五月祭じゃんけん bot

概要

人 i には固有の手の出し方があるが，これが状態(前のターンでの手，勝敗など)で条件づけたときの確率分布で特徴づけられると考える． これを予想するモデルを考えたい． すなわち，各状態 s，手 c に対して $P(c \mid s)$ (大きな行列)を推定したい．

これは結構難しい(と思う)．なぜなら，こちらが観測できるのは手を出した数であり，上の行列を直接観測することはおろか，観測するデータは一人当たり数十回程度であって，一つの成分を推定することすらほとんど不可能だからである．

よって，手の出し方について特徴量を見出し，その事前分布を(推定し)活用することが必要だと考える．

モデル

まず次のような設定を考える．

- 観測データ: $\left(C_t^{(i)}, S_t^{(i)}\right)$: 人 i の t 番目のターンで選んだ手と状態 ($i = 1, ..., n,\ t = 1, ..., m$)
  - $X^{(i)} = \left\{\left(C_t^{(i)}, S_t^{(i)}\right)\right\}_t$ とし，X と書いたらこの形式のデータであるとする
- データの生成モデル(VAE の使用を念頭に):
  1. 人 i に固有のパラメータ $Z^{(i)} \in \mathbb{R}^D$ が標準正規分布から独立に生成される:
  $$Z^{(i)} \sim p\left(Z^{(i)}\right) = \mathcal{N}(0, I_D)$$
  2. ある θ でパラメータづけられ，実数行列を値にとる関数 p_θ が存在して，人 i の手の出し方 $P_\theta^{(i)}(c \mid s)$ は「$p_\theta\left(Z^{(i)}\right)$ の (c, s) 成分」$p_\theta\left(Z^{(i)}\right)_{C^{(i)}, S^{(i)}}$ で書けるとする
     - パラメータ $Z^{(i)}$ の下でデータ $X^{(i)}$ が生成される確率を $P_\theta\left(X^{(i)} \mid Z^{(i)}\right)$ とかく
  3. さらに，ある φ によってパラメータづけられる関数 $\mu_\varphi, \Sigma_\varphi$ によって，人 i に関する観測データ X による Z の条件付き確率の予測値は次のようにかけるとする．ただし，Σ_φ は対角行列に値をとる
  $$q_\varphi(Z \mid X) = \mathcal{N}\left(\mu_\varphi(X), \Sigma_\varphi(X)\right)$$

VAE においては，次の ELBO $\times -1$ を最小化する問題を考える．

$$\min_{\theta,\varphi} \sum_i \mathcal{L}_{\theta,\varphi}^{(i)}$$

$$\mathcal{L}_{\theta,\varphi}^{(i)} := -\mathbb{E}_{q_\varphi(Z \mid X^{(i)})}\left[\log p_\theta\left(X^{(i)} \mid Z\right)\right] + \mathrm{KL}\left[q_\varphi\left(Z \mid X^{(i)}\right) \,\|\, p(Z)\right]$$

さらに，$Z^{(i)} \sim q_\varphi\left(Z \mid X^{(i)}\right)$ として，モンテカルロ法の観点より

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{q_\varphi(Z \mid X^{(i)})}\left[\log p_\theta\left(X^{(i)} \mid Z\right)\right] &\simeq \log p_\theta\left(X^{(i)} \mid Z^{(i)}\right) \\ &\simeq \sum_t p_\theta\left(Z^{(i)}\right)_{C^{(i)}, S^{(i)}}\end{aligned}$$

であり，一般的な公式から，

$$\mathrm{KL}\left[q_\varphi\left(Z \mid X^{(i)}\right) \,\|\, p(Z)\right] = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{D} \left(1 - \Sigma_\varphi^{(d)} - \left[\mu_\varphi^{(d)}\right]^2 + \log \Sigma_\varphi^{(d)}\right)$$

となる．

余談

問題設定としては，パラメータの事前分布を適当に制限した一般のマルコフ連鎖における確率遷移行列の推定と同じである($P(c \mid s)$ を確率遷移行列に置き換える)