

## Оптимизация опорного невырожденного плана методом потенциалов

На предыдущей лекционной паре мы с вами разобрали новый вид задач линейного программирования – Транспортные задачи, целью которых является найти оптимальный план перевозок для минимизации затрат осуществления доставки товаров от поставщиков клиентам.

С помощью изученных двух методов построение опорных планов, мы научились строить их, но в большинстве своем, найденные планы не будут являться оптимальными, из-за чего задача линейного программирования не может считаться решенной, да, ограничения (вывести все товары и удовлетворить все заявки) соблюдены, но это еще не минимальная сумма за которую могли бы выполнить перевозку товаров.

Для проверки оптимальности найденного опорного невырожденного плана использовался метод потенциалов, целью которого является проверить, нет ли клетки с потенциалом выше, чем у занятых клеток, которые используются в решении, если такие клетки находятся, то мы делали вывод – найденный опорный невырожденный план неоптimalен.

На деле, метод потенциалов – это метод по оптимизации опорных невырожденных планов, а его первая часть – это проверка на наличие клеток с положительным потенциалом, или же поиск таких клеток, которые, если бы мы использовали в опорном плане, то это уменьшило бы стоимость всей перевозки товаров.

Разберем на примере оптимизацию опорного невырожденного плана с помощью метода потенциалов:

Типовая задача 1.

Дана задача:

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	1	1	4	2	20
A2	3	2	2	7	30
A3	5	3	5	1	40
Потребности	10	15	25	50	

Составьте опорный план с помощью метода минимальной стоимости и произведите оптимизацию опорного плана через метод потенциалов.

Шаг 1. Проверим соблюдение условия разрешимости задачи по Первому теореме транспортных задач.

Первая теорема гласит о том, что если сумма запасов поставщиков равна сумме потребности клиентов, то транспортная задача имеет решение.

Сумма запасов:  $20 + 30 + 40 = 90$

Сумма потребностей:  $10 + 15 + 25 + 50 = 100$

Баланс не соблюден, запасы не равны потребностям, вводим 4-ого фиктивного поставщика с нулевыми стоимостями перевозок, чтобы была возможность удовлетворить все заявки клиентов. У 4-ого поставщика запасы будут равны разности суммы потребностей клиентов и суммы запасов, т.е.  $100 - 90 = 10$ .

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	1	1	4	2	20
A2	3	2	2	7	30
A3	5	3	5	1	40
A4	0	0	0	0	10
Потребности	10	15	25	50	

После ввода 4-ого поставщика переходим к построению начального опорного плана.

Шаг 2. Найти начальное опорное решение

С помощью метода минимальной стоимости, который позволит нам наверняка составить опорный план с уже мелкими затратами на поставку, нежели метод северо-западного угла, строим начальное опорное решение.

Ищем минимальные ячейки во всей таблице стоимости и занимаем их для опорного решения.

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1	1 [15]	4	2 [5]	0
A2	3	2	2 [25]	7 [5]	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [10]	0	0	0	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Найдем значение ЦФ.

$$\text{Min } f(x) = 0 * 10 + 1 * 15 + 1 * 40 + 2 * 25 + 2 * 5 + 7 * 5 = 15 + 40 + 50 + 10 + 35 = 150$$

Посчитаем количество занятых клеток и определим, план невырожденный или вырожденный.

6 клеток занято в нашем опорном плане, а должно быть  $4 + 4 - 1 = 7$ , на данный момент план является вырожденным, а метод потенциалов можно применять только к невырожденным.

Добавим еще одну клетку в решение с количеством товаров к перевозке 0. Пусть будет это клетка A4 B4.

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1	1 [15]	4	2 [5]	0
A2	3	2	2 [25]	7 [5]	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [10]	0	0	0 [0]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

После того, как мы превратили вырожденный план в невырожденный переходим к шагу 3.

Шаг 3. Нахождение потенциалов.

Для проведения проверки плана на оптимальность, необходимо найти потенциалы.

Составим уравнение основываясь на формулу  $u_i + v_j = C_{ij}$ , по отношению к занятым клеткам.

$$u_1 + v_2 = 1$$

$$u_1 + v_4 = 2$$

$$u_2 + v_3 = 2$$

$$u_2 + v_4 = 7$$

$$u_3 + v_4 = 1$$

$$u_4 + v_1 = 0$$

$$u_4 + v_4 = 0$$

Больше всего занятых клеток в  $v_4$ , пусть  $v_4 = 0$

Тогда:

$$U_1 + v_2 = 1, \text{ раз } u_1 = 2, \text{ то } v_2 = -1$$

$$U_1 + 0 = 2, u_1 = 2$$

$$U_2 + v_3 = 2, \text{ раз } u_2 = 7, \text{ то } v_3 = -5$$

$$U_2 + 0 = 7, u_2 = 7$$

$$U_3 + 0 = 1, u_3 = 1$$

$$U_4 + v_1 = 0, \text{ раз } u_4 = 0, \text{ то } v_1 = 0$$

$$U_4 + 0 = 0, u_4 = 0$$

Потенциалы:

$$U_1 = 2, u_2 = 7, u_3 = 1, u_4 = 0$$

$$V_1 = 0, v_2 = -1, v_3 = -5, v_4 = 0$$

После нахождения потенциалов переходим к проверке оптимальности найденного плана.

Шаг 4. Проверка оптимальности.

С помощью  $\Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$  проверим потенциалы клеток, если найдется хоть одна клетка с положительной дельтой, то план – неоптимальен.

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1	0	4	0	2
A2	3	2	0	0	7
A3	5	3	5	0	1
A4	0	0	0	0	0
V	0	-1	-5	0	

$$\Delta_{A1 B1} = 2 + 0 - 1 = 1 > 0$$

$$\Delta_{A2 B1} = 7 + 0 - 3 = 4 > 0$$

$$\Delta_{A3 B1} = 1 + 0 - 5 = -4$$

$$\Delta_{A2 B2} = 7 - 1 - 2 = 4 > 0$$

$$\Delta_{A3 B2} = 1 - 1 - 3 = -3$$

$$\Delta_{A4 B2} = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\Delta_{A1 B3} = 2 - 5 - 4 = -7$$

$$\Delta_{A3 B3} = 1 - 5 - 5 = -9$$

$$\Delta_{A4 B3} = 0 - 5 - 0 = -5$$

Рассчитав все дельты, выяснилось, что три клетки (A1B1, A2B1, A2B2) имеют положительно значение – план неоптimalен.

Переходим к оптимизации плана.

### Шаг 5. Перераспределение груза

Процесс оптимизации опорного невырожденного плана заключается в том, что необходимо выполнить переход к новому опорному плану посредству перераспределения груза между найденными клетками с положительным потенциалом и клетками базисного решения.

Найдем ячейку с наибольшим потенциалом.

Ячейки A2B1 и A2B2 имеют потенциал 4, он максимальный, но перед тем, как выбрать ячейку, важное уточнение, что перераспределение груза проходит по циклам, вот такого вида могут быть циклы перераспределения:

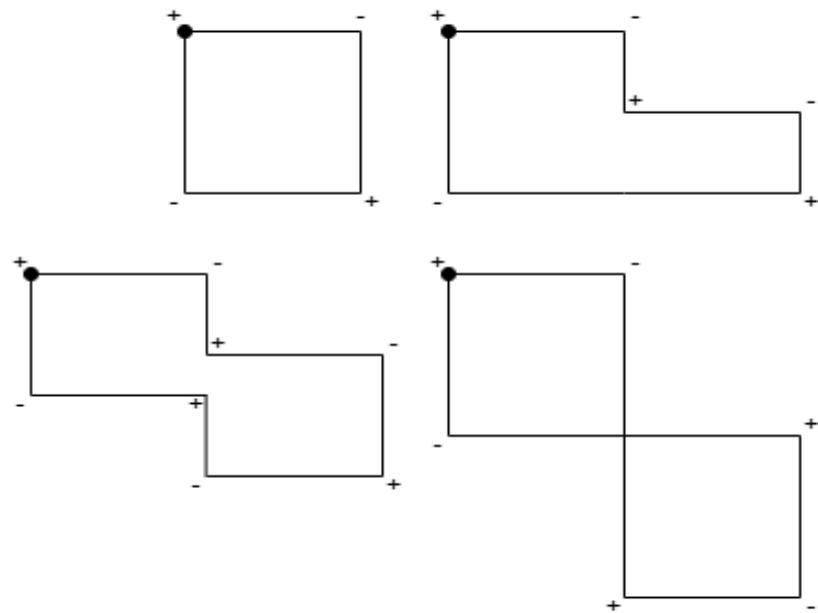


Рисунок 1 - Виды циклов

То есть проходит некое чередование знаков + и -. Что это означает?

Точка – это место начала цикла, циклы всегда начинаются с выбранной ячейки с максимальным потенциалом со знаком +, далее идет чередование этих знаков. Следующие ячейки могут быть только ЗАНЯТЫЕ ГРУЗОМ ЯЧЕЙКИ.

Строго настрого должен соблюдаться цикл, откуда вышли – туда и вернулись, строго настрого должно соблюдаться чередование знаков и строго

настрого должно соблюдаться следующее условие: в цикле могут участвовать только 1 клетка с максимальным потенциалом и остальные клетки только из базисного решения.

Плюс означает, что в эту ячейку прибавится груз для доставки, а минус откуда груз берется и перераспределяется в ячейку с плюсом.

Также основным условием является то, что всегда на каждой итерации составления нового опорного плана с перераспределенным грузом будет один единственный цикл, по которому произойдет перераспределение.

Посмотрим еще раз на таблицу. Нам нужно выбрать ячейку, с которой будем начинать цикл перераспределения, по условиям эта клетка должна быть с максимальным потенциалом, у нас их две, но только с клеткой A2B1 у нас выйдет составить цикл.

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1	0	4	0	2
A2	3	2	0	0	7
A3	5	3	5	0	1
A4	0	0	0	0	0
V	0	-1	-5	0	

Составим цикл и перераспределим груз. Отметим участвующие в цикле ячейки красным цветом.

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1	0	4	0	2
A2	3 (+)	2	0	0 (-)	7
A3	5	3	5	0	1
A4	0 (-)	0	0	0 (+)	0
V	0	-1	-5	0	

Теперь нужно определить сколько груза будем перераспределять, для этого из вершин со знаком минус выберем наименьшее количество груза (то, сколько в этой ячейки груза перевозится).

Таблица с количеством груза:

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1	1 [15]	4	2 [5]	0
A2	3	2	2 [25]	7 [5]	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [10]	0	0	0 [0]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Среди вершин с минусом в ячейках A2 B4 и A4 B1 наименьшим является количество в размере 5 грузов, значит начинаем перераспределение.

Из вершин с минусом вычитаем 5 грузов, а в ячейки с плюсами добавляем 5 груза.

Получаем следующий опорный план:

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1	1 [15]	4	2 [5]	0
A2	3 [5]	2	2 [25]	7 [0]	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [5]	0	0	0 [5]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Проверяем теперь количество базисных клеток:

Теперь у нас 8 клеток, а должно быть 7, значит прошлую клетку A2 B4, которая участвовала в базисном решении, уберем из решения, так как в ней 0 груза перевозится, и она теперь лишняя.

Получаем новый опорный план:

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1	1 [15]	4	2 [5]	0
A2	3 [5]	2	2 [25]	7	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [5]	0	0	0 [5]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Рассчитаем новое значение ЦФ:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) = & 1 * 15 + 2 * 5 + 3 * 5 + 2 * 25 + 1 * 40 + 0 * 5 + 0 * 5 = 15 + 10 \\ & + 15 + 50 + 40 + 0 + 0 = 130 \end{aligned}$$

Значение ЦФ уже стало меньше на 20 у.е.

Проверим новый опорный план на оптимальной, если план оптимален, то прекращаем оптимизацию.

#### Шаг 6. Проверка оптимальности (2 итерация)

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1	1 [15]	4	2 [5]	0
A2	3 [5]	2	2 [25]	7	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [5]	0	0	0 [5]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Составим систему уравнений:

$$U1 + v2 = 1$$

$$U1 + v4 = 2$$

$$U2 + v1 = 3$$

$$U2 + v3 = 2$$

$$U3 + v4 = 1$$

$$U4 + v1 = 0$$

$$U4 + v4 = 0$$

В  $v4$  больше всего занятых клеток, пусть  $v4=0$ , тогда

$$U1 + v2 = 1, u1 = 2, v2 = -1$$

$$U1 + 0 = 2, u1 = 2$$

$$U2 + v1 = 3, v1 = 0, u2 = 3$$

$$U2 + v3 = 2, u2 = 3, v3 = -1$$

$$U3 + 0 = 1, u3 = 1$$

$$U4 + v1 = 0, u4 = 0, v1 = 0$$

$$U4 + 0 = 0, u4 = 0$$

$$U1 = 2, u2 = 3, u3 = 1, u4 = 0$$

$$V1 = 0, v2 = -1, v3 = -1, v4 = 0$$

Рассчитаем дельты:

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1	0	4	0	2
A2	0	2	0	7	3
A3	5	3	5	0	1
A4	0	0	0	0	0
V	0	-1	-1	0	

$$\Delta A1 B1 = 2 + 0 - 1 = 1$$

$$\Delta A3 B1 = 1 + 0 - 5 = -4$$

$$\Delta A2 B2 = 3 - 1 - 2 = 0$$

$$\Delta A3 B2 = 1 - 1 - 3 = -3$$

$$\Delta A4 B2 = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\Delta A1 B3 = 2 - 1 - 4 = -3$$

$$\Delta A3 B3 = 1 - 1 - 5 = -5$$

$$\Delta A4 B3 = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\Delta A2 B4 = 3 + 0 - 7 = -4$$

Опорный план неоптимальный, т.к. в ячейке A1 B1 дельта больше 0.

Шаг 7. Перераспределение груза (2 итерация)

Найдем цикл перераспределения.

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1	1 [15]	4	2 [5]	0
A2	3 [5]	2	2 [25]	7	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [5]	0	0	0 [5]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Есть цикл A1 B1 -> A1 B4 -> A4 B4 -> A4 B1 -> A1 B1

Составим цикл:

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1 (+)	1 [15]	4	2 [5] (-)	0
A2	3 [5]	2	2 [25]	7	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [5] (-)	0	0	0 [5] (+)	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Минимальное количество груза в вершинах со знаком минус – 5.

Проведем перераспределение:

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1 [5]	1 [15]	4	2 [0]	0
A2	3 [5]	2	2 [25]	7	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Посчитаем количество занятых клеток: 8, для решения должно быть 7, уберем клетку A1 B4 из решения.

Новый опорный план:

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1 [5]	1 [15]	4	2	0
A2	3 [5]	2	2 [25]	7	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Посчитаем значение ЦФ:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) = & 1 * 5 + 1 * 15 + 3 * 5 + 2 * 25 + 1 * 40 + 0 * 0 + 0 * 10 = 5 + 15 \\ & + 15 + 50 + 40 = 125 \end{aligned}$$

Значение уменьшилось еще на 5 у.е.

Проверим план на оптимальность.

Шаг 8. Проверка на оптимальность (3 итерация)

	B1	B2	B3	B4	Осталось вывезти
A1	1 [5]	1 [15]	4	2	0
A2	3 [5]	2	2 [25]	7	0
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	0
Осталось довезти	0	0	0	0	

Составим систему уравнений для нахождения потенциалов:

$$U1 + v1 = 1$$

$$U1 + v2 = 1$$

$$U2 + v1 = 3$$

$$U2 + v3 = 2$$

$$U3 + v4 = 1$$

$$U4 + v1 = 0$$

$$U4 + v4 = 0$$

В первом столбце больше всего занятых клеток, пусть  $v1 = 0$ , тогда:

$$U1 + 0 = 1, u1 = 1$$

$$U1 + v2 = 1, u1 = 1, v2 = 0$$

$$U2 + 0 = 3, u2 = 3$$

$$U2 + v3 = 2, u2 = 3, v3 = -1$$

$$U3 + v4 = 1, v4 = 0, u3 = 1$$

$$U4 + 0 = 0, u4 = 0$$

$$U4 + v4 = 0, u4 = 0, v4 = 0$$

$$U1 = 1, u2 = 3, u3 = 1, u4 = 0$$

$$V1 = 0, v2 = 0, v3 = -1, v4 = 0$$

Рассчитаем дельты:

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1 [5]	1 [15]	4	2	1
A2	3 [5]	2	2 [25]	7	3
A3	5	3	5	1 [40]	1
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	0
V	0	0	-1	0	

$$\Delta A3 B1 = 1 + 0 - 5 = -4$$

$$\Delta A2 B2 = 3 + 0 - 2 = 1$$

$$\Delta A3 B2 = 1 + 0 - 3 = -2$$

$$\Delta A4 B2 = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$\Delta A1 B3 = 1 - 1 - 4 = -4$$

$$\Delta A3 B3 = 1 - 1 - 5 = -5$$

$$\Delta A4 B3 = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\Delta A1 B4 = 1 + 0 - 2 = -1$$

$$\Delta A2 B4 = 3 + 0 - 7 = -4$$

В ячейке A2 B2 положительный потенциал, опорный план неоптimalен.

Перейдем к распределение грузов.

Шаг 9. Перераспределение груза (3 итерация)

Определим цикл:

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1 [5] (+)	1 [15 (-)]	4	2	1
A2	3 [5] (-)	2 (+)	2 [25]	7	3
A3	5	3	5	1 [40]	1
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	0
V	0	0	-1	0	

Найдем сколько груза будет распределять, среди вершин с минусами минимальным значением будет 5. Проведем перераспределение:

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1 [10]	1 [10]	4	2	1
A2	3 [0]	2 [5]	2 [25]	7	3
A3	5	3	5	1 [40]	1
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	0
V	0	0	-1	0	

Посчитаем количество базисных ячеек: 8 штук, а должно быть 7, значит ячейку A2 B1 убираем из базисного решения, получаем опорный план:

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1 [10]	1 [10]	4	2	1
A2	3	2 [5]	2 [25]	7	3
A3	5	3	5	1 [40]	1
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	0
V	0	0	-1	0	

Проверим на оптимальность.

Шаг 10. Проверка на оптимальность (4 итерация)

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1 [10]	1 [10]	4	2	
A2	3	2 [5]	2 [25]	7	
A3	5	3	5	1 [40]	
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	
V					

Составим систему уравнений:

$$U_1 + v_1 = 1$$

$$U_1 + v_2 = 1$$

$$U_2 + v_2 = 2$$

$$U_2 + v_3 = 2$$

$$U_3 + v_4 = 1$$

$$U_4 + v_1 = 0$$

$$U_4 + v_4 = 0$$

Пусть  $u_1 = 0$ , тогда

$$0 + v_1 = 1, v_1 = 1$$

$$0 + v_2 = 1, v_2 = 1$$

$$U_2 + v_2 = 2, v_2 = 1, u_2 = 1$$

$$U_2 + v_3 = 2, u_2 = 1, v_3 = 1$$

$$U_3 + v_4 = 1, v_4 = 1, u_3 = 0$$

$$U_4 + v_1 = 0, v_1 = 1, u_4 = -1$$

$$U_4 + v_4 = 0, u_4 = -1, v_4 = 1$$

$$U_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0, u_4 = -1$$

$$V_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 1, v_4 = 1$$

Найдем все дельты:

	B1	B2	B3	B4	U
A1	1 [10]	1 [10]	4	2	0
A2	3	2 [5]	2 [25]	7	1
A3	5	3	5	1 [40]	0
A4	0 [0]	0	0	0 [10]	-1
V	1	1	1	1	

$$\Delta A_2 B_1 = 1 + 1 - 3 = -1$$

$$\Delta A_3 B_1 = 0 + 1 - 5 = -4$$

$$\Delta A_3 B_2 = 0 + 1 - 3 = -2$$

$$\Delta A_4 B_2 = -1 + 1 - 0 = 0$$

$$\Delta A_1 B_3 = 0 + 1 - 4 = -3$$

$$\Delta A_3 B_3 = 0 + 1 - 5 = -4$$

$$\Delta A_4 B_3 = -1 + 1 - 0 = 0$$

$$\Delta A_1 B_4 = 0 + 1 - 2 = -1$$

$$\Delta A_2 B_4 = 1 + 1 - 7 = -5$$

Положительных дельт нет – план оптимален.

Рассчитаем значение его ЦФ:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= 1 * 10 + 1 * 10 + 2 * 5 + 2 * 25 + 1 * 40 + 0 * 0 + 0 * 10 = \\ &= 10 + 10 + 10 + 50 + 40 = 120 \text{ y.e.} \end{aligned}$$

Ответ: при найденном оптимальном решении к транспортной задаче стоимость поставки товаров от поставщиков до клиентов составит 120 условных единиц.

Типовая задача 2 (Самостоятельное решение).

Решите поставленную транспортную задачу любым методом и оптимизируйте найденный опорный план. (Минимум 5 итераций).

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	8	6	10	9	7	<b>35</b>
A2	9	7	4	6	8	<b>50</b>
A3	14	9	16	12	11	<b>40</b>
A4	6	5	8	7	6	<b>25</b>
Заявки	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>45</b>	<b>25</b>	<b>10</b>	