Laboratorium 7
Metody Numeryczne
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Maciej Piwek

27 kwietnia 2021

1 Wstęp

Na laboratoriach zapoznałem się z metodą *interpolacji Newtona z optymalizacją położeń węzłów.*

2 Metoda Newtona oraz opis problemu

Interpolacja jest to metoda numeryczna, która polega na budowaniu w danym obszarze $\Omega \subset R^n$, tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości w ustalonych punktach nazywanych węzłami. Interpolacja stosuje się w naukach doświadczalnych, gdzie dysponuje się często skończoną liczbą danych określających badane zależności np. pozwala lokalnie przybliżyć dowolną funkcję wielomianem – , a to ułatwia analizę rozwiązań w modelach fizycznych. Zadaniem interpolacji wielomianowej posiada jednoznaczne rozwiązanie, czyli istnieje tylko jeden wielomian spełniający warunek $W_n(x_i) = f_i$, gdzie $i = 1, 2, \cdots, n$. Wzór interpolacyjny ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \tag{1}$$

gdzie :

- $f^{(j)}(x_0)$ - iloraz różnicowy rzędu j liczony dla węzła x_0
- x_i - położenia węzłów
- n - stopień wielomianu
- $W_n(x)$ - wartość wielomianu dla argumentu x
- x - szukane przybliżenie wartości funkcji

Zdefiniowano funkcje:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{2}$$

dla której należało przeprowadzić interpolację wielomianową Newtona. Dalej wyznaczono wartości ilorazów różnicowych z godnie z tabelą:

y_0	0	0	0	0	0
y_1	$f^{(1)}_{x_0}$	0	0	0	0
y_2	$f^{(1)}_{x_1}$	$f^{(2)}_{x_0}$	0	0	0
y_3	$f^{(1)}_{x_2}$	$f^{(2)}_{x_1}$	$f^{(3)}_{x_0}$	0	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\ddots$	0
y_n	$f^{(1)}_{x_{n-1}}$	$f^{(2)}_{x_{n-3}}$	$f^{(3)}_{x_{n-3}}$	$\cdots$	$f^{(n)}_{x_0}$

$$\Longrightarrow$$

$f_{0,0}$	0	0	0	0	0
$f_{1,0}$	$f_{1,1}$	0	0	0	0
$f_{2,0}$	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	0	0	0
$f_{3,0}$	$f_{3,1}$	$f_{3,2}$	$f_{3,3}$	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\ddots$	0
$f_{n,0}$	$f_{n,1}$	$f_{n,2}$	$f_{n,3}$	$\dots$	$f_{n,n}$

gdzie :

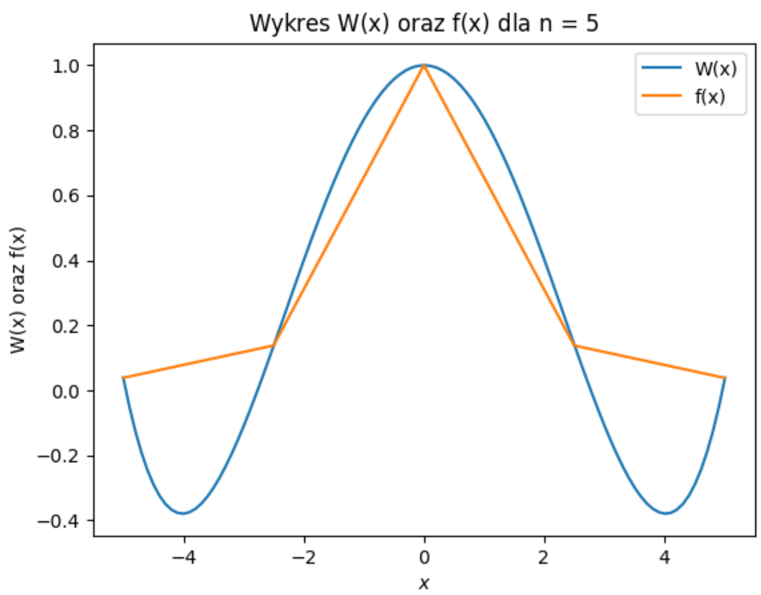
- y_i - wartości funkcji w węzłach
- f_j - ilorazy różnicowe rzędu j

Do wyznaczenia prawej tabelki użyto pseudokodu:

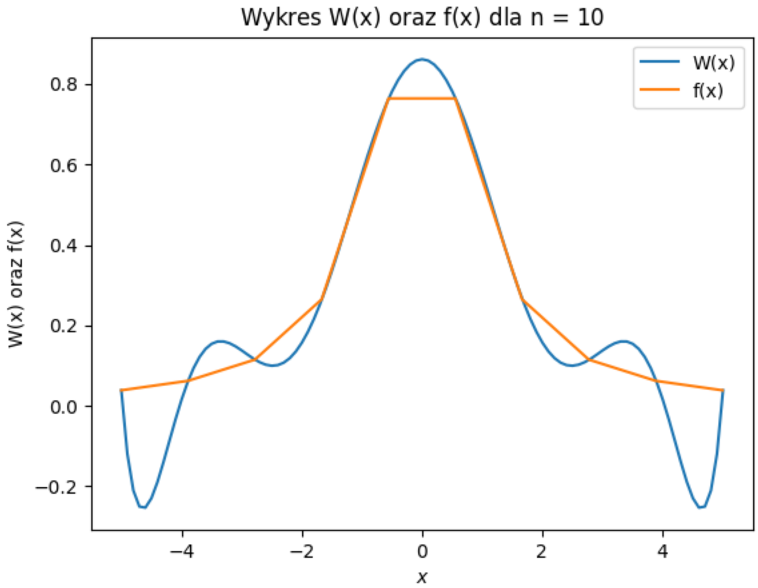
$$\begin{gathered} for(j = 1; j <= n; j++) \\ for(i = j; i <= n; i++) \\ f_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}} \end{gathered}$$

3 Wykonanie Ćwiczenia

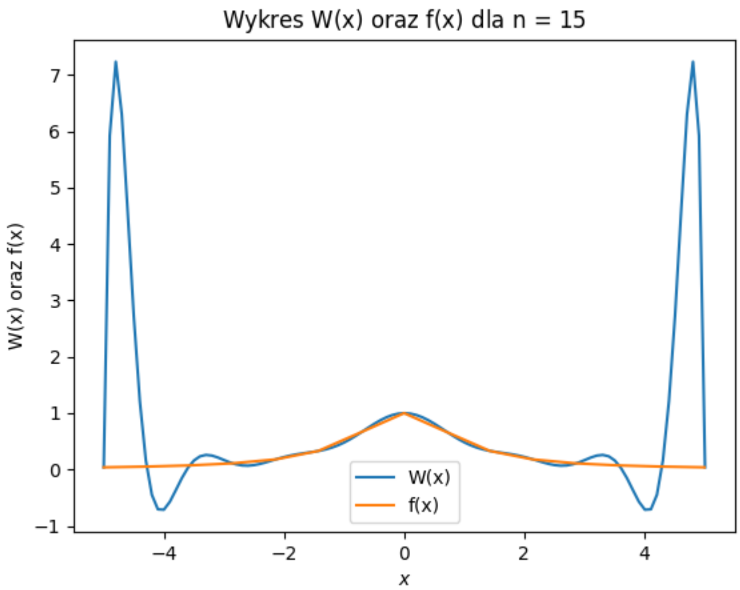
Zastosowano wzór interpolacyjny, aby wyznaczyć przybliżone wartości funkcji w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$. Węzły indeksowano $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, a następnie wykonano interpolację kolejno dla $n = 5, 10, 15, 20$ i wyznaczono wartości funkcji $f(x)$ w węzłach oraz obliczono dla wyznaczonych wartości wartości wielomianu:
Wyniki zestawiono na wykresach:



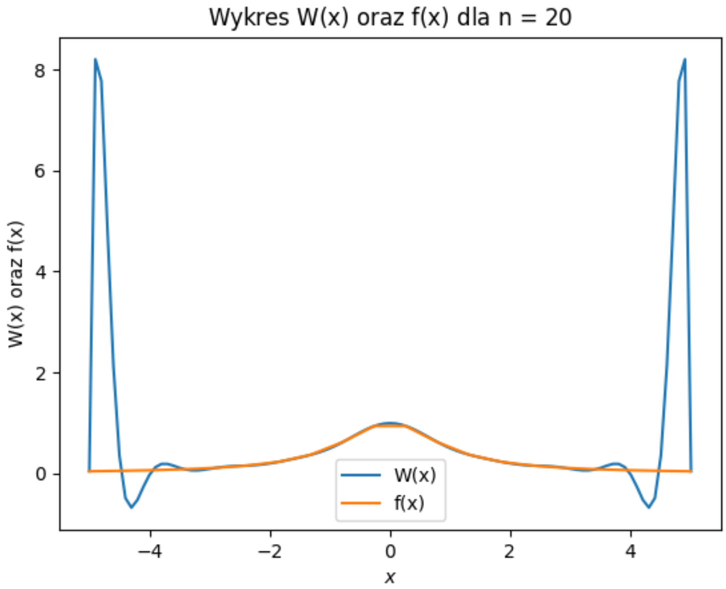
Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ dla $n = 5$



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ dla $n = 10$



Rysunek 3: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ dla $n = 15$

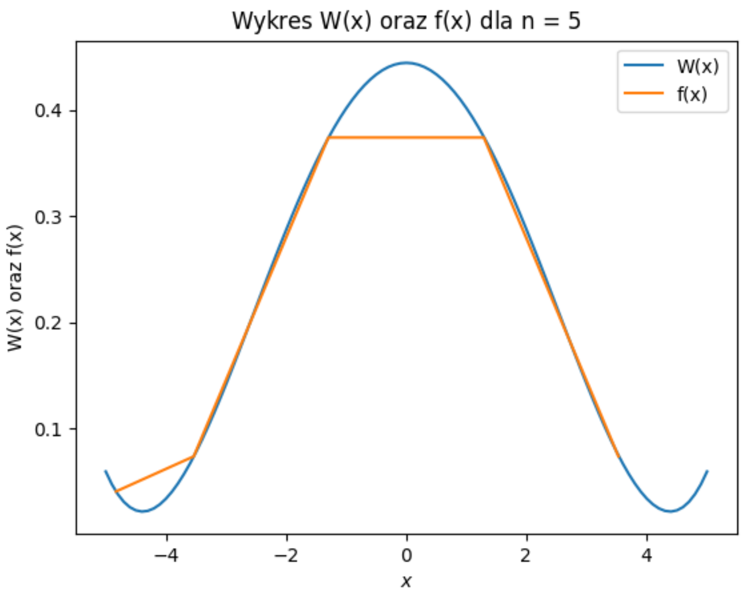


Rysunek 4: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ dla $n = 20$

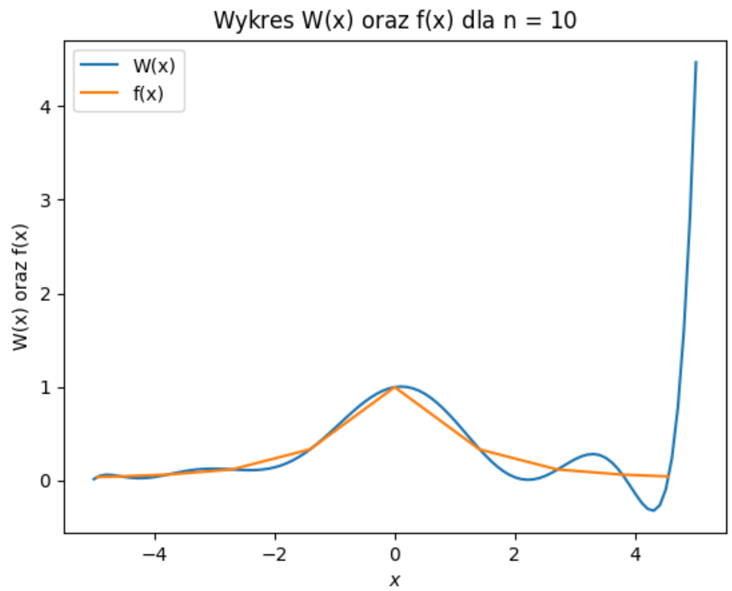
Proces powtórzono dla zoptymalizowanych położeń węzłów :

$$x_i = \frac{1}{2}[(x_{min} - x_{max})cos(\pi\frac{2i+1}{2n+2}) + (x_{min} + x_{max})], \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{3}$$

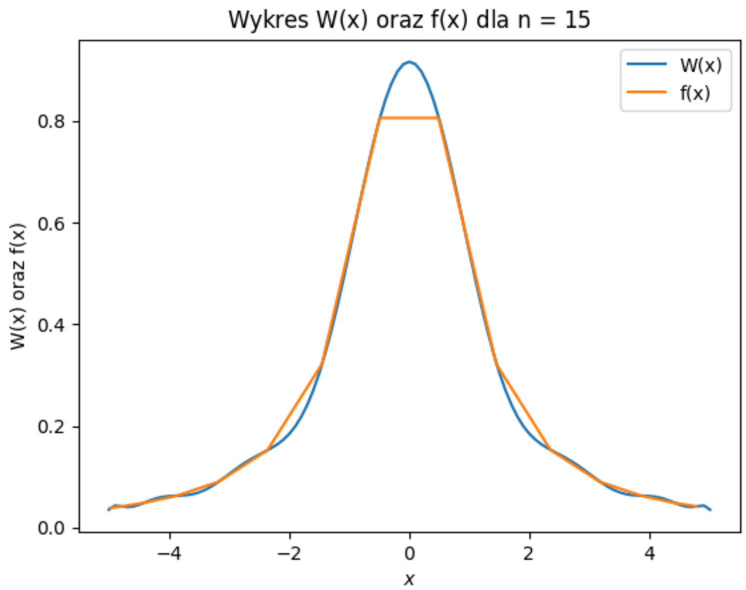
które są zerami wielomianów Czebyszewa.



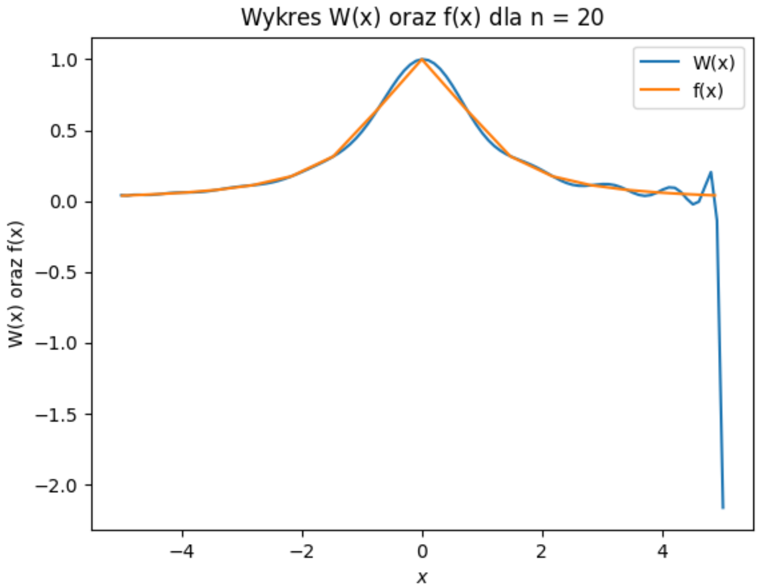
Rysunek 5: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ dla $n = 5$



Rysunek 6: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ dla $n = 10$



Rysunek 7: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ dla $n = 15$



Rysunek 8: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ dla $n = 20$

4 Wnioski

1. Dla większego n precyzja się zwiększa i algorytm działa bardziej efektywnie
2. Po zoptymalizowaniu położeń węzłów, które były zerami wielomianów Czebyszewa algorytm dział dokładniej