Транспортные задачи. Метод Северо-западного угла. Метод минимальной стоимости. Метод потенциалов

Транспортные задачи

В рамках задач линейного программирования также рассматриваются и транспортные задачи, суть которых заключается в оптимизации отправления груза из пунктов отправления (от поставщиков) в пункты назначения (к потребителям), при этом обеспечивая минимальные затраты на перевозку. При этом нужно учитывать тот факт, что груз должен быть однородным, т.е. таким, что его бы могли перевезти одним и тем же составом.

Обычно, начальные условия таких задач записывают в виде таблиц. В таком случае у нас выходит, что для m поставщиков и n потребителей такая таблице имеет следующий вид (смотрим таблицу 1), где показатели C_{ij} – это стоимость перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика (I = 1,2, 3, …, m) каждому j-му потребителю (j = 1, 2, 3, …, n); a_i – это мощность (запасы) i-го поставщика в планируемый период, а b_j – это спрос j-го потребителя на этот же период.

a_i \ b_j	b_1	b_2	…	b_n
a_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}
a_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	Cm1	C_{m2}	…	C_{mn}

Через неизвестную x_{ij} обозначим поставку, которая планируется к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Тогда получим математическую модель транспортной задачи следующего вида:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C\imath j * x\imath j$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} xij = ai, \; i = 1,2,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} xij = bj, j = 1,2,3,\ldots,n \end{cases}$$

Первая группа из m уравнение описывает тот факт, что запасы всех поставщиков вывозятся полностью, а вторая группа из n уравнение выражают, что требования поставщиков удовлетворяются полностью.

Если из предыдущего ограничения выведем следующее логическое ограничение:

$$\sum_{i=1}^{m} a\imath = \sum_{j=1}^{n} bj$$

То такое ограничение будет гласить о том, что суммарное количество запасов у поставщиков (суммарная мощность) равна суммарному спросу потребителей, то такая задача будет называться задачей с правильным балансом, а ее модель – закрытой.

Задача, в которой предыдущее ограничение отсутствует, т.е. суммарное количество запасов у поставщика не равно суммарному спросу потребителей, то такая задача будет называться задачей с неправильным балансом, а ее модель – закрытой.

Число неизвестных переменных x_{ij}, входящих в целевую функцию и систему ограничений равно m*n или же числу клеток таблицы. Соответственно количество ограничений в данной математической модели будет равно m+n с m*n переменными.

Любое решение транспортной задачи называется распределением поставок. Оно может быть записано и в виде матрицы:

$$
\begin{matrix}
x_{11} & x_{12} & x_{1n} \\
\dots & \dots & \dots \\
x_{m1} & x_{m2} & x_{mn}
\end{matrix}
$$

Теорема. Любая транспортная задача, у которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей – **имеет решение.**

Построение первоначального плана

План перевозок транспортной задачи может быть разным по своему решению, выделяют следующие определения:

Допустимый план – это такой план перевозок в транспортной задаче, который удовлетворяет оба вида условий, которые даны в математической модели ТЗ, т.е. все запасы поставщиков исчерпаны и все заявки потребителей удовлетворены.

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	5 [1]	3 [5]	2 [2]	10
A_2	2 [7]	[4]	8 [3]	10
A_3	5 [8]	4 [6]	1 [6]	10
Заявки	12	7	11	30

$$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$$

Количество базисных клеток в таблице равно 8 (>5), следовательно, план не является опорным.

Рисунок 1 - Пример допустимого плана

Опорный план – это такой план перевозок в транспортной задаче, в котором занятые ячейки перевозок по своему количеству не больше m + n – 1 перевозок, а остальные перевозки не участвуют.

Невырожденный опорный план – это такой план перевозок в транспортной задаче, который содержит ровно m+n-1 занятых ячеек перевозок, в другом случае план будет называться вырожденным.

Примеры опорных планов

невырожденный план

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	1 10	5	2	10
A_2	7	4	3 10	10
A_3	8 2	6 7	6 1	10
Заявки	12	7	11	30

$$m+n-1=3+3-1=5$$

Количество базисных клеток в таблице равно 5, следовательно, план является невырожденным опорным.

вырожденный план

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	2 10	5	6	10
A_2	7	1 10	3	10
A_3	4 2	8	6 8	10
Заявки	12	10	8	30

$$m+n-1=3+3-1=5$$

Количество базисных клеток в таблице равно 4 (<5), следовательно, план является вырожденным опорным.

Рисунок 2 - Пример опорных планов

Различия между вырожденными и невырожденными заключается в том, что если количество занятых (или базисных) ячеек перевозок не равно количеству m+n-1, то некоторые методы для решения транспортных задач становятся невозможны к использованию, либо же частично возможными, но итоговое решение с большей вероятностью будет неверным.

Для построения первоначального опорного (или хотя бы допустимого) плана, необходимо проверить полученные условия на равенство между продукцией на складах и потребностями клиентов.

Основным условием для начала решения транспортных задач является равенство между запасами и потребностями, если выходит так, что мы сталкиваемся с несбалансированной системой, когда-либо количества груза недостаточно на складах, или же наоборот, потребности удовлетворены, а склады не пустуют, то нужно транспортную задачу привести к сбалансированному виду, для этого:

1. В случаях, когда запасов больше, чем потребностей, нам необходимо ввести фиктивного потребителя, с потребностью равной оставшейся частью груза, при этом стоимость перевозок будет равна 0;
2. В случаях, когда запасов меньше, чем потребителей, нам необходимо ввести фиктивного поставщика с оставшимся количеством потребностей, при этом стоимость перевозок будет также равна 0.

Разберем два метода построения первоначальных опорных планов транспортной задачи.

Дана следующая таблица:

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы (a_i)
A_1	13	7	14	7	5	30
A_2	11	8	12	6	8	48
A_3	6	10	10	8	11	20
A_4	14	8	10	10	15	30
Заявки (b_j)	18	27	42	26	15	128

Рисунок 3 – Пример

1-ый метод. Метод северо-западного угла

Принцип данного метода заключается в том, что мы игнорируем стоимость самих перевозок. Метод начинается с левой верхней клетки (A1B1), которую называют северо-западной. Для определения, сколько данный поставщик (A1) должен перевести товаров (потребитель B1) выбираем наименьшее из двух чисел => min a1, b1 (запасы и заявки), в нашем примере –

наименьшим будут заявки (b1) в размере 18 шт., значит первый поставщик должен перевести 18 штук товаров со склада (a1).

Для определения дальнейшего плана делаем проверку:

Если ai < bj, то xij = ai (i-ый запас поставщика исчерпан). Если запасы поставщика исчерпаны, то мы в уме вычеркиваем его строку, и должны сместиться вниз, на строку ниже к следующему поставщику.

Если ai > bj, то xij = bj (j-ая заява потребителя закрыта). Если заявка потребителя удовлетворена, то мы в уме вычеркиваем его столбец, и должны сместиться на столбец вправо, т.е. к следующему потребителю.

Если ai = bj, то xij = ai (i-ый запас поставщика исчерпан, j-ая заявка потребителя удовлетворена). Если запасы и заявки равны, то в таком случае в ячейку заносим значение из любого из них, и в уме вычеркиваем и строку, и столбец, в котором находились, далее переходим по диагонали – на строку вниз и столбец вправо.

Кратко этот алгоритм можно записать следующим образом:

I = 1, j = 1

X ij = min a1, b1

1) Если ai < bj, то xij = ai; bj = bj – ai; I = I + 1
2) Если ai > bj, то xij = bj; ai = ai – bj; j = j + 1
3) Если ai = bj, то xij = ai, I = I + 1; j = j + 1.

Построим план, к примеру с помощью метода северо-западного угла:

Нахождение опорного плана

	Потребители										
Поставщики	B1		B2		B3		B4		B5		Запасы
A1		13		7		14		7		8	30
	18		12								0
A2		11		8		12		6		8	48
			15		33						0
A3		6		10		10		8		11	20
					9		11				0
A4		14		8		10		10		15	30
							15		15		0
Заявки	0	18	0	27	0	42	0	26	0	15	

Зеленым выделены ячейки допустимого плана

Считаем их количество. Всего ячеек участвующих в допустимом плане - 8

m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8

Получившийся план является невырожденным опорным

Рисунок 4 - Опорный невырожденный план (СЗУ)

Для нахождения затрат на организацию перевозки сложим сумму произведения количества перевозимого груза в ячейке на стоимость перевозки за 1 единицу товара.

С помощью метода северно-западного угла затраты на организацию перевозки равны 1387 у.е.

2-ой метод. Минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости, как правило, используется для нахождения опорного плана транспортной задачи, при котором общая стоимость затрат на организацию перевозок груза будет меньше, чем на опорном плане через метод северно-западного угла.

Из всей данной таблицы со стоимости перевозки 1 ед. продукции от поставщика до потребителя выбирают клетку с наименьшей стоимостью, и записывают в нее меньшее количество доставляемой продукции из ai и bj. Затем из рассмотрения в уме убираем либо строку (если запасы со склада истрачены) либо столбец (если потребности все удовлетворены).

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбираем ячейку с наименьшей стоимостью доставки, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все запасы не будут израсходованы, а заявки будут удовлетворены.

Решим тот же самый пример, но теперь с помощью метода минимальной стоимости:

Нахождение опорного плана мин. Стоимость

	Потребители										
Поставщики	B1		B2		B3		B4		B5		Запасы
A1		13		7		14		7		8	30
			27						3		0
A2		11		8		12		6		8	48
					10		26		12		0
A3		6		10		10		8		11	20
	18				2						0
A4		14		8		10		10		15	30
					30						0
Заявки	0	18	0	27	0	42	0	26	0	15	

Зеленым выделены ячейки допустимого плана

Считаем их количество. Всего ячеек участвующих в допустимом плане - 8

m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8

Получившийся план является невырожденным опорным

Рисунок 5 - Опорный невырожденный план (мин. стоимость)

Для нахождения затрат на организацию перевозки сложим сумму произведения количества перевозимого груза в ячейке на стоимость перевозки за 1 единицу товара.

С помощью метода минимальной стоимости затраты на организацию перевозки равны 1013 у.е.

Оценка оптимальности опорного плана ТЗ через метод потенциалов

Для того, чтобы проверить является ли план оптимальным необходимо выполнить первую итерацию решения транспортной задачи через метод потенциалов.

Суть метода потенциала заключается в том, что каждую ячейку проверяем на их потенциальное значение, возможно у нас имеется какая-то ячейка, которая может быть стоить меньше, чем остальные.

Этапы алгоритма решения транспортных задач через метод потенциалов:

1. Проверить выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Задача должна иметь верный баланс, если задача имеет

неверный баланс, то вводится фиктивный поставщик или потребитель с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок;

2. Построить начальное опорное решение (с помощью любого метода, хоть СЗУ, хоть мин стоимости). Проверить правильность его построения с помощью расчета количества занятых ячеек в таблице, их должно быть m + n – 1.

3. Построить систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений

$$ui + vj = cij, \text{при } xij > 0$$

которая имеет бесконечное множество решений. Для нахождения частного решения систему одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствуют большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам:

если известен потенциал vj

$$ui = cij - vj$$

если известен потенциал ui

$$vj = cij - ui$$

4. Проверить выполнение условия оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам

$$\Delta ij = ui + vj - cij$$

и те из них, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток дельта меньше или равна нулю, то вычисляют значение целевой функции и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, опорное решение не является оптимальным.

Дальше этапы решения через метод потенциала не рассматриваем, на это будет отдельная лекция и практическая работа.

Разберем метод потенциалов для проверки оптимальности опорного плана, решенного через минимальной стоимости.

Исходя из вышеперечисленных этапов, приступаем сразу к 3 этапу и составляем систему уравнений для нахождения потенциалов, основываясь на занятых перевозках.

Можем обнаружить, что на 2-ой строке больше всего известных (занятых) клеток, значит можем принять, что u2 = 0, с помощью узнанного u2 и составленной системы уравнений находим остальные потенциалы.

После того, как были найдены все потенциалы, рассчитаем дельты каждой свободной клетки, попробуем найти дельту, которая будет больше 0, что будет означать найденную ячейку с положительным потенциалом.

Зелеными ячейками в пустых клетках отмечены устраивающие нас отрицательные или нулевые потенциалы, в нашем случае вышло так, что построенный опорный план с помощью метода минимальной стоимости оказался оптимальным, соответственно ответом на данную задачу будет:

Min f (x) = 1013 у.е.

		v1=	8	v2=	7	v3=	12	v4=	6	v5=	8	
		Потребители										
	Поставщики	B1		B2		B3		B4		B5		Запасы
u1=	A1	-5	13		7	-2	14	-1	7		8	30
0				27						3		0
u2=	A2	-3	11	-1	8		12		6		8	48
0						10		26		12		0
u3=	A3		6	-5	10		10	-4	8	-5	11	20
-2		18				2						0
u4=	A4	-8	14	-3	8		10	-6	10	-9	15	30
-2						30						0
	Заявки	0	18	0	27	0	42	0	26	0	15	

Больше всего используемых клеток находится на второй строке (u2), значит, возьмем u2 = 0

Составим систему уравнений:

u2 = 0
u1 + v2 = 7
u1 + v5 = 8
u2 + v3 = 12
u2 + v4 = 6
u2 + v5 = 8
u3 + v1 = 6
u3 + v3 = 10
u4 + v3 = 10

Раз u2 = 0, то мы можем найти значения для v3, v4, v5
u2 + v3 = 12 0 + v3 = 12 v3 = 12
u2 + v4 = 6 0 + v4 = 6 v4 = 6
u2 + v5 = 8 0 + v5 = 8 v5 = 8
Далее узнаем u1, за счет узнанного v5
u1 + v5 = 8 u1 + 8 = 8 u1 = 0
Узнаем v2, за счет узнанного u1
u1 + v2 = 7 0 + v2 = 7 v2 = 7
Узнаем u3 и u4, за счет узнаного v3
u3 + v3 = 10 u3 + 12 = 10 u3 = -2
u4 + v3 = 10 u4 + 12 = 10 u4 = -2
Узнаем оставшийся v1, за счет узнанного u3
u3 + v1 = 6 -2 + v1 = 6 v1 = 8

Вышло так, что все пустые ячейки имеют отрицательную дельту
Значит найденный опорный план является оптимальным

Рисунок 6 - Проверка на оптимальность (мин. стоимости)

Проверим также опорный план, найденный через метод северо-западного угла.

Данный план имеет 8 ячеек с положительной дельтой потенциалов, соответственно, план не оптимальный.

		v1=	13	v2=	7	v3=	11	v4=	9	v5=	14	
		Потребители										
	Поставщики	B1		B2		B3		B4		B5		Запасы
u1=	A1		13		7		14		7		8	30
0		18		12			-3		2		6	5
u2=	A2		11		8		12		6		8	48
1			3	15		33			4		7	14
u3=	A3		6		10		10		8		11	20
-1			6		-4	9		11			2	4
u4=	A4		14		8		10		10		15	30
1			0		0		2	15		15		2
	Заявки	0	18	0	27	0	42	0	26	0	15	

В каждой строке и некоторых столбцах у нас есть по 2 занятых клетки				
Пусть u1 = 0				
Составим систему уравнений потенциалов				
u1=0	Раз u1 = 0, найдем v1 и v2			Рассчитаем дельты и проверим опорный план на оптимальность
u1 + v1 = 13	u1 + v1 = 13	0 + v1 = 13	v1 = 13	
u1 + v2 = 7	u1 + v2 = 7	0 + v2 = 7	v2 = 7	Было найдено целых 8 точек с положительным потенциалом
u2 + v2 = 8	Найдем u2			Соответственно найденный опорный план - не является оптимальным
u2 + v3 = 12	u2 + v2 = 8	u2 + 7 = 8	u2 = 1	
u3 + v3 = 10	Найдем v3			
u3 + v4 = 8	u2 + v3 = 12	1 + v3 = 12	v3 = 11	
u4 + v4 = 10	Найдем u3			
u4 + v5 = 15	u3 + v3 = 10	u3 + 11 = 10	u3 = -1	
	Найдем v4			
	u3 + v4 = 8	-1 + v4 = 8	v4 = 9	
	Найдем u4			
	u4 + v4 = 10	u4 + 9 = 10	u4 = 1	
	Найдем v5			
	u4 + v5 = 15	1 + v5 = 15	v5 = 14	

Рисунок 7 - Проверка на оптимальной (СЗУ)

Принято считать метод минимальной стоимости предпочтительным, для построения оптимальных планов.

Задача на самостоятельное решение. Необходимо построить опорный план с помощью любого из двух методов (метод северо-западного угла или минимальной стоимости) и проверить план на оптимальность с помощью метода потенциалов.

a_i \ b_j	200	200	300	400
200	4	3	2	1
300	2	3	5	6
500	6	7	9	12