

Chapter1 神经元和数学方法

黄志权

2023 年 5 月 25 日

目录

第一章 IF 模型 (Integrate-and-fire models)	1
1.1 膜电压 $u(t)$ 演变的线性微分方程推导	1

第一章 IF 模型

(Integrate-and-fire models)

神经元的动力模型可以被简化为：树突接收若干的脉冲信号，并积累到细胞膜上，致使细胞膜电压改变，从而产生动作电位。IF 模型则是将动作电位描述成事件的模型。它由两个部分组成：1、描述膜电压 $u(t)$ 演变的线性微分方程；2、描述 spike 的发射机制。

1.1 膜电压 $u(t)$ 演变的线性微分方程推导

对于神经元细胞，我们可以将其想象为如下的 RC 电路。细胞膜就像是一个与电阻并联的电容器，而电阻连接着一个电压为 u_{rest} 电池。当没有外界输入时，膜电压 $u(t)$ 为初始值 u_{rest} ；当有外界脉冲输入时，相当于给电容提供电流为 $I(t)$ 的充电，从而改变膜电压 $u(t)$ 。//PS: 这个电阻也被称为漏电阻。由于在没有外界输入时，膜上电荷会逐渐穿过细胞膜泄露出去，让膜电压回归 u_{rest} ，因此引入一个漏电阻来模拟这种现象。

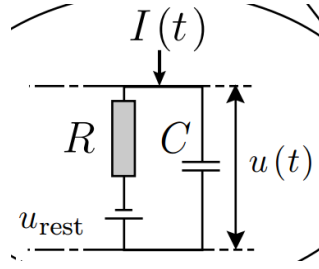


图 1.1: 细胞膜等效电路

考虑 $I(t)$ 不为零的情况，即有外界输入时，来分析膜电压的变化。首先总电流由并联电路支电流和组成 $I(t) = I_r + I_C$ 。即：

$$I(t) = \frac{u(t) - u_{rest}}{R} + C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.1)$$

模仿电路分析，定义膜时间常数 (membrane time constant) $\tau_m = RC$ 。从而可以得到 $u(t)$ 的线性微分方程：

$$\tau_m \frac{du(t)}{dt} = -[u(t) - u_{rest}] + RI(t) \quad (1.2)$$

上式在电路分析中称为 RC 电路响应方程，在神经科学领域称为无源膜方程 (equation of a passive membrane)。这个方程的解分为两个部分。即输入脉冲的充电过程（零状态响应），和没有输入脉冲，电压泄露到 u_{rest} 的过程（零状态响应）。首先是输入脉冲的充电过程（零状态响应），我们假设输入电流脉冲是一个幅值为 I_{max} 的方波，则其方程如下：

$$u(t) = u_{rest} + I_{max}R(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (1.3)$$

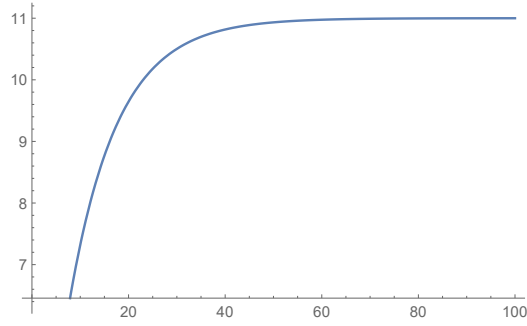


图 1.2: 脉冲充电图

然后是电压泄露到 u_{rest} 的过程（零状态响应）:

$$u(t) = u_{rest} + I_{max} R e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.4)$$

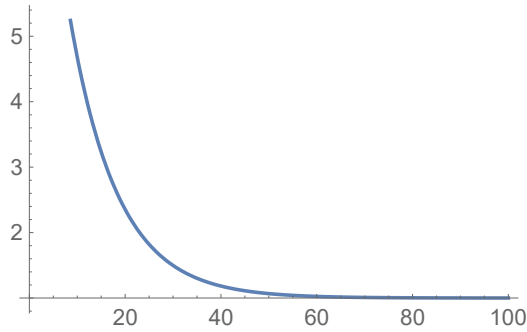


图 1.3: 脉冲放电图

从而, 当没有外部脉冲输入的情况下, 膜电压会以指数形式衰减到 u_{rest} 。其衰减时间系数 τ_m 一般为 10ms, 与一般持续 1ms 的尖峰脉冲相比长了很多。

接下来, 考虑输入电流 $I(t)$ 为一个短的脉冲。因为是有脉冲输入, 因此对应的是公式 1.3。