Méthodes numériques – TD2

Approximation aux moindres carrés

Le but de cette séance est de comprendre les mécaniques de la résolution de systèmes linéaires sur-contraints, c'est à dire avec plus d'équations que d'inconnues. Pour le compte-rendu, vous pouvez toujours prendre des captures d'écran et/ou sauvegarder les commandes que vous avez rentrées.

Au TD précédent, nous avons pu constater que le fichier « *data* » contient des données bruitées. Afin de débruiter ces données et d'obtenir une fonction continue et facilement manipulable, nous allons ***approcher*** ces données par une fonction analytique.

1 Approximation polynomiale

Rappelons que ce fichier contient un ensemble de couples de mesures (x_j, f_j) où la valeur f_j à été observée en position x_j . Pour commencer, nous allons approchez ces mesures par un polynôme de degré *D* :

$$P_D(x) = \sum_{i=0}^{D} \alpha_i x^i$$

C'est à dire, le polynôme doit passer « au plus prêt » des mesures.

1. Formulez ce problème aux sens des *moindres carrés* pour un polynôme linéaire (*D=1*). Pour vous aider, suivez les questions/étapes suivantes :
   1. Quelles sont les inconnues ?
   2. Quelle est l'énergie à minimiser ?
   3. Quel est le système d'équations linéaires à former et résoudre pour trouver la valeur des inconnues qui minimise notre énergie ?

2. Implémentez et testez cette solution.
   Réutilisez ce que vous avez fait au TP précédent pour l'affichage des solutions, et bien sur affichez sur une même figure les données d'origine et l'approximation.

3. Écrivez une fonction qui généralise le processus pour tout degré.

4. Testez avec des degrés supérieurs.
   1. Quelle est la valeur maximale D_{max} de *D* pour espérer que le problème soit bien posé ?

5. Évaluez et tracer l'erreur pour chaque degré de *0* à D_{max} .

2 Pour aller plus loin

1. Testez l'approximation polynomiale avec les données du fichier *'data4'*.
   1. Arrivez vous à obtenir une reconstruction satisfaisante ?
   2. Regardez en particulier la valeur du résidu en fonction du degré.

2. Faites de même avec une somme de sinus $\sum_{k=0}^{K} a_k \sin(k\,x)$ et une augmentation progressive du nombre de *fonctions de bases K.*