado na figura.

A pressão e a temperatura de estagnação do ar no reservatório são  $p_0 = 4 \times 10^5$  Pa e  $T_0 = 293$  K.

Determine a área da secção de ensaios bem como as propriedades do escoamento  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  e  $\dot{m}$  que aí se verificam.

Considere que o número de Mach nessa secção é  $Ma = 2.4$  e a área da garganta a montante é de  $A^* = 0.12$  m<sup>2</sup>.

Usando a Eq. (58) obtemos

$$A = A^* \frac{1}{Ma} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 0.2884 \text{ m}^2$$

## Exemplo 5

Assumindo escoamento isentrópico de (33)

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 = 2.152 \Rightarrow T = 136.15 \text{ K}$$

Usando (34)

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 14.62 \Rightarrow p = 27360 \text{ Pa}$$

Da equação de estado dos gases perfeitos (1)

$$\rho = \frac{p}{RT} = 0.7 \text{ kg/m}^3$$

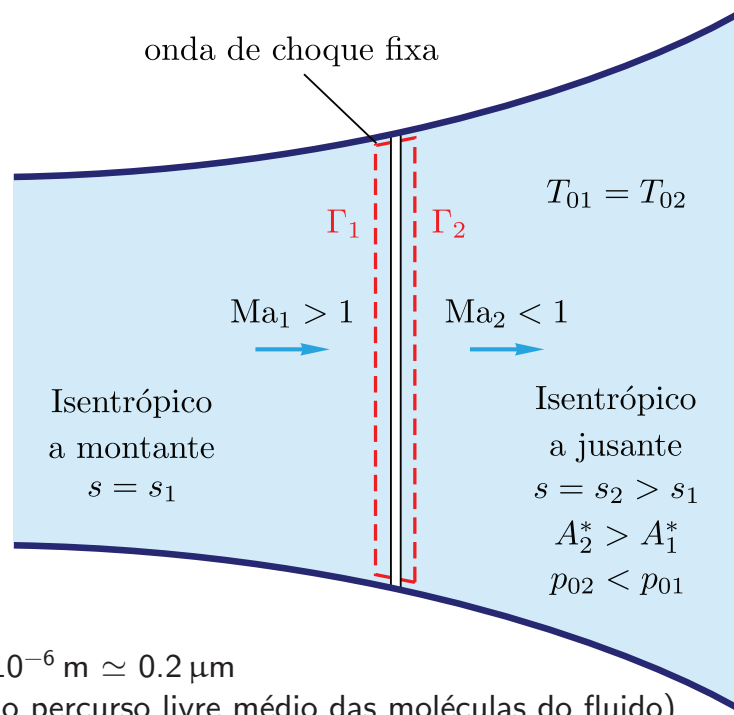
Da definição de número de Mach

$$u = c Ma = \sqrt{\gamma RT} Ma = 561.34 \text{ m/s}$$

logo

$$\dot{m} = \rho u A = 113.34 \text{ kg/s}$$

## Onda de choque normal num gás perfeito



- ▶  $\Delta x \simeq 0.2 \times 10^{-6} \text{ m} \simeq 0.2 \mu\text{m}$   
(3 a 4 vezes o percurso livre médio das moléculas do fluido)
- ▶ Como  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow A_1 = A_2$

## Onda de choque normal num gás perfeito

- ▶ Conservação da energia

$$h_0 = h_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}u_2^2$$

ou

$$T_0 = T_{02} = T_{01} \quad (60)$$

- ▶ Todas as expressões para escoamento adiabático se aplicam na onda de choque normal
- ▶ Os estados 1 e 2 tem a mesma  $T^*$ ,  $c^*$  e  $c_0$
- ▶ Usando as relações adiabáticas entre  $T$  e  $T_0$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_2^2} \quad (61)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

- ▶ Combinando a Eq. de estado e a equação da Eq. da continuidade com  $A_1 = A_2$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{u_2}{u_1}$$

- ▶ Usando a definição de Ma

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\text{Ma}_2}{\text{Ma}_1} \frac{c_2}{c_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\text{Ma}_2}{\text{Ma}_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

- ▶ Simplificando

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\text{Ma}_1}{\text{Ma}_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

- ▶ Utilizando a Eq. (61) resulta

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\text{Ma}_1}{\text{Ma}_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)\text{Ma}_1^2}{2 + (\gamma - 1)\text{Ma}_2^2}} \quad (62)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

- ▶ Conservação da quantidade de movimento

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (63)$$

sabendo que

$$\rho u^2 = \rho \frac{u^2}{a^2} \gamma R T = \gamma p \text{Ma}^2$$

logo

$$p_1 + \gamma p_1 \text{Ma}_1^2 = p_2 + \gamma p_2 \text{Ma}_2^2$$

ou

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma \text{Ma}_1^2}{1 + \gamma \text{Ma}_2^2} \quad (64)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

- ▶ Combinando a Eq. (62) com a Eq. (64)

$$\frac{Ma_1 \sqrt{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}}{1 + \gamma Ma_1^2} = \frac{Ma_2 \sqrt{2 + (\gamma - 1)Ma_2^2}}{1 + \gamma Ma_2^2} \quad (65)$$

Resolvendo a Eq. (65) em ordem a  $Ma_2$  obtemos duas soluções

$$Ma_2 = Ma_1$$

$$Ma_2^2 = \frac{(\gamma - 1)Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (66)$$

- ▶ A primeira solução expressa que não houve onda de choque (estado 1 = estado 2)
- ▶ A segunda mostra que numa onda de choque existe uma relação descontínua entre o estado 1 e o estado 2

## Onda de choque normal num gás perfeito

- ▶ Substituindo a Eq. (66) na Eq. (64)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (67)$$

- ▶ Substituindo a Eq. (66) na Eq. (61)

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (\gamma - 1)Ma_1^2] \frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 Ma_1^2} \quad (68)$$

- ▶ Usando (1), em termos de massas volúmicas temos

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{(\gamma - 1)Ma_1^2 + 2} \quad (69)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

- Conservação da quantidade de movimento

$$p_1 - p_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1) \quad (70)$$

- Conservação da energia

$$h_0 = h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2$$

logo

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (u_1 - u_2) (u_1 + u_2)$$

- Eliminando  $u_1$  e  $u_2$  (conhecida como Eq. de Rankine-Hugoniot)

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left( \frac{u_1}{\rho_1 u_1} + \frac{u_2}{\rho_2 u_2} \right) = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

- Esta eq. relaciona o estado termodinâmico 1 com o 2 sem utilizar a eq. de estado.

## Onda de choque normal num gás perfeito

- Usando (1) e (8)

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left( \frac{p_2}{R \rho_2} - \frac{p_1}{R \rho_1} \right)$$

logo

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

donde

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta \frac{p_2}{p_1}}{\beta + \frac{p_2}{p_1}} \quad (71)$$

com

$$\beta = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

- Comparação com a equação de uma evolução isentrópica

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (72)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

- ▶ Escrevendo a Eq. (16) em termos de massas volúmicas

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (73)$$

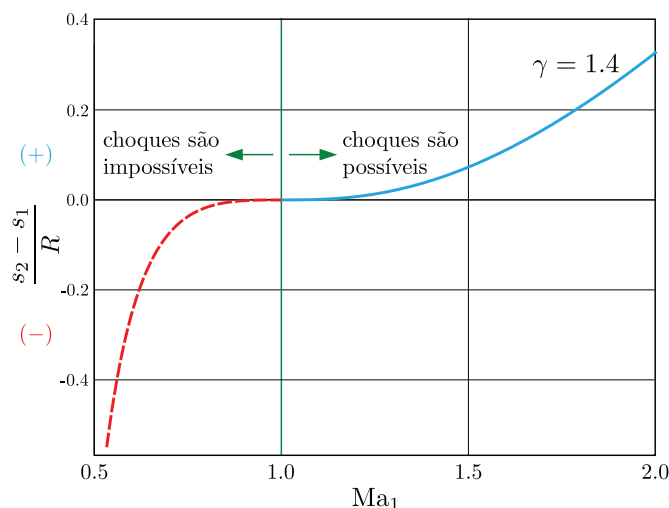
- ▶ Para  $\gamma = 1.4$

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{s_2 - s_1}{c_v}$
Eq. (71)	Isentrópico, Eq. (72)	
0.5	0.61540	-0.01340
0.9	0.92750	-0.00005
1.0	1.00000	0.00000
1.1	1.00704	0.00004
1.5	1.33333	0.00270
2.0	1.62500	0.01340

- ▶ As ondas de choque para  $p_2/p_1 < 2$  são quase isentrópicas
- ▶  $p_2/p_1 < 1 \Rightarrow s_2 < s_1 \Rightarrow$  **não respeita 2ª Lei da Termodinâmica!**
- ▶ Numa onda de choque temos sempre  $p_2 > p_1$

## Onda de choque normal num gás perfeito

Relações em termos do número de Mach



- ▶ Combinando a Eq. (14) com as Eqs. (67) e (69) resulta

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left[ \frac{2}{(\gamma + 1)Ma_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] + \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left[ \frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \quad (74)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

Relações em termos do número de Mach

- ▶ Usando a Eq. (54)

$$\frac{c_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

- ▶ Rearranjando, vem

$$\frac{c_1^2}{u_2^2} + \frac{u_1^2}{u_2^2} \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{c_2^2}{u_2^2} + \frac{\gamma - 1}{2}$$

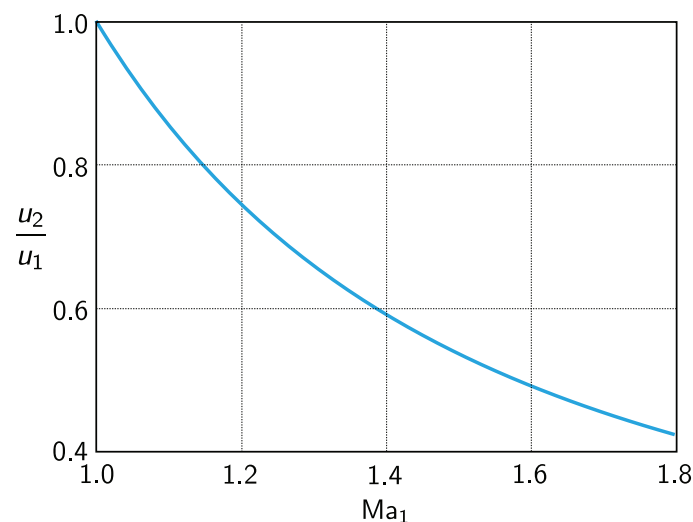
$$\frac{u_1^2}{u_2^2} \left( \frac{1}{\text{Ma}_1^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \right) = \frac{1}{\text{Ma}_2^2} + \frac{\gamma - 1}{2}$$

- ▶ Usando (66) resulta

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{(\gamma - 1)\text{Ma}_1^2 + 2}{(\gamma + 1)\text{Ma}_1^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{\text{Ma}_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (75)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

Relação entre as velocidades numa onda de choque



- ▶ Gráfico da função (75)



## Onda de choque normal num gás perfeito

- ▶ Se considerarmos que a onda de choque normal ocorre numa conduta ou tubeira podemos obter a variação da área crítica
- ▶ Partindo da Eq. (58) podemos obter a relação entre as áreas críticas antes e depois de uma onda de choque normal

$$\frac{\left(\frac{A_1}{A_1^*}\right)}{\left(\frac{A_2}{A_2^*}\right)} = \frac{\frac{1}{Ma_1} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{\frac{1}{Ma_2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

simplificando resulta ( $A_1 = A_2$ )

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \left[ \frac{2 + (\gamma-1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_2^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (76)$$

- ▶ Adicionalmente, usando a Eq. (56) resulta

$$\frac{\dot{m}}{A_1^*} \frac{\sqrt{T_{01}}}{p_{01}} = \frac{\dot{m}}{A_2^*} \frac{\sqrt{T_{02}}}{p_{02}}$$

vindo ( $T_{01} = T_{02}$ )

$$p_{01} A_1^* = p_{02} A_2^* \quad (77)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

- ▶ **Resumo da variação das propriedades numa onda de choque normal**

$$T_{02} = T_{01} \quad (\text{Eq. 60})$$

$$p_{01} A_1^* = p_{02} A_2^* \quad (\text{Eq. 77})$$

$$Ma_2^2 = \frac{(\gamma-1) Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)} \quad (\text{Eq. 66})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (\text{Eq. 67})$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_1^2} \quad (\text{Eqs. 69 e 75})$$

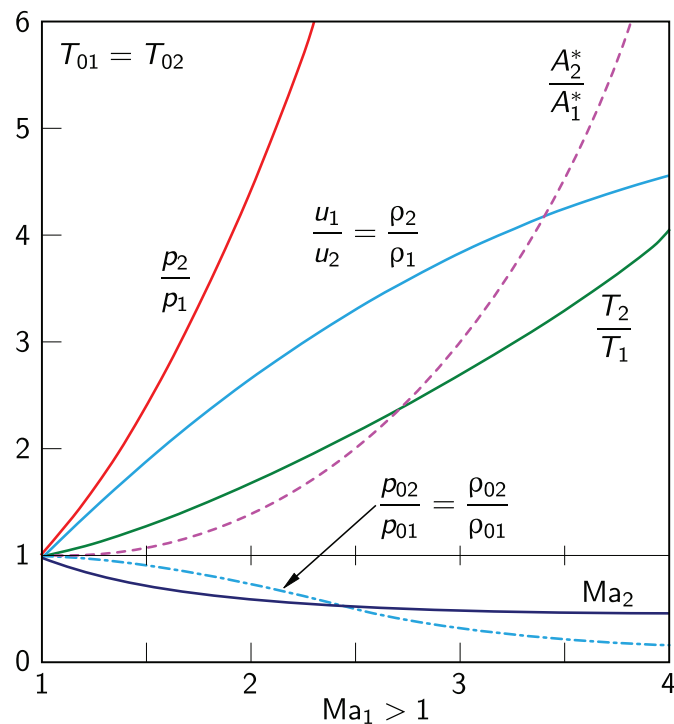
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma-1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_2^2} \quad (\text{Eq. 61})$$

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \left[ \frac{2 + (\gamma-1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_2^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (\text{Eq. 76})$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[ \frac{(\gamma+1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (78)$$

## Onda de choque normal num gás perfeito

### ► Variação das propriedades numa onda de choque normal

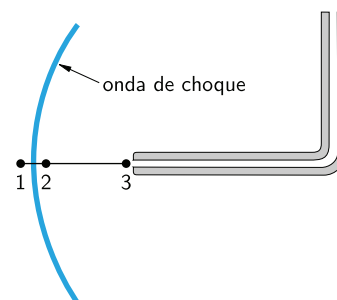


### Exemplo 6

Considere um tubo de Pitot num escoamento supersónico. Métodos ópticos de observação do escoamento mostram que se forma uma onda de choque à frente da tomada de pressão total de tubo.

Mostre que, nestas circunstâncias, o número de Mach,  $Ma_1$ , do escoamento está relacionado com a pressão estática do escoamento, antes da onda de choque,  $p_1$ , e com a pressão total registada pelo tubo de Pitot,  $p_{02}$ , através da seguinte expressão (Eq. de Rayleigh do tubo de Pitot)

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left[\frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$



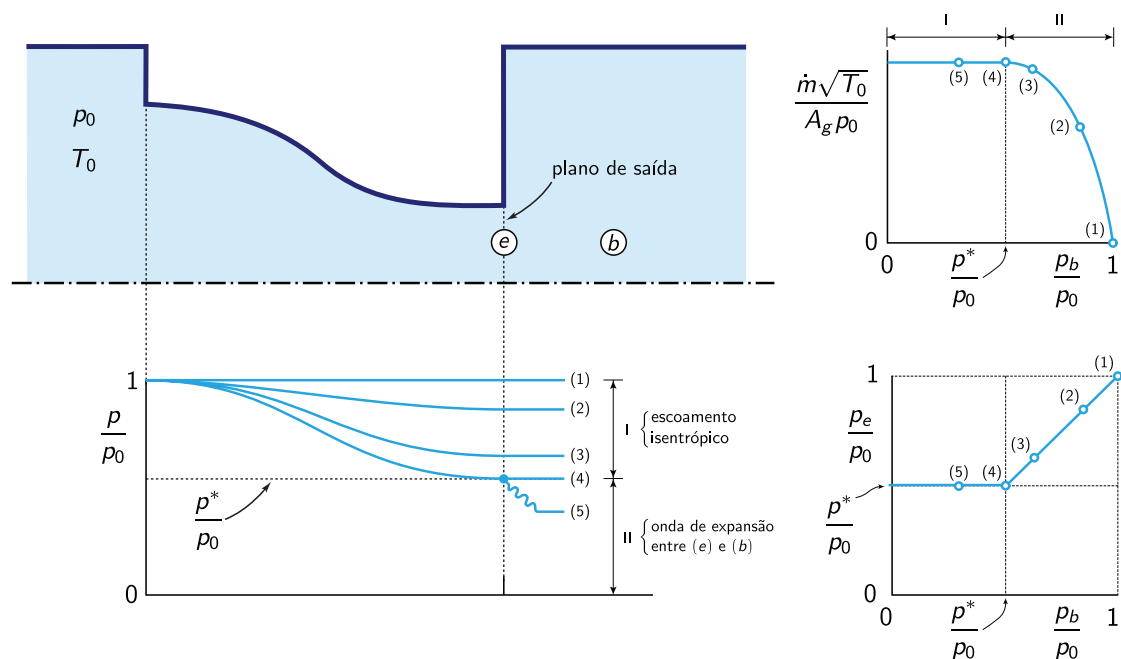
**NOTA:** Esta expressão mostra que para calcular a velocidade do avião, em escoamento supersônico, é necessário determinar  $Ma_1$  iterativamente e, para além disso, também é preciso medir a temperatura  $T_1$  para calcular a velocidade.

## Exemplo 6

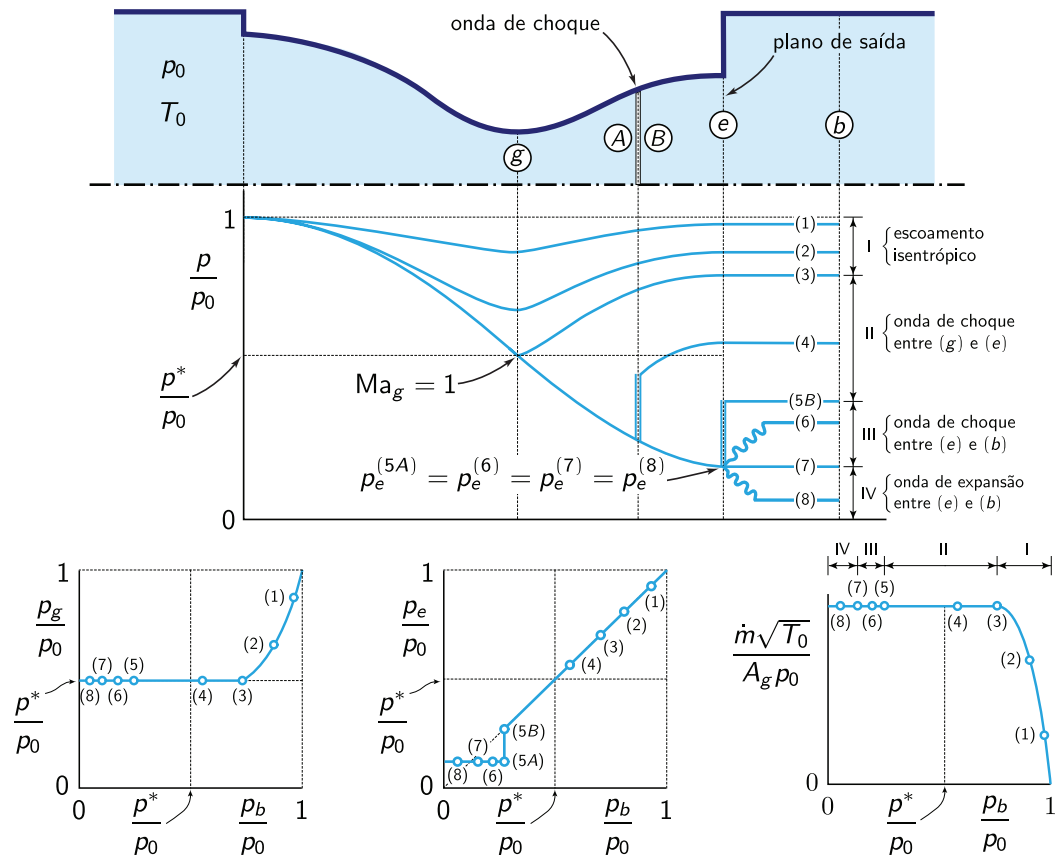
### Resolução

- ▶ Sabemos que  $p_3 = p_{02}$
- ▶  $\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{p_{01}}{p_1}$
- ▶  $\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$  Isentrópico entre 1-2
- ▶  $\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma + 1) \text{Ma}_1^2}{2 + (\gamma - 1) \text{Ma}_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma \text{Ma}_1^2 - (\gamma - 1)}\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}$  Onda de choque
- ▶  $\frac{p_{02}}{p_1} = \left[\frac{(\gamma + 1) \text{Ma}_1^2}{2 + (\gamma - 1) \text{Ma}_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma \text{Ma}_1^2 - (\gamma - 1)}\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) \text{Ma}_1^2}{2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$
- ▶ Após manipulação algébrica obtém-se o resultado pretendido.

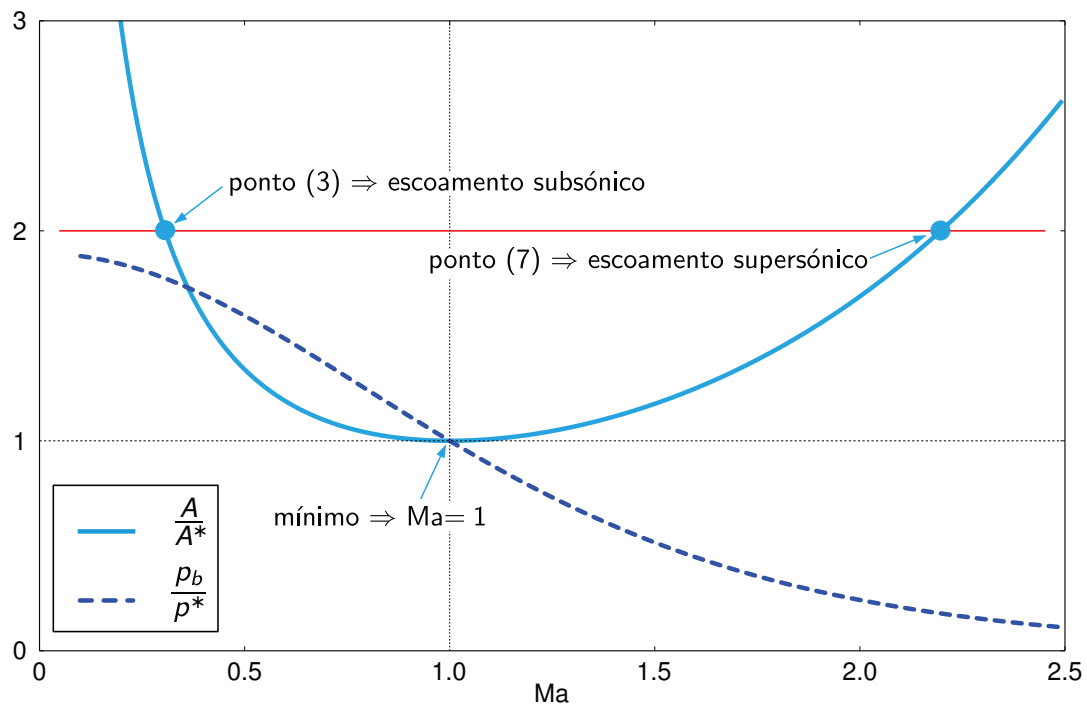
## Regimes de escoamento numa tubeira convergente



## Regimes de escoamento numa tubeira convergente/divergente

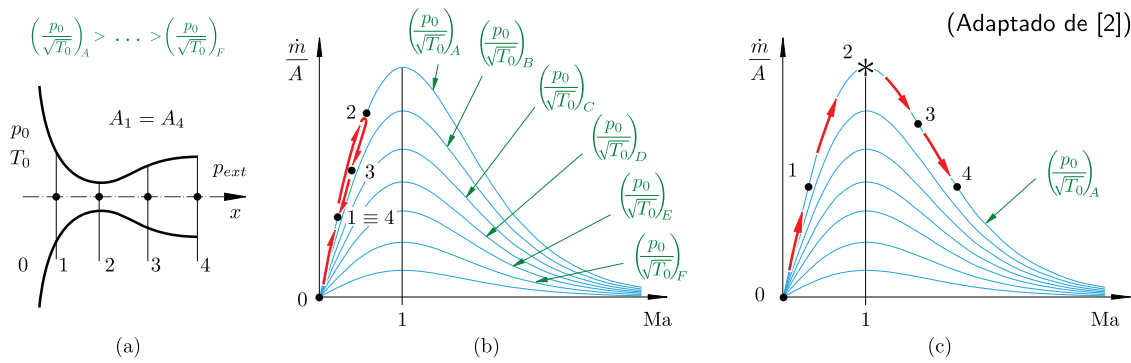


## Regimes de escoamento numa tubeira convergente/divergente



Escoamento supersónico ou subsónico em função da pressão de saída  $\left(\frac{p_b}{p^*} \frac{p^*}{p_0}\right)$

## Controlo de caudal



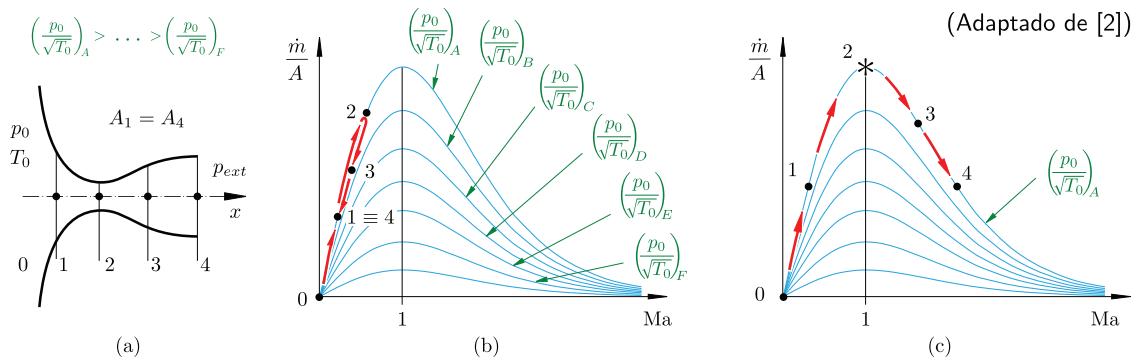
- ▶ Partindo da Eq. (55) temos

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \text{Ma} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2\right)^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

- ▶ Para o mesmo número de Mach, Ma,

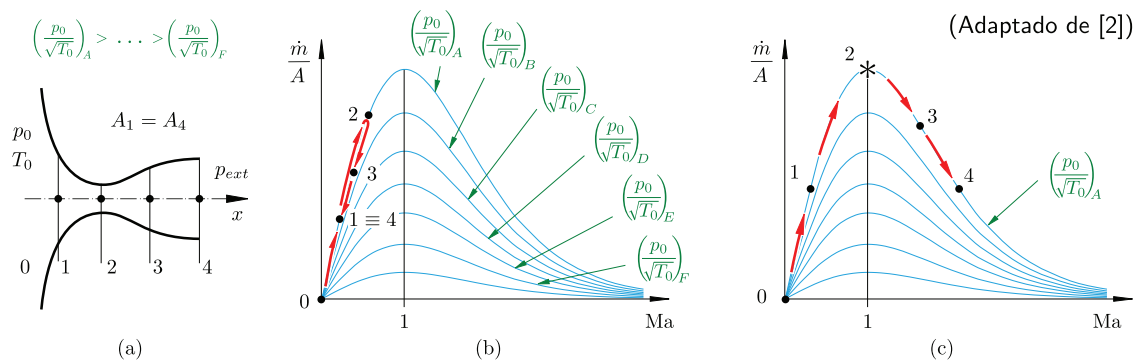
$$\frac{\dot{m}}{A} \propto \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}$$

## Controlo de caudal



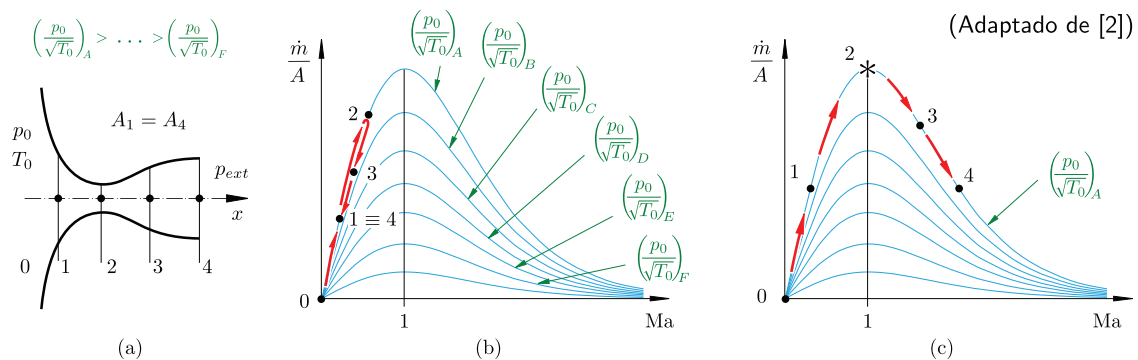
- ▶ Cada linha de  $\left(\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\right) = \text{const}$  representa uma evolução isentrópica
- ▶ Fig. (b), a evolução 0-1-2 é uma aceleração isentrópica seguida de uma desaceleração 2-3-4 por aumento de área
- ▶ Sendo o processo isentrópico e  $A_1 = A_4 \Rightarrow \text{Ma}_1 = \text{Ma}_4$

## Controlo de caudal



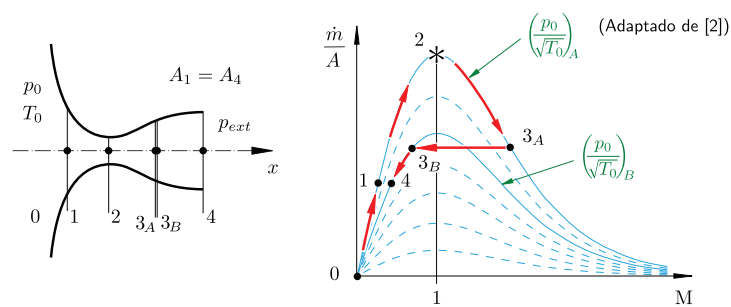
- ▶ Enquanto  $Ma < 1$  a diminuição de área apenas altera o número de Mach sem afectar  $(\dot{m}/A)$
- ▶ Se contraírmos ainda mais  $A_2$  atingimos a área crítica  $A^*$  ( $Ma_2 = 1$ )
  - ▶ não é possível aumentar mais  $\left(\frac{\dot{m}}{A}\right)$  sem aumentar  $\left(\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\right)$ ,
  - ▶ O caudal mássico fica **controlado na secção 2** pela impossibilidade de ultrapassar  $\dot{m} = \left(\frac{\dot{m}}{A^*}\right) A^*$

## Controlo de caudal



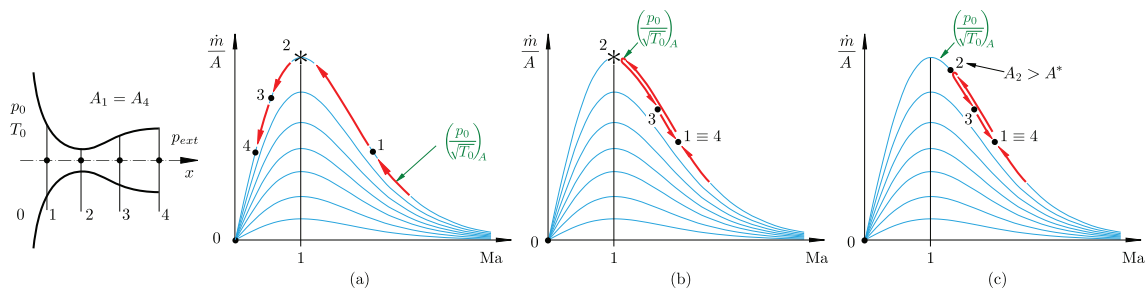
- ▶ Depois de uma secção sónica 2, o alargamento pode seguir uma evolução subsónica, Fig. (b), ou supersónica, Fig. (c)
- ▶ De acordo com o slide 34, o efeito na velocidade é oposto em subsónico e supersónico

## Controlo de caudal



- ▶ Depois de uma secção sónica 2, se o alargamento seguir uma evolução supersónica pode ocorrer uma onda de choque, secção 3
- ▶  $A_{3A} = A_{3B}$  mas o escoamento passa de supersónico a subsónico com diminuição da condição de estagnação isentrópica  $(p_0/\sqrt{T_0})_{3A} > (p_0/\sqrt{T_0})_{3B}$
- ▶ A condição de estagnação isentrópica só se altera na onda de choque
- ▶ O escoamento é isentrópico entre 1-3A e entre 3B-4

## Controlo de caudal



- ▶ Matematicamente é possível desacelerar escoamento isentrópico sem ocorrência de ondas de choque (Figs. (a), (b) e (c))
- ▶ É muito **instável** desacelerar escoamento supersónico sem que ocorra uma onda de choque

## Exemplo 7

Considere um escoamento de ar numa tubeira convergente. As condições de estagnação à entrada são de  $p_0 = 1.0 \text{ MPa}$  e  $T_0 = 333 \text{ K}$  e à saída a pressão estática é de  $p_2 = 591 \text{ kPa}$ . A área de saída é de  $A_2 = 0.001 \text{ m}^2$ . Calcule o número de Mach à saída e o caudal mássico. Considere o escoamento isentrópico.

### Resolução

- ▶ Vamos verificar se o escoamento não está bloqueado na garganta ( $\text{Ma}_2 = 1$ ). Para isso basta garantir que a razão entre  $p_2$  e  $p_0$  é maior que a razão entre a pressão crítica  $p^*$  e  $p_0$  (ver slide 18 e Eq. (46))

$$\frac{p_2}{p_0} = 0.591 > \frac{p^*}{p_0} = 0.5283$$

## Exemplo 7

- ▶ Usando a relação isentrópica (34), podemos obter explicitamente  $\text{Ma}_1$

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}_2^2 = \left( \frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

$$\text{Ma}_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right]} = 0.9$$

- ▶ Para calcular o caudal basta aplicar a Eq. (55)

$$\dot{m} = A_2 \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \text{Ma}_2 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 2.195 \text{ kg/s}$$



## Exemplo 7

- Resolução alternativa. O caudal mássico é dado por

$$\dot{m} = \rho_2 u_2 A_2 = \rho_2 c_2 \text{Ma}_2 A_2 = \frac{p_2}{RT_2} \sqrt{\gamma RT_2} \text{Ma}_2 A_2$$

- Como sabemos  $p_2$  e  $\text{Ma}_2$  basta calcular a temperatura  $T_2$  usando a relação adiabática (33)

$$T_2 = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}_2^2} = 286.5 \text{ K}$$

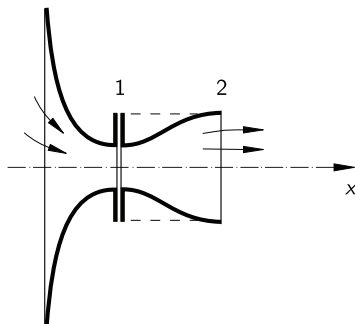
logo

$$\dot{m} = 2.195 \text{ kg/s}$$

## Exemplo 8

Um depósito pressurizado descarrega ar para a atmosfera através de uma tubeira convergente-divergente, representada na figura. O escoamento é crítico na garganta (secção 1) e supersónico à saída (secção 2). Pretende-se:

- a) a pressão do depósito
- b) a temperatura do ar à saída



Dados:

$$A_1 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = 10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

temperatura no depósito: 293 K

$$p_2 = p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$$

(Adaptado de [2])

## Exemplo 8

- ▶ Como referido no enunciado, o escoamento é crítico em 1. Com a razão de áreas

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{A_2}{A_1} = 2$$

podemos calcular  $Ma_2$  usando a aproximação (59)

$$Ma_2 = 1 + 1.2 \left( \frac{A_2}{A^*} - 1 \right)^{0.5} = 2.2$$

Notar que existe também um escoamento subsónico para a mesma razão de áreas.

## Exemplo 8

- ▶ Como sabemos  $Ma_2$  e  $p_2$  podemos usar (34) para calcular

$$p_0 = p \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.065 \times 10^6 \text{ Pa}$$

- ▶ Sabendo a temperatura de estagnação  $T_0$  e  $Ma_2$  podemos calcular com (33)

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2} = 149.1 \text{ K} = -124^\circ \text{ C!}$$

## Tabelas de escoamento compressível

Relações isentrópicas com  $\gamma = 1.4$  (ver, por exemplo, White [4])

# Appendix B

## Compressible-Flow Tables

**Table B.1**  
Isentropic Flow  
of a Perfect  
Gas,  $k = 1.4$

Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$	Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
0.0	1.0	1.0	1.0	$\infty$	0.74	0.6951	0.7712	0.9013	1.0681
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9421	0.76	0.6821	0.7609	0.8964	1.0570
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4815	0.78	0.6690	0.7505	0.8915	1.0471
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6659	0.8	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2616	0.82	0.6430	0.7295	0.8815	1.0305
0.1	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218	0.84	0.6300	0.7189	0.8763	1.0237
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	4.8643	0.86	0.6170	0.7083	0.8711	1.0179
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	4.1824	0.88	0.6041	0.6977	0.8659	1.0129
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	3.6727	0.9	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	1.0056
0.2	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	1.0031
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	1.0014
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	1.0003
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173	1.0	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656	1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0003
0.3	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351	1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0013

## Tabelas de escoamento compressível

Relações para onda de choque normal com  $\gamma = 1.4$  (ver, por exemplo, White [4])

# Appendix B

## Compressible-Flow Tables

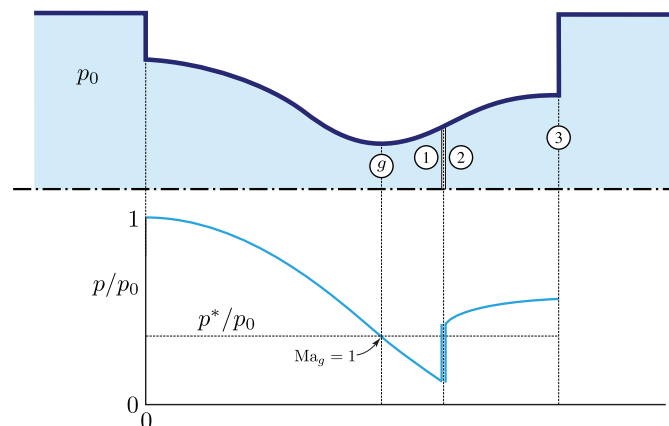
**Table B.2** Normal-Shock Relations  
for a Perfect Gas,  $k = 1.4$

$Ma_{n1}$	$Ma_{n2}$	$p_2/p_1$	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{02}/p_{01}$	$A_2^*/A_1^*$
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.9805	1.0471	1.0334	1.0132	1.0000	1.0000
1.04	0.9620	1.0952	1.0671	1.0263	0.9999	1.0001
1.06	0.9444	1.1442	1.1009	1.0393	0.9998	1.0002
1.08	0.9277	1.1941	1.1349	1.0522	0.9994	1.0006
1.1	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	1.0011
1.12	0.8966	1.2968	1.2034	1.0776	0.9982	1.0018
1.14	0.8820	1.3495	1.2378	1.0903	0.9973	1.0027
1.16	0.8682	1.4032	1.2723	1.1029	0.9961	1.0040
1.18	0.8549	1.4578	1.3069	1.1154	0.9946	1.0055
1.2	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	1.0073
1.22	0.8300	1.5698	1.3764	1.1405	0.9907	1.0094
1.24	0.8183	1.6272	1.4112	1.1531	0.9884	1.0118

## Exemplo 9

Ar entra numa tubeira convergente-divergente com uma pressão de estagnação de 1200 kPa. Observa-se que existe uma onda de choque na zona divergente onde o número de Mach é de  $Ma_1 = 2$ .

1. Determine a razão de áreas entre a secção 1 e a secção da garganta.
2. Se a razão de áreas entre a secção 3 e a garganta for 4, calcule o número de Mach e a pressão estática à saída.



## Exemplo 9

### Resolução

- ▶ Como  $Ma_2 > 1$  sabemos que na garganta temos escoamento bloqueado, donde  $A_g = A_1^*$

- ▶ Da Eq. (58)

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \frac{1}{Ma_1} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 1.6875$$

- ▶ Usando a tabela de escoamento isentrópico

Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
1.98	0.1318	0.2352	0.5605	1.6597
2.0	0.1278	0.2300	0.5556	1.6875
2.02	0.1239	0.2250	0.5506	1.7160

## Exemplo 9

- ▶ Usando a tabela das ondas de choque normais

$Ma_{n1}$	$Ma_{n2}$	$p_2/p_1$	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{02}/p_{01}$	$A_2^*/A_1^*$
1.98	0.5808	4.4071	2.6369	1.6713	0.7302	1.3695
2.0	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	1.3872
2.02	0.5740	4.5938	2.6962	1.7038	0.7115	1.4054

ficamos a saber  $Ma_2 = 0.5774$ ,  $p_{02}/p_{01} = 0.7209$  e  $A_2^*/A_1^* = 1.3872$

- ▶ Pressão de saída ( $p_{03} = p_{02}$ )

$$p_3 = \frac{p_3}{p_{02}} \frac{p_{02}}{p_{01}} p_{01} \quad (79)$$

precisamos de saber  $p_3/p_{03}$

- ▶ Da razão de áreas

$$\frac{A_3}{A_2^*} = \frac{A_3}{A_1^*} \frac{A_1^*}{A_2^*} = 4 \times \frac{1}{1.3872} = 2.8835$$

## Exemplo 9

- ▶ Com a razão de área  $A_3/A_2^*$  podemos determinar  $Ma_3$  e  $p_{02}/p_3$  das tabelas isentrópicas

$Ma$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779
0.2	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956

**Obviamente depois de uma onda de choque escolhemos a solução subsônica (ver slide 43)**

- ▶ Interpolando o número de Mach, seja

$$\alpha = \frac{2.8835 - 2.9635}{2.7076 - 2.9635} = 0.313$$

logo

$$Ma_3 = 0.2(1 - \alpha) + 0.22\alpha = 0.206$$

## Exemplo 9

- ▶ Do mesmo modo, interpolando a razão de pressões

$$\frac{p_3}{p_{02}} = 0.9725 (1 - \alpha) + 0.9668 \alpha = 0.9707$$

- ▶ Substituindo em (79)

$$p_3 = 0.9707 \times 0.7209 \times 1200 = 839.7 \text{ kPa}$$

## Material complementar à aula prática da semana 14

### Posição da onda de choque numa tubeira convergente/divergente

- ▶ A posição da onda de choque é aquele que garante que a pressão de saída resultante é a imposta  $p_b$
- ▶ Seja  $g$  a posição da garganta da tubeira convergente/divergente, 1 e 2 as posições a montante e a jusante da onda de choque
- ▶ O método de cálculo consiste em iterar a área  $A_s$  onde ocorre a onda de choque tal que à saída resulte  $p_e = p_b$
- ▶ Condição necessária, mas não suficiente, para haver onda de choque dentro da tubeira  $Ma_g = 1$  e  $Ma_1 > 1$

## Material complementar à aula prática da semana 14

Posição da onda de choque numa tubeira convergente/divergente

Conhecendo  $p_b$ ,  $A_g = A_1^*$  e  $A_e$  (ver slide 23)

### 1. Montante da onda choque (escoamento isentrópico supersónico)

- ▶ Estimar a posição da onda de choque  $x_s$  e determinar  $\frac{A_s}{A_1^*} = \frac{A(x_s)}{A_1^*}$
- ▶ Calcular  $Ma_1$  antes do choque

$$\frac{A_s}{A_1^*} = \frac{1}{Ma_1} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \rightarrow Ma_1$$

### 2. Através da onda de choque normal (escoamento não isentrópico)

- ▶  $Ma_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1) Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}}$
- ▶  $\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_2^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$

## Material complementar à aula prática da semana 14

Posição da onda de choque numa tubeira convergente/divergente

### 3. Jusante da onda de choque (escoamento isentrópico subsónico)

- ▶  $\frac{A_e}{A_2^*} = \frac{A_e}{A_1^*} \frac{A_1^*}{A_2^*}$
- ▶ Calcular  $Ma_e$  à saída da tubeira

$$\frac{A_e}{A_2^*} = \frac{1}{Ma_e} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_e^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \rightarrow Ma_e$$

- ▶  $p_{02} = \frac{p_{02}}{p_{01}} p_{01}$
- ▶  $p_e = \frac{p_{02}}{\left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$

### 4. Repetir todos os passos até que $p_e = p_b$

- ▶ Se  $p_e > p_b$  aumentar  $x_s$
- ▶ Se  $p_e < p_b$  diminuir  $x_s$

## Material complementar à aula prática da semana 14

### Exemplo 10

Considere um escoamento de ar numa tubeira convergente/divergente. Na secção de entrada da tubeira,  $i$ , temos  $Ma_i = 0.50$ ,  $p_i = 280$  kPa e  $T_i = 10^\circ$  C. A área da garganta é de  $A_g = 6.5 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup> a área na secção de saída,  $e$ , é de  $A_e = 4A_g$ . Se a pressão de saída é de  $p_e = 170$  kPa, determine  $Ma_e$ ,  $T_e$  e a área  $A_s$  no ponto onde ocorre a onda de choque normal.

**Solução:**  $A_s = 0.00156$  m<sup>2</sup>,  $Ma_e = 0.279$  e  $T_e = 292.5$  K.

## Material complementar à aula prática da semana 14

Tabelas de escoamento compressível extraídas do White [4]



# Appendix B

## Compressible-Flow Tables

**Table B.1**  
Isentropic Flow  
of a Perfect  
Gas,  $k = 1.4$

Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$	Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
0.0	1.0	1.0	1.0	$\infty$	0.74	0.6951	0.7712	0.9013	1.0681
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9421	0.76	0.6821	0.7609	0.8964	1.0570
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4815	0.78	0.6690	0.7505	0.8915	1.0471
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6659	0.8	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2616	0.82	0.6430	0.7295	0.8815	1.0305
0.1	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218	0.84	0.6300	0.7189	0.8763	1.0237
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	4.8643	0.86	0.6170	0.7083	0.8711	1.0179
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	4.1824	0.88	0.6041	0.6977	0.8659	1.0129
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	3.6727	0.9	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	1.0056
0.2	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	1.0031
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	1.0014
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	1.0003
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173	1.0	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656	1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0003
0.3	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351	1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0013
0.32	0.9315	0.9506	0.9799	1.9219	1.06	0.4919	0.6024	0.8165	1.0029
0.34	0.9231	0.9445	0.9774	1.8229	1.08	0.4800	0.5920	0.8108	1.0051
0.36	0.9143	0.9380	0.9747	1.7358	1.1	0.4684	0.5817	0.8052	1.0079
0.38	0.9052	0.9313	0.9719	1.6587	1.12	0.4568	0.5714	0.7994	1.0113
0.4	0.8956	0.9243	0.9690	1.5901	1.14	0.4455	0.5612	0.7937	1.0153
0.42	0.8857	0.9170	0.9659	1.5289	1.16	0.4343	0.5511	0.7879	1.0198
0.44	0.8755	0.9094	0.9627	1.4740	1.18	0.4232	0.5411	0.7822	1.0248
0.46	0.8650	0.9016	0.9594	1.4246	1.2	0.4124	0.5311	0.7764	1.0304
0.48	0.8541	0.8935	0.9559	1.3801	1.22	0.4017	0.5213	0.7706	1.0366
0.5	0.8430	0.8852	0.9524	1.3398	1.24	0.3912	0.5115	0.7648	1.0432
0.52	0.8317	0.8766	0.9487	1.3034	1.26	0.3809	0.5019	0.7590	1.0504
0.54	0.8201	0.8679	0.9449	1.2703	1.28	0.3708	0.4923	0.7532	1.0581
0.56	0.8082	0.8589	0.9410	1.2403	1.3	0.3609	0.4829	0.7474	1.0663
0.58	0.7962	0.8498	0.9370	1.2130	1.32	0.3512	0.4736	0.7416	1.0750
0.6	0.7840	0.8405	0.9328	1.1882	1.34	0.3417	0.4644	0.7358	1.0842
0.62	0.7716	0.8310	0.9286	1.1656	1.36	0.3323	0.4553	0.7300	1.0940
0.64	0.7591	0.8213	0.9243	1.1451	1.38	0.3232	0.4463	0.7242	1.1042
0.66	0.7465	0.8115	0.9199	1.1265	1.4	0.3142	0.4374	0.7184	1.1149
0.68	0.7338	0.8016	0.9153	1.1097	1.42	0.3055	0.4287	0.7126	1.1262
0.7	0.7209	0.7916	0.9107	1.0944	1.44	0.2969	0.4201	0.7069	1.1379
0.72	0.7080	0.7814	0.9061	1.0806	1.46	0.2886	0.4116	0.7011	1.1501

**Table B.1** (Cont.)  
Isentropic Flow of  
a Perfect Gas,  
 $k = 1.4$

Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$	Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
1.48	0.2804	0.4032	0.6954	1.1629	2.56	0.0533	0.1232	0.4328	2.7891
1.5	0.2724	0.3950	0.6897	1.1762	2.58	0.0517	0.1205	0.4289	2.8420
1.52	0.2646	0.3869	0.6840	1.1899	2.6	0.0501	0.1179	0.4252	2.8960
1.54	0.2570	0.3789	0.6783	1.2042	2.62	0.0486	0.1153	0.4214	2.9511
1.56	0.2496	0.3710	0.6726	1.2190	2.64	0.0471	0.1128	0.4177	3.0073
1.58	0.2423	0.3633	0.6670	1.2344	2.66	0.0457	0.1103	0.4141	3.0647
1.6	0.2353	0.3557	0.6614	1.2502	2.68	0.0443	0.1079	0.4104	3.1233
1.62	0.2284	0.3483	0.6558	1.2666	2.7	0.0430	0.1056	0.4068	3.1830
1.64	0.2217	0.3409	0.6502	1.2836	2.72	0.0417	0.1033	0.4033	3.2440
1.66	0.2151	0.3337	0.6447	1.3010	2.74	0.0404	0.1010	0.3998	3.3061
1.68	0.2088	0.3266	0.6392	1.3190	2.76	0.0392	0.0989	0.3963	3.3695
1.7	0.2026	0.3197	0.6337	1.3376	2.78	0.0380	0.0967	0.3928	3.4342
1.72	0.1966	0.3129	0.6283	1.3567	2.8	0.0368	0.0946	0.3894	3.5001
1.74	0.1907	0.3062	0.6229	1.3764	2.82	0.0357	0.0926	0.3860	3.5674
1.76	0.1850	0.2996	0.6175	1.3967	2.84	0.0347	0.0906	0.3827	3.6359
1.78	0.1794	0.2931	0.6121	1.4175	2.86	0.0336	0.0886	0.3794	3.7058
1.8	0.1740	0.2868	0.6068	1.4390	2.88	0.0326	0.0867	0.3761	3.7771
1.82	0.1688	0.2806	0.6015	1.4610	2.9	0.0317	0.0849	0.3729	3.8498
1.84	0.1637	0.2745	0.5963	1.4836	2.92	0.0307	0.0831	0.3696	3.9238
1.86	0.1587	0.2686	0.5910	1.5069	2.94	0.0298	0.0813	0.3665	3.9993
1.88	0.1539	0.2627	0.5859	1.5308	2.96	0.0289	0.0796	0.3633	4.0763
1.9	0.1492	0.2570	0.5807	1.5553	2.98	0.0281	0.0779	0.3602	4.1547
1.92	0.1447	0.2514	0.5756	1.5804	3.0	0.0272	0.0762	0.3571	4.2346
1.94	0.1403	0.2459	0.5705	1.6062	3.02	0.0264	0.0746	0.3541	4.3160
1.96	0.1360	0.2405	0.5655	1.6326	3.04	0.0256	0.0730	0.3511	4.3990
1.98	0.1318	0.2352	0.5605	1.6597	3.06	0.0249	0.0715	0.3481	4.4835
2.0	0.1278	0.2300	0.5556	1.6875	3.08	0.0242	0.0700	0.3452	4.5696
2.02	0.1239	0.2250	0.5506	1.7160	3.1	0.0234	0.0685	0.3422	4.6573
2.04	0.1201	0.2200	0.5458	1.7451	3.12	0.0228	0.0671	0.3393	4.7467
2.06	0.1164	0.2152	0.5409	1.7750	3.14	0.0221	0.0657	0.3365	4.8377
2.08	0.1128	0.2104	0.5361	1.8056	3.16	0.0215	0.0643	0.3337	4.9304
2.1	0.1094	0.2058	0.5313	1.8369	3.18	0.0208	0.0630	0.3309	5.0248
2.12	0.1060	0.2013	0.5266	1.8690	3.2	0.0202	0.0617	0.3281	5.1210
2.14	0.1027	0.1968	0.5219	1.9018	3.22	0.0196	0.0604	0.3253	5.2189
2.16	0.0996	0.1925	0.5173	1.9354	3.24	0.0191	0.0591	0.3226	5.3186
2.18	0.0965	0.1882	0.5127	1.9698	3.26	0.0185	0.0579	0.3199	5.4201
2.2	0.0935	0.1841	0.5081	2.0050	3.28	0.0180	0.0567	0.3173	5.5234
2.22	0.0906	0.1800	0.5036	2.0409	3.3	0.0175	0.0555	0.3147	5.6286
2.24	0.0878	0.1760	0.4991	2.0777	3.32	0.0170	0.0544	0.3121	5.7358
2.26	0.0851	0.1721	0.4947	2.1153	3.34	0.0165	0.0533	0.3095	5.8448
2.28	0.0825	0.1683	0.4903	2.1538	3.36	0.0160	0.0522	0.3069	5.9558
2.3	0.0800	0.1646	0.4859	2.1931	3.38	0.0156	0.0511	0.3044	6.0687
2.32	0.0775	0.1609	0.4816	2.2333	3.4	0.0151	0.0501	0.3019	6.1837
2.34	0.0751	0.1574	0.4773	2.2744	3.42	0.0147	0.0491	0.2995	6.3007
2.36	0.0728	0.1539	0.4731	2.3164	3.44	0.0143	0.0481	0.2970	6.4198
2.38	0.0706	0.1505	0.4688	2.3593	3.46	0.0139	0.0471	0.2946	6.5409
2.4	0.0684	0.1472	0.4647	2.4031	3.48	0.0135	0.0462	0.2922	6.6642
2.42	0.0663	0.1439	0.4606	2.4479	3.5	0.0131	0.0452	0.2899	6.7896
2.44	0.0643	0.1408	0.4565	2.4936	3.52	0.0127	0.0443	0.2875	6.9172
2.46	0.0623	0.1377	0.4524	2.5403	3.54	0.0124	0.0434	0.2852	7.0471
2.48	0.0604	0.1346	0.4484	2.5880	3.56	0.0120	0.0426	0.2829	7.1791
2.5	0.0585	0.1317	0.4444	2.6367	3.58	0.0117	0.0417	0.2806	7.3135
2.52	0.0567	0.1288	0.4405	2.6865	3.6	0.0114	0.0409	0.2784	7.4501
2.54	0.0550	0.1260	0.4366	2.7372	3.62	0.0111	0.0401	0.2762	7.5891

**Table B.1**  
(Cont.) Isentropic  
Flow of a Perfect  
Gas,  $k = 1.4$

Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$	Ma	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
3.64	0.0108	0.0393	0.2740	7.7305	4.34	0.0042	0.0202	0.2098	14.4456
3.66	0.0105	0.0385	0.2718	7.8742	4.36	0.0041	0.0198	0.2083	14.6965
3.68	0.0102	0.0378	0.2697	8.0204	4.38	0.0040	0.0194	0.2067	14.9513
3.7	0.0099	0.0370	0.2675	8.1691	4.4	0.0039	0.0191	0.2053	15.2099
3.72	0.0096	0.0363	0.2654	8.3202	4.42	0.0038	0.0187	0.2038	15.4724
3.74	0.0094	0.0356	0.2633	8.4739	4.44	0.0037	0.0184	0.2023	15.7388
3.76	0.0091	0.0349	0.2613	8.6302	4.46	0.0036	0.0181	0.2009	16.0092
3.78	0.0089	0.0342	0.2592	8.7891	4.48	0.0035	0.0178	0.1994	16.2837
3.8	0.0086	0.0335	0.2572	8.9506	4.5	0.0035	0.0174	0.1980	16.5622
3.82	0.0084	0.0329	0.2552	9.1148	4.52	0.0034	0.0171	0.1966	16.8449
3.84	0.0082	0.0323	0.2532	9.2817	4.54	0.0033	0.0168	0.1952	17.1317
3.86	0.0080	0.0316	0.2513	9.4513	4.56	0.0032	0.0165	0.1938	17.4228
3.88	0.0077	0.0310	0.2493	9.6237	4.58	0.0031	0.0163	0.1925	17.7181
3.9	0.0075	0.0304	0.2474	9.7990	4.6	0.0031	0.0160	0.1911	18.0178
3.92	0.0073	0.0299	0.2455	9.9771	4.62	0.0030	0.0157	0.1898	18.3218
3.94	0.0071	0.0293	0.2436	10.1581	4.64	0.0029	0.0154	0.1885	18.6303
3.96	0.0069	0.0287	0.2418	10.3420	4.66	0.0028	0.0152	0.1872	18.9433
3.98	0.0068	0.0282	0.2399	10.5289	4.68	0.0028	0.0149	0.1859	19.2608
4.0	0.0066	0.0277	0.2381	10.7188	4.7	0.0027	0.0146	0.1846	19.5828
4.02	0.0064	0.0271	0.2363	10.9117	4.72	0.0026	0.0144	0.1833	19.9095
4.04	0.0062	0.0266	0.2345	11.1077	4.74	0.0026	0.0141	0.1820	20.2409
4.06	0.0061	0.0261	0.2327	11.3068	4.76	0.0025	0.0139	0.1808	20.5770
4.08	0.0059	0.0256	0.2310	11.5091	4.78	0.0025	0.0137	0.1795	20.9179
4.1	0.0058	0.0252	0.2293	11.7147	4.8	0.0024	0.0134	0.1783	21.2637
4.12	0.0056	0.0247	0.2275	11.9234	4.82	0.0023	0.0132	0.1771	21.6144
4.14	0.0055	0.0242	0.2258	12.1354	4.84	0.0023	0.0130	0.1759	21.9700
4.16	0.0053	0.0238	0.2242	12.3508	4.86	0.0022	0.0128	0.1747	22.3306
4.18	0.0052	0.0234	0.2225	12.5695	4.88	0.0022	0.0125	0.1735	22.6963
4.2	0.0051	0.0229	0.2208	12.7916	4.9	0.0021	0.0123	0.1724	23.0671
4.22	0.0049	0.0225	0.2192	13.0172	4.92	0.0021	0.0121	0.1712	23.4431
4.24	0.0048	0.0221	0.2176	13.2463	4.94	0.0020	0.0119	0.1700	23.8243
4.26	0.0047	0.0217	0.2160	13.4789	4.96	0.0020	0.0117	0.1689	24.2109
4.28	0.0046	0.0213	0.2144	13.7151	4.98	0.0019	0.0115	0.1678	24.6027
4.3	0.0044	0.0209	0.2129	13.9549	5.0	0.0019	0.0113	0.1667	25.0000
4.32	0.0043	0.0205	0.2113	14.1984					

**Table B.2** Normal-Shock Relations  
for a Perfect Gas,  $k = 1.4$

$Ma_{n1}$	$Ma_{n2}$	$p_2/p_1$	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{02}/p_{01}$	$A_2^*/A_1^*$
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.9805	1.0471	1.0334	1.0132	1.0000	1.0000
1.04	0.9620	1.0952	1.0671	1.0263	0.9999	1.0001
1.06	0.9444	1.1442	1.1009	1.0393	0.9998	1.0002
1.08	0.9277	1.1941	1.1349	1.0522	0.9994	1.0006
1.1	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	1.0011
1.12	0.8966	1.2968	1.2034	1.0776	0.9982	1.0018
1.14	0.8820	1.3495	1.2378	1.0903	0.9973	1.0027
1.16	0.8682	1.4032	1.2723	1.1029	0.9961	1.0040
1.18	0.8549	1.4578	1.3069	1.1154	0.9946	1.0055
1.2	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	1.0073
1.22	0.8300	1.5698	1.3764	1.1405	0.9907	1.0094
1.24	0.8183	1.6272	1.4112	1.1531	0.9884	1.0118

**Table B.2** (Cont.) Normal-Shock  
Relations for a Perfect Gas,  $k = 1.4$ 

$Ma_{n1}$	$Ma_{n2}$	$p_2/p_1$	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{02}/p_{01}$	$A_2^*/A_1^*$
1.26	0.8071	1.6855	1.4460	1.1657	0.9857	1.0145
1.28	0.7963	1.7448	1.4808	1.1783	0.9827	1.0176
1.3	0.7860	1.8050	1.5157	1.1909	0.9794	1.0211
1.32	0.7760	1.8661	1.5505	1.2035	0.9758	1.0249
1.34	0.7664	1.9282	1.5854	1.2162	0.9718	1.0290
1.36	0.7572	1.9912	1.6202	1.2290	0.9676	1.0335
1.38	0.7483	2.0551	1.6549	1.2418	0.9630	1.0384
1.4	0.7397	2.1200	1.6897	1.2547	0.9582	1.0436
1.42	0.7314	2.1858	1.7243	1.2676	0.9531	1.0492
1.44	0.7235	2.2525	1.7589	1.2807	0.9476	1.0552
1.46	0.7157	2.3202	1.7934	1.2938	0.9420	1.0616
1.48	0.7083	2.3888	1.8278	1.3069	0.9360	1.0684
1.5	0.7011	2.4583	1.8621	1.3202	0.9298	1.0755
1.52	0.6941	2.5288	1.8963	1.3336	0.9233	1.0830
1.54	0.6874	2.6002	1.9303	1.3470	0.9166	1.0910
1.56	0.6809	2.6725	1.9643	1.3606	0.9097	1.0993
1.58	0.6746	2.7458	1.9981	1.3742	0.9026	1.1080
1.6	0.6684	2.8200	2.0317	1.3880	0.8952	1.1171
1.62	0.6625	2.8951	2.0653	1.4018	0.8877	1.1266
1.64	0.6568	2.9712	2.0986	1.4158	0.8799	1.1365
1.66	0.6512	3.0482	2.1318	1.4299	0.8720	1.1468
1.68	0.6458	3.1261	2.1649	1.4440	0.8639	1.1575
1.7	0.6405	3.2050	2.1977	1.4583	0.8557	1.1686
1.72	0.6355	3.2848	2.2304	1.4727	0.8474	1.1801
1.74	0.6305	3.3655	2.2629	1.4873	0.8389	1.1921
1.76	0.6257	3.4472	2.2952	1.5019	0.8302	1.2045
1.78	0.6210	3.5298	2.3273	1.5167	0.8215	1.2173
1.8	0.6165	3.6133	2.3592	1.5316	0.8127	1.2305
1.82	0.6121	3.6978	2.3909	1.5466	0.8038	1.2441
1.84	0.6078	3.7832	2.4224	1.5617	0.7948	1.2582
1.86	0.6036	3.8695	2.4537	1.5770	0.7857	1.2728
1.88	0.5996	3.9568	2.4848	1.5924	0.7765	1.2877
1.9	0.5956	4.0450	2.5157	1.6079	0.7674	1.3032
1.92	0.5918	4.1341	2.5463	1.6236	0.7581	1.3191
1.94	0.5880	4.2242	2.5767	1.6394	0.7488	1.3354
1.96	0.5844	4.3152	2.6069	1.6553	0.7395	1.3522
1.98	0.5808	4.4071	2.6369	1.6713	0.7302	1.3695
2.0	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	1.3872
2.02	0.5740	4.5938	2.6962	1.7038	0.7115	1.4054
2.04	0.5707	4.6885	2.7255	1.7203	0.7022	1.4241
2.06	0.5675	4.7842	2.7545	1.7369	0.6928	1.4433
2.08	0.5643	4.8808	2.7833	1.7536	0.6835	1.4630
2.1	0.5613	4.9783	2.8119	1.7705	0.6742	1.4832
2.12	0.5583	5.0768	2.8402	1.7875	0.6649	1.5039
2.14	0.5554	5.1762	2.8683	1.8046	0.6557	1.5252
2.16	0.5525	5.2765	2.8962	1.8219	0.6464	1.5469
2.18	0.5498	5.3778	2.9238	1.8393	0.6373	1.5692
2.2	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	1.5920
2.22	0.5444	5.5831	2.9784	1.8746	0.6191	1.6154
2.24	0.5418	5.6872	3.0053	1.8924	0.6100	1.6393
2.26	0.5393	5.7922	3.0319	1.9104	0.6011	1.6638
2.28	0.5368	5.8981	3.0584	1.9285	0.5921	1.6888
2.3	0.5344	6.0050	3.0845	1.9468	0.5833	1.7144
2.32	0.5321	6.1128	3.1105	1.9652	0.5745	1.7406

**Table B.2** (*Cont.*) Normal-Shock Relations for a Perfect Gas,  $k = 1.4$ 

$Ma_{n1}$	$Ma_{n2}$	$p_2/p_1$	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{02}/p_{01}$	$A_2^*/A_1^*$
2.34	0.5297	6.2215	3.1362	1.9838	0.5658	1.7674
2.36	0.5275	6.3312	3.1617	2.0025	0.5572	1.7948
2.38	0.5253	6.4418	3.1869	2.0213	0.5486	1.8228
2.4	0.5231	6.5533	3.2119	2.0403	0.5401	1.8514
2.42	0.5210	6.6658	3.2367	2.0595	0.5317	1.8806
2.44	0.5189	6.7792	3.2612	2.0788	0.5234	1.9105
2.46	0.5169	6.8935	3.2855	2.0982	0.5152	1.9410
2.48	0.5149	7.0088	3.3095	2.1178	0.5071	1.9721
2.5	0.5130	7.1250	3.3333	2.1375	0.4990	2.0039
2.52	0.5111	7.2421	3.3569	2.1574	0.4911	2.0364
2.54	0.5092	7.3602	3.3803	2.1774	0.4832	2.0696
2.56	0.5074	7.4792	3.4034	2.1976	0.4754	2.1035
2.58	0.5056	7.5991	3.4263	2.2179	0.4677	2.1381
2.6	0.5039	7.7200	3.4490	2.2383	0.4601	2.1733
2.62	0.5022	7.8418	3.4714	2.2590	0.4526	2.2093
2.64	0.5005	7.9645	3.4937	2.2797	0.4452	2.2461
2.66	0.4988	8.0882	3.5157	2.3006	0.4379	2.2835
2.68	0.4972	8.2128	3.5374	2.3217	0.4307	2.3218
2.7	0.4956	8.3383	3.5590	2.3429	0.4236	2.3608
2.72	0.4941	8.4648	3.5803	2.3642	0.4166	2.4005
2.74	0.4926	8.5922	3.6015	2.3858	0.4097	2.4411
2.76	0.4911	8.7205	3.6224	2.4074	0.4028	2.4825
2.78	0.4896	8.8498	3.6431	2.4292	0.3961	2.5246
2.8	0.4882	8.9800	2.6636	2.4512	0.3895	2.5676
2.82	0.4868	9.1111	3.6838	2.4733	0.3829	2.6115
2.84	0.4854	9.2432	3.7039	2.4955	0.3765	2.6561
2.86	0.4840	9.3762	3.7238	2.5179	0.3701	2.7017
2.88	0.4827	9.5101	3.7434	2.5405	0.3639	2.7481
2.9	0.4814	9.6450	3.7629	2.5632	0.3577	2.7954
2.92	0.4801	9.7808	3.7821	2.5861	0.3517	2.8436
2.94	0.4788	9.9175	3.8012	2.6091	0.3457	2.8927
2.96	0.4776	10.0552	3.8200	2.6322	0.3398	2.9427
2.98	0.4764	10.1938	3.8387	2.6555	0.3340	2.9937
3.0	0.4752	10.3333	3.8571	2.6790	0.3283	3.0456
3.02	0.4740	10.4738	3.8754	2.7026	0.3227	3.0985
3.04	0.4729	10.6152	3.8935	2.7264	0.3172	3.1523
3.06	0.4717	10.7575	3.9114	2.7503	0.3118	3.2072
3.08	0.4706	10.9008	3.9291	2.7744	0.3065	3.2630
3.1	0.4695	11.0450	3.9466	2.7986	0.3012	3.3199
3.12	0.4685	11.1901	3.9639	2.8230	0.2960	3.3778
3.14	0.4674	11.3362	3.9811	2.8475	0.2910	3.4368
3.16	0.4664	11.4832	3.9981	2.8722	0.2860	3.4969
3.18	0.4654	11.6311	4.0149	2.8970	0.2811	3.5580
3.2	0.4643	11.7800	4.0315	2.9220	0.2762	3.6202
3.22	0.4634	11.9298	4.0479	2.9471	0.2715	3.6835
3.24	0.4624	12.0805	4.0642	2.9724	0.2668	3.7480
3.26	0.4614	12.2322	4.0803	2.9979	0.2622	3.8136
3.28	0.4605	12.3848	4.0963	3.0234	0.2577	3.8803
3.3	0.4596	12.5383	4.1120	3.0492	0.2533	3.9483
3.32	0.4587	12.6928	4.1276	3.0751	0.2489	4.0174
3.34	0.4578	12.8482	4.1431	3.1011	0.2446	4.0877
3.36	0.4569	13.0045	4.1583	3.1273	0.2404	4.1593
3.38	0.4560	13.1618	4.1734	3.1537	0.2363	4.2321
3.4	0.4552	13.3200	4.1884	3.1802	0.2322	4.3062

**Table B.2** (Cont.) Normal-Shock  
Relations for a Perfect Gas,  $k = 1.4$ 

$Ma_{n1}$	$Ma_{n2}$	$p_2/p_1$	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{02}/p_{01}$	$A^*/A_1^*$
3.42	0.4544	13.4791	4.2032	3.2069	0.2282	4.3815
3.44	0.4535	13.6392	4.2178	3.2337	0.2243	4.4581
3.46	0.4527	13.8002	4.2323	3.2607	0.2205	4.5361
3.48	0.4519	13.9621	4.2467	3.2878	0.2167	4.6154
3.5	0.4512	14.1250	4.2609	3.3151	0.2129	4.6960
3.52	0.4504	14.2888	4.2749	3.3425	0.2093	4.7780
3.54	0.4496	14.4535	4.2888	3.3701	0.2057	4.8614
3.56	0.4489	14.6192	4.3026	3.3978	0.2022	4.9461
3.58	0.4481	14.7858	4.3162	3.4257	0.1987	5.0324
3.6	0.4474	14.9533	4.3296	3.4537	0.1953	5.1200
3.62	0.4467	15.1218	4.3429	3.4819	0.1920	5.2091
3.64	0.4460	15.2912	4.3561	3.5103	0.1887	5.2997
3.66	0.4453	15.4615	4.3692	3.5388	0.1855	5.3918
3.68	0.4446	15.6328	4.3821	3.5674	0.1823	5.4854
3.7	0.4439	15.8050	4.3949	3.5962	0.1792	5.5806
3.72	0.4433	15.9781	4.4075	3.6252	0.1761	5.6773
3.74	0.4426	16.1522	4.4200	3.6543	0.1731	5.7756
3.76	0.4420	16.3272	4.4324	3.6836	0.1702	5.8755
3.78	0.4414	16.5031	4.4447	3.7130	0.1673	5.9770
3.8	0.4407	16.6800	4.4568	3.7426	0.1645	6.0801
3.82	0.4401	16.8578	4.4688	3.7723	0.1617	6.1849
3.84	0.4395	17.0365	4.4807	3.8022	0.1589	6.2915
3.86	0.4389	17.2162	4.4924	3.8323	0.1563	6.3997
3.88	0.4383	17.3968	4.5041	3.8625	0.1536	6.5096
3.9	0.4377	17.5783	4.4156	3.8928	0.1510	6.6213
3.92	0.4372	17.7608	4.5270	3.9233	0.1485	6.7348
3.94	0.4366	17.9442	4.5383	3.9540	0.1460	6.8501
3.96	0.4360	18.1285	4.5494	3.9848	0.1435	6.9672
3.98	0.4355	18.3138	4.5605	4.0158	0.1411	7.0861
4.0	0.4350	18.5000	4.5714	4.0469	0.1388	7.2069
4.02	0.4344	18.6871	4.5823	4.0781	0.1364	7.3296
4.04	0.4339	18.8752	4.5930	4.1096	0.1342	7.4542
4.06	0.4334	19.0642	4.6036	4.1412	0.1319	7.5807
4.08	0.4329	19.2541	4.6141	4.1729	0.1297	7.7092
4.1	0.4324	19.4450	4.6245	4.2048	0.1276	7.8397
4.12	0.4319	19.6368	4.6348	4.2368	0.1254	7.9722
4.14	0.4314	19.8295	4.6450	4.2690	0.1234	8.1067
4.16	0.4309	20.0232	4.6550	4.3014	0.1213	8.2433
4.18	0.4304	20.2178	4.6650	4.3339	0.1193	8.3819
4.2	0.4299	20.4133	4.6749	4.3666	0.1173	8.5227
4.22	0.4295	20.6098	4.6847	4.3994	0.1154	8.6656
4.24	0.4290	20.8072	4.6944	4.4324	0.1135	8.8107
4.26	0.4286	21.0055	4.7040	4.4655	0.1116	8.9579
4.28	0.4281	21.2048	4.7135	4.4988	0.1098	9.1074
4.3	0.4277	21.4050	4.7229	4.5322	0.1080	9.2591
4.32	0.4272	21.6061	4.7322	4.5658	0.1062	9.4131
4.34	0.4268	21.8082	4.7414	4.5995	0.1045	9.5694
4.36	0.4264	22.0112	4.7505	4.6334	0.1028	9.7280
4.38	0.4260	22.2151	4.7595	4.6675	0.1011	9.8889
4.4	0.4255	22.4200	4.7685	4.7017	0.0995	10.0522
4.42	0.4251	22.6258	4.7773	4.7361	0.0979	10.2179
4.44	0.4247	22.8325	4.7861	4.7706	0.0963	10.3861
4.46	0.4243	23.0402	4.7948	4.8053	0.0947	10.5567
4.48	0.4239	23.2488	4.8034	4.8401	0.0932	10.7298

**Table B.2** (Cont.) Normal-Shock Relations for a Perfect Gas,  $k = 1.4$

$Ma_{n1}$	$Ma_{n2}$	$p_2/p_1$	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{02}/p_{01}$	$A_2^*/A_1^*$
4.5	0.4236	23.4583	4.8119	4.8751	0.0917	10.9054
4.52	0.4232	23.6688	4.8203	4.9102	0.0902	11.0835
4.54	0.4228	23.8802	4.8287	4.9455	0.0888	11.2643
4.56	0.4224	24.0925	4.8369	4.9810	0.0874	11.4476
4.58	0.4220	24.3058	4.8451	5.0166	0.0860	11.6336
4.6	0.4217	24.5200	4.8532	5.0523	0.0846	11.8222
4.62	0.4213	24.7351	4.8612	5.0882	0.0832	12.0136
4.64	0.4210	24.9512	4.8692	5.1243	0.0819	12.2076
4.66	0.4206	25.1682	4.8771	5.1605	0.0806	12.4044
4.68	0.4203	25.3861	4.8849	5.1969	0.0793	12.6040
4.7	0.4199	25.6050	4.8926	5.2334	0.0781	12.8065
4.72	0.4196	25.8248	4.9002	5.2701	0.0769	13.0117
4.74	0.4192	26.0455	4.9078	5.3070	0.0756	13.2199
4.76	0.4189	26.2672	4.9153	5.3440	0.0745	13.4310
4.78	0.4186	26.4898	4.9227	5.3811	0.0733	13.6450
4.8	0.4183	26.7133	4.9301	5.4184	0.0721	13.8620
4.82	0.4179	26.9378	4.9374	5.4559	0.0710	14.0820
4.84	0.4176	27.1632	4.9446	5.4935	0.0699	14.3050
4.86	0.4173	27.3895	4.9518	5.5313	0.0688	14.5312
4.88	0.4170	27.6168	4.9589	5.5692	0.0677	14.7604
4.9	0.4167	27.8450	4.9659	5.6073	0.0667	14.9928
4.92	0.4164	28.0741	4.9728	5.6455	0.0657	15.2284
4.94	0.4161	28.3042	4.9797	5.6839	0.0647	15.4672
4.96	0.4158	28.5352	4.9865	5.7224	0.0637	15.7902
4.98	0.4155	28.7671	4.9933	5.7611	0.0627	15.9545
5.0	0.4152	29.0000	5.0000	5.8000	0.0617	16.2032

**Table B.3** Adiabatic Frictional Flow in a Constant-Area Duct for  $k = 1.4$

$Ma$	$\bar{f}L^*/D$	$p/p^*$	$T/T^*$	$\rho^*/\rho = V/V^*$	$p_0/p_0^*$
0.0	$\infty$	$\infty$	1.2000	0.0	$\infty$
0.02	1778.4500	54.7701	1.1999	0.0219	28.9421
0.04	440.3520	27.3817	1.1996	0.0438	14.4815
0.06	193.0310	18.2508	1.1991	0.0657	9.6659
0.08	106.7180	13.6843	1.1985	0.0876	7.2616
0.1	66.9216	10.9435	1.1976	0.1094	5.8218
0.12	45.4080	9.1156	1.1966	0.1313	4.8643
0.14	32.5113	7.8093	1.1953	0.1531	4.1824
0.16	24.1978	6.8291	1.1939	0.1748	3.6727
0.18	18.5427	6.0662	1.1923	0.1965	3.2779
0.2	14.5333	5.4554	1.1905	0.2182	2.9635
0.22	11.5961	4.9554	1.1885	0.2398	2.7076
0.24	9.3865	4.5383	1.1863	0.2614	2.4956
0.26	7.6876	4.1851	1.1840	0.2829	2.3173
0.28	6.3572	3.8820	1.1815	0.3043	2.1656
0.3	5.2993	3.6191	1.1788	0.3257	2.0351
0.32	4.4467	3.3887	1.1759	0.3470	1.9219
0.34	3.7520	3.1853	1.1729	0.3682	1.8229
0.36	3.1801	3.0042	1.1697	0.3893	1.7358
0.38	2.7054	2.8420	1.1663	0.4104	1.6587
0.4	2.3085	2.6958	1.1628	0.4313	1.5901
0.42	1.9744	2.5634	1.1591	0.4522	1.5289