TD 6, 7 & 8 - Amplification Laser

Méthodes Numériques

1 Définition du problème

L'objectif de cette serie de TDs est de simuler l'amplification d'un laser monochromatique par une section amplificatrice pompée. Le problème sera ici considéré à deux dimensions d'espace, x et z, et une dimension de temps, t.

Afin d'assurer la justesse physique des phénomènes mis en jeu, nous nous plaçons dans l'approximation d'un faisceau parfaitement monochromatique de longueur d'onde λ, intéragissant avec un milieu amplificateur ayant une unique transition radiative $E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda}$ considérée quasi-3 ou 4 niveaux, sans élargissements homogène ni inhomogène (indépendance entre l'état des ions excités et leur milieu d'insertion).

L'intensité laser, notée $I(x, z, t)$, est connue à tout instant à l'entrée $x = 0$ du milieu. Son évolution est donnée par deux facteurs : la propagation qui permet au faisceau d'avancer, et l'amplification laser traduisant l'interaction avec le matériau. L'équation régissant l'intensité est alors la suivante:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} = GI \tag{1}$$

Le gain, noté $G(x, z, t)$, est connu à l'instant $t = 0$, ainsi qu'en tout autre instant sur les 4 bords du domaine. Son évolution est régie par 3 différents phénomènes :

- l'amplification laser qui transfère de l'énergie au faisceau (contrôlé par le paramètre α),
- la diffusion qui homogènéise le gain au sein du milieu amplificateur,
- et les pertes qui traduisent les désexcitations non-radiatives (contrôlé par le paramètre f).

L'équation décrivant son évolution peut alors être formalisée comme suit :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\alpha IG + \mu\Big(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\Big) - fG \tag{2}$$

Ces deux équations forment un système couplé qu'il nous faut résoudre par une méthode numérique. Ce couplage et l'équation de propagation (eq. 1) posent de nombreux problèmes de stabilité et soulèvent des questions sur l'ordre des résolutions ainsi que sur la méthode à utiliser. De prime abord, il semble possible d'insérer l'équation 1 dans l'équation 2 (ou inversement), ce qui permettrait d'obtenir une équation unique à résoudre. Cependant, ces deux équations différentielles sont de nature très différentes, advection pour l'une (1er ordre hyperbolique), et de diffusion pour l'autre (2nd ordre, parabolique). Ces deux équations nécessitent des schémas de discrétisation très différents, et il est donc préférable de les garder séparées et de les résoudre en séquence. In fine, nous opterons pour un schéma de résolution de I explicite suivi d'un schéma de résolution de G implicite.

Afin de nous familiariser avec la résolution d'EDP par différence finies, nous allons commencer pour nous intéresser à des versions ultra-simplifiées de ce problème :

1. TD6 : $\alpha = 0$, et $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ (équation 2 devient une équation de Poisson, ou de Laplace si $f = 0$, revient au calcul de la solution de diffusion à l'équilibre).
2. TD7 : $\alpha = 0$, l'équation 2 revient à l'équation de la chaleur si $f = 0$.
3. TD8 : équation d'advection (1) et couplage.

2 TD6 - Équation d'équilibre & EDP elliptique

Pour commencer, nous allons nous intéresser à l'équation 2 en ignorant l'amplification laser ($\alpha = 0$), et en cherchant la solution à l'équilibre ($\frac{\partial G}{\partial t} = 0$). L'équation devient une EDP elliptique :

$$\mu \Delta G = \mu \nabla \cdot \nabla G = \mu \Big(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \Big) = fG \tag{3}$$

où Δ est l'opérateur Laplacien, $\nabla \cdot$ l'opérateur de divergence, et ∇ l'opérateur de gradient. Nous allons de plus supposer que $f = 0$, ce qui nous donne l'équation de Laplace: $\Delta G = 0$.

Nous allons considérer un domaine rectangulaire $(x, z) \in [0, 1] \times [0, 0.2]$ discrétisé avec des pas Δx et Δy uniformes sur x et y, par exemple $\Delta x = \Delta y = 0.008$. Nous devons de plus définir des conditions aux bords, c'est à dire définir les 4 fonctions suivantes :

$$G(0, z) = G_0(z),\ G(1, z) = G_1(z),\ G(x, 0) = G_2(x),\ G(x, 0.2) = G_3(x) \tag{4}$$

pour lesquels vous pouvez prendre des fonctions arbitraires comme par exemple : $G_{0/1}(z) = 0$ et $G_{2/3}(x) = sin(3x\pi)^2$. Le résultat G de l'équation de Laplace correspond à une interpolation *harmonique* de ces valeurs aux bords, c'est à dire à la surface d'aire minimale passant par ces valeurs (équivalent à un film de savon).

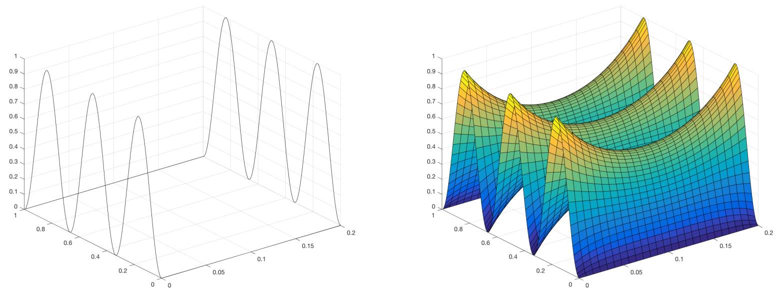

Figure 1: A gauche conditions aux bords, à droite résultat de l'interpolation harmonique.

1) Discrétisez l'équation de Laplace à l'aide d'un opérateur d'ordre 1 centré, et mettre l'équation de Laplace sous forme matricielle (sur papier). Pour cela, vous devez arranger les valeurs $G(x_i, y_j)$ qui ne sont pas fixées (i.e., pas sur le bord) dans un vecteur 1D $\mathbf{g}$ en les rangeant par ligne ou par colonne (la fonction reshape peut s'avérer utile lors de la mise en oeuvre). Les valeurs fixées aux bords doivent apparaître à droite afin de former un système matricielle de la forme A $\mathbf{g} = \mathbf{b}_{bords}$.

Quel est le nombre maximum de coefficients non nulles par ligne de la matrice ?

2) Assemblez le système d'équations en MatLab. Pour cela vous devrez construire une matrice creuse (*sparse matrix*), par exemple en utilisant la fonction spalloc, ce qui est probablement le plus simple conceptuellement. Résolvez le système d'équations et visualisez le résultat à l'aide de la fonction surf.

3) Mettre à jour le système pour prendre en compte un facteur f non nulle (pertes) et résoudre l'EDP de l'équation 3. Par exemple, prendre $mu = 3e6$ et $f = 3e8$.

Pour aller plus loin

Une manière plus efficace d'assembler la matrix A consiste à construire trois vecteurs stockant respectivement les indices de ligne, colonne, et la valeur des coefficients non nulle de la matrice à assembler et d'appeler la fonction sparse pour former la matrice.

Une autre approche possible consiste à exploiter la structure par bande de la matrice avec la fonction spdiags.

3 TD7 - Diffusion & EDP parabolique

Nous allons maintenant étudier la diffusion du gain au cours du temps (et non plus à l'équilibre). A la différence du TD précédant, la fonction G est maintenant dépendante du temps ($G(x, z, t)$). Pour cette séance, nous ignorons toujours l'interaction avec le faisceaux laser (i.e., $\alpha = 0$). L'équation qui nous intéresse est donc :

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \mu \Delta G = fG \tag{5}$$

qui est exactement l'équation de la chaleur si $f = 0$.

En plus des conditions aux bords du TD précédent, nous devons définir le gain au temps $t = 0$, par exemple $G(x, z, 0) = 0$.

3.1 Résolution explicite

1) Discrétisez cette équation avec un schéma explicite centré spatialement. Quelles sont les ordres de convergence en temps et en espace? Pour information, ce schéma est souvent dénommé FTCS pour *Forward in Time, Central in Space.*

2) Implémentez cette solution sous forme matricielle.

3) Testez avec différents pas de temps, et vérifiez que la solution devient instable si le pas de temps ne vérifie pas la condition de stabilité du schéma FTCS pour l'équation de diffusion : $\mu\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right) < \frac{1}{2}$.

3.2 Résolution implicite

1) Discrétisez cette équation avec un schéma implicite centré spatialement. Comme au TD précédent, vous isolerez les valeurs inconnues de G à gauche et les valeurs connues à droite de manière à former un système matricielle de la forme A $\mathbf{g_{t_{n+1}}} = \mathbf{b}_{G(t_n)} + \mathbf{b}_{bords}$.

2) Implémentez et testez cette solution avec différent pas de temps. Vérifiez la stabilité pour de grand pas de temps.

3) Vérifiez que la solution converge vers la solution d'équilibre obtenue précédemment.

4 TD8 - Advection & EDP hyperbolique

Pour cette séance nous allons nous intéresser à l'équation hyperbolique d'advection (1), puis réaliser le couplage avec l'équation de diffusion mise en oeuvre lors de la séance précédente.

Afin de simplifier et stabiliser le problème, nous poserons la condition de discrétisation suivante : $\Delta x = \Delta z = c\Delta t$. Nous opterons ensuite, à chaque instant t, pour un schéma de résolution de I explicite suivi d'un schéma de résolution de G implicite.

4.1 Propagation laser sans gain

Pour l'instant, nous allons nous concentrer sur l'équation (1) en supposant que $G = 0$.

1) Discrétisez l'équation de l'intensité (1) suivant un schéma explicite (le faisceau se propageant de gauche à droite, prendre un schéma à gauche en espace).

2) En quoi la discrétisation obtenue est-elle intuitive lorsque $\Delta x = c\Delta t$ et $G = 0$?

3) Implémenter et visualiser l'évolution de I avec $G = 0$.

5 Couplage

Vous disposez à cette étape d'un laser qui se propage au sein du milieu amplificateur, mais aucune interaction n'est encore présente.

1) Pour réaliser ce couplage, que suffit-il d'ajouter à la matrice A définit à la section 3 afin de prendre désormais en compte l'interaction laser ($I \neq 0$) ?

2) De même, que faut-il modifier au code de propagation précédant pour prendre en compte le fait que $G \neq 0$?

3) Mettez en oeuvre ces modifications et visualiser le résultat qui doit être similaire à la vidéo fournie au début du TD.

5.1 Pour aller plus loin...

L'équation d'évolution de l'intensité I fait partie d'une classe d'équations différentielles appelées '"équations d'advection". La mise en oeuvre d'un schéma de discrétisation classique pour de telles équations introduit un biais, prenant ici la forme d'un retard entre le passage du faisceau et son interaction avec le milieu. Pour le corriger, il faut d'abord observer qu'il existe naturellement une corrélation entre le temps et l'espace du fait de la propagation du faisceau, ce qui brise l'orthogonalité de notre paramétrisation.

Pour palier à ce problème, il est nécessaire d'effectuer le changement de variable

$$(x,t) \to (u,t') = (x - ct, t) \tag{6}$$

L'équation (1) devient alors

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t'}(u,t') = G(u,t')I(u,t') \tag{7}$$

1) Discrétiser l'équation (4) selon un shéma explicite.

2) En revenant dans la paramétrisation (x,t) d'origine, montrer que $I(x_i, t_{j+1})$ ne dépend que de $I(x_{i-1}, t_j)$.

3) Corriger en conséquence l'implémentation faite en partie 2, et observer.