TP2 : Simulation et Monte-Carlo

Benoît Henry, benoit.henry@imt-lille-douai.fr

Exercice 1 *On souhaite calculer*

$$\int_{-100}^{100} x^3 \exp\left(-x^2 + \frac{x}{4}\right) dx.$$

1. *Implémenter la méthode de Monte-Carlo naïve pour calculer l'intégrale.*
2. *Proposer une nouvelle méthode basée sur l'échantillonnage préférentiel.*
3. *Comparer votre méthode à la précédente en traçant l'erreur en fonction de n, le nombre de tirages. On prendra pour référence la valeur :* 0.34108495302811275202.

Exercice 2 *On considère la chaine de Markov* $(X_k)_{k\geq 0}$ *à valeur sur* $E = \{1, \cdots, n\}$ *de transition q donné par*

$$q(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & si\ j \neq i \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1. *Simuler la chaine de Markov partant d'une condition initiale* X_0 *telle que*

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{n}, \forall i \in E.$$

2. *Simuler la chaine de Markov partant d'une condition initiale* X_0 *telle que*

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1.$$

Exercice 3 *Metropolis-Hastings pour une première loi On souhaite simuler sur l'ensemble* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *la variable aléatoire Y de loi*

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}.$$

1. *Implémenter l'algorithme de Metropolis-Hastings afin de simuler cette loi en utilisant la chaine de Markov de l'exercice 2.*

Exercice 4 *On considère la chaine de Markov* $(X_k)_{k\geq 0}$ *l'ensemble des matrices* $n \times n$ *à coéfficients dans* $\{-1, 1\}$ *. C'est à dire que E est l'espace d'état des particules du Modèle Ising. On suppose notre chaine a pour transition q donné par*

$$q(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & si\ \exists!(i,j)\ t.q.\ \sigma_1(i,j) \neq \sigma_2(i,j) \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1. *Décriver le comportement de cette chaine de Markov.*
2. *Simuler la chaine de Markov partant d'une condition initiale* X_0 *que vous choisirez.*

Exercice 5 *On souhaite simuler le modèle d'Ising vu en cours et mettre en évidence la transition de phase et l'existence de la température du Curie. On va pour cela implémenter l'algorithme de Metropolis-Hastings. On reprendra le noyau de proposition de l'exercice précédent. On rappel que l'objetif est de simuler une variable aléatoire* Σ *à valeur dans* $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ *telle que*

$$\mathbb{P}(\Sigma = \sigma) = \frac{1}{Z}\exp(-\beta H(\sigma))$$

avec

$$H(\sigma) = \sum_{i,j} \sigma_{i,j} \left(\sigma_{i+1,j}\mathbb{1}_{i+1\leq n} + \sigma_{i-1,j}\mathbb{1}_{i-1\geq 0} + \sigma_{i,j+1}\mathbb{1}_{j+1\leq n} + \sigma_{i,j-1}\mathbb{1}_{j-1\geq 0}\right).$$