Открытая неделя. Что такое "олимпиадная" геометрия?

24 марта

1. В треугольнике ABC медиана, проведённая из вершины A, в четыре раза меньше стороны AB и образует с этой стороной угол $60°$. Найдите угол $\angle BAC$.

2. [Регион, 2016, 9.2] Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$

3. [ПВГ, 2023, 10.4] В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{26}$.

4. [Всесиб, 2022] Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC, точка M — середина стороны AC. Из стороне AB выбрана точка K такая, что прямая BH делит отрезок CK пополам. Доказать, что отрезки MH и CK перпендикулярны.

Домашнее задание

5. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение $BC : BM$.

6. [Бельчонок, 2022, 9.4] В прямоугольнике $ABCD$ сторона $BC = 3$. На стороне AB отмечена её середина — точка P. Из точки C опущен перпендикуляр CQ на DP. Найдите длину BQ.

7. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC, а точка Q — середина медианы BM. Прямая, проходящая через точку M параллельно AQ пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение $MP : AQ$.

8. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и BC взяты точки K и L соответственно, причём $KA = AC = CL$. Пусть M — точка пересечения AL и KC, а I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC.