中間述語論理のハイパーシークエント計算

川井新之介 *

2022 年 12 月 19 日

概 要

This report explains the last status of the collaboration with T. Imamura (RIMS) and S. Matsumoto (Keio University). Our joint work aims to develop well-behaved proof systems for various intermediate predicate logics, e.g., the linearity axiom $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ and the constant domain axiom $\forall x(\varphi \vee \psi(x)) \to \varphi \vee \forall x \psi(x)$. Hypersequent calculi emerged by generalizing Gentzen's sequent calculi. In Sections 1 and 2, we overview hypersequent calculi for intermediate predicate logics. For more details, Section 3 provides hypersequent systems for intuitionistic propositional logic and intuitionistic predicate logic. Sections 4 and 5 are devoted to reviewing the connection between the communication rule and Gödel-Dummett logic. In Section 6, we established Cut-Elimination for our systems, mentioned in Sections 3 and 4. Finally, Section 7 shows the list of problems we proposed.

本稿について

本稿は [10] での研究のうち、筆者の寄与部分を紹介するものであり、Math Advent Calendar 2022 に寄稿させていただくものである。主催者の寛大な好意に感謝したい。

1　はじめに

Gentzen 流のシークエント計算（cf. [7]）は、シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ についての証明体系である。ただしここで、Γ および Δ は論理式の有限多重集合である。記号 $\Rightarrow$ はメタな含意のように振る舞うので、シークエント計算では含意で特徴付けられる公理を推論規則に書き換えることが容易である。

たとえば、$\wedge$ に関する導入公理 $\varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$ は、以下の規則に書き換え可能である。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

*quawai@me.com, Shin Quawai

他方で、シークエント計算は最外の記号が含意記号でない公理をうまく扱うことが難しい。
そうした公理の例として以下を挙げられる。

線形性公理 LIN: $(\varphi \to \psi) \lor (\psi \to \varphi)$

弱排中律 WLEM: $\neg\varphi \lor \neg\neg\varphi$

また、**定領域公理** CD: $\forall x(\varphi \lor \psi(x)) \to \varphi \lor \forall x\psi(x)$ もシークエント計算での扱いが難しいことが知られている（[11]）。
われわれは、これらの公理を、[1] で提唱された**ハイパーシークエント計算**の推論規則により特徴づけることを目指している。
次節では、ハイパーシークエント計算を概説する。

2　ハイパーシークエント計算

ハイパーシークエント hypersequent とは、シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の有限多重集合であり、以下のように通常は表記される。

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \mid \dots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$$

シークエント $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ は、**コンポーネント** component と呼ばれる。
ハイパーシークエントに対するメタ記号として $G, H \dots$ を用いる。シークエントに対しては $S, T, \dots$ を用い、論理式に対しては $\varphi, \psi, \dots$ を用いる。空でもよいハイパーシークエント G と H の結合は $G \mid H$ と表される。
ハイパーシークエント計算の構造規則は、主に外的な external 規則と内的な internal 規則に二分される。前者は、ハイパーシークエントに対する構造規則であり、後者はシークエントに対する構造規則である。
表 1 でハイパーシークエント計算の構造規則を与えている。
規則 (ew) は外的弱化規則 external weakening であり、規則 (ec) は外的縮約規則 external contraction である。両者はそれぞれ、ハイパーシークエントごとに弱化、縮約をしてよいことを保証している。規則 (w-L) と (w-R) はそれぞれ左右の内的弱化規則 internal weakening であり、通常の弱化をシークエント内で行う。規則 (c-L) と (c-R) はそれぞれ左右の内的縮約規則 internal contraction であり、通常の縮約をシークエント内で行う。
次節で具体的な証明体系が示される。

3　体系 HLJ'

ハイパーシークエント計算の体系として主に古典（述語）論理の **HLK** や直観主義（述語）論理の **HLJ** が知られている。本節では、前原の **LJ** と呼ばれる

表 1: ハイパーシークエント計算の構造規則

$$\frac{}{\Delta, p \Rightarrow p}\,(\mathrm{Id}) \qquad \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow p}\,(\mathrm{Bot})$$

$$\frac{G \mid \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, \delta \qquad H \mid \delta, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1}{G \mid H \mid \Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0, \Delta_1}\,(\mathrm{Cut})$$

$$\frac{G}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{ew}) \qquad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{ec})$$

$$\frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma, \gamma \Rightarrow \Delta}\,(\text{w-L}) \qquad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow \delta, \Delta}\,(\text{w-R})$$

$$\frac{G \mid \Gamma, \gamma, \gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma, \gamma \Rightarrow \Delta}\,(\text{c-L}) \qquad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \delta, \delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \delta}\,(\text{c-R})$$

直観主義論理の体系にならって構成されたハイパーシークエント証明体系である直観主義命題論理の体系 $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ と直観主義述語論理の体系 $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{pred}}$ を紹介する。

まずその前に、古典論理に関しては以下の事実が知られている。

<u>**事実 3.1**</u> 1. **HLK** で $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ が証明可能なら、$\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee \Gamma_i \to \bigvee \Delta_i)$ は古典論理で妥当である。

2. φ が古典論理で妥当ならば、**HLK** で $\Rightarrow \varphi$ が証明可能である。

では、直観主義命題論理の体系 $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ へ移ろう。表 2 が $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ の論理規則である。

表 2: $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ の論理規則

$$\frac{G \mid \gamma_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \gamma_0 \wedge \gamma_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\wedge_i\text{-L}) \qquad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \delta_0 \qquad G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \delta_1}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \delta_0 \wedge \delta_1}\,(\wedge\text{-R})$$

$$\frac{G \mid \gamma_0, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad G \mid \gamma_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \gamma_0 \vee \gamma_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\vee\text{-L}) \qquad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \delta_i}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \delta_0 \vee \delta_1}\,(\vee_i\text{-R})$$

$$\frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \gamma \qquad G \mid \delta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma, \gamma \to \delta \Rightarrow \Delta}\,(\to\text{-L}) \qquad \frac{G \mid \Gamma, \gamma \Rightarrow \delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow \gamma \to \delta}\,(\to\text{-R})$$

$$\frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \delta}{G \mid \Gamma, \neg\delta \Rightarrow}\,(\neg\text{-L}) \qquad \frac{G \mid \Gamma, \gamma \Rightarrow}{G \mid \Gamma \Rightarrow \neg\gamma}\,(\neg\text{-R})$$

直観主義命題論理に関しても以下の事実が知られている。

<u>**事実 3.2**</u> 1. $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ で $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ が証明可能であるなら、$\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee \Gamma_i \to \bigvee \Delta_i)$ は直観主義命題論理で妥当である。

2. φ が直観主義命題論理で妥当ならば、$\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ で $\Rightarrow \varphi$ が証明可能である。

続いて直観主義述語論理である。$\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{pred}}$ は表 3 により特徴付けられる。

表 3: $\mathbf{HLJ''}_{\mathrm{pred}}$ の量化子に関する論理規則

$$\frac{G \mid [t/x]\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \forall x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\forall\text{-L}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \rightarrow \forall x\varphi}\ (\forall - R_{ss})$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists - L_s) \qquad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow [t/x]\psi}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\psi}\ (\exists\text{-R})$$

なお、表 3 において $(\forall - R_{ss})$ で変数記号 x は Γ に自由出現せず、$(\exists - L_s)$ で変数記号 x は Γ, Δ に自由出現しない。

全称閉包を取ることで、$\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{pred}}$ についても健全性と完全性が成立する。

4 (com) 規則と Gödel-Dummett 論理

ハイパーシークエントにおいて各シークエントは選言的に繋がっていると通常解釈されている。したがって、ハイパーシークエント計算では選言的公理を扱いやすい。例として、Gödel-Dummett 命題論理 $\mathbf{GD}_{\mathrm{prop}}$ すなわち直観主義命題論理に **LIN** を付加した体系を *communication* 規則という構造規則で特徴付けられる。

$$\frac{G \mid \Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi \qquad G \mid \Gamma', \Delta', \Rightarrow \Pi'}{G \mid \Gamma, \Delta' \Rightarrow \Pi \mid \Gamma', \Delta \Rightarrow \Pi'}\ (\mathrm{com})$$

(com) 規則は外的規則と内的規則の中間的な構造規則である。また代数的な観点から (com) 規則は、$\gamma \wedge \delta \leq \pi$ かつ $\gamma' \wedge \delta' \leq \pi'$ ならば $\gamma \wedge \delta' \leq \pi$ ないし $\gamma' \wedge \delta \leq \pi'$ のどちらかが成り立つことと考えられる。すなわち、ある意味で弱い排中律に対応する規則である。

事実 4.1 ([2], [3]) 1. $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}} + (\mathrm{com})$ で $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ が証明可能であるなら、$\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee \Gamma_i \rightarrow \bigvee \Delta_i)$ は Gödel-Dummett 命題論理 $\mathbf{GD}_{\mathrm{prop}}$ で妥当である。

2. φ が Gödel-Dummett 命題論理 $\mathbf{GD}_{\mathrm{prop}}$ で妥当ならば、$\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}+(\mathrm{com})$ で $\Rightarrow \varphi$ が証明可能である。

証明 (com) 規則を用いた **LIN** の導出のみを提示する。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\mathrm{Id}) \quad \overline{\psi \Rightarrow \psi}\,(\mathrm{Id})}{\varphi \Rightarrow \psi \mid \psi \Rightarrow \varphi}\,(\mathrm{com})}{\Rightarrow \varphi \to \psi \mid \psi \Rightarrow \varphi}\,(\to\text{-R})}{\Rightarrow \varphi \to \psi \mid\Rightarrow \psi \to \varphi}\,(\to\text{-R})}{\Rightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi) \mid\Rightarrow \psi \to \varphi}\,(\vee_0\text{-R})}{\Rightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi) \mid\Rightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)}\,(\vee_1\text{-R})}{\Rightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)}\,(\mathrm{ec})$$

□

以下の事実が知られている。

事実 4.2（[5]）
HLJ'$_{\mathrm{pred}}$ + $(\forall - R_{ms})$ - $(\forall - R_{ss})$+ (com) は、Gödel-Dummett 述語論理 **GD**$_{\mathrm{pred}}$ に対して健全かつ完全である。

ただし Gödel-Dummett 述語論理とは、直観主義述語論理に **LIN** と **CD** を加えたものである。また、$(\forall - R_{ms})$ 規則は以下の規則である。

$$\frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \varphi}{G \mid \Gamma \Rightarrow \forall x \varphi}\,(\forall - R_{ms})$$

ただし、変数記号 x は下段のハイパーシークエントに自由出現しない。

5　(com) 規則の分析：(rs) 規則と (ls) 規則

われわれは [10] において、(com) 規則をふたつの規則に分けることで分析しようと試みている。

第一の規則は *right split* 規則である。

$$\frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta_1 \mid \Gamma \Rightarrow \Delta_2}\,(\mathrm{rs})$$

この規則を代数的に考えると、不等式 $(\gamma \to \delta_1 \vee \delta_2) \leq (\gamma \to \delta_1) \vee (\gamma \to \delta_2)$ に対応する。このことは **LIN** に等しいとが知られている（[6]）。

事実 5.1（[10]）
1. **HLJ'**$_{\mathrm{prop}}$ に (rs) を加えた体系は **LIN** を証明する。
2. **HLJ'**$_{\mathrm{pred}}$ + $(\forall - R_{ms})$ - $(\forall - R_{ss})$ は **CD** を証明する。

証明 線形性公理について

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{$\vee_0$-R)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{($\vee_1$-R)}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{(w-R)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi, \psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{(w-R)}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \varphi, \psi$}
\RightLabel{($\vee$-L)}
\BinaryInfC{$\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi, \psi$}
\RightLabel{(rs)}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \psi \mid \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\psi \Rightarrow \varphi \mid \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\varphi \Rightarrow \psi \mid \psi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{($\rightarrow$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi \mid \psi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{($\rightarrow$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi \mid \Rightarrow \psi \rightarrow \varphi$}
\RightLabel{($\vee_0$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi) \mid \Rightarrow \psi \rightarrow \varphi$}
\RightLabel{($\vee_1$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$}
\RightLabel{(ec)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$}
\end{prooftree}
$$

定領域公理について

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{(w-R)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$\psi(x) \Rightarrow \psi(x)$}
\RightLabel{(w-R)}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \varphi, \psi(x)$}
\RightLabel{($\vee$-L)}
\BinaryInfC{$\varphi \vee \psi(x) \Rightarrow \varphi, \psi(x)$}
\RightLabel{($\forall$-L)}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \varphi, \psi(x)$}
\RightLabel{(rs)}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi \vee \psi(x) \Rightarrow \varphi \mid \forall x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \psi(x)$}
\RightLabel{($\forall - R_{ms}$)}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi \vee \psi(x) \Rightarrow \varphi \mid \forall x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \forall x \psi(x)$}
\RightLabel{($\vee_0$-R)}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi \vee \psi(x) \Rightarrow \varphi \vee \forall x \psi(x) \mid \forall x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \forall x \psi(x)$}
\RightLabel{($\vee_1$-R)}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi \vee \psi(x) \Rightarrow \varphi \vee \forall x \psi(x) \mid \forall x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \varphi \vee \forall x \psi(x)$}
\RightLabel{(ec)}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \varphi \vee \forall x \psi(x)$}
\RightLabel{($\rightarrow$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi(x)) \rightarrow \varphi \vee \forall x \psi(x)$}
\end{prooftree}
$$

□

事実 5.2（[10]） 1. φ が $\mathbf{GD}_{\mathrm{prop}}$ で妥当ならば、$\Rightarrow \varphi$ が $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$+(rs) で証明可能である。

2. φ が $\mathbf{GD}_{\mathrm{pred}}$ で妥当ならば、$\Rightarrow \varphi$ が $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{pred}}$ +($\forall - R_{ms}$) - ($\forall - R_{ss}$)+ (rs) で証明可能である。

事実 5.3（[10]） 1. $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ +(rs) で $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ が証明可能ならば、$\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigwedge \Gamma_i \rightarrow \bigvee \Delta_i)$ は命題 **GD** で妥当である。

2. $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{pred}}$ + ($\forall - R_{ms}$) - ($\forall - R_{ss}$) + (rs) で $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ が証明可能ならば、$\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigwedge \Gamma_i \rightarrow \bigvee \Delta_i)$ の全称閉包が **GD** で妥当である。

right split 規則の双対として、第二の規則 *left split* 規則を考えられる。

$$
\dfrac{G \mid \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma_1 \Rightarrow \Delta \mid \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{ls})
$$

この規則は、不等式 $(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \rightarrow \delta \leq (\gamma_1 \rightarrow \delta) \vee (\gamma_2 \rightarrow \delta)$ に対応し、**LIN** に同等である（[6]）。

事実 5.4（[10]）
HLJ'$_{prop}$ + (ls) は一般化されたド・モルガン規則 $((\gamma_1 \wedge \gamma_2) \to \delta) \to (\gamma_1 \to \delta) \vee (\gamma_2 \to \delta)$ を証明する。

このことから、**HLJ'**+ (ls) の直観主義（述語/命題）論理に線形性公理を加えたものに対する完全性がわかる。**CD** が証明できるかは目下の課題である。

6 各体系のカット消去

本節および次節では、当該プロジェクトの今後の課題を紹介する。特に本節は、[10] において未発表でかつ筆者の寄与である各体系のカット消去可能性を扱う。

ここで使っている手法は、[2] が別の体系に関して用いたもの（cf.[4]）を **HLJ'** 用に改変したものである。

Gentzen は、[7] で一定のカットを並行して簡約していった。しかしこの手法は、(ec) のおかげでハイパーシークエント計算のカット消去に直接的に応用することができない。そこで [2] は以下のような帰納法の仮定を用いた。

> $G' \mid \Gamma_1 \Rightarrow \delta \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \delta$ および $H' \mid \Sigma_1, \delta^{n_1} \Rightarrow \psi_1 \mid \ldots \mid \Sigma_k, \delta^{n_k} \Rightarrow \psi_k$ が当該の体系でカットなし証明可能ならば、$H' \mid G' \mid \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \psi_1 \mid \ldots \mid \Gamma, \Sigma_k \Rightarrow \psi_k$ もカットなし証明可能である。ただし、$\Gamma = \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ としている。

筆者が採用するのは、以下のような帰納法の仮定である。

> $G' \mid \Gamma_1 \Rightarrow \delta, \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \delta, \Delta_n$ および $H' \mid \Sigma_1, \delta^{n_1} \Rightarrow \Pi_1 \mid \ldots \mid \Sigma_k, \delta^{n_k} \Rightarrow \Pi_k$ が **HLJ'** でカットなし証明可能ならば、$H' \mid G' \mid \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi_1 \mid \ldots \mid \Gamma, \Sigma_k \Rightarrow \Delta, \Pi_k$ もカットなし証明可能である。ただし、$\Gamma = \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ と $\Delta = \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ としている。

なお、ここで δ^n は $\delta, \ldots, \delta$（n 回の出現）を表している。

では、これを用いて **HLJ'** のカット消去定理を証明しよう。

定理 6.1
ハイパーシークエント S が **HLJ'**$_{prop}$ が導出できるとき、S は **HLJ'**$_{prop}$ でカット規則を用いないで導出できる。

証明 $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ を以下のそれぞれ以下の証明図とする。

$$G \coloneqq G' \mid \Gamma_1 \Rightarrow \delta, \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \delta, \Delta_n$$

$$H \coloneqq H' \mid \Sigma_1, \delta^{n_1} \Rightarrow \Pi_1 \mid \ldots \mid \Sigma_k, \delta^{n_k} \Rightarrow \Pi_k$$

われわれは証明を $< c, r >$ に関する帰納法で行う。ここで c は論理式 δ の multi-cut 式の複雑性であり、r は $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ のランクの和である。

multi-cut の適用の直前に適用されている推論規則にしたがった以下の場合を考えれば十分である。

1. G と H が公理である。
2. $\mathcal{D}_1$ か $\mathcal{D}_2$ のどちらかが構造規則の適用で終わっている。
3. $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ の両方が、その主論理式を multi-cut 式とする論理規則の適用で終わっている。
4. $\mathcal{D}_1$ か $\mathcal{D}_2$ の両方が、その主論理式を mutli-cut 式としない論理規則の適用で終わっている。

ここではいくつかの主要な具体例を確認することにしよう。

(2) の例：$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ が (ec) の適用で終わる場合。

$\mathcal{D}_1$ が (ec) の適用で終わっているとしよう。例えば、以下である。

$$\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1'}{G' \mid \Gamma_1 \Rightarrow \delta, \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \delta, \Delta_n \mid \Gamma_n \Rightarrow \delta, \Delta_n}}{G' \mid \Gamma_1 \Rightarrow \delta, \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n \Rightarrow \delta, \Delta_n}\ (\mathrm{ec})$$

帰納法の仮定を $\mathcal{D}_2$ と $\mathcal{D}_1'$ の両方に用いることで、以下の証明図をえる。

$$G' \mid H' \mid \Gamma', \Sigma_1 \Rightarrow \Delta', \Pi_1 \mid \ldots \mid \Gamma', \Sigma_k \Rightarrow \Delta', \Pi_k$$

ただし、$\Gamma' = \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Gamma_n$ であり、$\Delta' = \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta_n$ である。所望を (c-L) と (c-R) の数回の適用でえる。

$\mathcal{D}_2$ が (ec) の適用で終わっているとしよう。例えば、以下である。

$$\dfrac{\overset{\mathcal{D}_2'}{H' \mid \Sigma_1, \delta^{n_1} \Rightarrow \Pi_1 \mid \ldots \mid \Sigma_k, \delta^{n_k} \Rightarrow \Pi_k \mid \Sigma_k, \delta^{n_k} \Rightarrow \Pi_k}}{H' \mid \Sigma_1, \delta^{n_1} \Rightarrow \Pi_1 \mid \ldots \mid \Sigma_k, \delta^{n_k} \Rightarrow \Pi_k}\ (\mathrm{ec})$$

帰納法の仮定を $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2'$ の両方に用いることで、以下の証明図をえる。

$$H' \mid G' \mid \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta \mid \ldots \mid \Gamma, \Sigma_k \Rightarrow \Delta \mid \Gamma, \Sigma_k \Rightarrow \Delta$$

ただし、$\Gamma = \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ であり、$\Delta = \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ である。それゆえ、主張は (ec) の適用により従う。

□

定理 6.2

ハイパーシークエント S が $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ + (com) が導出できるとき、S は $\mathbf{HLJ'}_{\mathrm{prop}}$ + (com) でカット規則を用いないで導出できる。

証明 $\mathcal{D}_2$ が (com) 規則の適用で終わっている場合を考えよう。例えば、以下である。

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2' \\ H_1 \mid \Sigma_1', \Sigma_2', \delta^{n_2} \Rightarrow \Pi_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2'' \\ H_2 \mid \Sigma_1, \Sigma_2 \delta^{n_1} \Rightarrow \Pi_1\end{matrix}}{H' \mid \Sigma_1, \Sigma_1' \delta^{n_1} \Rightarrow \Pi_1 \mid \Sigma_2, \Sigma_2', \delta^{n_2} \Rightarrow \Pi_2 \mid \ldots \mid \Sigma_k, \delta^{n_k} \Rightarrow \Pi_k} \text{(ec)}$$

ここで H_1 と H_2 はそれぞれ以下を表している。すなわち、

$$H' \mid \Sigma_{l+1}, \delta^{n_{l+1}} \Rightarrow \Pi_{l+1} \mid \ldots \mid \Sigma_k, \delta^{n_k} \Rightarrow \Pi_k$$

および

$$\Sigma_3, \delta^{n_3} \Rightarrow \Pi_3 \mid \ldots \mid \Sigma_l, \delta^{n_l} \Rightarrow \Pi_l$$

である。帰納法の仮定を $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2'$ の両方とまた同時に $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2''$ の両方とに用いることで、

$$G' \mid H' \mid \Sigma_1', \Sigma_2', \Gamma \Rightarrow \Pi_2, \Delta \mid \Sigma_{l+1}, \Gamma \Rightarrow \Pi_{l+1}, \Delta \mid \ldots \Sigma_k, \Gamma \Rightarrow \Pi_k, \Delta$$

と

$$G' \mid \Sigma_1, \Sigma_2, \Gamma \Rightarrow \Pi_1, \Delta \mid \Sigma_3, \Gamma \Rightarrow \Pi_3, \Delta \mid \ldots \mid \Sigma_k, \Gamma \Rightarrow \Pi_l, \Delta$$

をえる。ただし、$\Gamma = \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ である。所望は、$H' \mid G' \mid \Sigma_1, \Sigma_1', \Gamma \Rightarrow \Pi_1, \Delta \mid \Sigma_2, \Sigma_2' \Gamma \Rightarrow \Pi_2, \Delta \mid \ldots \mid \Sigma_k, \Gamma \Rightarrow \Pi_k, \Delta$ であり、(com) と (ec) の適用により得られる。 □

7 今後の課題

本節では [10] で紹介した今後の課題を紹介する。

課題 7.1
直観主義述語論理に定領域公理を付加した体系のハイパーシークエント計算であって、構造規則によって CD を定式化した振る舞いのよいものを見つけよ。

課題 7.2
そのような体系でカット消去定理および Craig の補完定理を証明せよ。

自由変数 $\vec{x}$ が出現するハイパーシークエント $(\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1)(\vec{x}) \mid \ldots \mid (\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n)(\vec{x})$ は、ふた通りに閉論理式へ翻訳されうる。

$$\forall \vec{x} \bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge \Gamma_i(\vec{x}) \to \bigvee \Delta_i(\vec{x})), \bigvee_{i=1}^{n} \forall \vec{x} (\bigwedge \Gamma_i(\vec{x}) \to \bigvee \Delta_i(\vec{x}))$$

前者では、自由変数が全てのコンポーネントで**共有**されていると考えられる。翻って後者では、自由変数が共有されることはない。これらのふたつの翻訳を明示的に扱うためにわれわれは簡便に、**グローバル変数**と**ローカル変数**という考え方を導入した。加えて以下のグローバル-ローカル変換規則がこの規則が定領域公理に対応すると予想している。

$$\frac{\Rightarrow \varphi \mid\Rightarrow \psi(x^{\mathrm{global}})}{\Rightarrow \varphi \mid\Rightarrow \psi(x^{\mathrm{local}})}$$

したがって以下の規則の考察が有益であると考えている。

$$\frac{S \mid G}{[x^{\mathrm{global}}/x^{\mathrm{local}}]S \mid G}\ (\text{share})$$

$$\frac{S \mid G}{[x^{\mathrm{local}}/x^{\mathrm{global}}]S \mid G}\ (\text{unshare})$$

ただし、x^{global} は G に自由に出現せず、x^{local} は S に自由に出現しない。

課題 7.3

グローバル、ローカル変数を区別したハイパーシークエント計算を考案せよ。

[8] と [9] は、ハイパーラムダ計算を提案した。単純型付ハイパーラムダ計算はさまざまな命題ハイパーシークエント計算に対応する。特に、非同期ハイパーシークエント計算 $\lambda - \mathbf{GD}$ は、Avron による **GD** の体系 **HLJ**+(com) に対応する。このカリー-ハワード対応を通して、われわれは線形性公理 **LIN** の理論計算機科学的内実を得られる。自然とわれわれは **CD** の理論計算機科学的内実を期待する。

課題 7.4

直観主義述語論理に **CD** を加えた論理にカリー-ハワード対応する型付ハイパーラムダ計算を考案せよ。

参考文献

[1] Arnon Avron. A constructive analysis of RM. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 52, No. 4, pp. 939–951, 1987.

[2] Arnon Avron. Hypersequents, logical consequence and intermediate logics for concurrency. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, Vol. 4, No. 3-4, pp. 225–248, 1991.

[3] Arnon Avron. The method of hypersequents in the proof theory of propositional non-classical logics. In Wilfrid Hodges, Martin Hyland, Charles Steinhorn, and John Truss, editors, *Logic: From Foundations to Applications: European Logic Colloquium*, pp. 1–32. Oxford University Press, 1996.

[4] Matthias Baaz, Agata Ciabattoni, and Christian G Fermüller. Hypersequent calculi for gödel logics—a survey. *Journal of Logic and Computation*, Vol. 13, No. 6, pp. 835–861, 2003.

[5] Matthias Baaz and Richard Zach. Hypersequents and the Proof Theory of Intuitionistic Fuzzy Logic. In *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1862, pp. 187–201. Springer, 2000.

[6] Hannes Diener and Maarten McKubre-Jordens. Classifying material implications over minimal logic. *Archive for Mathematical Logic*, Vol. 59, No. 7, pp. 905–924, 2020.

[7] Gerhard Gentzen. Investigations into logical deduction. *American philosophical quarterly*, Vol. 1, No. 4, pp. 288–306, 1964.

[8] Yoichi Hirai. A lambda calculus for gödel–dummett logic capturing wait-freedom. In *International Symposium on Functional and Logic Programming*, pp. 151–165. Springer, 2012.

[9] Yoichi Hirai. *Hyper-Lambda Calculi*. PhD thesis, University of Tokyo, 2013.

[10] Takuma Imamura, Shuya Matsumoto, and Shin Quawai. Hypersequent calculi for intermediate predicate logics. In *to appear in kokyuroku*, 2021.

[11] 鹿島亮. 中間述語論理 CD について. 覚黒田（編）, 算術体系の証明論, 数理解析研究所講究録, 第 1533 巻, pp. 1–8, 2007.