Lenguajes de Programación 2020-1
Facultad de Ciencias UNAM
Ejercicio Semanal 5

Sandra del Mar Soto Corderi
Edgar Quiroz Castañeda

12 de septiembre de 2019

1. De acuerdo a la representación de lo booleanos en el cálculo lambda, realice lo siguiente

   - Implemente la función de disyunción `or`

     $$\texttt{or} \equiv \lambda p.\lambda q.pTq \equiv \lambda p.\lambda q.p(\lambda x.\lambda y.x)q$$

   - Implemente la función de disyunción exclusiva `xor`

     $$\texttt{xor} \equiv \lambda p.\lambda q.p(qFT)(qTF) \equiv \lambda p.\lambda q.p(q(\lambda x.\lambda y.y)(\lambda x.\lambda y.x))(q(\lambda x.\lambda y.x)(\lambda x.\lambda y.y))$$

   - Muestre que las definiciones son correctas. Esto es que para b_1, b_2 boolenanos y `f` función booleana, `f` b_1, b_2 se reducen de acuerdo a la tabla de verdad de `f`.

     Notemos que en todas las apariciones de T y F, se puede suponer que no tiene variables en común con ninguna otra función en la expresión, pues no están expresada de forma explícita.

     - `or`

       La table de verdad es

$\vee$	F	T
F	F	T
T	T	T

Table 1: Tabla de verdad de $p \vee q$

Entonces, primero supongamos que $P \equiv F$.
Entonces,

$$\begin{aligned}\texttt{or}FQ &\equiv FTQ \equiv (\lambda x.\lambda y.y)(\lambda x.\lambda y.x)Q \\ &\equiv (\lambda y.y)[x := \lambda x.\lambda y.x]Q = (\lambda y.y[x := \lambda x.\lambda y.x])(\lambda x.\lambda y.y)Q \\ &= (\lambda y.y)Q \equiv y[y := Q] = Q\end{aligned}$$

Por lo que $\texttt{or}FF = F$ y $\texttt{or}FT = T$, lo que corresponde a la primera columna de la tabla de verdad.
En otro caso, tomemos a $P = T$.
Entonces

$$\begin{aligned}\texttt{or}TQ &\equiv TTQ \equiv (\lambda x.\lambda y.x)(\lambda w.\lambda z.w)Q \\ &\equiv (\lambda y.x)[x := \lambda w.\lambda z.w]Q = (\lambda y.\lambda w.\lambda z.w)Q \\ &\equiv (\lambda w.\lambda z.w)[y := Q] = \lambda w.\lambda z.w \equiv T\end{aligned}$$

Por lo que $\texttt{or}TT = T$ y $\texttt{or}TT = T$, que corresponde con la segunda columna de la tabla de verdad.
Como la función corresponde en todos los casos con la tabla de verdad, entonces la definición de la función es correcta.

– `xor`
La tabla de verdad es

$\oplus$	F	T
F	F	T
T	T	F

Table 2: Tabla de verdad de $p \oplus q$

Primero, tomemos a $P = T$.

$$\begin{aligned}
\texttt{xor}TQ &\equiv T(QFT)(QTF) \\
&\equiv (\lambda x.\lambda y.x)(QFT)(QTF) \\
&\equiv (\lambda y.x)[x := QFT](QTF) \\
&\equiv (\lambda y.QFT)(QTF) \\
&\equiv QFT[y := QTF] \equiv QFT
\end{aligned}$$

En otro caso,$P = F$

$$\begin{aligned}
\texttt{xor}FQ &\equiv F(QFT)(QTF) \\
&\equiv (\lambda x.\lambda y.y)(QFT)(QTF) \\
&\equiv (\lambda y.y)[x := QFT](QTF) \\
&\equiv (\lambda y.y)(QTF) \\
&\equiv y[y := QTF] \equiv QTF
\end{aligned}$$

Sin pérdidad de generalidad, digamos que en ambos casos la expresión resultante es QMN.
Luego, supongamos que $Q = T$.
Entonces

$$\begin{aligned}
TMN &\equiv (\lambda x.\lambda y.x)MN \\
&\equiv ((\lambda y.x)[x := M])N \\
&\equiv (\lambda y.(x[x := M]))N \\
&\equiv (\lambda y.M)N \equiv M[y := N] \\
&\equiv M
\end{aligned}$$

Entonces, $P = T \implies M = F$, por lo que $\texttt{xor}TT = F$, que corresponde con la tabla de verdad.
Por otra parte, $P = F \implies M = T$, por lo que $\texttt{xor}FT = F$, que corresponde con la tabla de verdad.
Luego, veamos que pasa cuando $Q = F$.

$$\begin{aligned}
FMN &\equiv (\lambda x.\lambda y.y)MN \\
&\equiv ((\lambda y.y)[x := M])N \\
&\equiv (\lambda y.(y[x := M]))N \\
&\equiv (\lambda y.y)N \equiv y[y := N] \\
&\equiv N
\end{aligned}$$

Entonces, $P = T \implies N = T$, por lo que $\texttt{xor}TF = T$, que corresponde con la tabla de verdad.
Por otra parte, $P = F \implies N = F$, por lo que $\texttt{xor}FF = F$, que corresponde con la tabla de verdad.
Como en todos los casos se obtiene el resultado dado por la tabla de verdad, entonces la definición de la función es correcta.

2. Encuentre la forma normal de la siguiente expresión e. Se debe mostrar todos los pasos de la $\beta-$reducción, indicando en cada paso el redex que se va a reducir.

$$e =_{def} (\lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz))(\lambda s.\lambda t.s)(\lambda u.u)w$$

$$
\begin{aligned}
e &\equiv (\lambda y.\lambda z.xz(yz))[x := (\lambda s.\lambda t.s)](\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda y.(\lambda z.xz(yz))[x := (\lambda s.\lambda t.s)](\lambda u.u)w \\
&\equiv \lambda y.\lambda z.(xz(yz))[x := (\lambda s.\lambda t.s)])(\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda y.\lambda z.x[x := (\lambda s.\lambda t.s)]z[x := (\lambda s.\lambda t.s)](yz)[x := (\lambda s.\lambda t.s)])(\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda y.\lambda z.(\lambda s.\lambda t.s)z(yz))(\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda y.\lambda z.(\lambda t.s)[s := z](yz))(\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda y.\lambda z.\lambda t.(s[s := z])(yz))(\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda y.\lambda z.(\lambda t.z)(yz))(\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda y.\lambda z.(z[t := yz]))(\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda y.\lambda z.z)(\lambda u.u)w \\
&\equiv (\lambda z.z)[y := \lambda u.u]w \\
&\equiv (\lambda z.z[y := \lambda u.u])w \\
&\equiv (\lambda z.z)w \\
&\equiv z[z := w] \\
&\equiv w
\end{aligned}
$$