



Mecânica dos Fluidos I

MEAer

Escoamento compressível unidimensional estacionário - 2013/12/06

João Henriques // joaochenriques@tecnico.ulisboa.pt



Programa 2013/2014

1. Introdução
2. Equações para escoamento compressível unidimensional estacionário
3. Velocidade do som
4. Escoamento adiabático e escoamento isentrópico
5. Escoamento isentrópico com variação de área
6. Ondas de choque normais
7. Tuberias convergentes e divergentes



- Bibliografia consultada nesta apresentação

- [1] Shapiro, A.H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Volume 1, The Ronald Press Company, 1953
- [2] André, J.M., *Mecânica dos Fluidos I - Apontamentos de Escoamentos Compressíveis*, 2013.
- [3] Fox, R.W., McDonald, A.T., *Introduction to Fluid Mechanics*, 8th Edition, John Wiley & Sons, 2011.
- [4] White, F.M., *Fluid Mechanics*, 4th Edition, McGraw-Hill, 1998.

Modelo de gás perfeito

- Equação de estado

$$p = \rho R T = \frac{1}{v} R T \quad (1)$$

com

$$\rho = \frac{1}{v}$$

- Tomando logaritmos

$$\ln p = -\ln v + \ln R + \ln T = \ln \rho + \ln R + \ln T$$

obtemos

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dv}{v} + \frac{dT}{T} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (2)$$

- **Energia interna**

$$e = e(v, T)$$

para um gás perfeito a energia interna, e , depende apenas da temperatura

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = 0$$

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv + \underbrace{\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v}_{c_v} dT = c_v dT$$

$$e_2 - e_1 = \int_1^2 c_v dT = c_v (T_2 - T_1) \quad (3)$$



- **Entalpia**

$$h = h(v, T) = e + pv = e + RT$$

\Rightarrow depende apenas da temperatura

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = 0$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p}_{c_p} dT = c_p dT$$

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 c_p dT = c_p (T_2 - T_1) \quad (4)$$



- Constantes do gás

$$c_p \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{dh}{dT} = \frac{d}{dT} (e + pv) = \frac{de}{dT} + \frac{d}{dT} (RT) = c_v + R$$

Usando a definição

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (5)$$

obtemos

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (6)$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (7)$$



Modelo de gás perfeito

- Da teoria cinética dos gases

$$\gamma = \frac{n+2}{n} \quad (8)$$

- gases monoatômicos $n = 3 \rightarrow \gamma = 5/3$
- gases diatômicos $n = 5 \rightarrow \gamma = 7/5$
- Para o ar (21% O₂ mais 78% N₂)

$$\gamma = 1.4$$

$$R = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = 718 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = 1005 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$$



- Variações de **entropia**

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (9)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (10)$$

integrando e usando as Eqs. (5), (7) e (1)

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = c_v \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\gamma \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\gamma} \right] \quad (11)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma-1} \right] \quad (12)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (13)$$



Modelo de gás perfeito

- **Processo isentrópico** $ds = s_2 - s_1 = 0 \rightarrow$ limite de um processo real adiabático

- Da Eq. (11)

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (14)$$

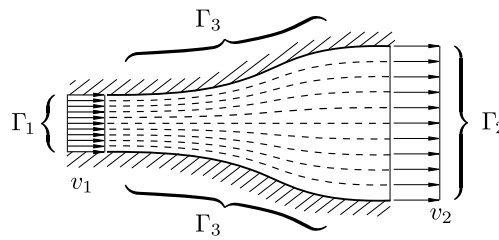
- Da Eq. (12)

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} \quad (15)$$

- Da Eq. (13)

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \quad (16)$$





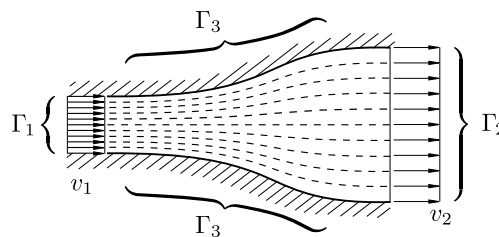
- Balço de massa - equação da continuidade**

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega}_{\text{permanente}=0} + \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \underbrace{-\rho_1 u_1 A_1}_{\Gamma_1} + \underbrace{\rho_2 u_2 A_2}_{\Gamma_2} + \underbrace{0}_{\Gamma_3}$$

$$\rho_2 u_2 A_2 - \rho_1 u_1 A_1 = 0 \quad (17)$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 \quad (18)$$



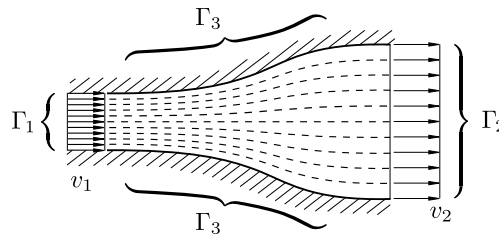
- Balço de quantidade de movimento**

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega}_{\text{permanente}=0} + \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = - \underbrace{\int_{\Gamma} p \mathbf{n} d\Gamma}_{(A)} + \int_{\Gamma} \mathbf{T} \mathbf{n} d\Gamma + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{g} d\Omega}_{(B)}$$

$$\int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \underbrace{-\rho_1 u_1^2 A_1}_{\Gamma_1} + \underbrace{\rho_2 u_2^2 A_2}_{\Gamma_2} + \underbrace{0}_{\Gamma_3}$$

- Em escoamento de alta velocidade usualmente
(A) \gg (B) \Rightarrow desprezamos (B)





- Perfis uniformes $T = 0$ em Γ_1 e Γ_2

$$\int_{\Gamma} \mathbf{Tn} d\Gamma = \int_{\Gamma_3} \mathbf{Tn} d\Gamma \approx - \int_{\Gamma_3} \frac{f}{D} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) A(x) dx$$

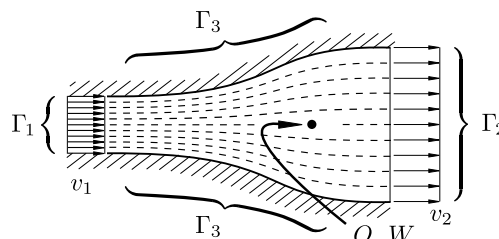
onde f é coeficiente de fricção (ver diagrama de Moody)

- Equação de conservação de quantidade de movimento unidimensional

$$-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2 = - \int_{\Gamma} p \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_3} \frac{f}{D} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) A(x) dx$$

- Desprezando o atrito nas paredes e usando o balanço de massa

$$\dot{m}(u_2 - u_1) = - \int_{\Gamma} p \mathbf{n} d\Gamma \quad (19)$$

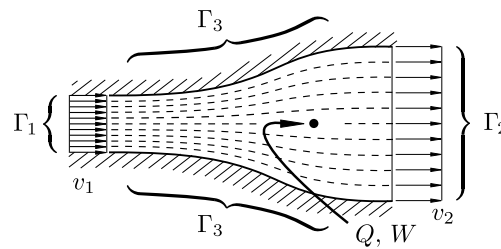


- Balanço de energia

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial \rho e}{\partial t} d\Omega}_{\text{permanente}=0} + \int_{\Gamma} \rho e (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \underbrace{\int_{\Omega} \dot{q}_{\Omega} d\Omega - \int_{\Gamma} \dot{q}_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}_{Q+W} - \underbrace{\int_{\Gamma} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma}_{(A)} + \int_{\Gamma} \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Omega}_{(B)}$$

- Em escoamento de alta velocidade usualmente
(A) \gg (B) \Rightarrow desprezamos (B)





- $$\int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \underbrace{-\rho_1 e_1 u_1 A_1}_{\Gamma_1} + \underbrace{\rho_2 e_2 u_2 A_2}_{\Gamma_2} + \underbrace{0}_{\Gamma_3}$$
- uma vez que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ em Γ_3

$$-\int_{\Gamma} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \underbrace{p_1 u_1 A_1}_{\Gamma_1} - \underbrace{p_2 u_2 A_2}_{\Gamma_2} + \underbrace{0}_{\Gamma_3}$$

- pela mesma razão e por termos perfis uniformes $T = 0$ em Γ_1 e em Γ_2

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\Gamma = 0$$

- Equação de conservação de energia unidimensional

$$\rho_2 e_2 u_2 A_2 - \rho_1 e_1 u_1 A_1 = Q + W + p_1 u_1 A_1 - p_2 u_2 A_2$$

- Usando o balanço de massa

$$\dot{m} (e_2 - e_1) = Q + W + \dot{m} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$

$$\left(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = q + w$$

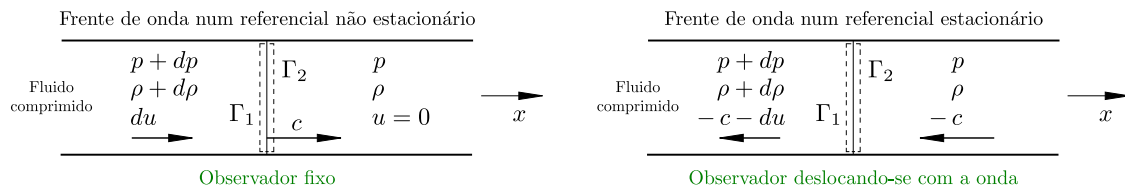
onde

$$\frac{Q + W}{\dot{m}} = q + w$$

- usando as definições de energia interna e entalpia

$$\left(h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) = q + w \quad (20)$$

Velocidade de propagação de onda, velocidade do som e número de Mach



- Balço de massa

$$-(\rho + d\rho)(-c - du)A - \rho cA = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{du}{c + du} \approx -\frac{du}{c} \quad (21)$$

- Balço de quantidade de movimento (19)

$$\rho cA[-c - (-c - du)] = pA - (p + dp)A$$

resolvendo em ordem a dp

$$dp = -\rho c du \quad (22)$$



Velocidade de propagação de onda, velocidade do som e número de Mach

- Substituindo (21) em (22)

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

- A razão $dp/d\rho$ é definida a entropia constante porque as variações de pressão e densidade são pequenas e, consequentemente, o processo é reversível.

- Da equação (16)

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (23)$$

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma RT \quad (24)$$

- Para escoamento incompressível $d\rho = 0$

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \infty$$



- Significado físico do número de Mach

- Razão de velocidades - medida da assimetria do escoamento

$$\text{Ma} = \frac{u}{c} \quad (25)$$

- Relação entre as forças de inércia e as forças elásticas

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{inercia}}}{F_{\text{elastica}}} &= \frac{\text{massa} \times \text{aceleração}}{\text{forças de pressão}} = \frac{(\rho L^3) (u^2/L)}{\rho L^2} = \frac{u^2}{p/\rho} \\ &\propto \frac{u^2}{\partial p / \partial \rho} = \frac{u^2}{c^2} = \text{Ma}^2 \end{aligned}$$



Regimes do escoamento (é uma definição **local**)

- Critério de escoamento incompressível

$$\text{Ma} = \frac{u}{c} \ll 1$$

- Escoamentos externos

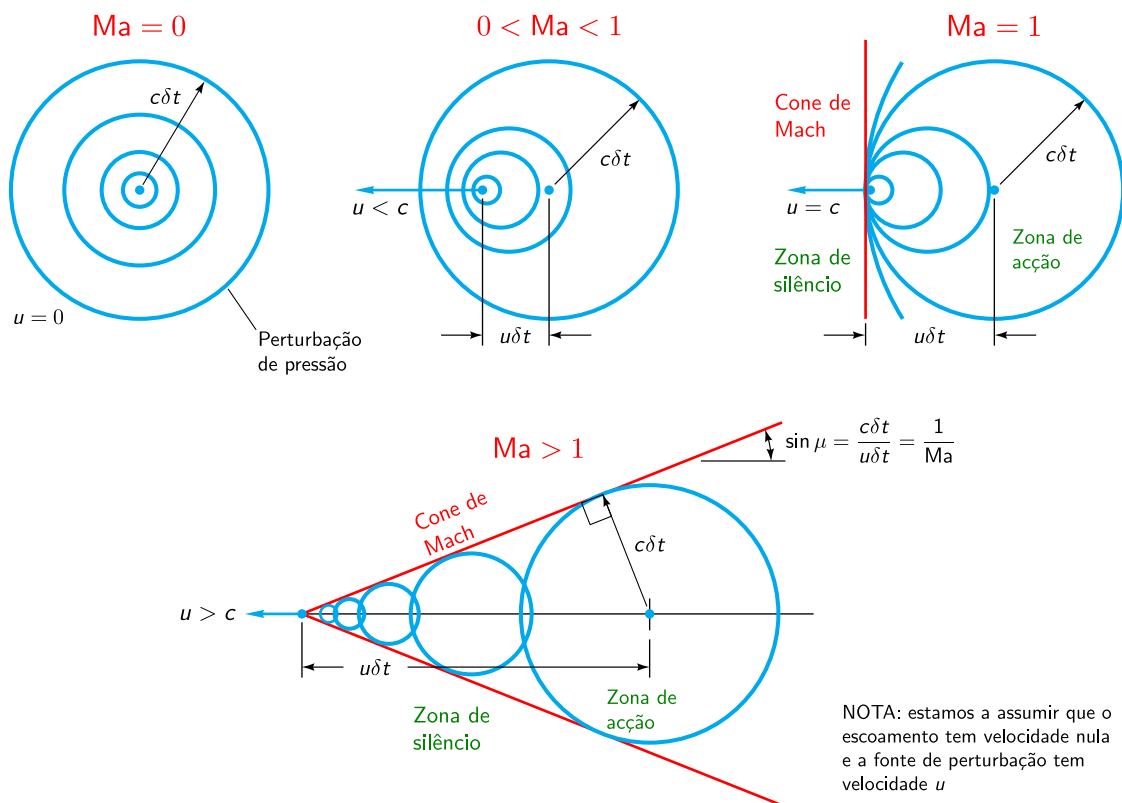
- incompressível $0.0 < \text{Ma} < 0.3$
- subsônico $0.3 < \text{Ma} < 0.8$
- transônico $0.8 < \text{Ma} < 1.2$
- supersônico $1.2 < \text{Ma} < 3.0$
- hipersônico $3.0 < \text{Ma}$

- Escoamentos internos

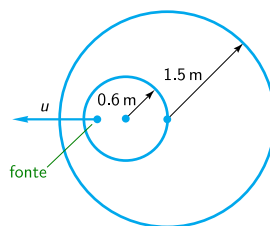
- subsônico $\text{Ma} < 1$
- supersônico $\text{Ma} > 1$



Velocidade de propagação de onda, velocidade do som e número de Mach



Exemplo



A figura mostra a posição de duas ondas sonoras geradas por uma partícula que se desloca a uma velocidade constante no ar em repouso, à temperatura de 20°C. Determine a velocidade da partícula.

$$c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 293} = 343.1 \text{ m/s}$$

$$\Delta x_{\text{onda}} = 1.5 - 0.6 = 0.9 \text{ m}$$

$$c = \frac{\Delta x_{\text{onda}}}{\Delta t}$$

$$u = \frac{\Delta x_{\text{fonte}}}{\Delta t} = \Delta x_{\text{fonte}} \frac{c}{\Delta x_{\text{onda}}} = 0.6 \frac{343.1}{0.9} = 228.7 \text{ m/s}$$



Exemplo

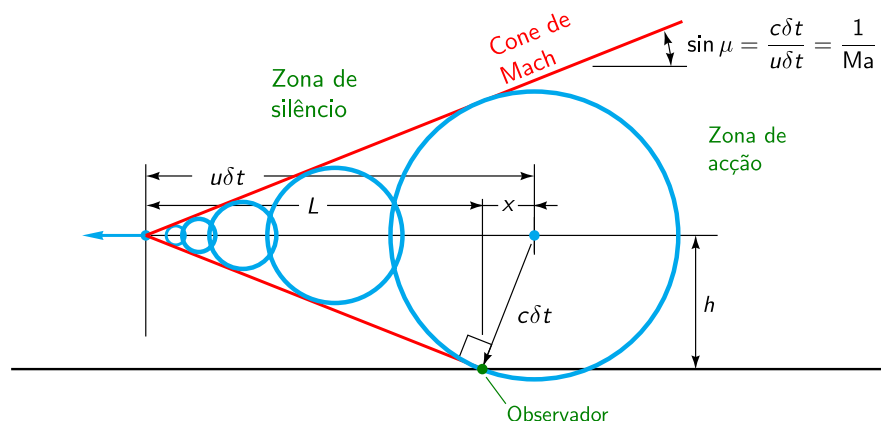
Um avião supersónico deslocando-se em linha recta a velocidade constante e a uma altitude de $h = 1.5$ km, passa por cima de um observador que só o ouve quando este se encontra já numa posição $L = 3$ km à sua frente.

Para simplificar, admita que o movimento do avião produz uma perturbação de pressão pontual, de pequena amplitude, e ignore a variação da velocidade do som com a altitude.

- Determine o número de Mach a que se desloca o avião e o ângulo de Mach da respectiva onda de pressão;
- A posição do avião quando este produziu o som ouvido em primeiro lugar pelo observador.



Exemplo



$$\mu = \arctan \frac{1.5}{3.0} = 26.5^\circ$$

$$Ma = \frac{1.0}{\sin \mu} = 2.24$$

$$x = h \tan \mu = 0.748 \text{ km}$$



Propriedades em condições de estagnação

- Propriedades que podem ser obtidas se o escoamento for desacelerado até à condição de velocidade zero num processo irreversível e adiabático
- **Entalpia de estagnação**

$$h_0 = \left(h + \frac{1}{2} u^2 \right)$$

da Eq. (20)

$$\left(h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) = q + w$$

$$h_{02} - h_{01} = q + w$$

- Para escoamento adiabático $q = w = 0$

$$T_1 + \frac{u_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{u_2^2}{2c_p} \quad (26)$$

$$h_0 = h_{02} = h_{01} \quad (27)$$



Propriedades em condições de estagnação

- Considerando 0 K como a temperatura de referência

$$h = c_p T$$

- Definindo a **temperatura de estagnação** T_0 como a temperatura que o escoamento atingiria se fosse desacelerado **adiabaticamente** até $u = 0$

$$h_0 = c_p T_0 = h + \frac{1}{2} u^2 \quad (28)$$

$$T_0 = T + \frac{1}{2c_p} u^2 \quad (29)$$

usando a definição de c_p , Eq. (7),

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{1}{2c_p T} u^2 = T + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{\gamma R T} u^2$$

- Com a definição de velocidade do som, Eq. (24), podemos escrever a **temperatura de estagnação** como

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 \quad (30)$$



- **Pressão de estagnação isentrópica** - se a desaceleração até condições de estagnação for **adiabática e isentrópica**, podemos usar a Eq. (14) para obter

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (31)$$

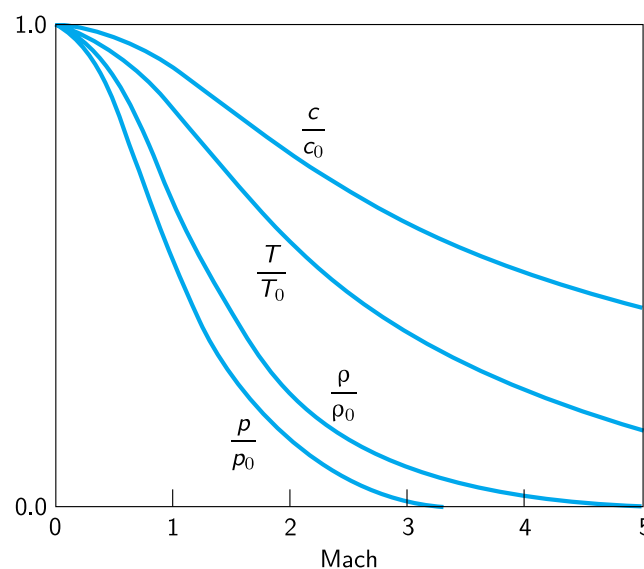
- **Massa volúmica de estagnação isentrópica** - usando a Eq. (16) obtemos

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (32)$$

- Usando (30)

$$\left(\frac{c_0}{c} \right)^2 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \quad (33)$$

Escoamento isentrópico



Exemplo

Considere um tubo de Pitot utilizado para a medição da velocidade de um avião subsônico. No caso da pressão total registada pelo tubo de Pitot ser 84 kPa e as condições de pressão e temperatura num ponto infinitamente a montante do avião serem respectivamente de 70 kPa e -50° , qual é a velocidade do avião.

Partindo da Eq. (29)

$$T_0 = T_1 + \frac{1}{2c_p} u_1^2 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2c_p(T_0 - T_1)} \quad (34)$$

Da Eq. (31) temos

$$T_0 = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 223 \left(\frac{84}{70} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 234.9 \text{ K}$$

logo

$$u_1 = \sqrt{2 \times 1005 \times (234.9 - 223)} = 154.7 \text{ m/s} \quad (35)$$



Escoamento isentrópico com variação de área

- Por definição de escoamento isentrópico $\Rightarrow ds = 0$

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} = 0$$

$$dh = \frac{dp}{\rho} \quad (36)$$

- Para escoamento adiabático $\Rightarrow h_0 = \text{const}$

$$dh_0 = d \left(h + \frac{1}{2} u^2 \right) = dh + u du = 0$$

$$dh = -u du \quad (37)$$

substituindo (37) em (36) e dividindo por u

$$\frac{dp}{\rho u^2} = -\frac{du}{u} \quad (38)$$



- da equação da continuidade

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

usando (38) e (23)

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho u^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} dp + \frac{dp}{\rho u^2} = -\frac{1}{\rho c^2} dp + \frac{dp}{\rho u^2}$$

$$dA = A(1 - \text{Ma}^2) \frac{dp}{\rho u^2}$$

usando outra vez (38)

$$dA = -A(1 - \text{Ma}^2) \frac{du}{u}$$

Escoamento isentrópico com variação de área

- Relações área-velocidade e área-pressão

$$\frac{dA}{du} = (\text{Ma}^2 - 1) \frac{A}{u} \quad (39)$$

$$\frac{dA}{dp} = -(\text{Ma}^2 - 1) \frac{A}{\rho u^2} \quad (40)$$

- Das Eqs. (39) e (40) podemos concluir que

- Para $\text{Ma} < 1$

$$\frac{dA}{dp} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{du} < 0$$

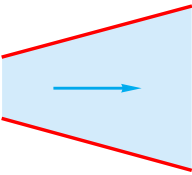
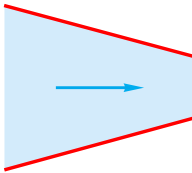
- Para $\text{Ma} = 1$ (condições sônicas \Rightarrow na área mínima)

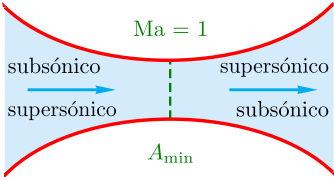
$$\frac{dA}{dp} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{du} = 0$$

- Para $\text{Ma} > 1$

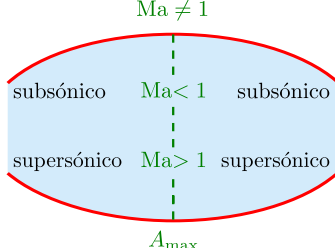
$$\frac{dA}{dp} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{du} > 0$$

Escoamento isentrópico com variação de área

Geometria	supersónico $Ma < 1$	supersónico $Ma > 1$
 $dA > 0$	$du < 0$ $dp > 0$ difusor	$du > 0$ $dp < 0$ tubeira
 $dA < 0$	$du > 0$ $dp < 0$ tubeira	$du < 0$ $dp > 0$ difusor



$Ma = 1$
 A_{min}



$Ma \neq 1$
 A_{max}

↺ ↻ ↻

Escoamento isentrópico com variação de área

- Caudal mássico por unidade de área

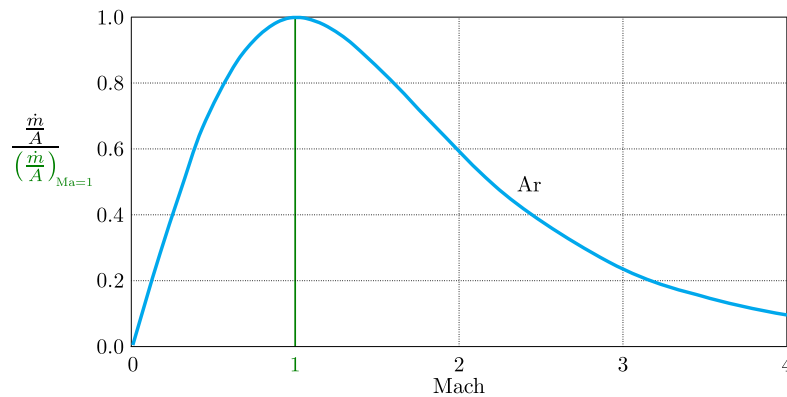
$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{m}}{A} &= \rho u = \frac{p}{RT} u \\
 &= \frac{u}{\sqrt{\gamma RT}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{p}{p_0} \\
 &= \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} Ma \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}
 \end{aligned}$$

resultando

$$\frac{\dot{m}}{A} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} Ma \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (41)$$

↺ ↻ ↻

Escoamento isentrópico com variação de área



- Da Eq. (41) verifica-se
 - Para um dado número Mach o caudal é proporcional a $p_0/\sqrt{T_0}$
 - Dadas as condições de estagnação T_0 e p_0 , o caudal mássico por unidade de área, \dot{m}/A , é máximo para $Ma = 1$

Escoamento isentrópico com variação de área

NOTA: Em escoamento isentrópico a pressão de estagnação é constante.

Seja p_{01} e p_{02} a pressão de estagnação nas secções 1 e 2

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{T_1}{T_{01}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1$$

porque $T_0 = T_{01} = T_{02}$ (ver Eq. da energia (27))

Valores críticos

- Fazendo $Ma = 1$ e usando $\gamma = 1.4$, obtemos para as Eqs. (30), (33), (31) e (32)

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{c^{*2}}{c_0^2} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0.8333 \quad (42)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.5283 \quad (43)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 0.6339 \quad (44)$$

- NOTA:** O asterisco como índice superior, *, indica que a propriedade é definida para condições sónicas $\Rightarrow Ma = 1$



Valores críticos

- Máximo caudal mássico por unidade de área

$$\frac{\dot{m}}{A^*} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}} \quad (45)$$

para ar $\gamma = 1.4$ e $R = 287 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$

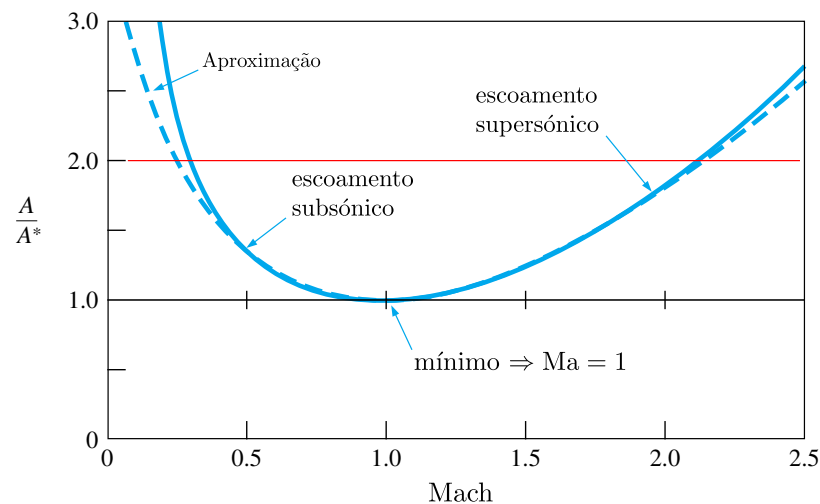
$$\frac{\dot{m}}{A^*} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} = 0.0404 \quad (46)$$

- É conveniente introduzir a definição de **razão de áreas**

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\left(\frac{\dot{m}}{A^*} \right)}{\left(\frac{\dot{m}}{A} \right)} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (47)$$



Valores críticos



Podemos aproximar a Eq. (47) por (ver [4])

$$Ma \approx \begin{cases} 1 - 0.88 \left(\ln \frac{A}{A^*} \right)^{0.45}, & Ma < 1 \text{ e } 1.0 < \frac{A}{A^*} < 1.34 \\ 1 + 1.2 \left(\frac{A}{A^*} - 1 \right)^{0.5}, & Ma > 1 \text{ e } 1.0 < \frac{A}{A^*} < 2.9 \end{cases} \quad (48)$$

↺ ↻ ↻

Velocidades de referência

- **Velocidade máxima** - partindo de (29), $T = 0$

$$u_{\max} = \sqrt{2c_p T_0} \quad (49)$$

- **Velocidade do som à temperatura de estagnação**

$$c_0 = \sqrt{\gamma R T_0} \quad (50)$$

- **velocidade crítica** $u^* = c^*$ - velocidade a número de Mach 1

$$u^* = c^* = \sqrt{\gamma R T^*} \quad (51)$$

onde a temperatura crítica é definida a $Ma = 1$ usando (30)

$$T^* = \frac{2T_0}{\gamma + 1} \quad (52)$$

↺ ↻ ↻

- Fazendo os rácios entre as três velocidades, para $\gamma = 1.4$, obtemos

$$\frac{c^*}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} = 0.913 \quad (53)$$

$$\frac{u_{\max}}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} = 2.24 \quad (54)$$

$$\frac{u_{\max}}{c^*} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 2.45 \quad (55)$$

Velocidades de referência

- Para um gás perfeito

$$c_p T = \frac{c_p}{\gamma R} \gamma R T = \frac{1}{\gamma - 1} c^2$$

- Equação da energia na forma cinética

$$h_0 = c_p T + \frac{1}{2} u^2$$

$$h_0 = \frac{1}{\gamma - 1} c^2 + \frac{1}{2} u^2 \quad (56)$$

$$h_0 = \frac{1}{2} u_{\max}^2 = \frac{1}{\gamma - 1} c_0^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c^{*2}$$

Exemplo

Considere um escoamento de ar num Venturi com uma área da garganta de $A_2 = 0.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, e uma área da entrada de $A_1 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

Sabendo que a pressão e a temperatura na entrada são $p_1 = 2.1 \times 10^6 \text{ Pa}$ e $T_1 = 590 \text{ K}$, e que a pressão na garganta é $p_2 = 1.68 \times 10^6 \text{ Pa}$, determine o caudal mássico escoado. Considere o escoamento isentrópico.

Resolução

- Podemos calcular imediatamente T_1 via a Eq. de estado (1)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 12.4 \text{ kg/s}$$

- Sendo um processo isentrópico

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}$$

- Como temos as áreas, usando a Eq. da continuidade (17) e as relações isentrópicas obtemos

$$\frac{u_2^2}{u_1^2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$



Exemplo

- Podemos agora calcular u_1 através do energia (26)

$$\frac{u_1^2}{2c_p} - \frac{u_2^2}{2c_p} = T_2 - T_1$$

$$\frac{u_2^2}{2c_p} \left(1 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\right) = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

- Consequentemente

$$\frac{u_1^2}{2c_p} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] = T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

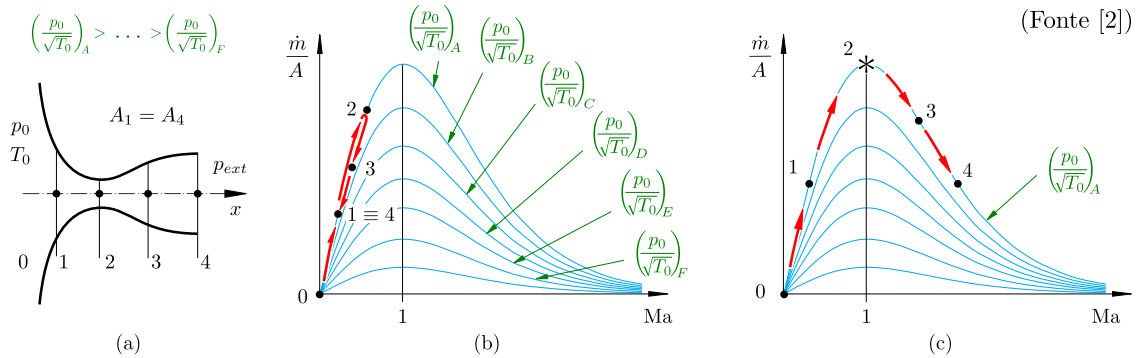
$$u_1^2 = 2c_p T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] \bigg/ \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] = 3481 \text{ (m/s)}^2$$

logo

$$u_1 = 59 \text{ m/s}$$

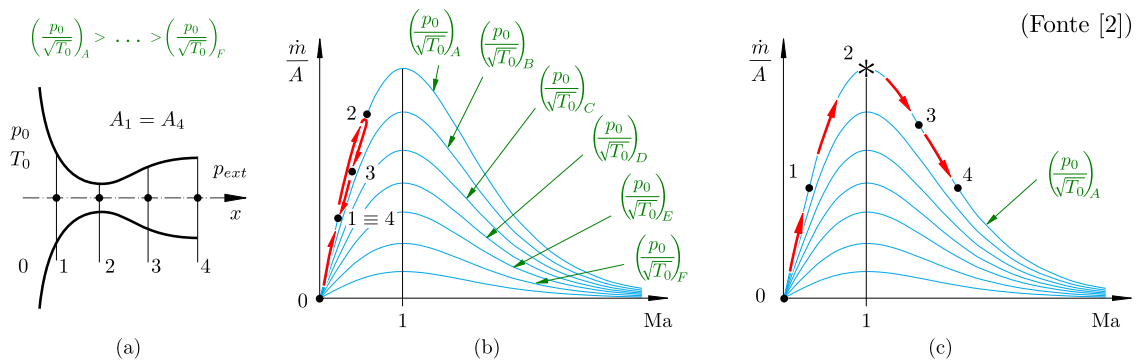
$$\dot{m} = \rho_1 A_1 u_1 = 1.75 \text{ kg/s}^{-1}$$



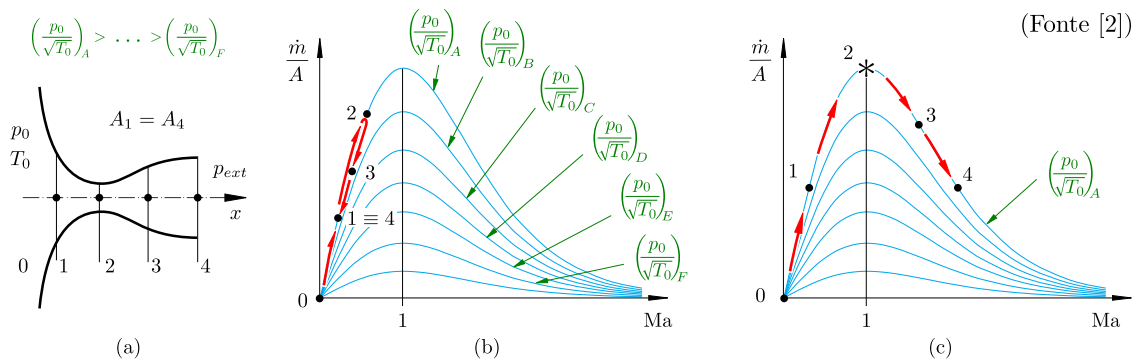


Consideremos as linhas de caudal mássico por unidade de área, $\dot{m}/A = \rho u$, representadas na figura para várias condições de estagnação isentrópicas $p_0/\sqrt{T_0}$

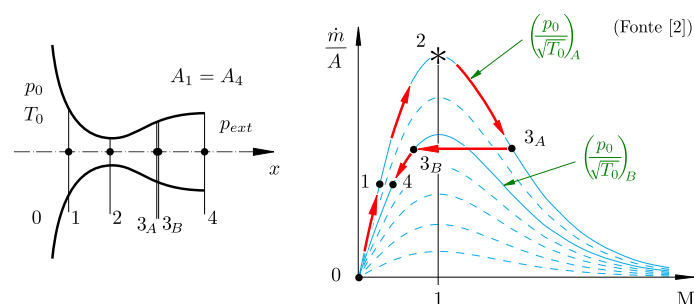
- Cada linha representa uma evolução isentrópica
- Fig. (b), a evolução 0-1-2 é uma aceleração isentrópica seguida de uma desaceleração 2-3-4 por aumento de área
- Sendo o processo isentrópico e $A_1 = A_4 \Rightarrow \Rightarrow Ma_1 = Ma_4$



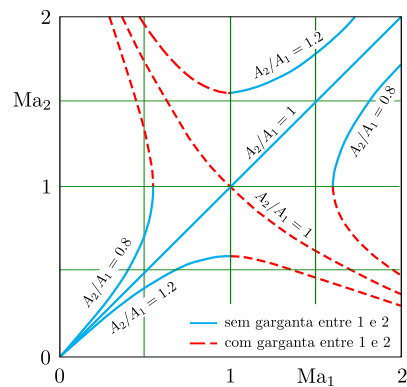
- Enquanto $Ma < 1$ a diminuição de área apenas altera o número de Mach sem afectar \dot{m}/A
- Se a contração de área diminui ainda mais, atingimos $Ma = 1$ e, com aquelas condições $p_0/\sqrt{T_0}$, já não é possível aumentar mais \dot{m}/A
- O caudal mássico fica **controlado na secção 2**, $Ma_2 = 1$, por causa da área A_2 e pela impossibilidade de ultrapassar $\dot{m} = (\dot{m}/A) \cdot A_2$



- Depois de uma secção sónica 2, o alargamento pode seguir uma evolução subsónica, Fig. (b), ou supersónica, Fig. (c)
- De acordo com o slide 32, o efeito na velocidade é oposto em subsónico e supersónico



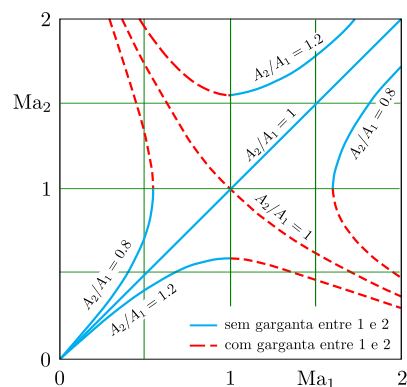
- Depois de uma secção sónica 2, se o alargamento seguir uma evolução supersónica pode ocorrer uma onda de choque, secção 3
- $A_{3A} = A_{3B}$ mas o escoamento passa de supersónico a subsónico com diminuição da condição de estagnação isentrópica
 $(p_0/\sqrt{T_0})_{3A} > (p_0/\sqrt{T_0})_{3B}$
- A condição de estagnação isentrópica só se altera na onda de choque
- O escoamento é isentrópico entre 1-3A e entre 3B-4
- Este assunto será tratado na secção de “onda de choque normal”



- Podemos ainda definir

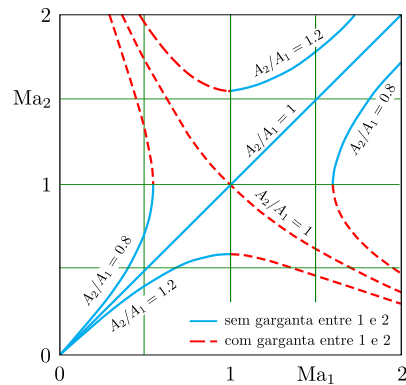
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\left(\frac{\dot{m}}{A_1}\right)}{\left(\frac{\dot{m}}{A_2}\right)} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)Ma_2^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (57)$$

- A função (57) está representada na figura acima



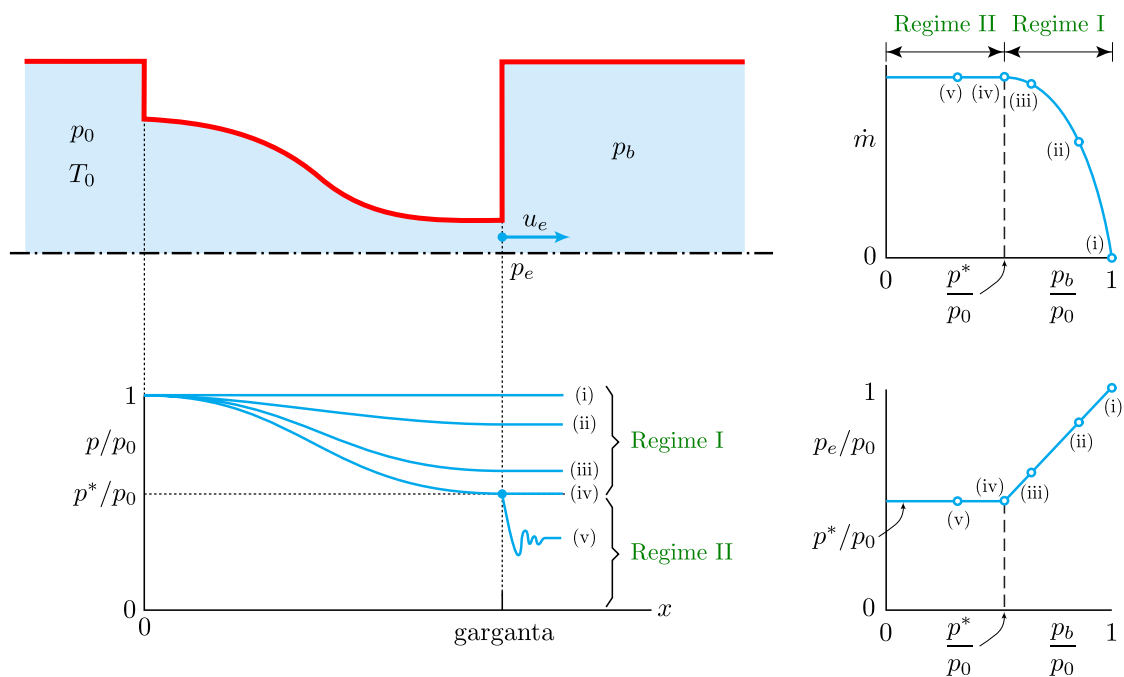
- Para um dado Ma_1 e A_2/A_1 temos dois valores possíveis para Ma_2 , um subsónico e outro supersónico
- A ocorrência de um caso ou de outro depende da existência ou não de uma garganta entre as secções 1 e 2
- Se não há garganta entre 1 e 2 \Rightarrow solução subsónica em 2 (ver slide 33)
- Se há garganta entre 1 e 2 \Rightarrow solução é subsónica ou supersónica dependendo da razão de pressões entre a entrada e a saída



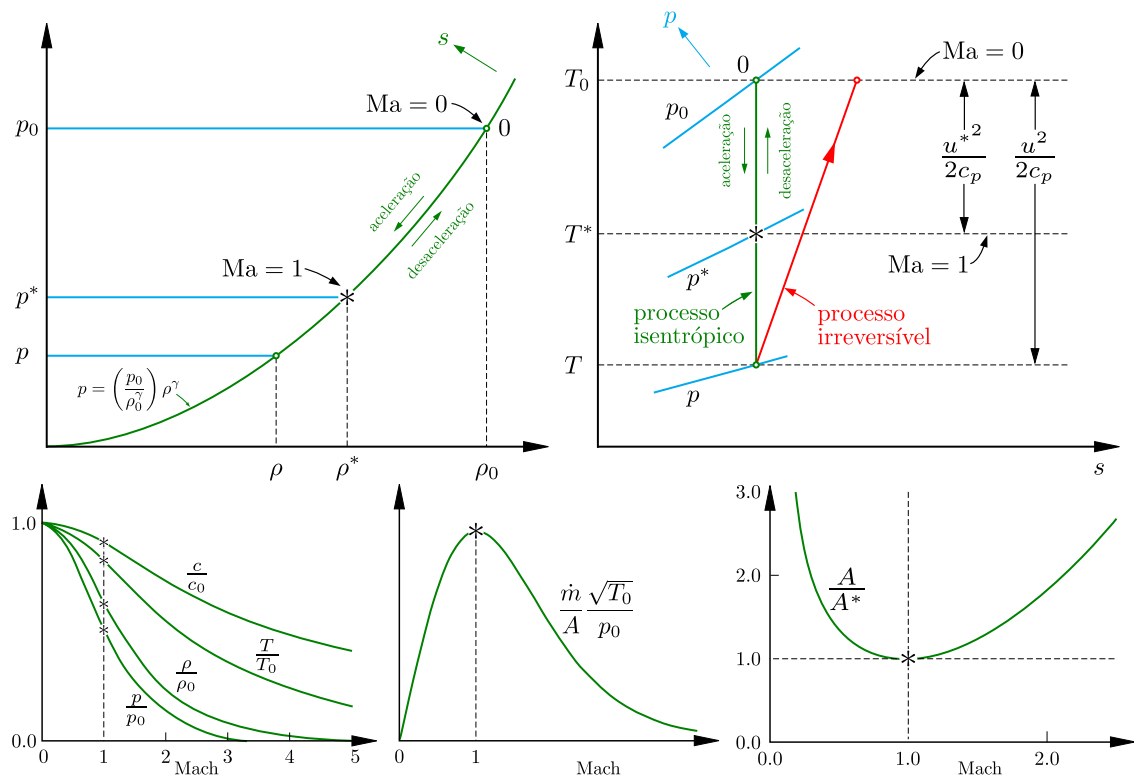


- Se não existe solução $Ma_2 \Rightarrow$ a área A_2 é menor que A_1 e o escoamento está bloqueado
- Se especificamos as condições na secção 1 então existe uma secção A_2 mínima para escoar este caudal

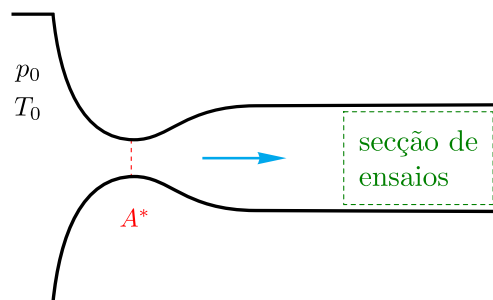
Escoamento isentrópico numa tubeira convergente



Escoamento isentrópico



Exemplo



Consideremos o túnel supersônico representado na figura.

A pressão e a temperatura de estagnação do ar no reservatório são $p_0 = 4 \times 10^5$ Pa e $T_0 = 293$ K.

Determine a área da secção de ensaios bem como as propriedades do escoamento p , ρ , T e \dot{m} que aí se verificam.

Considere que o número de Mach nessa secção é $Ma = 2.4$ e a área da garganta a montante é de $A^* = 0.12$ m².

Usando a Eq. (47) obtemos

$$A = A^* \frac{1}{Ma} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 0.2884 \text{ m}^2$$

Exemplo

Assumindo escoamento isentrópico de (30)

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 = 2.152 \Rightarrow T = 136.15 \text{ K}$$

Usando (31)

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 14.62 \Rightarrow p = 27360 \text{ Pa}$$

Da equação de estado dos gases perfeitos (1)

$$\rho = \frac{p}{RT} = 0.7 \text{ kg/m}^3$$

Da definição de número de Mach

$$u = c \text{Ma} = \sqrt{\gamma RT} \text{Ma} = 561.34 \text{ m/s}$$

logo

$$\dot{m} = \rho u A = 113.34 \text{ kg/s}$$



Exemplo

Considere um escoamento de ar numa tubeira convergente. As condições de estagnação à entrada são de $p_0 = 1.0 \text{ MPa}$ e $T_0 = 333 \text{ K}$ e à saída a pressão estática é de $p_2 = 591 \text{ kPa}$. A área de saída é de $A_2 = 0.001 \text{ m}^2$. Calcule o número de Mach à saída e o caudal mássico. Considere o escoamento isentrópico.

Resolução

- Vamos verificar se o escoamento está bloqueado na garganta ($\text{Ma}_2 = 1$). Para isso basta garantir que a razão entre p_1 e p_0 é maior que a razão entre a pressão crítica p^* e p_0 (ver slide 49 e Eq. (43))

$$\frac{p_2}{p_0} = 0.591 > \frac{p^*}{p_0} = 0.5283$$



Exemplo

- Usando a relação isentrópica (31), podemos obter explicitamente Ma_1

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_2^2 = \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

$$Ma_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right]} = 0.9$$

- Para calcular o caudal basta aplicar a Eq. (41)

$$\dot{m} = A_2 \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} Ma_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_2^2 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 2.195 \text{ kg/s}$$



Exemplo

- Resolução alternativa. O caudal mássico é dado por

$$\dot{m} = \rho_2 u_2 A_2 = \rho_2 c_2 Ma_2 A_2 = \frac{p_2}{RT_2} \sqrt{\gamma RT_2} Ma_2 A_2$$

- Como sabemos p_2 e Ma_2 basta calcular a temperatura T_2 usando a relação adiabática (30)

$$T_2 = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_2^2} = 286.5 \text{ K}$$

logo

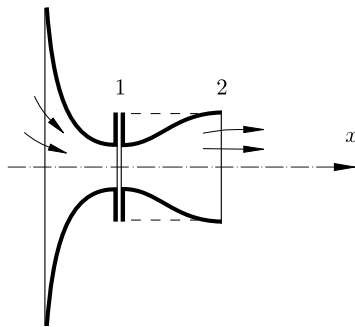
$$\dot{m} = 2.195 \text{ kg/s}$$



Exemplo (ver [2])

Um depósito pressurizado descarrega ar para a atmosfera através de uma tubeira convergente-divergente, representada na figura. O escoamento é crítico na garganta (secção 1) e supersónico à saída (secção 2). Pretende-se:

- a) a pressão do depósito
- b) a temperatura do ar à saída



Dados:

$$A_1 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = 10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

temperatura no depósito: 293 K

$$p_2 = p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$$



Exemplo (ver [2])

- Como referido no enunciado, o escoamento é crítico em 1. Com a razão de áreas

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{A_2}{A_1} = 2$$

podemos calcular Ma_2 usando a aproximação (48)

$$Ma_2 = 1 + 1.2 \left(\frac{A_2}{A^*} - 1 \right)^{0.5} = 2.2$$

Notar que existe também um escoamento subsónico para a mesma razão de áreas.



Exemplo (ver [2])

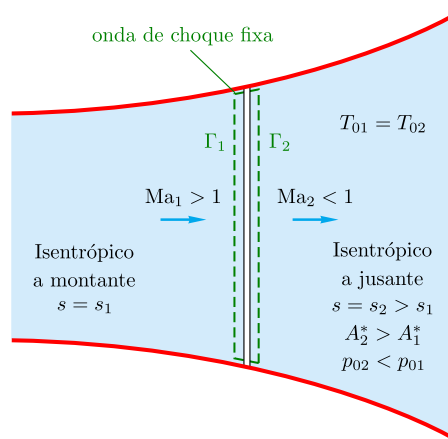
- Como sabemos Ma_2 e p_2 podemos usar (31) para calcular

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.065 \times 10^6 \text{ Pa}$$

- Sabendo a temperatura de estagnação T_0 e Ma_2 podemos calcular com (30)

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2} = 149.1 \text{ K} = -124^\circ \text{ C!}$$

Onda de choque normal num gás perfeito



- $\Delta x \simeq 0.2 \times 10^{-6} \text{ m} \simeq 0.2 \mu\text{m}$
(3 a 4 vezes o percurso livre médio das moléculas do fluido)
- Como $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow A_1 = A_2$

Onda de choque normal num gás perfeito

- Conservação da energia

$$h_0 = h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2$$

ou

$$T_0 = T_{02} = T_{01}$$

- Todas as expressões para escoamento adiabático se aplicam na onda de choque normal
- Os estados 1 e 2 tem a mesma T^* , c^* e c_0
- Usando as relações adiabáticas entre T e T_0

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_2^2} \quad (57)$$



Onda de choque normal num gás perfeito

- Combinando a Eq. de estado e a equação da Eq. da continuidade com $A_1 = A_2$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{u_1}{u_2}$$

- Usando a definição de Ma

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{Ma_2}{Ma_1} \frac{c_2}{c_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{Ma_2}{Ma_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

- Simplificando

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

- Utilizando a Eq. (57) resulta

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_2^2}} \quad (58)$$



Onda de choque normal num gás perfeito

- Conservação da quantidade de movimento

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (59)$$

sabendo que

$$\rho u^2 = \rho \frac{u^2}{a^2} \gamma R T = \gamma p \text{Ma}^2$$

logo

$$p_1 + \gamma p_1 \text{Ma}_1^2 = p_2 + \gamma p_2 \text{Ma}_2^2$$

ou

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma \text{Ma}_1^2}{1 + \gamma \text{Ma}_2^2} \quad (60)$$



Onda de choque normal num gás perfeito

- Combinando a Eq. (58) com a Eq. (60)

$$\frac{\text{Ma}_1 \sqrt{2 + (\gamma - 1) \text{Ma}_1^2}}{1 + \gamma \text{Ma}_1^2} = \frac{\text{Ma}_2 \sqrt{2 + (\gamma - 1) \text{Ma}_2^2}}{1 + \gamma \text{Ma}_2^2} \quad (61)$$

Resolvendo a Eq. (61) em ordem a Ma_2 obtemos duas soluções

$$\text{Ma}_2 = \text{Ma}_1$$

$$\text{Ma}_2^2 = \frac{(\gamma - 1) \text{Ma}_1^2 + 2}{2\gamma \text{Ma}_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (62)$$

- A primeira solução expressa que não houve onda de choque (estado 1 = estado 2)
- A segunda mostra que numa onda de choque existe uma relação descontínua entre o estado 1 e o estado 2



Onda de choque normal num gás perfeito

- Substituindo a Eq. (62) na Eq. (60)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \text{Ma}_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (63)$$

- Substituindo a Eq. (62) na Eq. (57)

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (\gamma-1)\text{Ma}_1^2] \frac{2\gamma\text{Ma}_1^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)^2\text{Ma}_1^2} \quad (64)$$

- Usando (1), em termos de massas volúmicas temos

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{(\gamma+1)\text{Ma}_1^2}{(\gamma-1)\text{Ma}_1^2 + 2} \quad (65)$$



Onda de choque normal num gás perfeito

- Conservação da quantidade de movimento

$$p_1 - p_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1) \quad (66)$$

- Conservação da energia

$$h_0 = h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2$$

logo

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (u_2 - u_1) (u_1 + u_2)$$

- Eliminando u_1 e u_2 (conhecida como Eq. de Rankine-Hugoniot)

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \left(\frac{V_1}{\rho_1 V_1} + \frac{V_2}{\rho_2 V_2} \right) = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

- Esta eq. relaciona o estado termodinâmico 1 com o 2 sem utilizar a eq. de estado.



Onda de choque normal num gás perfeito

- Usando (1) e (7)

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{R\rho_2} - \frac{p_1}{R\rho_1} \right)$$

logo

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

donde

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta \frac{p_2}{p_1}}{\beta + \frac{p_2}{p_1}} \quad (67)$$

com

$$\beta = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

- Comparação com a equação de uma evolução isentrópica

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (68)$$



Onda de choque normal num gás perfeito

- Escrevendo a Eq. (13) em termos de massas volúmicas

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (69)$$

- Para $\gamma = 1,4$

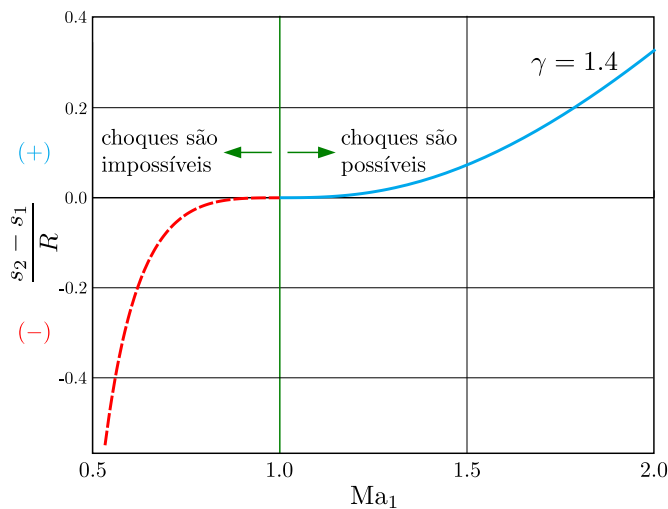
$\frac{p_2}{p_1}$	ρ_2/ρ_1		$\frac{s_2 - s_1}{c_v}$
	Eq. (67)	Isentrópico, Eq. (68)	
0,5	0,61540	0,60950	-0,01340
0,9	0,92750	0,92750	-0,00005
1,0	1,00000	1,00000	0,00000
1,1	1,00704	1,00705	0,00004
1,5	1,33333	1,33590	0,00270
2,0	1,62500	1,64070	0,01340

- As ondas de choque para $p_2/p_1 < 2$ são quase isentrópicas
- $p_2/p_1 < 1 \Rightarrow s_2 < s_1 \Rightarrow$ **não respeita 2ª Lei da Termodinâmica!**
- Numa onda de choque temos sempre $p_2 > p_1$



Onda de choque normal num gás perfeito

Relações em termos do número de Mach



- Combinando a Eq. (11) com as Eqs. (63) e (65) resulta

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{2}{(\gamma + 1) Ma_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] + \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \quad (70)$$

↺ ↻ ↻

Onda de choque normal num gás perfeito

Relações em termos do número de Mach

- Usando a Eq. (56)

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

- Rearranjando, vem

$$\frac{a_1^2}{u_2^2} + \frac{u_1^2}{u_2^2} \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{a_2^2}{u_2^2} + \frac{\gamma - 1}{2}$$

$$\frac{u_1^2}{u_2^2} \left(\frac{1}{M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \right) = \frac{1}{M_2^2} + \frac{\gamma - 1}{2}$$

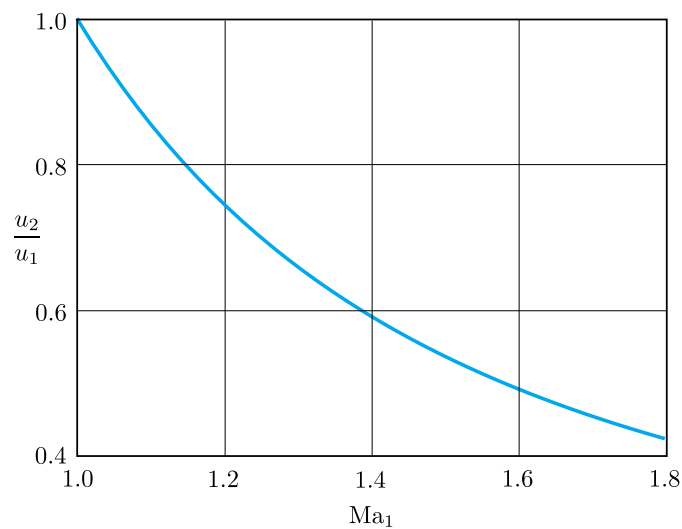
- Usando (62) resulta

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{(\gamma - 1) Ma_1^2 + 2}{(\gamma + 1) Ma_1^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (71)$$

↺ ↻ ↻

Onda de choque normal num gás perfeito

Relação entre as velocidades numa onda de choque



- Gráfico da função (71)

↶ ↷ ↺ ↻

Onda de choque normal num gás perfeito

Resumo da variação das propriedades numa onda de choque normal

$$T_{02} = T_{01}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[2 + (\gamma - 1) Ma_1^2 \right] \frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 Ma_1^2} \quad (\text{da Eq. 64})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (\text{da Eq. 63})$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2} \quad (\text{das Eqs. 65 e 71})$$

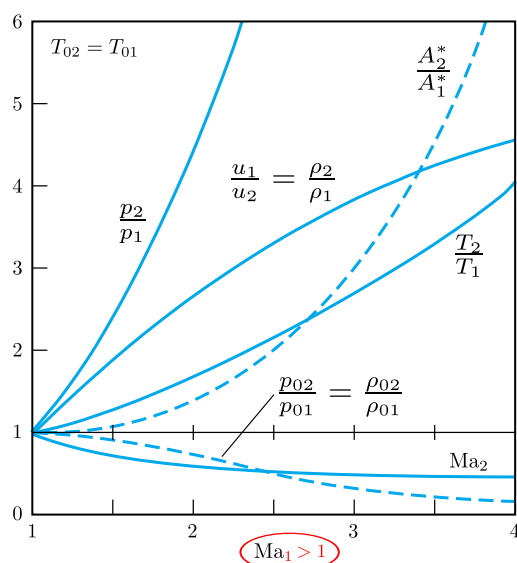
$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma + 1) Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (72)$$

$$Ma_2^2 = \frac{(\gamma - 1) Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (\text{da Eq. 62})$$

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_2^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (73)$$

↶ ↷ ↺ ↻

Onda de choque normal num gás perfeito



Tabelas de escoamento compressível

Relações isentrópicas com $\gamma = 1.4$ (ver, por exemplo, White [4])

Appendix B Compressible-Flow Tables

Table B.1
Isentropic Flow
of a Perfect
Gas, $\gamma = 1.4$

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*	Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0.0	1.0	1.0	1.0	∞	0.74	0.6951	0.7712	0.9013	1.0681
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9421	0.76	0.6821	0.7609	0.8964	1.0570
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4815	0.78	0.6690	0.7505	0.8915	1.0471
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6659	0.8	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2616	0.82	0.6430	0.7295	0.8815	1.0305
0.1	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218	0.84	0.6300	0.7189	0.8763	1.0237
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	4.8643	0.86	0.6170	0.7083	0.8711	1.0179
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	4.1824	0.88	0.6041	0.6977	0.8659	1.0129
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	3.6727	0.9	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	1.0056
0.2	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	1.0031
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	1.0014
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	1.0003
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173	1.0	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656	1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0003
0.3	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351	1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0013



Appendix B Compressible-Flow Tables

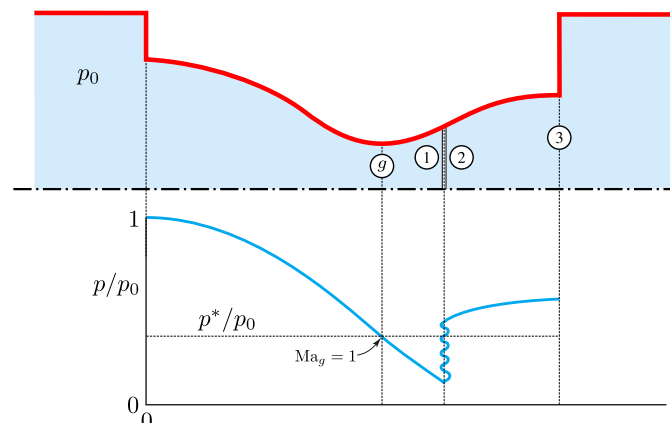
Table B.2 Normal-Shock Relations
for a Perfect Gas, $\gamma = 1.4$

Ma_{n1}	Ma_{n2}	p_2/p_1	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A_2^*/A_1^*
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.9805	1.0471	1.0334	1.0132	1.0000	1.0000
1.04	0.9620	1.0952	1.0671	1.0263	0.9999	1.0001
1.06	0.9444	1.1442	1.1009	1.0393	0.9998	1.0002
1.08	0.9277	1.1941	1.1349	1.0522	0.9994	1.0006
1.1	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	1.0011
1.12	0.8966	1.2968	1.2034	1.0776	0.9982	1.0018
1.14	0.8820	1.3495	1.2378	1.0903	0.9973	1.0027
1.16	0.8682	1.4032	1.2723	1.1029	0.9961	1.0040
1.18	0.8549	1.4578	1.3069	1.1154	0.9946	1.0055
1.2	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	1.0073
1.22	0.8300	1.5698	1.3764	1.1405	0.9907	1.0094
1.24	0.8183	1.6272	1.4112	1.1531	0.9884	1.0118

Exemplo

Ar entra numa tubeira convergente-divergente com uma pressão de estagnação de 1200 kPa. Observa-se que existe uma onda de choque na zona divergente onde o número de Mach é de $Ma_1 = 2$.

1. Determine a razão de áreas entre a secção 1 e a secção da garganta.
2. Se a razão de áreas entre a secção 3 e a garganta for 4, calcule o número de Mach e a pressão estática à saída.



Exemplo

Resolução

- Como $Ma_2 > 1$ sabemos que na garganta temos escoamento bloqueado, donde $A_g = A_1^*$
- Da Eq. (47)

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \frac{1}{Ma_1} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 1.6875$$

- Usando a tabela de escoamento isentrópico

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
1.98	0.1318	0.2352	0.5605	1.6597
2.0	0.1278	0.2300	0.5556	1.6875
2.02	0.1239	0.2250	0.5506	1.7160



Exemplo

- Usando a tabela das ondas de choque normais

Ma_{n1}	Ma_{n2}	p_2/p_1	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A_2^*/A_1^*
1.98	0.5808	4.4071	2.6369	1.6713	0.7302	1.3695
2.0	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	1.3872
2.02	0.5740	4.5938	2.6962	1.7038	0.7115	1.4054

ficamos a saber $Ma_2 = 0.5774$, $p_{02}/p_{01} = 0.7209$ e $A_2^*/A_1^* = 1.3872$

- Pressão de saída ($p_{03} = p_{02}$)

$$p_3 = \frac{p_3}{p_{02}} \frac{p_{02}}{p_{01}} p_{01} \quad (74)$$

precisamos de saber p_3/p_{03}

- Da razão de áreas

$$\frac{A_3}{A_2^*} = \frac{A_3}{A_1^*} \frac{A_1^*}{A_2^*} = 4 \times \frac{1}{1.3872} = 2.8835$$



Exemplo

- Com a razão de área A_3/A_2^* podemos determinar Ma_3 e p_{02}/p_3 das tabelas isentrópicas

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779
0.2	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956

Obviamente depois de uma onda de choque escolhemos a solução subsônica (ver slide 39)

- Interpolando o número de Mach, seja

$$\alpha = \frac{2.8835 - 2.9635}{2.7076 - 2.9635} = 0.313$$

logo

$$Ma_3 = 0.2 (1 - \alpha) + 0.22 \alpha = 0.206$$



Exemplo

- Do mesmo modo, interpolando a razão de pressões

$$\frac{p_3}{p_{02}} = 0.9725 (1 - \alpha) + 0.9668 \alpha = 0.9707$$

- Substituindo em (74)

$$p_3 = 0.9707 \times 0.7209 \times 1200 = 839.7 \text{ kPa}$$

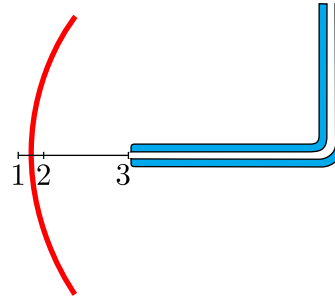


Exemplo

Considere um tubo de Pitot num escoamento supersônico. Métodos ópticos de observação do escoamento mostram que se forma uma onda de choque à frente da tomada de pressão total de tubo.

Mostre que, nestas circunstâncias, o número de Mach, Ma_1 , do escoamento está relacionado com a pressão estática do escoamento, antes da onda de choque, p_1 , e com a pressão total registada pelo tubo de Pitot, p_{02} , através da seguinte expressão (Eq. de Rayleigh do tubo de Pitot)

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left[\frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$



NOTA: Esta expressão mostra que para calcular a velocidade do avião, em escoamento supersônico, é necessário determinar Ma_1 iterativamente e, para além disso, também é preciso medir a temperatura T_1 para calcular a velocidade.



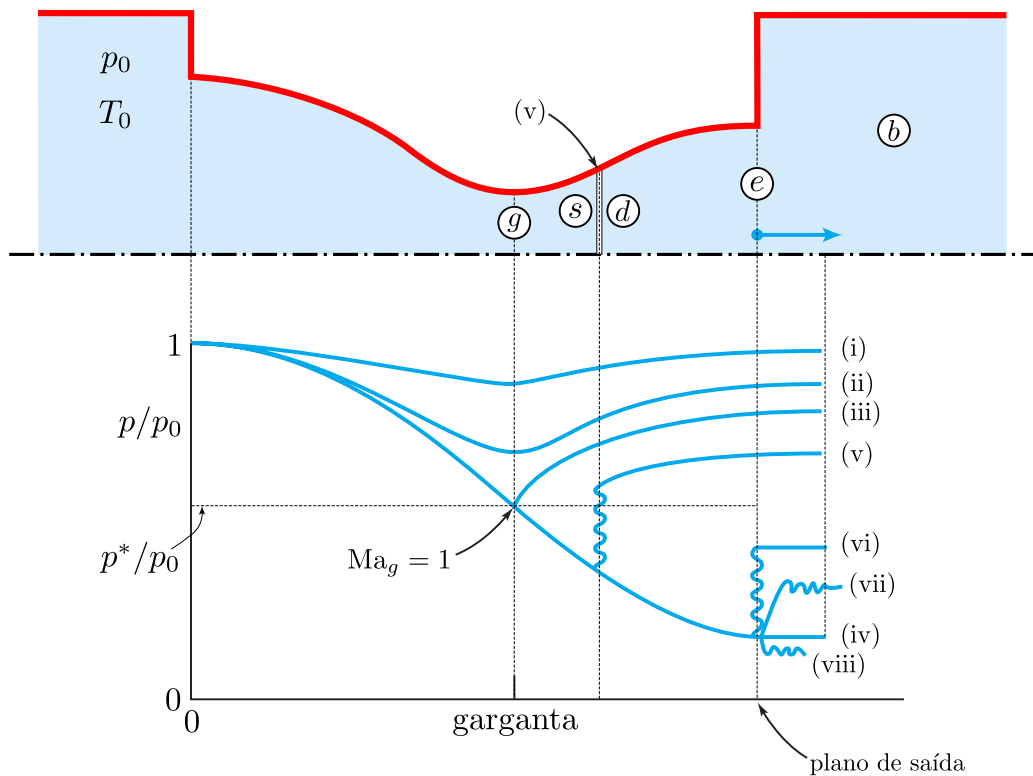
Exemplo

Resolução

- Sabemos que $p_3 = p_{02}$
- $\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{p_{01}}{p_1}$
- $\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ Isentrópico entre 1-2
- $\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma+1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$ Onda de choque
- $\frac{p_{02}}{p_1} = \left[\frac{(\gamma+1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\frac{2 + (\gamma-1) Ma_1^2}{2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
- Após manipulação algébrica obtem-se o resultado pretendido.



Posição da onda de choque num tubeira convergente/divergente



↺ ↻ ↻

Posição da onda de choque num tubeira convergente/divergente

- A posição da onda de choque é aquela que garanta que a pressão de saída resultante é a imposta p_e
- O método de cálculo consiste em iterar a área $A_s = A_d$ tal que à saída resulte p_e
- Condição necessária, mas não suficiente, para haver onda de choque $Ma_t = 1$ e $Ma_s > 1$

↺ ↻ ↻

Algoritmo de cálculo da posição da onda de choque num tubeira convergente/divergente

1. Com os dados do problema calcular $r_{0s}^e = \frac{p_e}{p_{0s}}$
2. **Estimar** A_s , por tentativa e erro, e calcular $\frac{A_s}{A_s^*}$
NOTA: $Ma_t = 1 \Rightarrow A_s^* = A_t$
3. $Ma_s = Ma_s \left(\frac{A_s}{A_s^*} \right)$ sendo $\frac{A_s}{A_s^*} = \frac{1}{Ma_s} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} Ma_s^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$



Posição da onda de choque num tubeira convergente/divergente

4. $Ma_d = \sqrt{\frac{(\gamma - 1) Ma_s^2 + 2}{2\gamma Ma_s^2 - (\gamma - 1)}}$
 $\frac{p_{0d}}{p_{0s}} = \left[\frac{(\gamma + 1) Ma_s^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_s^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_s^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$
 $\frac{A_d^*}{A_s^*} = \frac{Ma_d}{Ma_s} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) Ma_s^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_d^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$
5. $\frac{A_e}{A_d^*} = \frac{A_e}{A_s} \frac{A_s}{A_s^*} \left(\frac{A_d^*}{A_s^*} \right)^{-1}$ **NOTA:** $A_s = A_d$



$$6. \text{Ma}_e = \text{Ma}_e \left(\frac{A_e}{A_d^*} \right) \text{ sendo } \frac{A_e}{A_d^*} = \frac{1}{\text{Ma}_e} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} \text{Ma}_e^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_{0d}}{p_e} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$7. \frac{p_e}{p_{0s}} = \left(\frac{p_{0d}}{p_e} \right)^{-1} \frac{p_{0d}}{p_{0s}}$$

8. Se $\frac{p_e}{p_{0s}} \approx r_{0s}^e$ parar, de outro modo, ir para 2.



Exemplo

Considere um escoamento de ar numa tubeira convergente/divergente. Na secção de entrada da tubeira, i , temos $\text{Ma}_i = 0.50$, $p_i = 280 \text{ kPa}$ e $T_i = 10^\circ \text{ C}$. A área da garganta é de $A_t = 6.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ a área na secção de saída, e , é de $A_e = 4A_t$. Se a pressão de saída é de $p_e = 170 \text{ kPa}$, determine Ma_e , T_e e a área no ponto onde ocorre a onda de choque normal.

Resolução

Usando o algoritmo apresentado no slide 83 passo a passo resulta:

$$1. \text{ Com os dados do problema calcular } r_{0s}^e = \frac{p_e}{p_{0s}}$$

Seja s e d as secções imediatamente a montante e jusante da onda de choque, ver Fig. do slide 81. As condições isentrópicas a montante da onda de choque são

$$\frac{T_{0s}}{T_i} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}_i^2 = 1.050$$

$$\frac{p_{0s}}{p_i} = \left(\frac{T_{0s}}{T_i} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.186$$



Exemplo

logo

$$T_{0s} = \left(\frac{T_{0s}}{T_i} \right) T_i = 297.2 \text{ K}$$

$$p_{0s} = \left(\frac{p_{0s}}{p_i} \right) p_i = 332.1 \text{ kPa}$$

vindo

$$r_{0s}^e = \frac{p_e}{p_{0s}} = 0.512$$

2. **Estimar** A_s , por tentativa e erro, e calcular $\frac{A_s}{A_s^*}$

Vamos considerar como primeira aproximação

$$A_s = 0.00159 \text{ m}^2 \Rightarrow A_s/A_s^* = A_s/A_t = 2.45$$



Exemplo

3. $\text{Ma}_s = \text{Ma}_s \left(\frac{A_s}{A_s^*} \right)$ sendo $\frac{A_s}{A_s^*} = \frac{1}{\text{Ma}_s} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} \text{Ma}_s^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$

Usando a tabela de relações isentrópicas

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
2.42	0.0663	0.1439	0.4606	2.4479
2.44	0.0643	0.1408	0.4565	2.4936

considerando que $2.45 \approx 2.4479$ obtemos $\text{Ma}_s = 2.42$



Exemplo

$$4. \text{Ma}_d = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)\text{Ma}_s^2 + 2}{2\gamma\text{Ma}_s^2 - (\gamma - 1)}}$$

$$\frac{p_{0d}}{p_{0s}} = \left[\frac{(\gamma + 1)\text{Ma}_s^2}{2 + (\gamma - 1)\text{Ma}_s^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\text{Ma}_s^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{A_s^*}{A_d^*} = \frac{\text{Ma}_s}{\text{Ma}_d} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)\text{Ma}_d^2}{2 + (\gamma - 1)\text{Ma}_s^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

Usando a tabela de relações de onda de choque normal

Ma_{n1}	Ma_{n2}	p_2/p_1	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A_2^*/A_1^*
2.4	0.5231	6.5533	3.2119	2.0403	0.5401	1.8514
2.42	0.5210	6.6658	3.2367	2.0595	0.5317	1.8806
2.44	0.5189	6.7792	3.2612	2.0788	0.5234	1.9105

donde $\text{Ma}_d = 0.5210$, $p_{0d}/p_{0s} = 0.5317$ e $A_d^*/A_s^* = 1.8806$



Exemplo

$$5. \frac{A_e}{A_d^*} = \frac{A_e}{A_s} \frac{A_s}{A_s^*} \left(\frac{A_d^*}{A_s^*} \right)^{-1} = \frac{4 \times 6.5 \times 10^{-4}}{0.00159} \times 2.45 \times (1.8806)^{-1} = 2.13$$

$$6. \text{Ma}_e = \text{Ma}_e \left(\frac{A_e}{A_d^*} \right) \text{ sendo } \frac{A_e}{A_d^*} = \frac{1}{\text{Ma}_e} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} \text{Ma}_e^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{p_{0d}}{p_e} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Usando a tabela de relações isentrópicas, lembrando que estamos a jusante da onda de choque $\Rightarrow \text{Ma}_e < 1$,

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656
0.3	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351
0.32	0.9315	0.9506	0.9799	1.9219

donde, por interpolação linear da tabela $\text{Ma}_e = 0.285$ e $p_e/p_{0d} = 0.945$.



Exemplo

$$7. \frac{p_e}{p_{0s}} = \left(\frac{p_{0d}}{p_e} \right)^{-1} \frac{p_{0d}}{p_{0s}} = 0.945 \times 0.5317 = 0.502$$

8. Como $\frac{p_e}{p_{0s}} < r_{0s}^e = 0.512$ poderíamos fazer outra iteração, indo para 2., com uma área A_s menor para chegarmos à saída da tubeira com uma pressão p_e maior.

9. Com mais duas iterações chegamos ao resultado final de $A_s = 0.00156 \text{ m}^2$, $\text{Ma}_e = 0.279$ e $T_e = 292.5 \text{ K}$.