



**UNIVERSIDADE DE FORTALEZA - UNIFOR  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**ALESSANDRO QUEIROZ BESSA CHAVES**

**DESENVOLVIMENTO DE UM *SOFTWARE* PARA OTIMIZAÇÃO DO  
DIMENSIONAMENTO E DO DETALHAMENTO DE VIGAS**

**FORTALEZA**

**2019**

ALESSANDRO QUEIROZ BESSA CHAVES

DESENVOLVIMENTO DE UM *SOFTWARE* PARA OTIMIZAÇÃO NO  
DIMENSIONAMENTO E NO DETALHAMENTO DE VIGAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado à  
banca examinadora como requisito parcial à  
obtenção do título de graduado em Engenharia  
Civil.

Área de concentração: Engenharia de  
Estruturas.

Orientador: Prof. MSc. Elaine Cristina R Ponte

FORTALEZA

2019



FUNDAÇÃO EDSON QUEIROZ  
UNIVERSIDADE DE FORTALEZA  
Centro de Ciências Tecnológicas – CCT  
Coordenação do Curso Engenharia Civil

**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**ATA DE DEFESA TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2019.2**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE PARA  
OTIMIZAÇÃO DO DIMENSIONAMENTO E DO  
DETALHAMENTO DE VIGAS**

**ALESSANDRO QUEIROZ BESSA CHAVES**

PARECER: APROVADO

DATA: 06 / 12 / 2019

BANCA EXAMINADORA:

Elaine Cristina R. Ponte

Elaine Cristina Rodrigues Ponte, Me.

Orientador (a)

Eduardo César Cordeiro Leite

Eduardo César Cordeiro Leite, D.Ing.

Examinador (a)

Bruno Lopes A. Batista

Bruno Lopes Alcântara Batista, Me.

Examinador (a)

Aos meus pais, José Edilberto Bessa Chaves e  
Silvana Mara de Queiroz Bessa.

## **AGRADECIMENTOS**

À Coordenação do curso de Engenharia Civil, pelo apoio.

Ao Prof. MSc. Elaine Cristina R Ponte, pela orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora D. -Ing. Eduardo César Cordeiro Leite e Dr. Bruno Lopes Alcantara Batista.

Dr. Napoleão Nepomuceno pelas contribuições e sugestões de melhoria.

Aos meus pais por todo suporte dado nos meus estudos.

À minha namorada, por todo o apoio ao longo da jornada acadêmica.

“Genius is 99% perspiration and 1%  
inspiration.” (Thomas Edison)

## RESUMO

Elaborar projetos estruturais é uma atividade recorrente no ramo da engenharia civil, a qual exige do encarregado elevado grau de conhecimento técnico, além de experiência prática na área. Tal rigorosa demanda profissional ocorre uma vez que é um serviço de alta responsabilidade, e se mal executado, pode colocar vidas em risco. Por outro lado, o mercado disputado da engenharia impulsiona a elaboração de orçamentos competitivos, fato que pauta a metodologia de minimizar custos, atendendo às normas técnicas brasileiras e gerando conforto para o usuário.

Diante do apresentado, cabe destacar o tema da otimização nesse contexto. Essa área tem como ponto chave a minimização ou maximização de uma função objetivo mediante inúmeras equações de restrição. O presente trabalho tem como objetivo desenvolver um *software* que dimensiona vigas e realiza o desenho do seu detalhamento, aplicando para isso, a otimização para minimizar a função de custo desse elemento estrutural.

Após o desenvolvimento do programa, o qual foi nomeado de BeamOpt, os resultados obtidos em sua otimização foram validados com o *software* TQS. Nesse processo de validação, foi possível constatar a proximidade entre os resultados dos dois programas, apresentando um erro médio de 0,24%, 0,94% e 6,06% para as áreas de aço longitudinal inferior, aço longitudinal superior e aço transversal respectivamente. Além disso, foram geradas curvas de custo por meio de simulações de aumento de carga distribuída aplicada na viga. Tal experimento buscou comparar a curva de custo da armadura simples e da armadura dupla, e computou-se que a viga com armadura dupla é 13,85% mais custosa, porém apresenta um volume 52,38% menor.

**Palavras-chave:** estruturas, vigas, dimensionamento, otimização, software.

## ABSTRACT

Developing structural projects is a common activity in the field of civil engineering, which requires a high level of technical knowledge from the person in charge, as well as practical experience in the area. Such rigorous professional demand occurs since it is a high-responsibility service, and if poorly executed can be life-threatening. On the other hand, the disputed engineering market drives the elaboration of competitive budgets, a fact that guides the methodology of minimizing costs, following the Brazilian technical norms and generating comfort for the user.

In this context, it is worth highlighting the theme of optimization. This area has as its key point the minimization or maximization of an objective function through innumerable constraint equations. The present work aims to develop a software for beams design, applying the optimization to minimize the cost function of this structural element.

After the development of the program, which was named BeamOpt, the results obtained in its optimization were validated with the TQS software. In this validation process, it was possible to verify the proximity between the results of the two programs, with an average error of 0.24%, 0.94% and 6.06% for the areas of lower longitudinal steel, upper longitudinal steel and transverse steel respectively. In addition, cost curves were generated through simulations of increased distributed loads applied to the beam. This experiment aimed to compare the cost curve of single reinforcement and double reinforcement, and it was computed that the single reinforced beam is 13.85% more expensive but has a 52.38% lower volume.

**Keywords:** structures, beams, design, optimization, software.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Interface do Ftool .....	15
Figura 2 - Calculadoras PREO V21 .....	16
Figura 3 - Diagrama tensão-deformação idealizado.....	20
Figura 4 - Diagramas da distribuição de tensões de compressão no concreto .....	20
Figura 5 - Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento .....	21
Figura 6 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas .....	22
Figura 7 – Exemplo da representação da altura útil .....	23
Figura 8 - Domínios de estado limite último de uma seção transversal.....	24
Figura 9 - Diagramas da distribuição de tensões de compressão no concreto .....	25
Figura 10 - Distribuição de tensões na viga .....	26
Figura 11 - Tela Inicial do <i>software</i> .....	30
Figura 12 - Entrada de dados do projeto.....	31
Figura 13 – Escolha do tipo de armadura da peça.....	31
Figura 14 - Escolha dos tipos de apoios da viga .....	32
Figura 15 - Escolha da Classe de Agressividade Ambiental .....	32
Figura 16 - Exemplo de diagramas de esforços produzidos pelo <i>software</i> .....	33
Figura 17 - Fluxograma do BeamOpt.....	38
Figura 18 - Instalador do <i>software</i> BeamOpt .....	39
Figura 19 – Página inicial do site do projeto .....	40
Figura 20 - Exemplo de detalhamento da peça de Armadura Simples.....	42
Figura 21 - Exemplo de detalhamento da peça de Armadura Dupla .....	43

## **LISTA DE GRÁFICOS**

Gráfico 1 – Comparação de preço mediante variação de carga: Armadura Simples x Armadura Dupla .....	45
---	----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Histórico dos principais acidentes ocorridos no Brasil .....	13
Tabela 2 - Tabela de aços comerciais .....	36
Tabela 3 - Larguras obtidas por meio da otimização .....	41
Tabela 4 - Comparação entre o BeamOpt e o TQS .....	42
Tabela 5 - Simulação da variação de carga: Armadura Simples x Armadura Dupla.....	44

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT      Associação Brasileira de Normas Técnicas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\rho_c$	Peso específico do concreto
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto à compressão
$f_{ct,m}$	Resistência característica do concreto à tração média
$E_{ci}$	Módulo de elasticidade do concreto
$f_{yk}$	Resistência característica do aço
$V_k$	Esforço cortante característico
$M_k$	Momento fletor característico
$f_{cd}$	Resistência de projeto do concreto à compressão
$f_{yd}$	Resistência de projeto do aço à tração
$V_d$	Esforço cortante de projeto
$M_d$	Momento fletor de projeto
$\sigma_{cd}$	Tensão de compressão no concreto
$b_w$	Largura da viga
$d$	Altura útil
$x$	Posição da linha neutra
$z$	Braço de alavanca do binário de forças na viga
$A_s$	Área de aço
$n$	Número de barras necessárias
$\emptyset$	Espaçamento horizontal
$\rho_w$	Taxa geométrica mínima de armadura

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1 Justificativa.....	17
1.2 Objetivos .....	17
1.3 Descrição.....	17
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>19</b>
2.1 O Concreto .....	19
2.2 O Aço .....	21
2.3 Cálculo dos esforços solicitantes .....	22
2.4 Dimensionamento da viga.....	22
2.5 Otimização .....	28
<b>3 METODOLOGIA .....</b>	<b>30</b>
3.1 Sobre o <i>software</i> .....	30
3.2 Modelagem matemática do problema de otimização .....	33
3.3 Detalhamento da peça .....	35
<b>4 RESULTADOS .....</b>	<b>39</b>
<b>5 CONCLUSÃO .....</b>	<b>46</b>
<b>APÊNDICE A - IMAGENS DA VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS</b>	

## 1 INTRODUÇÃO

Na engenharia civil, a linha de pesquisa em estruturas desempenha uma função imprescindível em projetos aplicados, sendo responsável tanto por redução de custos como pela estabilidade e segurança das edificações. Diante disso, a análise de estruturas pode ser definida como:

[...] determinar os seus esforços solicitantes e deslocamentos, por meio de modelos matemáticos, após a idealização de diversos fatores, como o comportamento das ações, do material constituinte, das ligações entre os diversos elementos em que a estrutura pode ser dividida, e da resposta desses elementos frente às ações (FONTES, 2015, p. 1).

É fundamental estudar desde as propriedades dos materiais até os projetos de infraestrutura complexos para possuir conhecimento suficiente para elaborar projetos estruturais eficientes, coerentes com as normas brasileiras e que garantam conforto e segurança para os usuários. Um erro na elaboração ou na execução desses projetos, pode pôr em risco muitas vidas, e o engenheiro responsável pela obra pode ser acusado criminalmente por tal negligência. De acordo com Souza (2009, p. 92), “a contratação de profissionais sem conhecimentos específicos para atividades aparentemente simples pode acelerar um acidente estrutural”. Essa afirmação engloba tanto funcionários ligados à execução da obra, como aqueles responsáveis pela elaboração dos projetos.

Alguns dos conhecidos exemplos desses erros de engenharia, os quais resultaram em acidentes, podem ser observados na Tabela 1.

Diante do contexto apresentado, fica evidente a grande responsabilidade que o engenheiro carrega ao se responsabilizar por um projeto estrutural. Em contrapartida, as empresas responsáveis pela execução das obras visam uma redução nos custos do seu orçamento com o intuito de elaborar propostas competitivas com o mercado. Uma ação irresponsável para a redução de custos pode ocasionar uma falha na estrutura, e consequentemente um possível acidente na edificação. Portanto é de fundamental importância compreender quais características podem ser reduzidas e quais devem permanecer de acordo com os limites da norma.

Tabela 1 – Histórico dos principais acidentes ocorridos no Brasil

Ano	Obra	Estado	Cidade	Provável origem do problema	Vítimas fatais
1995	Edifício Atlântico	PR	Guaratuba	Falha na execução da estrutura	28
1997	Edifício Itália	SP	São José do Rio Preto	Falha de projeto	0
1998	Edifício Palace II	RJ	Rio de Janeiro	Falha de projeto	9
1999	Edifícios Ericka e Enseada de Serrambi	PE	Olinda	Falha de projeto	4
2004	Areia Branca	PE	Recife	Falhas na execução da obra	4
2006	Marquise da UEL	PR	Londrina	Falha de projeto	2
2006	Obra na UERJ	RJ	Rio de Janeiro	Desconhecidas	0
2007	Obra do metrô de São Paulo	SP	São Paulo	Falha de gerenciamento: projeto + medidas de recalque	7
2008	Complexo esportivo	RS	Novo Hamburgo	Falha de projeto	3
2008	Edifício Dom Gerônimo	PR	Maringá	Falha estrutural de uma sacada que desabou e levou as inferiores em efeito dominó	0
2009	Edifício Santa Fé	RS	Capão de Canoa	Falhas na execução da obra	4
2010	Prédio antigo	RJ	Rio de Janeiro	Falhas de manutenção	4
2011	Prédio de pequeno porte	RJ	Nova Friburgo	Desconhecidas	3
2011	Prédio - Real Class	PA	Belém	Desconhecidas	3

Fonte: Silva, 2011 *apud* Santiago, 2014

Ao se tratar do problema em questão, é possível abordá-lo como um problema de otimização não linear, no qual se busca minimizar a função objetivo custo do elemento estrutural sujeito a inúmeras equações de restrição, tanto normativas como geométricas. Wächter (2002) afirma que problemas de otimização não lineares são recorrentes em processos de engenharia, possuindo alguns exemplos de classes de aplicação:

- i. Fluxograma de Otimização: Otimizar o projeto ou as condições de operação em estado estacionário.
- ii. Projeto multiperíodo: Encontrar valores ótimos de determinados parâmetros, para que com o ajuste das variáveis de controle, o projeto comece a operar em um



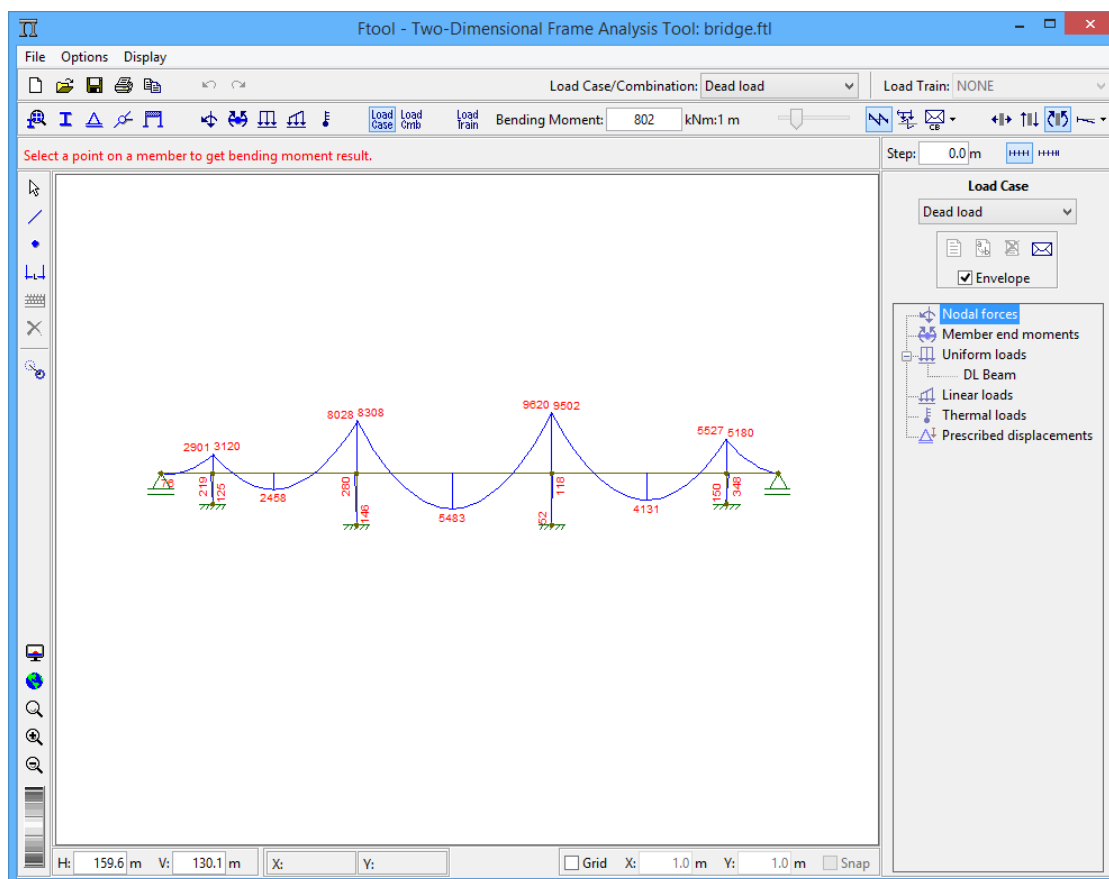
conjunto de condições da melhor maneira possível.

- iii. Otimização dinâmica: Encontrar o perfil de controle ideal para as variáveis de projeto, cujo estado está mudando ao longo do tempo.

No que se refere ao tema de otimização, é indispensável o uso de ferramentas computacionais que auxiliem o profissional encarregado em tal tarefa. Tal necessidade se faz presente uma vez que os algoritmos de otimização são capazes de encontrar pontos ótimos de maneira rápida e eficiente, rotina que seria lenta e passível de erros se executada por um humano.

Sobre os *softwares* na engenharia de estruturas, destaca-se um dos mais utilizados, o Ftool. Tal programa foi desenvolvido na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC – RJ), e de acordo com a definição em seu site, “tem como objetivo principal a simples e eficiente prototipagem de estruturas” (PUC, [20--]). Ele vem auxiliando muitos graduandos a compreenderem melhor a dinâmica de esforços atuantes em um protótipo, bem como simular componentes estruturais e como ocorre a interação entre eles. Esse recurso computacional é aplicável em diversos momentos de aprendizado, seja na elaboração de um projeto de pontes de macarrão ou de palitos (competição muito comum nas universidades) ou ao realizar tarefas e trabalhos acadêmicos, entre outras aplicações, como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 – Interface do Ftool



Fonte: <https://www.ftool.com.br/Ftool/>. Acesso em: 05/06/2019

A TQS Informática Ltda. é uma empresa que também disponibiliza *softwares* inovadores e robustos para auxiliar na elaboração de projetos estruturais. Suas soluções são recorrentes tanto em ambiente acadêmico como em escritórios estruturais. Observa-se na Figura 2 uma de suas soluções, a calculadora de dimensionamento de viga.

Figura 2 – Calculadoras PREO V21

Cálculo da inércia/estádios e abertura de fissuras de seção qualquer de concreto

Norma: ABNT NBR 6118:2014

Crítérios

Materials

$f_{ck}$ : 25 MPa

Geometria / Seção

Arquivo: T:\TQSW\SUPO

Tipo de elemento: ☒ Viga ☐ Laje

Armaduras

Definição: ☒ Área ☐ Bitola

Posição	X(cm)	Y(cm)	Area(cm <sup>2</sup> )
01	-7.00	3.40	6.00
02	0.00	3.40	2.40
03	7.00	3.40	6.00
04	-7.00	66.60	1.25
05	7.00	66.60	1.25

Esforços solicitantes

$M_{sd} = 77.40$  kN.m

Resultados

Estádio = 1

Inércia equivalente da seção =  $1.1747E-002$  m<sup>4</sup>

Profundidade da linha neutra = 0.3470 m

Momento de fissuração = 114.17 kN.m

Momento de escoamento das armaduras = 43.85 kN.m

Momento último ( $\gamma_c = \gamma_s = 1.0$ ) = 44.94 kN.m

Inércia da seção bruta =  $1.0386E-002$  m<sup>4</sup>

Inércia do estádio 1 puro =  $1.1747E-002$  m<sup>4</sup>

Profundidade da linha neutra para inércia do estádio 1 puro = 0.3530 m

Inércia do estádio 2 puro =  $3.7697E-003$  m<sup>4</sup>

Profundidade da linha neutra para inércia do estádio 2 puro = 0.5278 m

Calcular Ieq, I1 e I2

Calcular wk

Fonte: <http://docs.tqs.com.br/Docs/Details?id=655398144&language=pt-br>. Acesso em: 06/11/2019

Todavia a otimização no dimensionamento e no detalhamento de elementos estruturais não é o foco entre os recursos desses programas. Há dessa forma, uma possibilidade de elaborar novos recursos tecnológicos, como forma de contribuir para a comunidade acadêmica, no que se refere a otimização de elementos estruturais.

Conceição e Heitor (2002) ressaltam que a inovação é a principal força motriz dos países desenvolvidos desde a Revolução Industrial. Tendo conhecimento disso, percebe-se a importância de desenvolver novas tecnologias em processos de engenharia, visando otimizar processos, reduzir custos e garantir mais segurança e conforto aos usuários. Inovar apesar de ser fundamental, ainda é um desafio na sociedade contemporânea uma vez que se deve levar em consideração fatores como por exemplo: custo, tempo, qualidade e órgãos de regulamentação.

É válido destacar que:

A inovação tecnológica da estrutura produtiva de uma sociedade não é alcançada, apenas, com base numa vigorosa infra-estrutura científico-tecnológica, visto que a inovação é um processo político que sofre a intervenção de diversos fatores, como: a estrutura econômico-financeira da sociedade e das empresas, a mobilidade social, a tradição, o perfil dos grupos dirigentes, o sistema de valores da sociedade e os

mecanismos de comercialização, os quais se traduzem em forças que entram ou impulsionam o processo de inovação tecnológica. (FIGUEIREDO, 1993, p. 86).

Todavia as universidades e institutos de pesquisa e desenvolvimento (P&D) que protagonizam a infraestrutura científica e tecnológica da sociedade, devem continuar a desempenhar sua função na estrutura da inovação para a propagação da ciência, independente de fatores externos.

### **1.1 Justificativa**

De acordo com a problemática exposta, mais soluções tecnológicas para a área de otimização de estruturas são necessárias, bem como o aprofundamento do tema durante os cursos de graduação de Engenharia Civil. Buscando dessa forma, contribuir para o meio acadêmico e para a sociedade, no que se refere a elaboração de projetos de menor custo e capazes de atender às demandas solicitantes.

Além disso, o presente trabalho é motivado pela inovação tecnológica na engenharia, temática vital para o progresso. O engenheiro na natureza de sua essência, é um profissional inventivo que está apto a resolver problemas, utilizando para isso conhecimentos matemáticos e das ciências naturais.

### **1.2 Objetivos**

O presente trabalho visa elaborar um programa capaz de otimizar o dimensionamento e o detalhamento de uma viga isostática com carga uniformemente distribuída. Tal otimização irá ocorrer mediante a modelagem matemática da função objetivo Custo da Viga, e sua consequente busca por ponto ótimos locais que a minimizem. As etapas de desenvolvimento podem ser organizadas da seguinte forma:

- i. Elaboração da interface gráfica do programa.
- ii. Modelagem matemática do algoritmo de otimização.
- iii. Desenvolvimento dos algoritmos responsáveis pelo detalhamento da peça estrutural e seu desenho.

### **1.3 Descrição**

Inicialmente serão descritas as principais propriedades dos componentes do concreto armado (concreto e aço). Após isso, os procedimentos de dimensionamento de viga são relatados detalhadamente de acordo com a ABNT (2014), e também o embasamento teórico da otimização aplicada.

Sobre o *software* desenvolvido, seus recursos são expostos, explicando de maneira clara a sua utilização, juntamente com os outros recursos tecnológicos desenvolvidos no projeto. Ocorre posteriormente a validação dos resultados das otimizações realizadas, com o *software* TQS e a realização de simulações de casos para avaliar o custo da armadura simples e da armadura dupla.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

De acordo com Polillo (1979), o concreto armado pode ser compreendido como o resultado da utilização de dois materiais: o concreto e o aço. Condensando dessa forma duas propriedades fundamentais às estruturas, a boa resistência à compressão do concreto e a boa resistência à tração do aço.

Para Guerrin ([19--]), os cálculos na Mecânica das Construções englobam três problemas diferentes:

- i. Definir os esforços e momentos solicitados nas seções, os quais podem ser resumidos a: esforço normal e cortante e momento fletor e de torção.
- ii. Determinar a forma que os esforços moleculares se distribuem nas seções: a resolução desse problema é inspirada nos Princípios Gerais da Resistência dos Materiais, nas regras particulares do material de essência heterogênea e na consideração do momento ou esforço possível de absorção no momento da ruptura.
- iii. Calcular as deformações da seção em seus pontos.

### 2.1 O Concreto

De acordo com a ABNT (2014), as seguintes considerações foram tomadas para o adequado dimensionamento dos elementos estruturais:

- i. A massa específica do concreto armado ( $\rho_c$ ) adotada para efeito de cálculo é de 2500 kg/m<sup>3</sup>.
- ii. Serão trabalhados os concretos compreendidos nas classes de resistência do grupo I, portanto até C50.
- iii. As resistências a compressão referem-se à idade de 28 dias.
- iv. O valor característico avaliado da resistência à tração é dado por meio da equação:

$$f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (1)$$

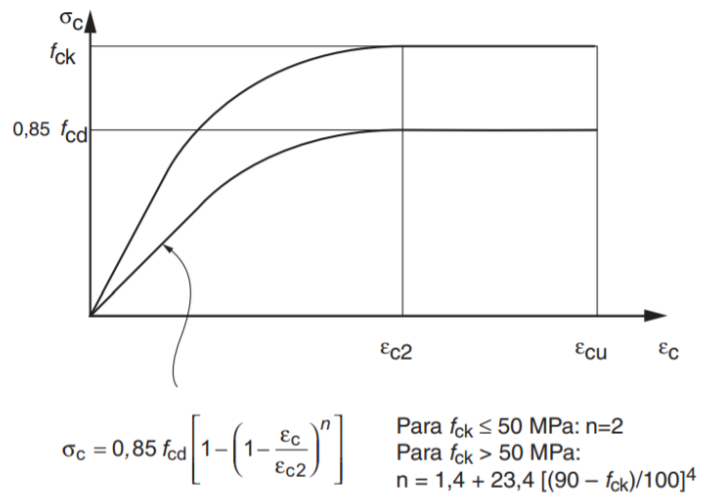
- v. O módulo de elasticidade tem seu valor estimado através da expressão:

$$E_{ci} = 5600 f_{ck}^{1/2} \quad (2)$$

- vi. Na compressão, o diagrama tensão-deformação utilizado para análise do estado

limite último pode ser representado de acordo com a Figura 3.

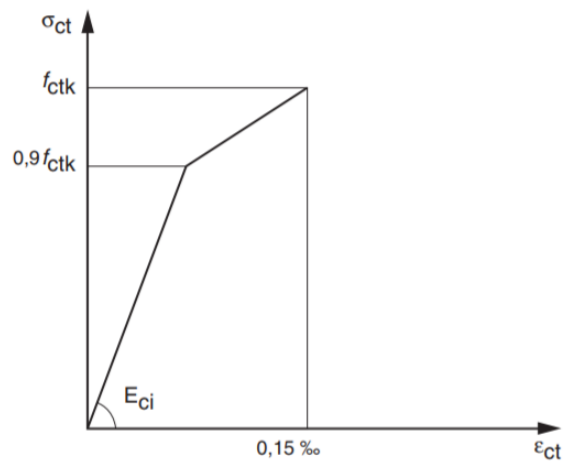
Figura 3 – Diagrama tensão-deformação idealizado



Fonte: ABNT (2014)

- vii. Para tração, tomando o concreto não fissurado, adota-se o diagrama tensão-deformação bilinear.

Figura 4 – Diagrama tensão-deformação bilinear da tração



Fonte: ABNT (2014)

- viii. O cobrimento empregado de acordo com a agressividade ambiental segue as orientações normativas.

Figura 5 – Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal para  $\Delta c = 10\text{mm}$

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV <sup>c</sup>
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje <sup>b</sup>	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo <sup>d</sup>	30		40	50
Concreto protendido <sup>a</sup>	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

<sup>a</sup> Cobrimento nominal da bainha ou dos fios, cabos e cordoalhas. O cobrimento da armadura passiva deve respeitar os cobrimentos para concreto armado.  
<sup>b</sup> Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências desta Tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal  $\geq 15\text{ mm}$ .  
<sup>c</sup> Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.  
<sup>d</sup> No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal  $\geq 45\text{ mm}$ .

Fonte: ABNT (2014)

## 2.2 O Aço

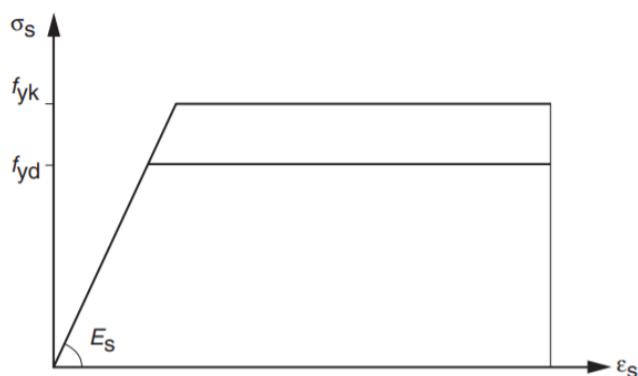
A armadura empregada no dimensionamento em questão é a armadura passiva a qual pode ser definida na ABNT (2014, p. 4) como “Qualquer armadura que não seja usada para produzir forças de protensão, isto é, que não seja previamente alongada”.

Ainda sobre a ABNT (2014), foi considerado que:

- As categorias de aço trabalhadas são: CA-25, CA-50 e CA-60.
- A massa específica adotada é de  $7850\text{ kg/m}^3$ .
- O módulo de elasticidade admitido é de  $210\text{ GPa}$ .
- Utiliza-se o diagrama tensão-deformação simplificado:



Figura 6 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas



Fonte: ABNT (2014)

De acordo com a ABNT (2014), o diagrama apresentado é válido tanto para compressão como para tração, para intervalos de temperatura entre - 20°C e 150°C.

### 2.3 Cálculo dos esforços solicitantes

O esforço cortante e o momento fletor máximos serão utilizados para o dimensionamento, os quais de acordo com a carga distribuída e o comprimento da viga informados, serão calculados da conforme as Equações 3 e 4.

$$V_{k,max} = \frac{qL}{2} \quad (3)$$

$$M_{k,max} = \frac{qL^2}{8} \quad (4)$$

Ao calcular os valores máximos das solicitações, ABNT (2014) destaca que eles devem ser majoradas em 40% com a exigência de combinações normais no estado-limite último (ELU) dimensionamento da peça.

$$V_d = 1,4V_{k,max} \quad (5)$$

$$M_d = 1,4M_{k,max} \quad (6)$$

### 2.4 Dimensionamento da viga

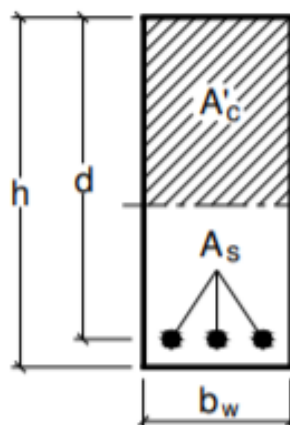
Inicialmente a resistência à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) e a resistência à tração do aço ( $f_{yk}$ ) serão minorados, utilizando para isso os coeficientes de 1,4 e de 1,15 respectivamente, conforme orienta ABNT (2014).

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4} \quad (7)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} \quad (8)$$

Bastos (2015) define a altura útil ( $d$ ) de uma viga como a distância entre a face mais comprimida até o centro de gravidade da armadura longitudinal tracionada. O  $d'$  pode ser compreendido como a diferença entre a altura total e a altura útil, podendo ser adotado para fins de dimensionamento em 4 cm, visando estar compatível com o valor desse parâmetro utilizado no TQS, conforme observa-se na Figura 7.

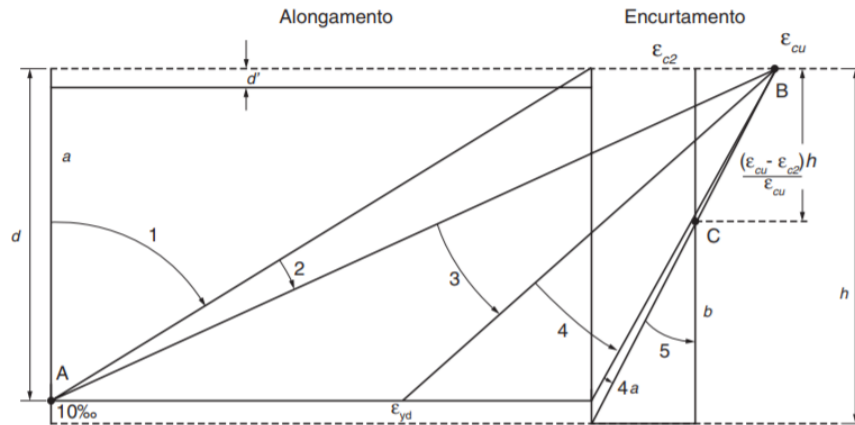
Figura 7 – Exemplo da representação da altura útil



Fonte: BASTOS (2015)

A ABNT (2014) define o estado-limite último (ELU) como “estado-limite relacionado ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação do uso da estrutura”.

Figura 8 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal



Fonte: ABNT (2014)

No dimensionamento da armadura simples buscou-se limitar a peça entre o Domínio 2 e Domínio 3, estipulando dessa forma o possível intervalo da relação entre a linha neutra ( $x$ ) e a altura útil:

$$0,257 \leq \frac{x}{d} \leq 0,628 \quad (9)$$

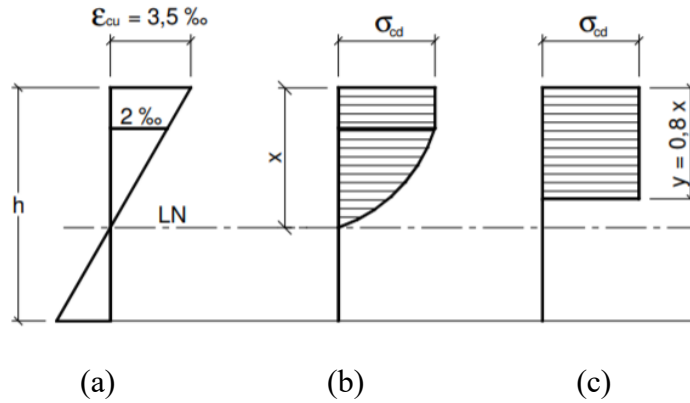
Segundo os critérios da ABNT (2014) quanto à ductilidade do aço, tal relação ( $\frac{x}{d}$ ) será fixada em 0,45.

Já para a armadura dupla, o dimensionamento é realizado como se a peça estivesse acima do limite do Domínio 3, havendo dessa forma a necessidade da armadura dupla:

$$0,628 \leq \frac{x}{d} \leq 1 \quad (10)$$

Segundo Bastos (2015), o diagrama de tensões de compressão no concreto, para os concretos do Grupo I ( $f_{ck} \leq 50$  MPa) pode ser representado de acordo com a Figura 9.

Figura 9 - Diagramas da distribuição de tensões de compressão no concreto



Fonte: Bastos (2015)

A ABNT (2014) define que nos casos em que a largura da seção, a qual é medida paralelamente à linha neutra, não reduzir sua dimensão da largura na área da borda mais comprimida, a tensão pode ser expressa por meio da Equação 11. Sendo utilizada portanto a diagramação retangular.

$$\sigma_{cd} = 0,85f_{cd} \quad (11)$$

De acordo com Bastos (2015), o momento interno de projeto resistente pelo concreto comprimido ( $M_d$ ) pode ser definido através da Equação 12.

$$M_d = 0,68b_w x f_{cd} (d - 0,4x) \quad (12)$$

Onde:

$b_w$  = Largura da Viga

Expandindo a Equação 12, e organizando na forma de uma equação de segundo grau em função da linha neutra:

$$-(0,272b_w f_{cd})x^2 + (0,68b_w f_{cd}d)x - M_d = 0 \quad (13)$$

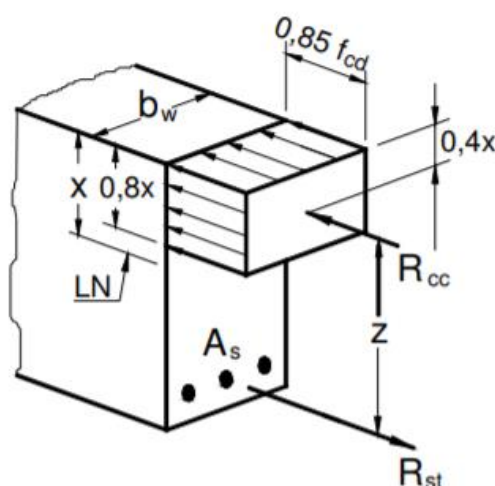
Ao solucionar a Equação 13, é possível obter 3 intervalos de valores para o operador  $\Delta$

da equação de segundo grau:

- $\Delta > 0$ : Dois resultados obtidos para a posição da linha neutra, lembrando que apenas o resultado menor ou igual a altura útil é satisfatório. Caso os dois valores respeitem essa limitante, será escolhido o maior entre eles.
- $\Delta = 0$ : Um único valor para a posição da linha neutra, deve-se ainda verificar se o resultado obtido é menor ou igual a altura útil.
- $\Delta < 0$ : Nenhuma raiz real obtida na resolução da equação, é recomendável que os parâmetros inseridos no projeto sejam revisados.

O braço de alavanca ( $z$ ) pode ser identificado na representação:

Figura 10 – Distribuição de tensões na viga



Fonte: Bastos (2015)

$$z = d - 0,4x \quad (14)$$

Onde:

$R_{cc}$  = Resistência do concreto à compressão

$R_{st}$  = Resistência do aço à tração

LN = Linha Neutra

O binário de forças que gera o momento de projeto, considerando a situação de equilíbrio é:

$$M_d = R_{cc}z = R_{st}z \quad (15)$$

Portanto:

$$M_d = R_{st}z = (f_{yd}A)z \quad (16)$$

$$A = \frac{M_d}{zf_{yd}} = \frac{M_d}{(d - 0,4x)f_{yd}} \quad (17)$$

Segundo a ABNT (2014), o espaçamento mínimo horizontal livre entre as faces das barras longitudinais de uma viga ( $S_{h,min}$ ) deve ser igual ou superior aos seguintes valores:

- 20 mm
- Diâmetro da barra
- 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo

Segundo Braz et al. (2017) as etapas de cálculo da armadura transversal no modelo em que as diagonais comprimidas estão inclinadas a  $\Theta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal, com  $V_c$  constante e independente de  $V_{rd2}$ , podem ser divididas em:

a) Verificação da taxa geométrica mínima da armadura ( $\rho_{sw}$ ):

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{s b_w \sin(\alpha)} \geq 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{yk}} \quad (18)$$

Onde:

- $s$  = Espaçamento da armadura transversal.
- $\alpha$  = Inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal.

b) Verificação da resistência satisfatória:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (19)$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (20)$$

Onde:

- $V_{Rd2}$  = Força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas.
- $V_{Rd3}$  = Força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal.

- $V_c$  = Parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares aos da treliça.
- $V_{sw}$  = Parcela resistida pela armadura transversal.

c) Verificação da compressão diagonal do concreto:

$$\alpha_{V2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (21)$$

$$V_{Rd2} = 0,27\alpha_{V2}f_{cd}b_wd \quad (22)$$

d) Cálculo da armadura transversal:

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (23)$$

Onde:

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s}\right) 0,9df_{yd}(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) \quad (24)$$

$$V_c = 0,6f_{ctd}b_wd \quad (25)$$

$$f_{ctd} = 0,7 \frac{f_{ct,m}}{\gamma_c} \quad (26)$$

Araújo (2003) afirma que as armaduras transversais são constituídas por estribos verticais de dois ramos (estribo simples). Tais estribos têm seu espaçamento máximo limitado de acordo com a ABNT (2014):

$$\text{Se } V_d \leq 0,20V_{Rd2}, \text{ então } s_{t,m\acute{a}x} = d \leq 800 \text{ mm} \quad (27)$$

$$\text{Se } V_d > 0,20V_{Rd2}, \text{ então } s_{t,m\acute{a}x} = 0,6 d \geq 350 \text{ mm} \quad (28)$$

## 2.5 Otimização

Sun e Yuan (2006) definem que quando a função objetivo e as equações de restrição são lineares, o problema é de otimização linear, caso contrário ele é não linear.

Foi utilizada a biblioteca GEKKO em sua implementação em python, usando o Ipopt versão 3.12.10. Tal ferramenta é um pacote aberto de otimização para otimização não linear em larga escala. Segundo Kawajir (2015), ela pode ser usada para solucionar problemas da forma:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \quad (29)$$

$$g^L \leq g(x) \leq g^U \quad (30)$$

$$x^L \leq x \leq x^U \quad (31)$$

Em que  $x \in \mathbb{R}^n$  são as variáveis de otimização, as quais podem ter limites inferiores e superiores,  $x^L \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$  e  $x^U \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  respectivamente. A forma genérica não linear da função objetiva e das equações de restrição são  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . As funções  $f(x)$  e  $g(x)$  podem ser lineares ou não lineares, convexas ou não convexas, porém devem ser duplamente contínuas e diferenciáveis.

O pacote em questão implementa o método filtro de busca linear por pontos interiores, objetivando encontrar uma solução local. A escolha por esse método foi resultado de verificações empíricas das otimizações, nas quais ele se mostrou consistente para atender aos objetivos do trabalho. Wächter (2005) afirma a ideia central dessa abordagem é interpretar o contexto como problemas de otimização biobjetivos, nos quais os dois objetivos são minimizar a função objetivo e a violação das restrições.

Wächter (2002) afirma que esse método é um procedimento iterativo para encontrar as soluções locais para o Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{(x,\lambda,v)} := f(x) + g^T(x)\lambda - \sum_{i \in \mathcal{I}} x^{(i)}v^{(i)} \quad (32)$$

Em que  $\lambda$  representa os multiplicadores de Lagrange e  $v$  simboliza os vetores de restrição igualitária.

Kawajir (2015) ressalta as informações necessárias para que o Ipopt consiga solucionar o problema:

- i. Dimensão do problema: número de variáveis e de restrições.
- ii. Limites do problema: limites das variáveis e das restrições.
- iii. Ponto de início: valores iniciais para as variáveis  $x$  primárias e valores iniciais para os multiplicadores.
- iv. Estrutura do problema: número de valores não nulos na Jacobiana das restrições e na Hessiana da função Lagrangiana.
- v. Avaliação das funções do problema: função objetivo, gradiente da função



objetivo  $(\nabla f_{(x)})$ , equações de restrição, Jacobiana das equações de restrição  $(\nabla g_{(x)}^T)$ , Hessiana da função Lagrangiana  $(\sigma_f \nabla^2 f_{(x_k)} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 g_{i(x_k)})$ .

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Sobre o *software*

A tela inicial do programa conforme mostra a Figura 11, fornece ao usuário uma sequência lógica de operações que devem ser realizadas visando o devido dimensionamento da viga.

Figura 11 – Tela Inicial do *software*



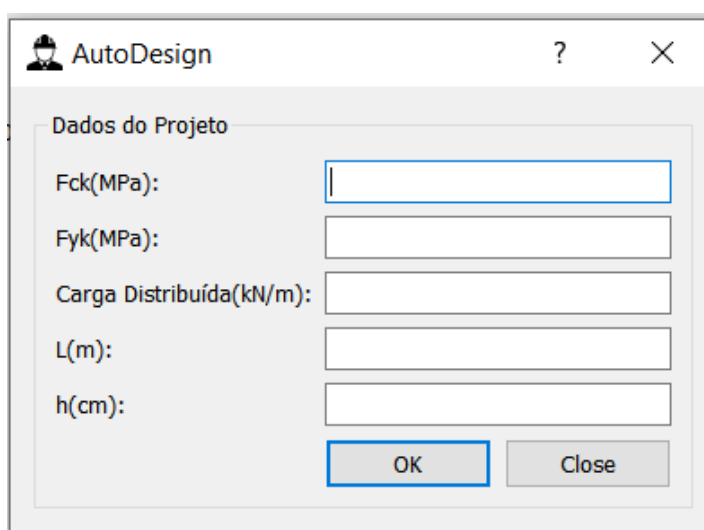
Fonte: Elaborada pelo autor

Os quatro botões referentes a coluna “Informações sobre a viga”, são utilizados para a entrada de dados importantes para o dimensionamento. Para o primeiro deles, “Dados Projeto”, o usuário do programa irá introduzir os seguintes dados:

- i. Altura (h) e comprimento da viga (L), em centímetro e em metro respectivamente.
- ii. Resistência à compressão do concreto em megapascal ( $f_{ck}$ ).

- iii. Resistência à tração do aço utilizado em megapascal ( $f_{yk}$ ).
- iv. A carga distribuída que a viga está submetida em quilonewton por metro (q).

Figura 12 – Entrada de dados do projeto

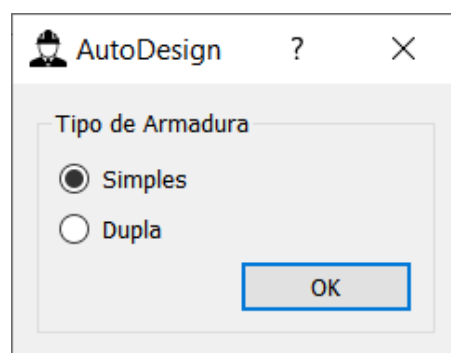


The image shows a software window titled 'AutoDesign' with a standard Windows interface (title bar, help icon, close button). Inside the window, there is a section titled 'Dados do Projeto'. Below this title, there are five input fields, each with a label to its left: 'Fck(MPa):', 'Fyk(MPa):', 'Carga Distribuída(kN/m):', 'L(m):', and 'h(cm):'. Each label is followed by a rectangular text input box. At the bottom right of the input area, there are two buttons: 'OK' and 'Close'.

Fonte: Elaborada pelo autor

Já o segundo botão “Armadura”, o usuário tem a opção de escolher caso queira que a otimização encontre uma solução para armadura simples ou para armadura dupla.

Figura 13 – Escolha do tipo de armadura da peça

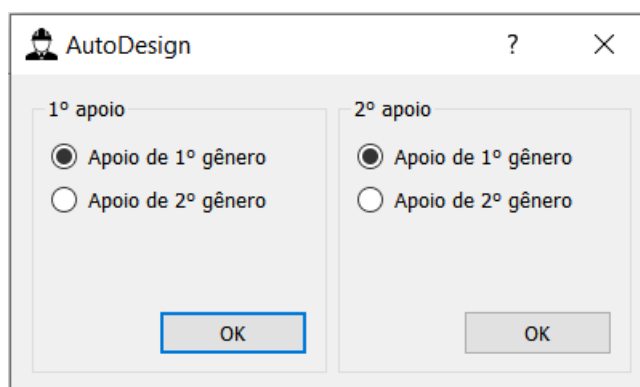


The image shows a software window titled 'AutoDesign' with a standard Windows interface. Inside the window, there is a section titled 'Tipo de Armadura'. Below this title, there are two radio button options: 'Simples' and 'Dupla'. The 'Simples' option is selected, indicated by a filled circle next to its label. The 'Dupla' option has an empty circle next to its label. At the bottom right of the dialog, there is an 'OK' button.

Fonte: Elaborada pelo autor

Por fim os botões “Apoios” e “CAA”, fornecem ao usuário o recurso de escolher os tipos de apoios da viga e a Classe de Agressividade Ambiental que está inserida. Cabe ressaltar que o programa adota que a viga está biapoiada por meio de apoios de 1º e 2º gêneros.

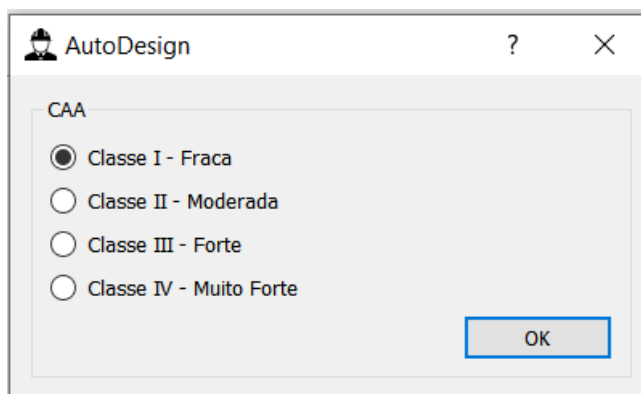
Figura 14 – Escolha dos tipos de apoios da viga



The screenshot shows a software window titled 'AutoDesign' with a question mark icon and a close button. It contains two panels for selecting support types. The left panel, labeled '1º apoio', has two radio buttons: 'Apoio de 1º gênero' (selected) and 'Apoio de 2º gênero'. The right panel, labeled '2º apoio', also has two radio buttons: 'Apoio de 1º gênero' (selected) and 'Apoio de 2º gênero'. Each panel has an 'OK' button at the bottom.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 15 – Escolha da Classe de Agressividade Ambiental

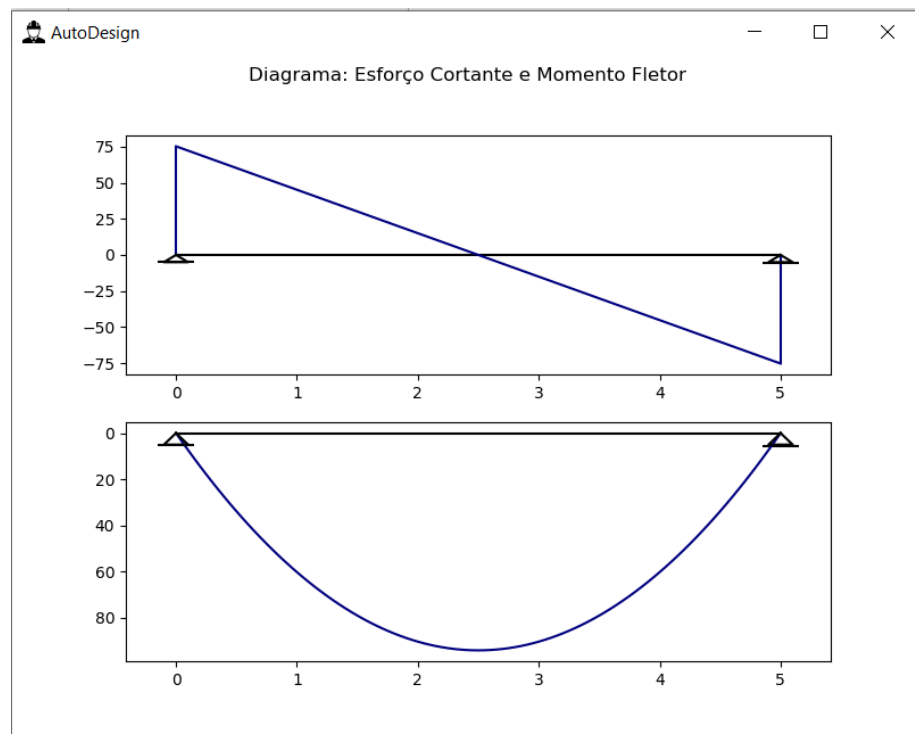


The screenshot shows a software window titled 'AutoDesign' with a question mark icon and a close button. It contains a single panel labeled 'CAA' with four radio buttons: 'Classe I - Fraca' (selected), 'Classe II - Moderada', 'Classe III - Forte', and 'Classe IV - Muito Forte'. An 'OK' button is located at the bottom right of the panel.

Fonte: Elaborada pelo autor

A carga distribuída, o comprimento da viga e os tipos de apoios introduzidos pelo usuário, irão produzir diferentes diagramas de esforço cortantes e de momento fletor, os quais podem ser observados no botão “Diagramas”.

Figura 16 – Exemplo de diagramas de esforços produzidos pelo *software*



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.2 Modelagem matemática do problema de otimização

A função objetivo em questão é a função que descreve o custo da viga, considerando os componentes: Concreto, Aço Longitudinal e Aço Transversal, sendo descrita de acordo com a Equação 33.

$$Custo_{viga} = Custo_{concreto} + Custo_{aço\ long.} + Custo_{aço\ trans.} \quad (33)$$

O concreto é precificado conforme o seu volume, tendo seu custo representado pela Equação 34. Já o aço, tanto longitudinal como transversal, é precificado de acordo com o seu peso, e as Equações 35 e 36 representam o seu custo.

$$Custo_{concreto} = b_w h L P_{concreto} \quad (34)$$

$$Custo_{aço\ long.} = A_{sl}(L + 0,4)\rho P_{aço} \quad (35)$$

$$Custo_{aço\ trans.} = A_{st}2(bw + h)\rho P_{aço} \quad (36)$$

Onde:

$P_{concreto}$  = Preço do metro cúbico do concreto

$P_{aço}$  = Preço do quilograma do aço utilizado

$\rho$  = Massa específica do aço utilizado

A principal variável no dimensionamento em questão é a largura da viga, a qual é limitada entre 12 e 100 cm. Tal limite inferior segue a orientação da ABNT (2014) e o limite superior foi adotado como valor máximo para facilitar na modelagem do problema. Caso a largura da viga seja superior a 100 cm, ela passará a se comportar com outras propriedades estruturais que fogem da delimitação do presente estudo.

No capítulo 2, Referencial Teórico, foram expostas as principais equações consideradas no dimensionamento da viga em análise. Dessa forma, as equações de restrição para o aço longitudinal da armadura simples podem ser observadas abaixo:

$$A_{sl} - \frac{M_d}{f_{yd}(d - 0,4x)} = 0 \quad (37)$$

$$(0,62xd - 0,272x^2)b_w f_{cd} - M_d = 0 \quad (38)$$

$$0 \leq 0,04b_w h - A_{sl} \quad (39)$$

As variáveis desse sistema de equações são além da largura da viga, a linha neutra da seção, a qual tem seu domínio definido por meio da Equação 40. Os demais componentes são constantes dos materiais utilizados e do momento fletor de projeto.

$$0,257d \leq x \leq 0,628d \quad (40)$$

Já no dimensionamento da armadura dupla, leva-se em consideração que a estrutura ultrapassou o limite do Domínio 3 para o Domínio 4, sendo a armadura superior calculada responsável por resistir a esse momento adicional gerado. Portanto esse dimensionamento tem

seu equacionamento restritivo expresso da forma:

$$x_{34} - 0,45d = 0 \quad (41)$$

$$(0,68x_{34}d - 0,272x_{34}^2)b_w f_{cd} - M_{34} = 0 \quad (42)$$

$$A_{s34} - \frac{M_{34}}{0,55df_{yd}} = 0 \quad (43)$$

$$M_d - M_2 - M_{34} = 0 \quad (44)$$

$$A_{s2} - \frac{M_2}{(d - d')f_{yd}} = 0 \quad (45)$$

$$A_{sl} - A_{s34} - A_{s2} = 0 \quad (46)$$

Para o dimensionamento da armadura transversal, o qual é o mesmo independente da escolha entre armadura simples e armadura dupla, o sistema matemático que descreve tal procedimento pode ser observado:

$$V_{rd2} - 0,27\alpha f_{cd}b_w d = 0 \quad (47)$$

$$V_c - 0,6f_{ctd}b_w d = 0 \quad (48)$$

$$V_{sw} - V_{sd} + V_c = 0 \quad (49)$$

$$A_{st} - \left( \frac{V_{sw}}{0,9df_{yd}} \right) L = 0 \quad (50)$$

$$0 \leq V_{rd2} - V_{sd} \quad (51)$$

$$0 < M_d - M_{34} \quad (52)$$

$$0 \leq 0,04b_w h - A_{sl} - A_{s2} \quad (53)$$

Diante da modelagem matemática apresentada, é plausível expressar a forma genérica da função objetivo do problema:

$$f_{(b_w, x)} = k_1 b_w + (k_2 b_w x^2 + k_3 x) + (k_4 b_w^2 + k_5 b_w) \quad (54)$$

### 3.3 Detalhamento da peça

Uma vez encontrada a largura ótima da viga, é necessário dimensionar qual a combinação ideal de quantidade (n) e de diâmetro ( $\emptyset$ ) de barras de ferro para atender às áreas calculadas.

As barras de aço comerciais comumente utilizadas na indústria da construção civil podem ser observadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Tabela de aços comerciais

CA	Bitola (mm)	Seção Nominal (mm <sup>2</sup> )
25	6,3	31,2
25	8	50,3
25	10	78,5
25	12,5	122,7
25	16	201,1
25	20	314,2
25	25	490,9
50	6,3	31,2
50	8	50,3
50	10	78,5
50	12,5	122,7
50	16	201,1
50	20	314,2
50	25	490,9
60	3,4	9,1
60	4,2	13,9
60	5	19,6
60	6	28,3
60	7	38,5
60	8	50,3
60	9,5	70,9

Fonte: Elabora pelo autor

Um procedimento de força bruta é adotado para encontrar a melhor combinação, no qual cada área é multiplicada por uma quantidade variando de 1 até 100 para armadura longitudinal e de 1 até 400 para armadura transversal, e a diferença entre a área de aço necessária e cada produto encontrado é calculada de forma a encontrar o menor valor positivo. Tal valor deve ser positivo uma vez que a combinação encontrada não pode ser menor que a área necessária. Os limites de 100 e de 400 adotados podem ser interpretados como limitações teóricas ainda que sejam impraticáveis em projetos, pois tais quantidades de barras de ferro são significativamente superiores às quantidades usuais.

Ao achar a combinação ótima, ela passa por um processo de verificação que varia de acordo com o tipo de armadura em questão:

- i. Armadura longitudinal: o espaçamento horizontal mínimo e a limitação geométrica de acordo com a Equação 55 são verificados. É possível que no dimensionamento da armadura dupla nenhuma combinação possível atenda às verificações necessárias, nesse caso a otimização é repetida aumentando a largura mínima necessária em 1 cm, até que as verificações sejam finalmente atendidas.
- ii. Armadura transversal: ocorre a verificação do espaçamento mínimo e espaçamento máximo conforme Equações 27 e 28.

$$n\varnothing_l + (n - 1)s_h + 2(\varnothing_t + \text{Cobrimento}) \leq b_w \quad (55)$$

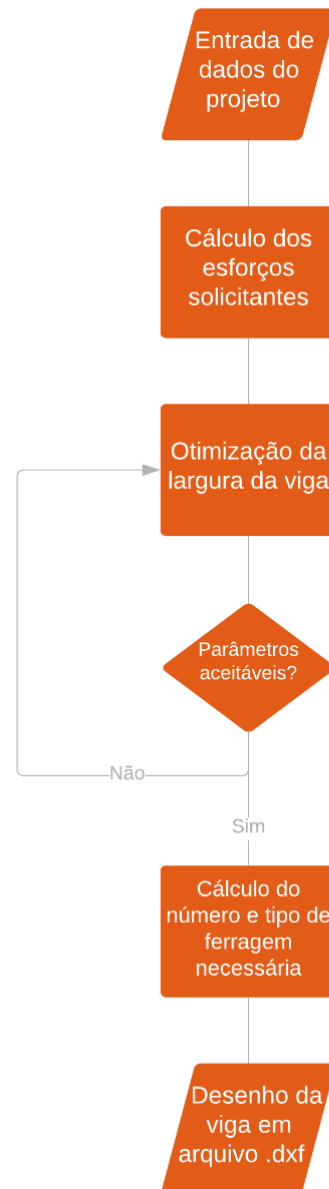
Em caso de Armadura Simples, é utilizado uma armadura superior mínima de diâmetro 5 mm, apenas para amarração do estribo.

Após as verificações apresentadas, a peça é desenhada por meio da biblioteca ezdxf produzindo um arquivo da extensão dxf, podendo ser interpretado pelo *software* AUTOCAD.

A Figura 17 expõe o fluxograma do programa, o qual possui em suas etapas: entrada de dados de projeto, cálculo dos esforços solicitantes, otimização da largura da viga, verificação se os parâmetros encontrados estão nos intervalos aceitáveis para o detalhamento da peça, cálculo do diâmetro e do número de barras necessárias para atender à área de aço necessária e por fim o desenho da peça dimensionada.



Figura 17 – Fluxograma do BeamOpt

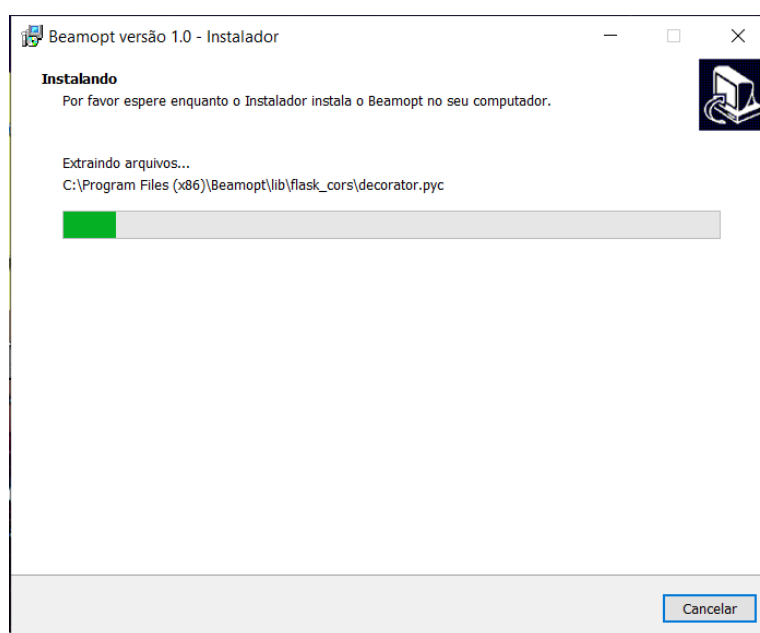


Fonte: Elaborada pelo autor

## 4 RESULTADOS

O *software* produzido foi nomeado de BeamOpt, em alusão às palavras do inglês *Beam* e *Optimization*. Por meio da biblioteca *cx\_Freeze* o projeto foi transformado em um executável. Após isso, utilizando o *software* Inno Setup Compiler, um instalador foi criado para o executável em questão, sendo todos os pacotes necessários para o seu funcionamento instalados nesse processo.

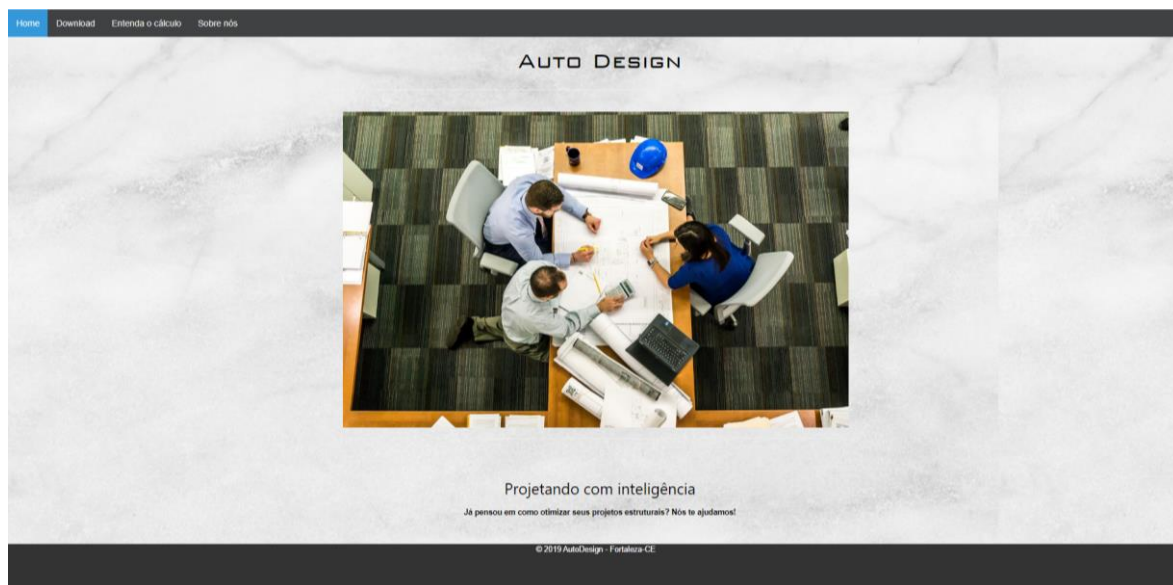
Figura 18 – Instalador do *software* BeamOpt



Fonte: Elaborado pelo autor

Para divulgação do projeto, criou-se um site que relata algumas informações relevantes e disponibiliza o download do instalador, entretanto o site está hospedado localmente, funcionando apenas para demonstrar como toda a solução ocorreria na prática.

Figura 19 – Página inicial do site do projeto



Fonte: Elaborado pelo autor

Como forma de validação da otimização realizada, os resultados do programa foram comparados com o *software* TQS, e algumas dessas comparações foram tomadas como exemplos. As Tabelas 3 e 4 apresentam conjuntos de parâmetros de entradas e se variou a forma de calcular a armadura (armadura simples ou armadura dupla), totalizando 10 possíveis combinações de resultados. As imagens das telas de resultados podem ser observadas no Apêndice A. É possível perceber a proximidade dos resultados de áreas de aços computadas pelos dois programas, em que o erro percentual ( $\frac{|A_{s,BeamOpt} - A_{s,TQS}|}{A_{s,TQS}}$ ) médio obtido foi de 0,24%, 0,94% e 6,06% para as áreas de aço longitudinal inferior, aço longitudinal superior e aço transversal respectivamente.

Tabela 3 – Larguras obtidas por meio da otimização

Caso	Tipo de armadura	Parâmetros					
		$f_{ck}$ (MPa)	$f_{yk}$ (MPa)	d (cm)	$M_d$ (tf.m)	$V_{sd}$ (tf)	Largura encontrada na otimização (cm)
1	Armadura Simples	25	500	36	17,5	14	33
2	Armadura Dupla	25	500	36	17,5	14	18
3	Armadura Simples	30	500	41	16,8	16,8	29
4	Armadura Dupla	30	500	41	16,8	16,8	18
5	Armadura Simples	35	500	41	22,4	22,4	33
6	Armadura Dupla	35	500	41	22,4	22,4	15
7	Armadura Simples	45	500	36	35	28	44
8	Armadura Dupla	45	500	36	35	28	26
9	Armadura Simples	50	500	41	35	28	29
10	Armadura Dupla	50	500	41	35	28	16

Fonte: Elaborado pelo autor

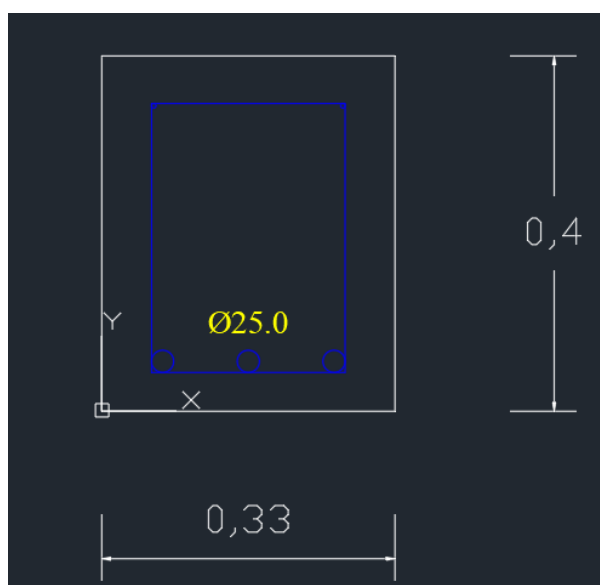
Tabela 4 – Comparação entre o BeamOpt e o TQS

Caso	Tipo de armadura	BeamOpt			TQS		
		$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{st}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{st}$ (cm <sup>2</sup> )
1	Armadura Simples	13,25	-	17,11	13,32	-	17,25
2	Armadura Dupla	13,18	5	31,86	13,21	5,07	32
3	Armadura Simples	10,51	-	16,13	10,54	-	19,08
4	Armadura Dupla	11,46	0,33	25,9	11,46	0,33	25,88
5	Armadura Simples	14,01	-	23,36	14,06	-	23,36
6	Armadura Dupla	14,91	4,09	41,08	14,91	4,09	41,08
7	Armadura Simples	25,58	-	35,37	25,67	-	45,25
8	Armadura Dupla	26,8	5,63	61,56	26,8	5,62	67,4
9	Armadura Simples	19,46	-	32,35	19,55	-	37,2
10	Armadura Dupla	21,01	2,47	52,64	21,05	2,55	52,8

Fonte: Elaborado pelo autor

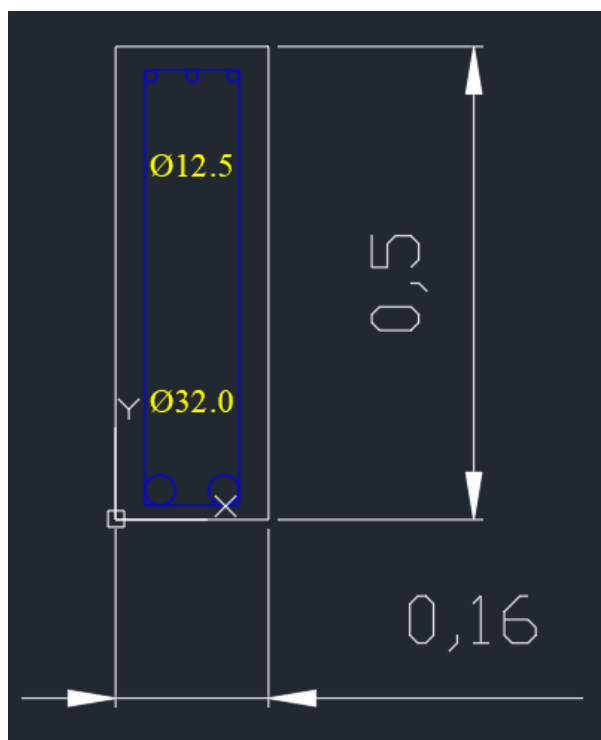
O desenho do detalhamento do programa é realizado conforme os exemplos apresentados nas Figura 20 e 21.

Figura 20 – Exemplo de detalhamento da peça de Armadura Simples



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 21 – Exemplo de detalhamento da peça de Armadura Dupla



Fonte: Elaborado pelo autor

Visando comparar os preços obtidos por meio das otimizações entre a armadura simples e a armadura dupla, realizou-se uma simulação de um caso específico tomado como exemplo, nos quais os parâmetros e as respectivas larguras ótimas obtidas podem ser observados na Tabela 5. Para a análise em questão o único parâmetro que se variou foi a carga distribuída aplicada na viga, buscando estudar como essa variação afeta o seu preço para a viga com armadura simples e com armadura dupla.

Tabela 5 – Simulação da variação de carga: Armadura Simples x Armadura Dupla

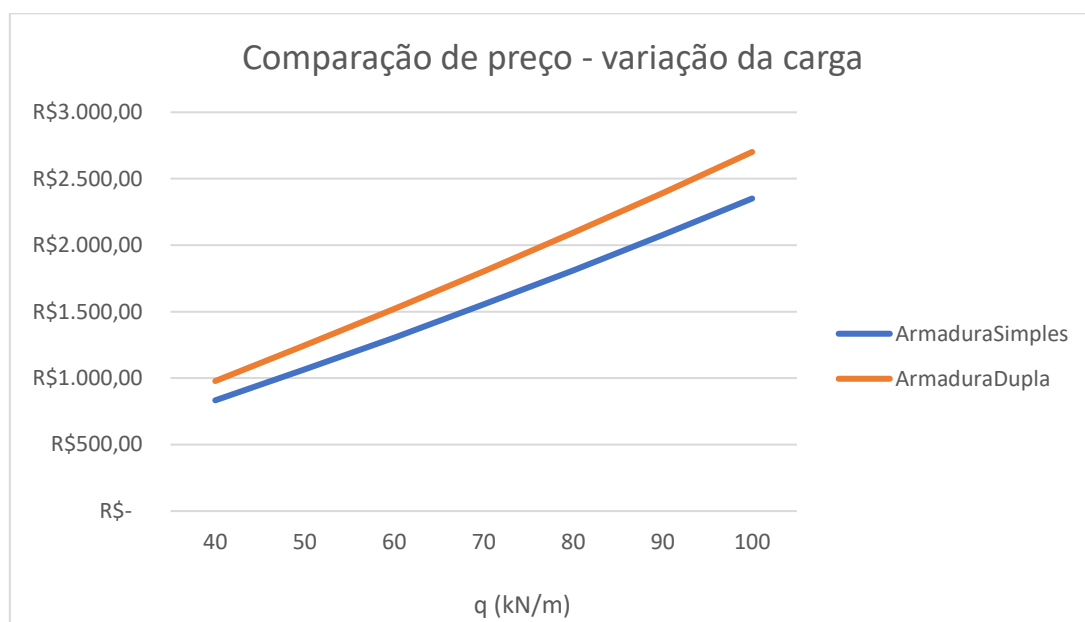
	fck (Mpa)	fyk (Mpa)	q (kN/m)	L (m)	h (cm)	bw (cm)	Volume (m³)	Preço/m³
Armadura simples	30	500	40	5	40	29	0,58	R\$ 1.436,47
	30	500	50	5	40	36	0,72	R\$ 1.480,58
	30	500	60	5	40	44	0,88	R\$ 1.483,55
	30	500	70	5	40	51	1,02	R\$ 1.523,33
	30	500	80	5	40	58	1,16	R\$ 1.561,07
	30	500	90	5	40	66	1,32	R\$ 1.573,22
	30	500	100	5	40	73	1,46	R\$ 1.610,43
Armadura dupla	30	500	40	5	40	14	0,28	R\$ 3.493,86
	30	500	50	5	40	17	0,34	R\$ 3.664,82
	30	500	60	5	40	21	0,42	R\$ 3.619,95
	30	500	70	5	40	24	0,48	R\$ 3.756,44
	30	500	80	5	40	28	0,56	R\$ 3.739,61
	30	500	90	5	40	31	0,62	R\$ 3.860,73
	30	500	100	5	40	35	0,7	R\$ 3.859,29

Fonte: Elaborado pelo autor

É possível observar que a armadura simples se mostra mais econômica, a qual apresentou um custo médio por metro cúbico de R\$ 1.524,09, enquanto a armadura dupla apresentou um custo médio por metro cúbico de R\$ 3.713,53, sendo dessa forma, 143,65% mais custosa para o mesmo volume.

O Gráfico 1 apresenta no eixo horizontal a carga distribuída aplicada na viga e no eixo vertical o custo da viga dimensionada para atender às solicitações. Para as simulações realizadas, a armadura dupla apontou em média um custo 13,85% maior do que a armadura simples para os mesmos parâmetros de projeto solicitados. Por outro lado, a armadura dupla apresenta um volume médio de 0,49 m³, que é 52,38% menor quando comparada com o volume médio de 1,02 m³ da armadura simples.

Gráfico 1 – Comparação de preço mediante variação de carga: Armadura Simples x Armadura Dupla



Fonte: Elaborado pelo autor

Entretanto é válido ressaltar que a armadura simples exige mais volume da viga, fato que leva a estrutura a ter um maior peso próprio. Tal acréscimo de peso pode inviabilizar a sua utilização em certos casos, e sua redução de custo pode se tornar ineficiente.



## 6 CONCLUSÃO

Dimensionar um projeto estrutural é uma tarefa que demanda grande responsabilidade e conhecimento técnico. É um desafio conseguir conciliar conforto, segurança e baixo custo em um mesmo projeto estrutural de engenharia. Ter conhecimento de métodos de otimização nesse processo, garante ao engenheiro encarregado, capacidade de elaborar projetos eficientes e com custo reduzido, respeitando as normas técnicas brasileiras.

Por meio do presente trabalho, foi possível desenvolver um *software* que realiza o dimensionamento e detalhamento de vigas utilizando técnicas de otimização não linear. Tal contribuição apresenta relevância acadêmica na área de otimização de estruturas, tema recorrente em cursos de graduação e de pós-graduação em engenharia civil.

Como principais resultados, além do programa BeamOpt, foram elaborados um instalador e um *site* para complementar os recursos tecnológicos da ferramenta. Os resultados das otimizações foram validados com o *software* TQS e as armaduras encontradas nos dois programas foram similares, apresentado erro percentual médio de 0,24%, 0,94% e 6,06% para as áreas de aço longitudinal inferior, aço longitudinal superior e aço transversal respectivamente. No que se refere aos custos desses elementos estruturais, as vigas com armadura dupla apresentaram um custo 13,85% maior nas simulações realizadas, entretanto possuem volume 52,38% menor. Devido ao fato que a viga com armadura simples possui um volume maior, isso pode inviabilizar sua utilização ao analisar a estrutura como um todo.

Como contribuições para trabalhos futuros, é possível aprofundar a complexidade da análise dos componentes estruturais, avaliando não somente a viga isoladamente, mas também elementos como lajes, vigas e pilares integrados em um projeto. Dessa forma, as oportunidades de otimização são ampliadas. Também é relevante precificar de maneira mais detalhada a viga, uma vez que no presente trabalho apenas o custo do concreto, o custo do aço longitudinal e o custo do aço transversal foram considerados. Além desses pontos apresentados, é válido verificar outras técnicas de otimização que possam ter resultados interessantes em modelos complexos.

## REFERÊNCIAS

ABNT. **ABNT NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. Rio Grande: Dunas, 2003, v. 2, 2ed.

BASTOS, P. S. dos S. **Flexão Normal Simples**: Vigas. Bauru: Universidade Estadual Paulista, 2015. (Notas de Aula: Disciplina: 2117 – Estruturas de Concreto I). Disponível em: [http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3922/material/Paulo%20Bastos\\_FlexaoSimples\\_Vigas\\_2015.pdf](http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3922/material/Paulo%20Bastos_FlexaoSimples_Vigas_2015.pdf). Acesso em: 10 jun. 2019.

BRAZ, D. H. L. *et al.* Cálculo da área da armadura transversal em vigas de concreto armado de resistência elevada submetidas à ação de força cortante: análise comparativa entre normas. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 59., 2017, Bento Gonçalves. **Anais [...]**. Bento Gonçalves: IBRACON, 2017. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/327019481\\_Calculo\\_da\\_area\\_da\\_armadura\\_transversal\\_em\\_vigas\\_de\\_concreto\\_armado\\_de\\_resistencia\\_elevada\\_submetidas\\_a\\_acao\\_de\\_forca\\_cortante\\_analise\\_comparativa\\_entre\\_normas](https://www.researchgate.net/publication/327019481_Calculo_da_area_da_armadura_transversal_em_vigas_de_concreto_armado_de_resistencia_elevada_submetidas_a_acao_de_forca_cortante_analise_comparativa_entre_normas). Acesso em: 10 jun. 2019.

CONCEIÇÃO P.; HEITOR M. **Engenharia e mudança tecnológica**: As dinâmicas do conhecimento e o desafio da inovação. Brito: Engenho e Obra, p. 107-122, 2002. Disponível em: [http://seminarios.ist.utl.pt/04-05/inov/material/Eng\\_mud\\_tecnologica.pdf](http://seminarios.ist.utl.pt/04-05/inov/material/Eng_mud_tecnologica.pdf). Acesso em: 26 nov. 2019.

FIGUEIREDO, P. C. N. O “Triângulo de Sábato” e as alternativas brasileiras de inovação tecnológica. **Revista Administração pública**, v. 27, p. 84-97, Rio de Janeiro, 1993. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rap/article/viewFile/8659/7390>. Acesso em: 26 jun. 2019.

FONTES, F. F. **Análise Estrutural de Elementos Lineares Segundo a NBR 6118:2003**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005. Disponível em: [https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/35001660/2005ME\\_FernandoFFontes.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3D2005ME\\_Fernando\\_FFuentes.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A%2F20190610%2Fus-east-1%2Fs3%2Faws4\\_request&X-Amz-Date=20190610T223031Z&X-Amz-Expires=3600&X-Amz-SignedHeaders=host&X-Amz-Signature=d4815fab549f7dae89f24d764d2d22736cb08025ff834874552c9cc304492b0d](https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/35001660/2005ME_FernandoFFontes.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3D2005ME_Fernando_FFuentes.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A%2F20190610%2Fus-east-1%2Fs3%2Faws4_request&X-Amz-Date=20190610T223031Z&X-Amz-Expires=3600&X-Amz-SignedHeaders=host&X-Amz-Signature=d4815fab549f7dae89f24d764d2d22736cb08025ff834874552c9cc304492b0d). Acesso em: 10 jun. 2019.

Beal, L.D.R., Hill, D., Martin, R.A., and Hedengren, J. D., GEKKO Optimization Suite, Processes, Volume 6, Number 8, 2018, doi: 10.3390/pr6080106

GUERRIN, A. **Tratado de Concreto Armado**. São Paulo: Hermus, [19--], v. 1.

KAWAJIR, Y. *et al.* **Introduction to IPOPT**: A tutorial for downloading, installing and using IPOPT. Department of Chemical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 2015.

Disponível em: <https://projects.coin-or.org/Ipopt/browser/stable/3.10/Ipopt/doc/documentation.pdf?format=raw>. Acesso em: 26 jun. 2019.

POLILLO, A. **Dimensionamento de concreto armado**. Rio de Janeiro: Ed. Científica, 1979, v. 4.

PUC. Overview. **Ftool**. Rio de Janeiro: PUC, [20--]. Disponível em: <https://www.ftool.com.br/Ftool/site/about>. Acesso em: 10 jun. 2019.

SEINFRA. Tabela de Custos – Versão 026 - ENC. SOCIAIS 114,23%. Disponível em: <https://sites.seinfra.ce.gov.br/siproce/onerada/html/tabela-seinfra.html>. Acesso em: 10 nov. 2019.

SOUZA, R. A.; ENAMI, R. M. Sobre os acidentes estruturais recentes ocorridos na cidade de Maringá-PR. **Revista Tecnológica**, [S.l.], v. 18, p. 91-101, 2009. Disponível em: <http://eduem.uem.br/laboratorio/ojs/index.php/RevTecnol/article/view/8732/6005>. Acesso em: 10 jun. 2019.

SUN, W.; YUAN, Y. X. **Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming**. New York: Springer, 2006.

WÄCHTER, A. **An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Optimization with Applications in Process Engineering**. Dissertation (Doctor of Philosophy in Chemical Engineering) – Carnegie Mellon University. Pittsburgh, 2002. Disponível em: <http://users.iems.northwestern.edu/~andreasw/pubs/thesis.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2019.

WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T. Line Search Filter Methods for Nonlinear Programming: Local Convergence. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 16, p. 32-48, 2005. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S1052623403426544>. Acesso em: 26 jun. 2019.

## APÊNDICE A – IMAGENS DA VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

### Caso 1 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```

Aço Longitudinal total: 13.253907303219117 cm2

Aço Transversal total: 17.106915245296896 cm2

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

fck: 25.0 MPa

fyk: 500.0 MPa

Comprimento do vão: 5.0 m

Altura útil: 36.1 cm

Vd: 14.0 tf

Md: 17.5 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da Viga: 33.0 cm
  
```

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

▼ Materiais

$f_{ck}$ : 25 MPa

Geometria / Seção

$b_w$ : 33 cm

$d$ : 36 cm

Esforço solicitante

$M_{sd} (tf.m) = M_{sk} (tf.m) \times \gamma_f$

17.5 = 12.5 x 1.4

$M_{sd} \rightarrow A_s$

Armaduras

$A_s$ : 13.32 cm<sup>2</sup>

$A_s'$ : 0.00 cm<sup>2</sup>

$\beta_x = x/d = 0.40$

$M_{sd} \leftarrow A_s$

▼ Armadura mínima

▼ Armadura dupla

### Flexão simples

#### Resultados

$A_s = 13.32 \text{ cm}^2$

$A_s' = 0.00 \text{ cm}^2$

$x = 14.45 \text{ cm}$

$\beta_x = x/d = 0.40$

#### Equilíbrio

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

#### Deformação/Domínios

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

#### Dados

##### Informações gerais

Norma utilizada: NBR-6118:2014

##### Geometria

$b_w = 33.0 \text{ cm}$

$h = 40.0 \text{ cm}$

$d = 36.0 \text{ cm}$

$d' = 4.0 \text{ cm}$

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

Título da seção: Observação:

☒ Cortante ☐ Torção ☐ Ambos

**Materials**

$f_{cd}$ : 25 MPa

**Geometria**

$b_w$ : 33 cm

$b_{w,min}$ : 0 cm

$h$ : 40 cm

$d$ : 36 cm

**Modelo**

**Força cortante**

$V_{ed}$ : 14 tf

☐ Impressão Completa

**Calcular**

## Cortante

### Resultados

Cortante

$A_{sw,nec} = 3.45 \text{ cm}^2$

$A_{sw,min} = 3.39 \text{ cm}^2$

$A_{sw,real} = 3.45 \text{ cm}^2$

$V_{Rd2} = 51.55 \text{ tf}$

$V_{Rd3} = 14.00 \text{ tf}$

$V_c = 9.14 \text{ tf}$

$V_{sw} = 4.86 \text{ tf}$

## Caso 2 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```
Aço Inferior: 13.174459524655092 cm2
Aço Superior: 5.007865953226521 cm2
Aço Transversal: 31.85545778538341 cm2
```

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

$f_{ck}$ : 25.0 MPa

$f_{yk}$ : 500.0 MPa

Comprimento do vão: 5.0 m

Altura útil: 36.1 cm

$V_d$ : 14.0 tf

$M_d$ : 17.5 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da Viga: 18.0 cm

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Materiais**  
 $f_{ck}$ : 25 MPa

**Geometria / Seção**  
  
 $b_w$ : 18 cm  
 $d$ : 36 cm

**Esforço solicitante**  
 $M_{sd} (tf.m) = M_{sk} (tf.m) \times \gamma_f$   
 17.5 = 12.5 x 1.4

**Armaduras**  
 $A_s$ : 13.21 cm<sup>2</sup>  
 $A'_s$ : 5.07 cm<sup>2</sup>  
 $M_{sd} \rightarrow A_s$   
 $M_{Rd} \leftarrow A_s$

**Flexão simples**  
**Resultados**  
 $A_s = 13.21 \text{ cm}^2$   
 $A'_s = 5.07 \text{ cm}^2$   
 $x = 16.20 \text{ cm}$   
 $\beta_x = x/d = 0.45 (= \beta_{xLim})$   
**Equilíbrio**  
 Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.  
**Deformação/Domínios**  
 Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

**Dados**  
 Informações gerais  
 Norma utilizada: NBR-6118:2014

**Geometria**  
 $b_w = 18.0 \text{ cm}$   
 $h = 40.0 \text{ cm}$   
 $d = 36.0 \text{ cm}$   
 $d' = 4.0 \text{ cm}$

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Materiais**  
 $f_{ck}$ : 25 MPa

**Geometria**  
 $b_w$ : 18 cm  
 $b_{w,min}$ : 0 cm  
 $h$ : 40 cm  
 $d$ : 36 cm

**Modelo**  
☒ Cortante ☐ Torção ☐ Ambos

**Força cortante**  
 $V_{sd}$ : 14 tf

**Impressão Completa**  
 Calcular

**Cortante**  
**Resultados**  
 Cortante  
 $A_{sw,nec} = 6.40 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,min} = 1.85 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,real} = 6.40 \text{ cm}^2$   
 $V_{Rd2} = 28.12 \text{ tf}$   
 $V_{Rd3} = 14.00 \text{ tf}$   
 $V_c = 4.99 \text{ tf}$   
 $V_{sw} = 9.01 \text{ tf}$

### Caso 3 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```

Aço Longitudinal total: 10.504224525080739 cm2

Aço Transversal total: 16.12692208051042 cm2

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

fck: 30.0 MPa

fyk: 500.0 MPa

Comprimento do vão: 4.0 m

Altura útil: 41.0 cm

Vd: 16.8 tf

Md: 16.8 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da Viga: 28.999999999999996 cm

```

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Materials**

$f_{ck}$ : 30 MPa

**Geometria / Seção**

$b_w$ : 29 cm

$d$ : 41 cm

**Esforço solicitante**

$M_{sd}$  (tf.m) =  $M_{sk}$  (tf.m) x  $\gamma_f$

16.8 = 12 x 1.4

**Armaduras**

$A_s$ : 10.54 cm<sup>2</sup>

$A_s'$ : 0.00 cm<sup>2</sup>

$x$ : 10.84 cm

$\beta_x = x/d = 0.26$

**Flexão simples**

**Resultados**

$A_s = 10.54 \text{ cm}^2$

$A_s' = 0.00 \text{ cm}^2$

$x = 10.84 \text{ cm}$

$\beta_x = x/d = 0.26$

**Equilíbrio**

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

**Deformação/Domínios**

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

**Dados**

Informações gerais

Norma utilizada: NBR-6118:2014

**Geometria**

$b_w = 29.0 \text{ cm}$

$h = 45.0 \text{ cm}$

$d = 41.0 \text{ cm}$

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

Título da seção: Observação:

☒ Cortante ☐ Torção ☐ Ambos

**Material**

$f_{ck}$ : 25 MPa

**Geometria**

$b_w$ : 29 cm

$b_{w,min}$ : 0 cm

$h$ : 45 cm

$d$ : 41 cm

**Modelo**

☒ Força cortante

$V_{ed}$ : 16.8 tf

☐ Impressão Completa

Calcular

## Cortante

### Resultados

Cortante

$A_{sw,nec} = 4.77 \text{ cm}^2$

$A_{sw,min} = 2.98 \text{ cm}^2$

$A_{sw,real} = 4.77 \text{ cm}^2$

$V_{Rd2} = 51.59 \text{ tf}$

$V_{Rd3} = 16.80 \text{ tf}$

$V_c = 9.15 \text{ tf}$

$V_{sw} = 7.65 \text{ tf}$

#### Caso 4 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```
Aço Inferior: 11.459992396911195 cm2
Aço Superior: 0.3298981111969096 cm2
Aço Transversal: 25.897674652719388 cm2
```

```
----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----
fck: 30.0 MPa
fyk: 500.0 MPa
Comprimento do vão: 4.0 m
Altura útil: 41.0 cm
Vd: 16.8 tf
Md: 16.8 tfm


----- AUTO DESIGN: RESULTS -----
Largura da Viga: 18.0 cm
```



Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Materiais**  
 $f_{ck}$ : 30 MPa

**Geometria / Seção**  
  
 $b_w$ : 18 cm  
 $d$ : 41 cm

**Esforço solicitante**  
 $M_{ed}$  (tf.m) =  $M_{sk}$  (tf.m) x  $\gamma_f$   
 16.8 = 12 x 1.4

**Armaduras**  
 $A_s$ : 11.46 cm<sup>2</sup>  
 $A_s'$ : 0.33 cm<sup>2</sup>  
 $M_{ed} \rightarrow A_s$

**Flexão simples**  
**Resultados**  
 $A_s = 11.46 \text{ cm}^2$   
 $A_s' = 0.33 \text{ cm}^2$   
 $x = 18.45 \text{ cm}$   
 $\beta_x = x/d = 0.45 (= \beta_{xLim})$

**Equilíbrio**  
 Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

**Deformação/Domínios**  
 Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

**Dados**  
 Informações gerais  
 Norma utilizada: NBR-6118:2014

**Geometria**  
 $b_w = 18.0 \text{ cm}$   
 $h = 45.0 \text{ cm}$   
 $d = 41.0 \text{ cm}$

☐ Armadura mínima  
☐ Armadura dupla

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Título da seção**  
**Observação**

**Cortante**  
**Resultados**  
 Cortante  
 $A_{sw,nec} = 6.47 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,min} = 2.09 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,real} = 6.47 \text{ cm}^2$   
 $V_{Rd2} = 37.57 \text{ tf}$   
 $V_{Rd3} = 16.80 \text{ tf}$   
 $V_c = 6.41 \text{ tf}$   
 $V_{sw} = 10.39 \text{ tf}$

**Modelo**  
**Força cortante**  
 $V_{ed}$ : 16.8 tf

☐ Impressão Completa  
 Calcular

**Geometria**  
 $b_w$ : 18 cm  
 $b_{w,min}$ : 0 cm  
 $h$ : 45 cm  
 $d$ : 41 cm

**Materiais**  
 $f_{ck}$ : 30 MPa

## Caso 5 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```

Aço Longitudinal total: 14.00563270010765 cm2

Aço Transversal total: 23.363418572429016 cm2

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

fck: 35.0 MPa

fyk: 500.0 MPa

Comprimento do vão: 4.0 m

Altura útil: 41.0 cm

Vd: 22.4 tf

Md: 22.4 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da Viga: 33.0 cm

```

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

Material:  $f_{ck} = 35$  MPa

Geometria / Seção:  $b_w = 33$  cm,  $d = 41$  cm

Esforço solicitante:  $M_{sd} (tf.m) = M_{Ed} (tf.m) \times \gamma_f$   
 $22.4 = 16 \times 1.4$

Armaduras:  $A_s = 14.06$  cm<sup>2</sup>

Resultados:

$A_s = 14.06$  cm<sup>2</sup>  
 $A_s' = 0.00$  cm<sup>2</sup>  
 $x = 10.90$  cm  
 $\beta_x = x/d = 0.27$

Equilíbrio: Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

Deformação/Domínios: Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

Dados:

Informações gerais: Norma utilizada: NBR-6118:2014

Geometria:  $b_w = 33.0$  cm,  $h = 45.0$  cm,  $d = 41.0$  cm,  $d' = 4.0$  cm

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

Título da seção: Observação:

☒ Cortante ☐ Torção ☐ Ambos

**Materials**  
 $f_{ck}$ : 35 MPa

**Geometria**  
 $b_w$ : 33 cm  
 $b_{w,min}$ : 0 cm  
 $h$ : 45 cm  
 $d$ : 41 cm

**Modelo**  
☒ Força cortante  
 $V_{ed}$ : 77.4 tf

☐ Impressão Completa

**Calcular**

## Cortante

### Resultados

Cortante

$A_{sw,nec} = 5.84 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,min} = 4.24 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,real} = 5.84 \text{ cm}^2$

$V_{Rd2} = 78.54 \text{ tf}$   
 $V_{Rd3} = 22.40 \text{ tf}$   
 $V_c = 13.03 \text{ tf}$   
 $V_{sw} = 9.37 \text{ tf}$

### Caso 6 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```

Aço Inferior: 14.912830445945945 cm2

Aço Superior: 4.091905445945944 cm2

Aço Transversal: 41.08241125058673 cm2

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

fck: 35.0 MPa

fyk: 500.0 MPa

Comprimento do vão: 4.0 m

Altura útil: 41.0 cm

Vd: 22.4 tf

Md: 22.4 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da Viga: 15.0 cm

```

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Materiais**  
 $f_{ck}$ : 35 MPa

**Geometria / Seção**  
  
 $b_w$ : 15 cm  
 $d$ : 41 cm

**Esforço solicitante**  
 $M_{sd} (tf.m) = M_{sk} (tf.m) \times \gamma_f$   
 22.4 = 16 x 1.4

**Armaduras**  
 $A_s$ : 14.91 cm<sup>2</sup>  
 $A_s'$ : 4.09 cm<sup>2</sup>  
 $\phi$ : 10 mm c/ 0 cm

**Flexão simples**  
**Resultados**  
 $A_s = 14.91 \text{ cm}^2$   
 $A_s' = 4.09 \text{ cm}^2$   
 $x = 18.45 \text{ cm}$   
 $\beta_X = x/d = 0.45 (= \beta_{XLim})$   
**Equilíbrio**  
 Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.  
**Deformação/Domínios**  
 Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.  
**Dados**  
 Informações gerais  
 Norma utilizada: NBR-6118:2014  
 Geometria  
 $b_w = 15.0 \text{ cm}$   
 $h = 45.0 \text{ cm}$   
 $d = 41.0 \text{ cm}$   
 $d' = 4.0 \text{ cm}$

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Cortante** **Torção** **Ambos**

**Materiais**  
 $f_{ck}$ : 35 MPa

**Geometria**  
 $b_w$ : 15 cm  
 $b_{w,min}$ : 0 cm  
 $h$ : 45 cm  
 $d$ : 41 cm

**Modelo**  
**Força cortante**  
 $V_{ed}$ : 22.4 tf  
☐ Impressão Completa

**Cortante**  
**Resultados**  
 Cortante  
 $A_{sw,nec} = 10.27 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,min} = 1.93 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,real} = 10.27 \text{ cm}^2$   
 $V_{Rd2} = 35.70 \text{ tf}$   
 $V_{Rd3} = 22.40 \text{ tf}$   
 $V_c = 5.92 \text{ tf}$   
 $V_{sw} = 16.48 \text{ tf}$

## Caso 7 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```

Aço Longitudinal total: 25.583957398570757 cm2

Aço Transversal total: 35.366176752979925 cm2

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

fck: 45.0 MPa

fyk: 500.0 MPa

Comprimento do vão: 5.0 m

Altura útil: 36.00000000000001 cm

Vd: 28.0 tf

Md: 35.0 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da Viga: 44.0 cm
  
```

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

▼ Materiais

fck: 45 MPa

Geometria / Seção



bw: 44 cm

d: 36 cm

Esforço solicitante

Msd (tf.m) = Msk (tf.m) x γr

35 = 25 x 1.4

Msd → As

Armaduras

As: 25.67 cm<sup>2</sup>

As: 2 Ø 10 mm c/ 0 cm

As': 0 cm<sup>2</sup>

Msd ← As

▼ Armadura mínima

▼ Armadura dupla

### Flexão simples

#### Resultados

As = 25.67 cm<sup>2</sup>

As' = 0.00 cm<sup>2</sup>

x = 11.61 cm

βx = x/d = 0.32

#### Equilíbrio

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

#### Deformação/Domínios

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

#### Dados

Informações gerais

Norma utilizada: NBR-6118:2014

Geometria

bw = 44.0 cm

h = 40.0 cm

d = 36.0 cm

d' = 4.0 cm

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

Título da seção: Observação:

☒ Cortante ☐ Torção ☐ Ambos

**Materials**  
 $f_{ck}$ : 35 MPa

**Geometria**  
 $b_w$ : 44 cm  
 $b_{w,min}$ : 0 cm  
 $h$ : 40 cm  
 $d$ : 36 cm

**Modelo**  
**Força cortante**  
 $V_{ed}$ : 78 tf  
☐ Impressão Completa  
 Calcular

**Cortante**

**Resultados**

Cortante

$A_{sw,nec} = 9.05 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,min} = 5.65 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,real} = 9.05 \text{ cm}^2$

$V_{Rd2} = 91.95 \text{ tf}$   
 $V_{Rd3} = 28.00 \text{ tf}$   
 $V_c = 15.25 \text{ tf}$   
 $V_{sw} = 12.75 \text{ tf}$

### Caso 8 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

Aço Inferior: 26.797260242857135 cm<sup>2</sup>  
 Aço Superior: 5.6229345285714185 cm<sup>2</sup>  
 Aço Transversal: 61.554761010599236 cm<sup>2</sup>

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

$f_{ck}$ : 45.0 MPa  
 $f_{yk}$ : 500.0 MPa  
 Comprimento do vão: 5.0 m  
 Altura útil: 36.000000000000001 cm  
 $V_d$ : 28.0 tf  
 $M_d$ : 35.0 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da viga: 26.0 cm

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Materiais**  
 $f_{ck}$ : 45 MPa

**Geometria / Seção**  
  
 $b_w$ : 26 cm  
 $d$ : 36 cm

**Esforço solicitante**  
 $M_{sd} (tf.m) = M_{sk} (tf.m) \times \gamma_f$   
 35 = 25 x 1.4

**Armaduras**  
 $A_s$ : 26.80 cm<sup>2</sup>  
 $A_s'$ : 5.62 cm<sup>2</sup>  
 $M_{Rd} \leftarrow A_s$

[Armadura mínima](#)  
[Armadura dupla](#)

## Flexão simples

### Resultados

$A_s = 26.80 \text{ cm}^2$   
 $A_s' = 5.62 \text{ cm}^2$   
 $x = 16.20 \text{ cm}$   
 $\beta_x = x/d = 0.45 (= \beta_{xLim})$

### Equilíbrio

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

### Deformação/Domínios

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

### Dados

**Informações gerais**  
 Norma utilizada: NBR-6118:2014

**Geometria**  
 $b_w = 26.0 \text{ cm}$   
 $h = 40.0 \text{ cm}$   
 $d = 36.0 \text{ cm}$   
 $d' = 4.0 \text{ cm}$

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Título da seção**  
 Observação

**Cortante** ☒ **Torção** ☐ **Ambos** ☐

**Materiais**  
 $f_{ck}$ : 35 MPa

**Geometria**  
 $b_w$ : 26 cm  
 $b_{w,min}$ : 0 cm  
 $h$ : 40 cm  
 $d$ : 36 cm

**Modelo**  
**Força cortante**  
 $V_{ed}$ : 28 tf  
☐ Impressão Completa  
 Calcular

## Cortante

### Resultados

**Cortante**  
 $A_{sw,nec} = 13.48 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,min} = 3.34 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,real} = 13.48 \text{ cm}^2$

$V_{Rd2} = 54.33 \text{ tf}$   
 $V_{Rd3} = 28.00 \text{ tf}$   
 $V_c = 9.01 \text{ tf}$   
 $V_{sw} = 18.99 \text{ tf}$

## Caso 9 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```

Aço Longitudinal total: 19.462816591120312 cm2

Aço Transversal total: 32.34614866796056 cm2

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

fck: 50.0 MPa

fyk: 500.0 MPa

Comprimento do vão: 5.0 m

Altura útil: 46.1 cm

Vd: 28.0 tf

Md: 35.0 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da Viga: 28.999999999999996 cm

```

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

Material:

fck: 50 MPa

Geometria / Seção

☐ ☒ ☐

b<sub>w</sub>: 29 cm

d: 46 cm

Esforço solicitante

M<sub>sd</sub> (tf.m) = M<sub>sk</sub> (tf.m) x γ<sub>f</sub>

35 = 25 x 1.4

M<sub>sd</sub> → A<sub>s</sub>

Armaduras

A<sub>s</sub>: ☒ 19.55 cm<sup>2</sup>

A<sub>s</sub>: ☐ 2  10 mm

A<sub>s</sub>: ☐ 10 mm c/  0 cm

A<sub>s</sub>:  0 cm<sup>2</sup>

M<sub>sd</sub> ← A<sub>s</sub>

Armadura mínima

Armadura dupla

### Flexão simples

#### Resultados

A<sub>s</sub> = 19.55 cm<sup>2</sup>

A<sub>s</sub>' = 0.00 cm<sup>2</sup>

x = 12.07 cm

β<sub>X</sub> = x/d = 0.26

#### Equilíbrio

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

#### Deformação/Domínios

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

#### Dados

Informações gerais

Norma utilizada: NBR-6118:2014

Geometria

b<sub>w</sub> = 29.0 cm

h = 50.0 cm

d = 46.0 cm

d' = 4.0 cm



Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

Título da seção: Observação:

☒ Cortante ☐ Torção ☐ Ambos

**Materials**  
 $f_{ct}$ : 50 MPa

**Geometria**  
 $b_w$ : 26 cm  
 $b_{w,min}$ : 0 cm  
 $h$ : 50 cm  
 $d$ : 46 cm

**Modelo**  
**Força cortante**  
 $V_{ed}$ : 78 tf

☐ Impressão Completa

Calcular

## Cortante

### Resultados

Cortante

$A_{sw,nec} = 7.44 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,min} = 4.23 \text{ cm}^2$   
 $A_{sw,real} = 7.44 \text{ cm}^2$

$V_{Rd2} = 92.26 \text{ tf}$   
 $V_{Rd3} = 28.00 \text{ tf}$   
 $V_c = 14.61 \text{ tf}$   
 $V_{sw} = 13.39 \text{ tf}$

### Caso 10 – Comparação entre resultados do BeamOpt e do TQS

```

Aço Inferior: 21.01390408741093 cm2

Aço Superior: 2.4738012302680614 cm2

Aço Transversal: 52.63642035200749 cm2

----- VARIÁVEIS DE ENTRADA -----

fck: 50.0 MPa

fyk: 500.0 MPa

Comprimento do vão: 5.0 m

Altura útil: 46.1 cm

Vd: 28.0 tf

Md: 35.0 tfm

----- AUTO DESIGN: RESULTS -----

Largura da Viga: 16.0 cm

```

Calculo de momento fletor resistente / área de armadura em seção retangular/T

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Materiais**

$f_{ck}$ : 50 MPa

**Geometria / Seção**

$b_w$ : 16 cm

$d$ : 46 cm

**Esforço solicitante**

$M_{sd} (tf.m) = M_{sk} (tf.m) \times \gamma_f$

35 = 25 x 1.4

**Armaduras**

$A_s$ : 21.05 cm<sup>2</sup>

$A_s'$ : 2.55 cm<sup>2</sup>

$M_{sd} \rightarrow A_s$

$M_{Rd} \leftarrow A_s$

**Flexão simples**

**Resultados**

$A_s = 21.05 \text{ cm}^2$

$A_s' = 2.55 \text{ cm}^2$

$x = 20.70 \text{ cm}$

$\beta_x = x/d = 0.45 (= \beta_{xLim})$

**Equilíbrio**

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

**Deformação/Domínios**

Por favor, atualize seu browser para exibir o desenho.

**Dados**

**Informações gerais**

Norma utilizada: NBR-6118:2014

**Geometria**

$b_w = 16.0 \text{ cm}$

$h = 50.0 \text{ cm}$

$d = 46.0 \text{ cm}$

$d' = 4.0 \text{ cm}$

**Armadura mínima**

**Armadura dupla**

Calculadora de armaduras em elementos sujeitos à força cortante e à torção, segundo a NBR6118

Norma: ABNT NBR 6118:2014

**Título da seção**

**Observação**

**Cortante** **Torção** **Ambos**

**Materiais**

$f_{ck}$ : 50 MPa

**Geometria**

$b_w$ : 16 cm

$b_{w,min}$ : 0 cm

$h$ : 50 cm

$d$ : 46 cm

**Modelo**

**Força cortante**

$V_{sd}$ : 28 tf

☐ Impressão Completa

**Calcular**

**Cortante**

**Resultados**

**Cortante**

$A_{sw,nec} = 10.56 \text{ cm}^2$

$A_{sw,min} = 2.61 \text{ cm}^2$

$A_{sw,real} = 10.56 \text{ cm}^2$

$V_{Rd2} = 56.78 \text{ tf}$

$V_{Rd3} = 28.00 \text{ tf}$

$V_c = 8.99 \text{ tf}$

$V_{sw} = 19.01 \text{ tf}$