

Laboratorium 8  
Metody Numeryczne  
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica  
w Krakowie

Maciej Piwek

10 maja 2021

## 1 Wstęp

Na laboratoriach zapoznałem się z metodą interpolacji przy pomocy funkcji sklepanych będących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

## 2 Opis Problemu

Na laboratoriach został przedstawiony problem interpolacji używając funkcji sklepanych poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach. W tym celu skonstruowano algorytm służący do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach oraz algorytm do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym. Przy użyciu napisanego programu przeprowadzono interpolację funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

oraz

$$f_2(x) = \cos 2x \quad (2)$$

Przyjęto warunki z drugą pochodną równą 0 na obu krańcach przedziału interpolacji ( $\alpha = 0, \beta = 0$ ). Dla funkcji  $f_1(x)$  oraz  $n = 10$  węzłów w przedziale  $x \in [-5, 5]$  wyznaczono wartości drugich pochodnych i porównano je z 'dokładniejszymi' wartościami liczonymi zgodnie ze wzorem:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x))}{(\Delta x)^2} \quad (3)$$

Przyjęto  $\Delta x = 0.01$ .

## 3 Opis metody

Aby rozwiązać problem, należy rozwiązać układ równań liniowych.

$$Am = d \quad (4)$$

którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \quad (5)$$

gdzie:  $\mu$  to poszukiwane wartości drugich pochodnych w węzłach (indeksowanych  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Pozostałe oznaczenia to:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i \quad (6)$$

elementy wektora wyrazów wolnych

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad (7)$$

oraz położenia węzłów:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i odległości międzywęzłowe

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (8)$$

Zostały narzucone warunki na drugie pochodne na brzegach, czyli:

$$m_1 = \alpha, \quad m_n = \beta \quad (9)$$

Po wprowadzeniu warunków brzegowych do układu równań, przyjmuje on postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Po jego rozwiązaniu wartość funkcji interpolującej dla  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  (numer podprzedziału:  $i - 1$ ) wyznaczono według poniższego przepisu:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad (10)$$

gdzie stałe całkowania przyjęły postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_1 - m_{i-1}) \quad (11)$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \quad (12)$$

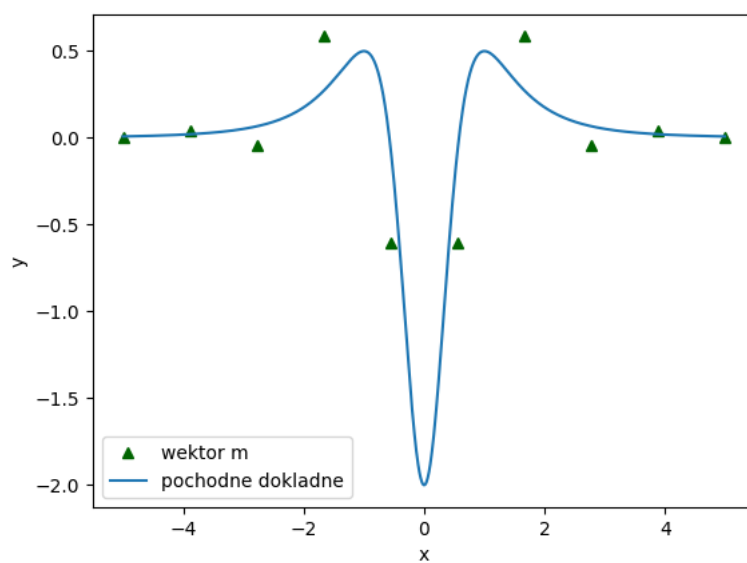
## 4 Wyniki

### 4.1 Wartości drugich pochodnych

Wyznaczono wartości dla drugich pochodnych dla funkcji:

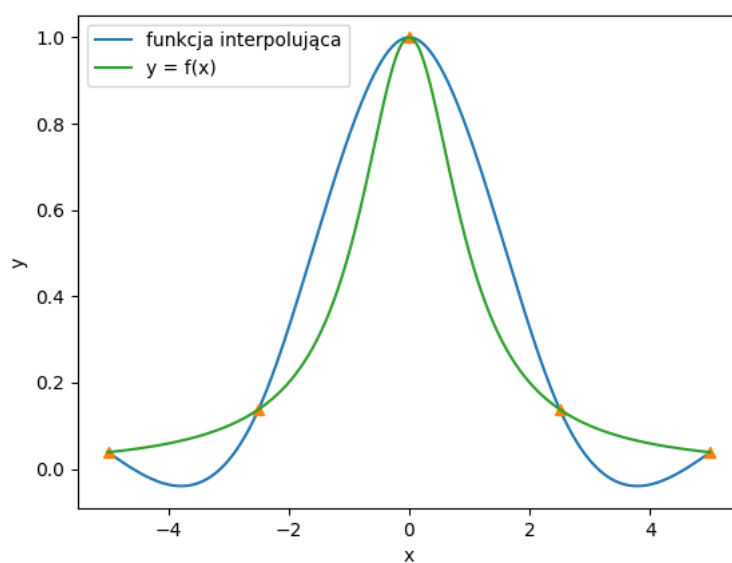
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (13)$$

Dla  $n = 10$  w przedziale  $x \in [-5, 5]$  oraz  $\Delta x = 0.01$

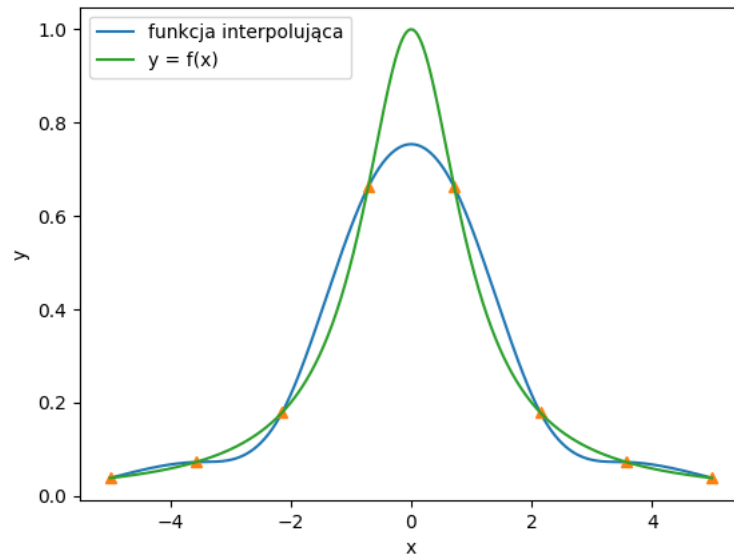


Rysunek 1: Wykres porównujący pochodne

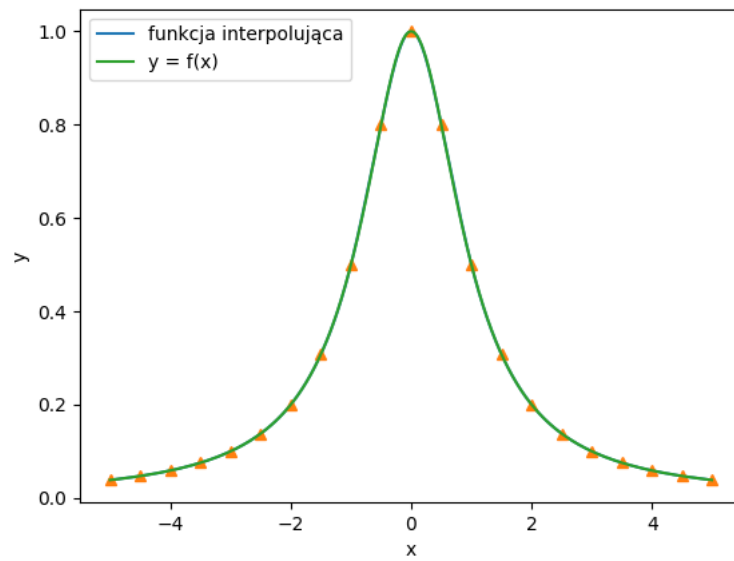
#### 4.2 Interpolacja funkcja dla $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$



Rysunek 2: Interpolacja dla 5 węzłów

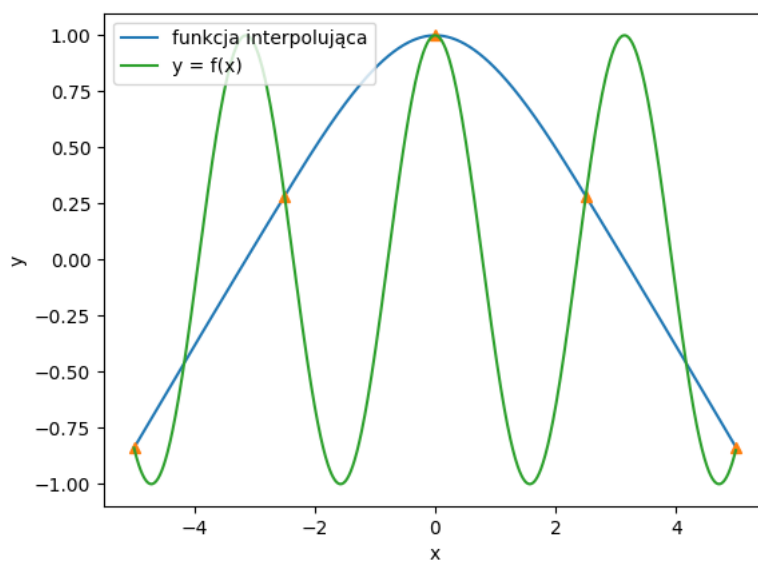


Rysunek 3: Interpolacja dla 8 węzłów

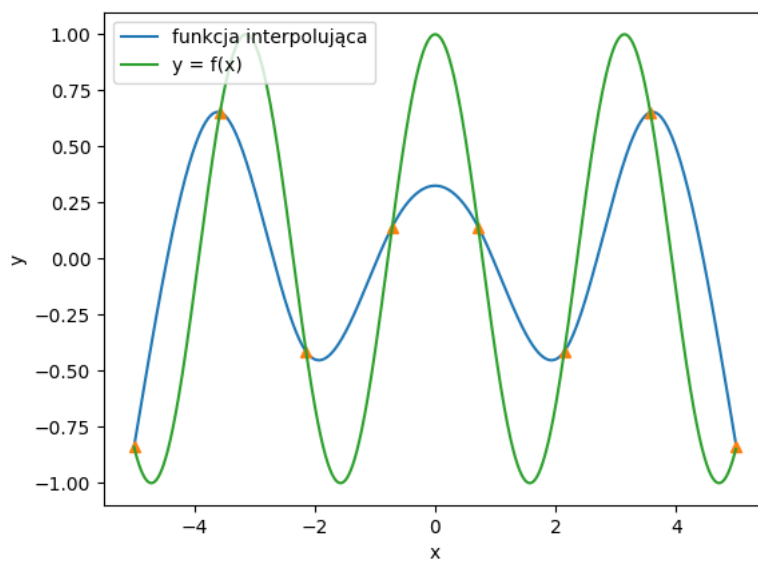


Rysunek 4: Interpolacja dla 21 węzłów

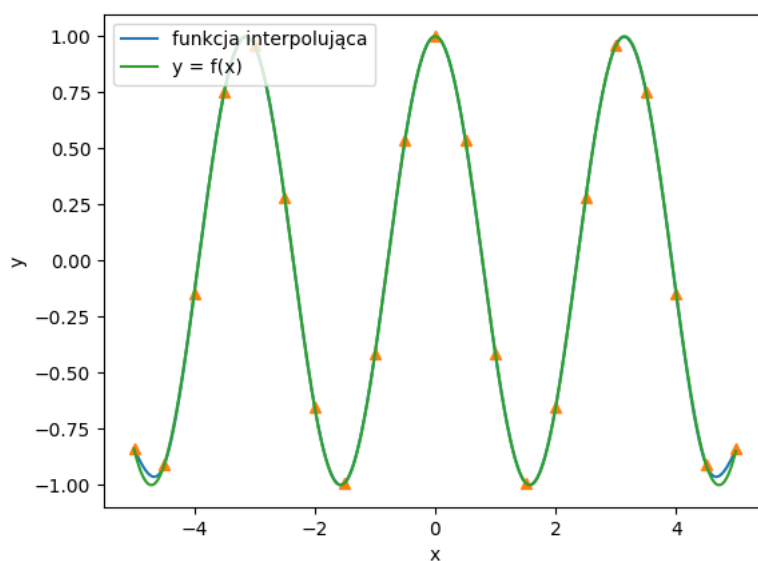
### 4.3 Interpolacja funkcja dla $f_2(x) = \cos 2x$



Rysunek 5: Interpolacja dla 5 węzłów



Rysunek 6: Interpolacja dla 8 węzłów



Rysunek 7: Interpolacja dla 21 węzłów

## 5 Wnioski

1. Interpolacja funkcjami sklejonymi okazała się wydajną metodą numeryczną do przybliżania nieznanej funkcji wielomianami niskiego stopnia.
2. Zauważono, że wartości wyznaczone metodą interpolacji na krańcach przedziałów dla  $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$  oraz  $f_2(x) = \cos 2x$  prawie pokryły się z wartościami teoretycznymi, jednak różnice są znacznie większe w środkowej części narysowanego wykresu.