Laboratorium 9
Metody Numeryczne
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Maciej Piwek

12 maja 2021

1 Wstęp

Na laboratoriach zapoznano się z metodą **aprosymacji Padego** służącej do aproksymacji funkcji za pomocą funkcji wymiernych danego rzędu.

2 Opis Problemu

Naszym zadaniem jbyło wykonanie aproksymacji Padego funkcji

$$f(x) = \exp(-x^2) \tag{1}$$

kolejno dla $(N, M) = (2, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (2, 6), (2, 8)$. W tym celu wykonano następujące kroki:

1. Współczynniki szeregu Maclaurina(c_k) otrzymano bezpośrednio z rozwinięcia funkcji $f(x) = \exp(-x^2)$:

   $$\exp(-x^2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k \tag{2}$$

   Wartości współczynników c_k przechowano w wektorze $c = [c_0, c_1, ..., c_N]$

2. Rozwiązano układ równań dany wzorem:

   $$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \tag{3}$$

   gdzie:

   $$A_{i,j} = c_{N-M+i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{4}$$

   $$y_i = -c_{N+1+i}, \quad i = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{5}$$

   po rozwiązaniu układu równań (3) zachowujemy współczynniki wielomianu $Q_M(x)$

   $$b_0 = 1 oraz b_{M-i} = x_i, \quad i = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{6}$$

   Współczynniki zapisano wektorze $b = [b_0, b_1, \cdots, b_M]$.

3. Wyznaczono współczynniki wielomianu $P_N(x)$ zgodnie ze wzorem (10). Współczynniki zapisano w wektorze $a = [a_0, a_1, \cdots, a_N]$.

4. Dla ustalonego n stworzono wykresy $f(x)$ oraz $R_{N,M}(x)$ na jednym rysunku w zakresie $x \in [-5, 5]$.

3 Opis metody

Na laboratorium funkcję $f(x)$ przybliżono przy pomocy funkcji wymiernej:

$$R_{N,M}(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{M} b_i x^i} \tag{7}$$

z $b_0 = 1$. W tym celu rozwinięto funkcję $f(x)$ w szereg Maclaurina:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{8}$$

Przyrównano pochodne $f(x)$ oraz $R_{N,M}(x)$ dla rzędu $k = 0, 1, /cdots, N + M$

$$\frac{d^k R_{N,M}(x)}{dx^k}\Big|_{x=0} = \frac{d^k f(x)}{dx^k}\Big|_{x=0} \tag{9}$$

Warunki te wygenerowały układ równań

$$\sum_{N}^{m=1} b_m \cdot c_{N-m+k} = -c_{N+k}, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{10}$$

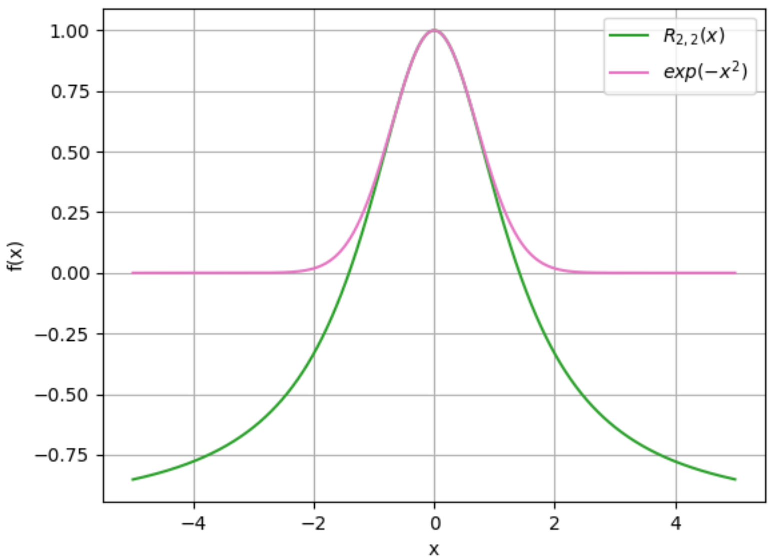
$$\begin{bmatrix} c_{N-M+1} & c_{N-M+2} & \cdots & c_N \\ c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & \cdots & c_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ c_N & c_{N+1} & \cdots & c_{N+M-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{N+1} \\ -c_{N+2} \\ \vdots \\ -c_{N+M} \end{bmatrix}$$

który rozwiązano aby znaleźć współczynniki $b = [b0, b1, ..., bM]$ a następnie skorzystano z relacji

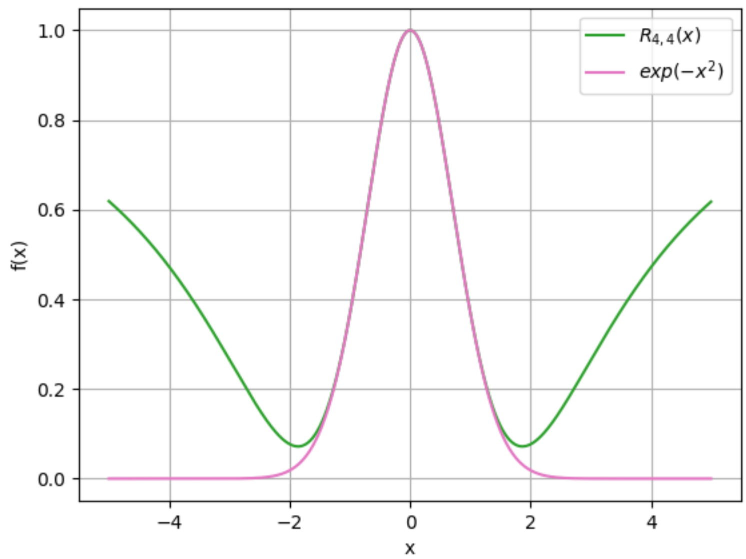
$$a_i = \sum_{j=0}^{i} c_{i-j \cdot b_j}, \quad i = 0, 1, \cdots, N \tag{11}$$

w celu wyznaczenia współczynników $a = [a_0, a_1, ..., a_N]$.

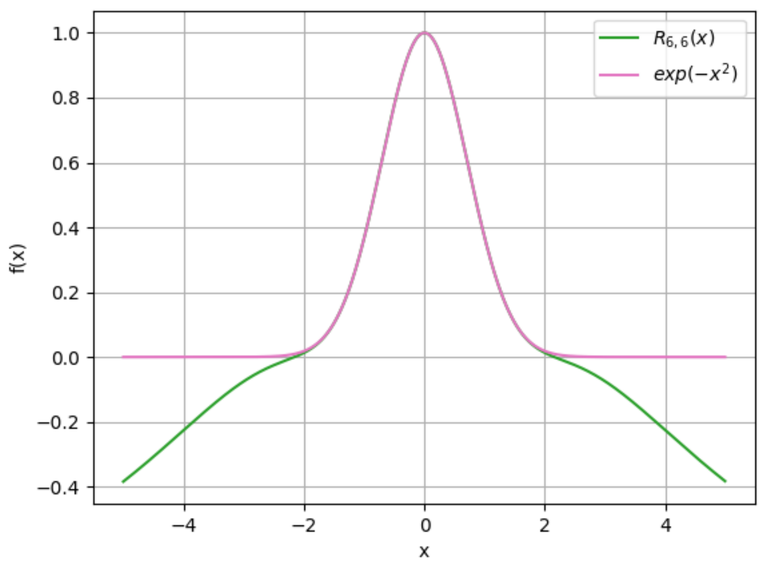
4 Wyniki



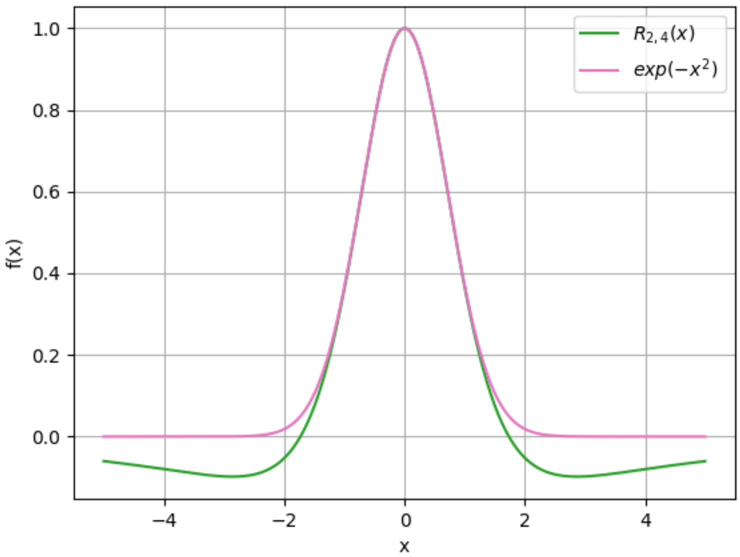
Rysunek 1: Wykres funkcji $\exp(-x^2)$ oraz $R_{2,8}(x)$



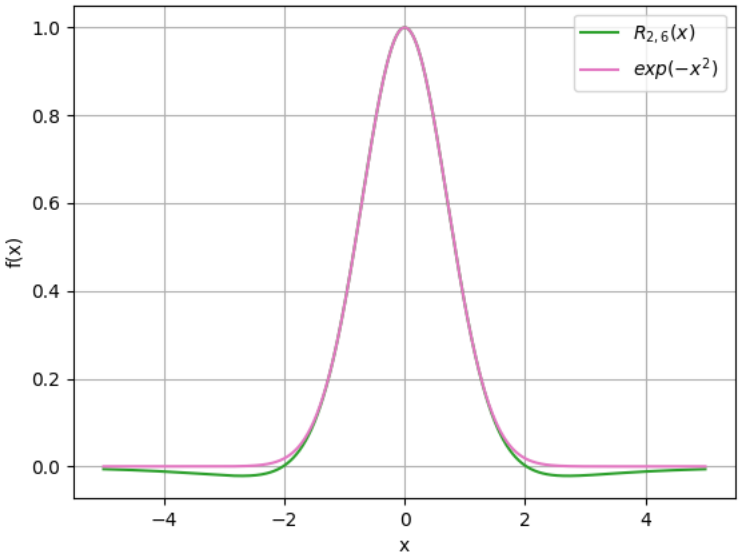
Rysunek 2: Wykres funkcji $\exp(-x^2)$ oraz $R_{2,2}(x)$



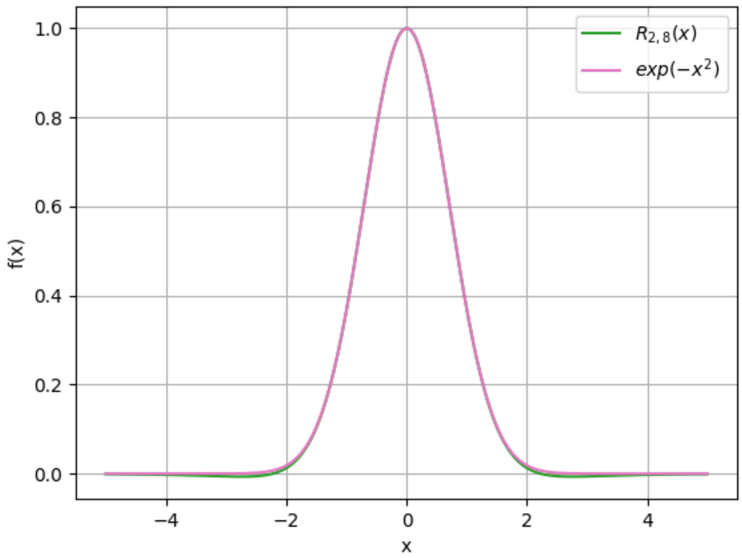
Rysunek 3: Wykres funkcji $\exp(-x^2)$ oraz $R_{6,6}(x)$



Rysunek 4: Wykres funkcji $\exp(-x^2)$ oraz $R_{2,4}(x)$



Rysunek 5: Wykres funkcji $\exp(-x^2)$ oraz $R_{2,6}(x)$



Rysunek 6: Wykres funkcji $\exp(-x^2)$ oraz $R_{2,8}(x)$

5 Wnioski

1. Można zauważyć, że dla $M = 2$ oraz $N = 8$ aproksymacja była najbardziej efektywna, a dla $M = 2$ oraz $N = 2$ najmniej.

2. Funkcja jest parzysta, więc wielomiany w liczniku i w mianowniku $R_{M,N}$ będą miały niezerowe współczynniki tylko przy jednomianach o wykładnikach parzystych, a więc wyniki zestawione na wykresach możemy uznać za poprawne.