Laboratorium 3
Metody Numeryczne
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Maciej Piwek

23 marca 2021

1 Wstęp

Na laboratoriach zapoznałem się z **metodą największego spadku macierzy wstęgowej** służącą do rozwiązywania układu równań liniowych.

2 Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej

Zadanie polegało na rozwiązaniu układu równań liniowych $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ metodą największego spadku. Na Początku utworzono macierz układu o wymiarze $n = 1000$ i wypełniono jej elementy zgodnie z formułą:

$$A[i][j] = \frac{1}{1+|i-j|}, gdzie \quad |i-j| \leq m, \quad i,j = 0,...,n-1$$
$$A[i][j] = 0, gdzie \quad |i-j| > m$$

oraz przyjęto $m = 5$ Dalej utworzono wektor wyrazów wolnych b, którego elementy uzyskano następujaco:

$$b[i] = i, \quad i = 0, \cdots, n-1$$

Dalej zaprogramowano wyżej wspomnianą metodę największego spadku:

$$inicjalizacja : \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$$
$$r_k = b - A$$
$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k}$$
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$$

- k - numer iteracji
- x_k - aktualne przybliżenie wektora rozwiązań
- r_k - wektor reszt
- α_k - wektor reszt

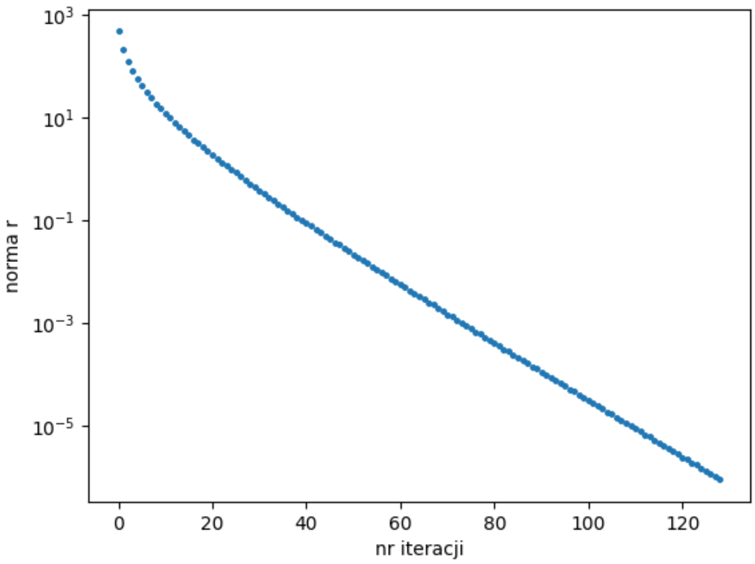
Po zmianie zapisano również dane do pliku $\boldsymbol{x_0.txt}$, gdzie wektor x został wypełniony zerami oraz $\boldsymbol{x_1.txt}$, gdy wektor x został wypełniony jedynkami w następującej kolejności :

Iteracja|Norma wektora reszty|Wartość alpha|Norma wektora rozwiązań

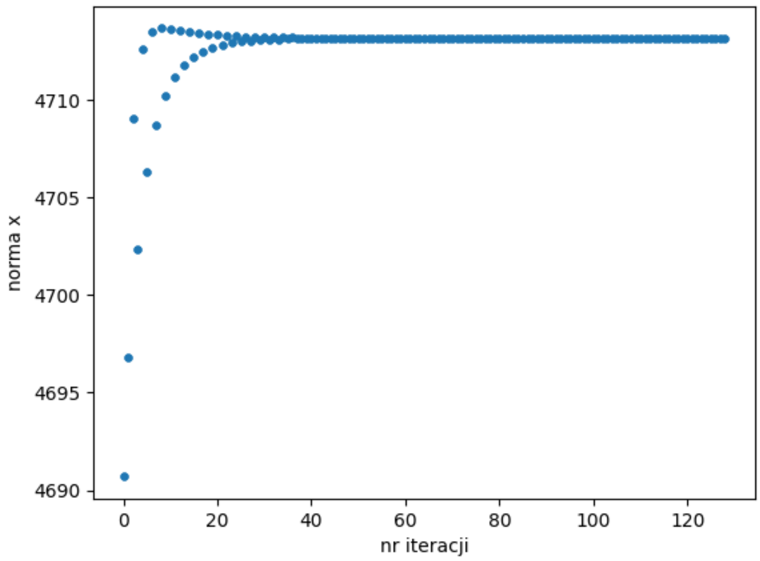
Dla wykonywanych obliczeń zmierzono czas wykonywanych operacji korzystając z funkcji time.time() i wypisano je na ekran, a wyniki prezentują się następująco:

Wektor x wypelniony zerami, czas : 0.03466010093688965 sek
Wektor x wypelniony jedynkami, czas : 0.03032088279724121 sek

Można zauważyć, iż dla wektora początkowego x o wartościach wyjściowych 1 algorytm zadziałał szybciej. Następnie sporządzono dwa wykresy, na których pokazano zależność numeru iteracji od normy wektora x oraz numeru iteracji od normy euklidesowej r:



Rysunek 1: Wykres normy r(k) dla 128 iteracji



Rysunek 2: Wykres normy x(k) dla 128 iteracji

3 Metoda sprzężonych gradientów dla macierzy wstęgowej

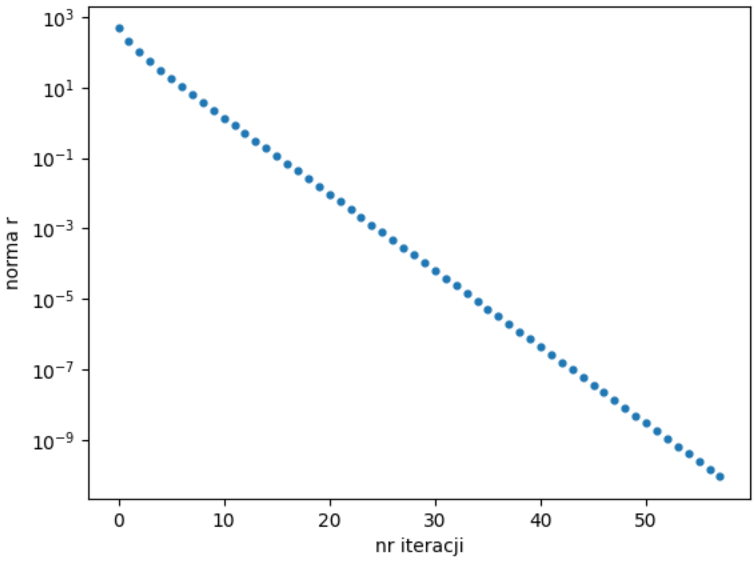
Metoda sprzężonych gradientów jest algorytmem służącym do rozwiązywania układów równań liniowych. Pozwala rozwiązać te, których macierz jest symetryczna i dodatnio określona. Metoda gradientu sprzężonego jest metodą iteracyjną. Algorytm prezentuje się następująco :

$$
\begin{gathered}
//inicjalizacja : v_1 = r_1 = b - Ax_1 \\
//petla\ iteracyjna \quad CG \\
\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{v_k^T A v_k} \\
x_{k+1} = x_k + \alpha_k v_k \\
r_{k+1} = r_k - \alpha_k A v_k \\
\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k} \\
v_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k v_k \\
//while(r_k^T r_k > 10^{-6})
\end{gathered}
$$

Dla wykonywanych obliczeń zmierzono czas wykonywanych operacji korzystając z funkcji time.time() i wypisano je na ekran, a wyniki prezentują się następująco:

sprzężony gradient czas: 0.025817155838012695

Następnie sporządzono wykres, na którym pokazano zależność numeru iteracji od normy wektora x:



Rysunek 3: Wykres normy x(k) dla metody sprzężonego gradientu

4 Wnioski

Korzystając z metody największego spadku możemy w dość szybki sposób rozwiązać układ równań liniowych. Widzimy, ze metoda sprzężonego gradientu jest efektywniejsza na co może wskazywać porównanie czasu działania obydwu algorytmów na korzyść wcześniej wspomnianego. Widzimy, że pewne koncepty z matematyki jesteśmy w stanie skutecznie przenieść do świata programowania, co więcej dobrze zaimplementowane przyspieszają nasz czas obliczeń, na którym możemy wiele zaoszczędzić.