Laboratorium 6
Metody Numeryczne
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Maciej Piwek

20 kwietnia 2021

1 Wstęp

Na laboratoriach zapoznałem się z metodą "Newtona", algorytmem do wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji.

2 Metoda Newtona

Metoda Newtona jest metodą rozwiązywania równań , którą często używa się w solverach, ze względu na jej szybkość i łatwość w implementacji. Jej zadaniem jest znalezienie pierwiastka równania zadanej funkcji ciągłej f, takiej że:

- Funkcja jest określona w przedziale [a,b]
- Funkcja jest ciągła w przedziale [a,b]
- Na krańcach przedziału [a,b] funkcja ma różne znaki

3 Wykonanie ćwiczenia

Wyznaczono pierwiastki układu równań nieliniowych metodą Newtona:

$$\begin{cases} 2xy^2 - 3x^2y - 2 = 0 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

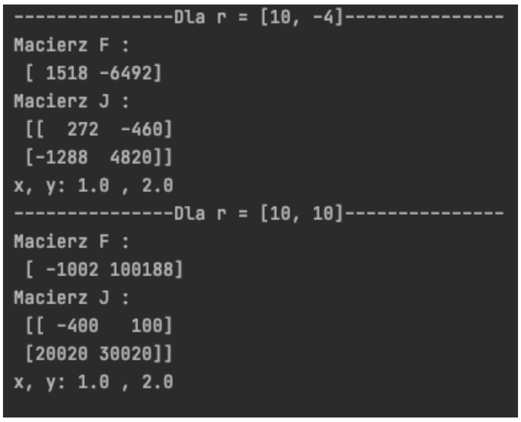
W k-tej iteracji metody Newtona otrzymano wektor rozwiązań $r_k = [x_k, y_k]$, zależny od rozwiązania w kroku $k-1$:

$$r_k = r_{k-1} + \Delta r \tag{2}$$

gdzie Δr można obliczyć ze wzoru:

$$\Delta r = -\begin{bmatrix} 2y^2 - 6xy & 4xy - 3x^2 \\ 2xy^3 + 2y & 3x^2y^2 + 2x \end{bmatrix}^{-1}_{r=r_{k-1}} \cdot \begin{bmatrix} 2xy^2 - 3x^2y - 2 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 \end{bmatrix} \tag{3}$$

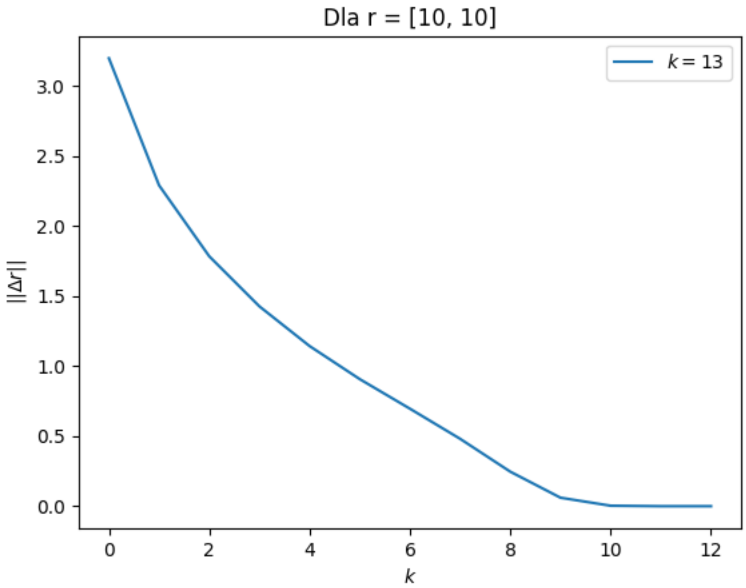
Wykonano obliczenia dla $r = [10, 10]$ oraz $r = [10, -4]$. Przyjąć jako warunek zbieżności $\|\Delta r\| = \|r_k - r_{k-1}\| < 10^{-6}$. W obu wypadkach algorytm zbiegł się do rozwiązania, którym jest $r = [1, 2]$. Wyniki są następujące:



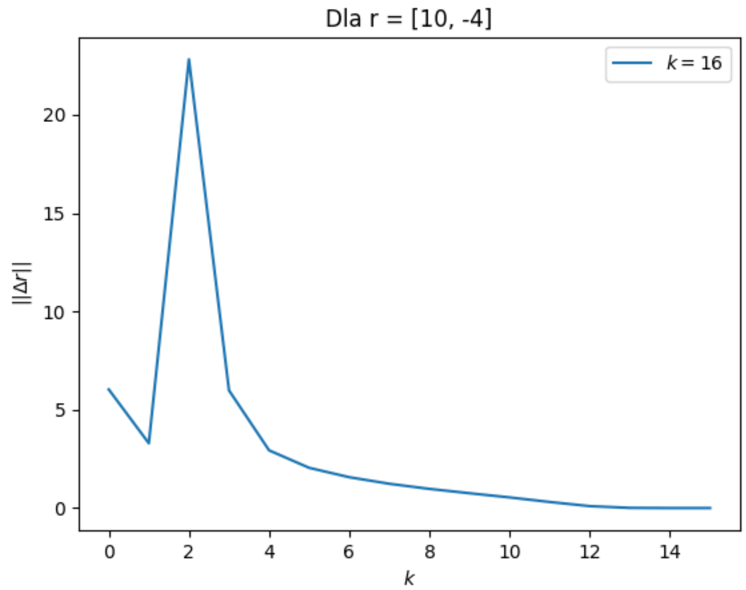
```
--------------Dla r = [10, -4]--------------
Macierz F :
 [ 1518 -6492]
Macierz J :
 [[  272  -460]
 [-1288  4820]]
x, y: 1.0 , 2.0
--------------Dla r = [10, 10]--------------
Macierz F :
 [ -1002 100188]
Macierz J :
 [[ -400   100]
 [20020 30020]]
x, y: 1.0 , 2.0
```

Rysunek 1: Output otrzymany po uruchomieniu

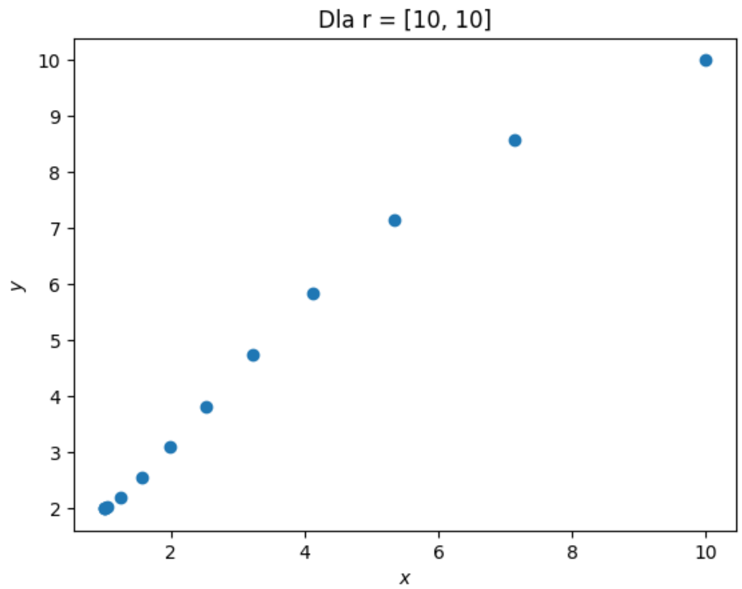
Dalej sporządzono dwa wykresy. Pierwszy z nich dotyczył $\|\Delta r\|$ w funkcji numeru iteracji metody Newtona dla każdego z warunków początkowych oraz wykres punktów pośrednich (x, y), przez które przechodzi algorytm w trakcie znajdowania miejsca zerowego układu równań.



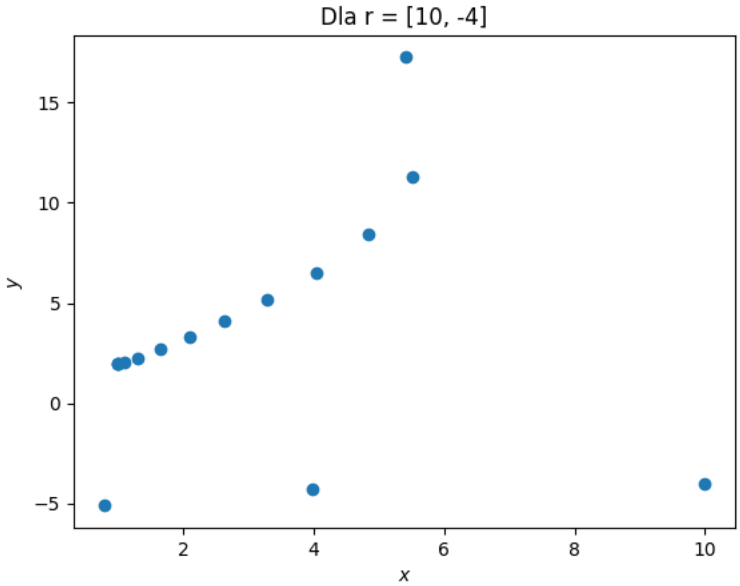
Rysunek 2: Wykres $\|\Delta r\|$ w funkcji numeru iteracji dla $r = [10, 10]$



Rysunek 3: Wykres $\|\Delta r\|$ w funkcji numeru iteracji dla $r = [10, -4]$



Rysunek 4: Wykres punktów pośrednich (x, y) dla $r = [10, 10]$



Rysunek 5: Wykres punktów pośrednich (x, y) dla $r = [10, -4]$

4 Wnioski

1. Metoda Newtona może posłużyć nam do efektywnego rozwiązywania układu równań, gdyż jest łatwa w implementacji i jej czas działania jest krótki.
2. Na wykresie Rysunek 4 i Rysunek 5, widzimy, że zaimplementowana przez nas metoda działa poprawnie, gdyż punkty zbiegają się do koordynaty $r = [1, 2]$, która jest poprawnym rozwiązaniem naszego układu
3. Liczba iteracji była większa dla $r = [10, -4]$ i wyniosła $k = 16$m gdzie k - to numer iteracji.