PROJET 14

Paradoxe de Parrondo

sujet proposé par C. Marzouk

cyril.marzouk@polytechnique.edu

Les jeux de Parrondo sont des jeux de lancers de pièce: un “pile” fait gagner 1 et un “face” fait perdre 1. On fixe un $\varepsilon \in]0, \frac{1}{10}[$ et on pose

$$p = \frac{1}{2} - \varepsilon, \qquad p_0 = \frac{1}{10} - \varepsilon, \qquad p_1 = \frac{3}{4} - \varepsilon.$$

En pratique, on prendra ε petit (par exemple $1/1000$). Il y a alors deux jeux:

- le jeu A consiste à lancer une pièce qui donne pile avec probabilité p;
- dans le jeu B, on lance une pièce qui donne pile avec probabilité p_0 *si* le gain (positif ou négatif) cumulé jusqu'à présent est divisible par 3, et on lance une pièce qui donne pile avec probabilité p_1 sinon.

On note $S_0 = 0$ le capital initial et S_n le gain après n lancers.

Le comportement si l'on joue de manière répétée au jeu A est assez clair, celui si l'on joue de manière répétée au jeu B le deviendra au fil des questions, et nous verrons que jouer alternativement à plusieurs parties de A, puis plusieurs de B et ainsi de suite, ou bien jouer à chaque étape soit à A soit à B aléatoirement peut révéler des comportements surprenants.

L'étude introduit un peu à la théorie des chaînes de Markov qui fait l'objet du cours MAP 432 en deuxième année.

Nota bene: des calculs numériques fastidieux pourront être délégués à un ordinateur.

1 Étude des deux jeux

T1. On joue au jeu A de façon répétée; comment se comporte S_n lorsque $n \to \infty$ (loi des grands nombres, théorème central limite)? Avez-vous envie de jouer à ce jeu?

S1. Illustrer ce comportement via des simulations en superposant de nombreuses trajectoires $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ ainsi qu'un histogramme de la loi de S_n pour un n grand.

S2. On joue à présent au jeu B de façon répétée; à l'aide de simulations, conjecturer le comportement de S_n lorsque $n \to \infty$; avez-vous envie de jouer à ce jeu?

On se propose d'étudier théoriquement le comportement en temps long du jeu B; il semble naturel de considérer la suite $X = (X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\{0,1,2\}$ donnée par $X_n \equiv S_n \pmod 3$. La suite X est un exemple de ***chaîne de Markov*** homogène, sa loi est entièrement caractérisée par sa *matrice de transition* P_B, où $P_B(i,j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ pour toute paire $(i,j) \in \{0,1,2\}^2$.

Ainsi, on a ici

$$P_B = \begin{pmatrix} 0 & p_0 & 1-p_0 \\ 1-p_1 & 0 & p_1 \\ p_1 & 1-p_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10}-\varepsilon & \frac{9}{10}+\varepsilon \\ \frac{1}{4}+\varepsilon & 0 & \frac{3}{4}-\varepsilon \\ \frac{3}{4}-\varepsilon & \frac{1}{4}+\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

T2. Montrer que pour toute paire $(i,j) \in \{0,1,2\}^2$, il existe un entier k tel que $P(X_{n+k} = j \mid X_n = i) \neq 0$; on dit que la chaîne X est *irréductible*.

Un résultat général montre qu'une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans un ensemble fini E, de matrice de transition P, possède une unique *loi stationnaire*, c'est-à-dire une loi π sur E telle que pour tout $j \in E$,

$$\sum_{i\in E} \pi(i)P(i,j) = \pi(j).$$

Le terme de gauche correspond simplement au produit matriciel $(\pi P)(j)$ si l'on voit π comme un vecteur ligne; il s'agit de la loi de X_{n+1} lorsque X_n est choisi aléatoirement selon π (c'est la formule des probabilités totales); la relation dit qu'alors la loi de X_{n+1} est encore π, d'où le nom de loi stationnaire (dans le temps).

T3. Montrer que la loi stationnaire π_B associée à la suite X est donnée par

$$\begin{cases} \pi_B(0) = C\,(1-p_1(1-p_1)) \\ \pi_B(1) = C\,(1-p_1(1-p_0)) \\ \pi_B(2) = C\,(1-p_0(1-p_1)) \end{cases} \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{2+p_0p_1^2+(1-p_0)(1-p_1)^2},$$

de sorte que $\pi_B(0)+\pi_B(1)+\pi_B(2) = 1$.

T4. Exprimer en fonction de π_B et des paramètres la probabilité de gagner au prochain lancer, ainsi que le gain moyen γ_B, si X_n suit la loi π_B.

Bien que S_n ne soit pas une somme de variables aléatoires i.d.d. une version généralisée de la loi des grands nombres que l'on admettra permet de conclure que S_n/n converge presque sûrement vers une constante c qui ne dépend pas de X_0. Pas convergence dominée (comme $|S_n/n| \leq 1$), la convergence a également lieu dans L^1 et ainsi cette constante c est le gain moyen γ_B de la question précédente.

T5. Représenter γ_B en fonction de $\varepsilon > 0$. Commenter par rapport aux simulations précédentes.

2 Mélange de jeux

Fixons deux entiers $r,s \geq 1$; on définit un nouveau jeu, que l'on note A^rB^s, qui consiste en r parties successives selon la règle A, suivies de s parties successives selon la règle B. On note toujours S_n le gain après n parties (donc $n(r+s)$ lancers !).

S3. À l'aide de simulations, conjecturer le comportement de S_n lorsque $n \to \infty$ pour $r = s = 1$, pour $r = s = 2$, ainsi que deux autres couples (r,s) de votre choix; commenter.

On se propose d'étudier théoriquement ces jeux en utilisant à nouveau la suite X dont la matrice de transition est désormais $P_{A^rB^s} = P_A^r P_B^s$ où P_B est la matrice utilisée dans la première partie.

T6. On fixe $\varepsilon = 0$ et on choisit $r = s = 1$; montrer que la matrice de transition de X est

$$P_{AB} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 20 & 5 & 15 \\ 15 & 7 & 18 \\ 5 & 2 & 33 \end{pmatrix},$$

dont l'unique loi stationnaire est donnée par

$$\pi_{AB}(0) = \frac{3}{13}, \qquad \pi_{AB}(1) = \frac{1}{13}, \qquad \pi_{AB}(2) = \frac{9}{13}.$$

Quel est le gain moyen sous la loi stationnaire γ_{AB}?

Si l'on prend $r = s = 2$, toujours avec $\varepsilon = 0$, on trouve comme matrice de transition

$$P_{A^2B^2} = \frac{1}{320} \begin{pmatrix} 162 & 59 & 99 \\ 151 & 58 & 111 \\ 111 & 47 & 162 \end{pmatrix},$$

dont l'unique loi stationnaire est donnée par

$$\pi_{A^2B^2}(0) = \frac{2783}{6357}, \qquad \pi_{A^2B^2}(1) = \frac{1075}{6357}, \qquad \pi_{A^2B^2}(2) = \frac{2499}{6357}.$$

Des calculs plus pénibles (demandez-vous comment calculer la probabilité qu'après ces quatre lancers, le gain soit $+2$ par exemple), on obtient un gain moyen sous la loi stationnaire de

$$\gamma_{A^2B^2} = \frac{16}{163}.$$

T7. Que pouvez-vous conclure quant au comportement asymptotique de S_n lorsque $\varepsilon > 0$ est petit, dans les deux cas $r = s = 1$ et $r = s = 2$? Commenter par rapport aux simulations.

3 Mélange aléatoire

On propose une dernière variation: le jeu C qui consiste à jouer aléatoirement soit selon la règle A, soit selon la règle B; précisément, on lance une première pièce non biaisée, si elle donne "pile" alors on joue un lancer au jeu A, sinon on joue un lancer au jeu B; on répète à chaque étape de sorte que le choix de la règle est une suite i.d.d. de Bernoulli($1/2$); on note toujours S_n le gain après n parties.

S4. À l'aide de simulations, conjecturer le comportement de S_n lorsque $n \to \infty$ et commenter.

T8. Une dernière fois, pour $\varepsilon = 0$, montrer que la matrice de transition de X est

$$P_C = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 28 \\ 15 & 0 & 25 \\ 15 & 25 & 0 \end{pmatrix},$$

dont l'unique loi stationnaire est donnée par

$$\pi_C(0) = \frac{195}{715} = \frac{3}{11}, \qquad \pi_C(1) = \frac{236}{715}, \qquad \pi_C(2) = \frac{284}{715},$$

de sorte que le gain moyen sous la loi stationnaire est

$$\gamma_C = \frac{4}{55}.$$

T9. Que pouvez-vous conclure quant au comportement asymptotique de S_n lorsque $\varepsilon > 0$ est petit?

S5. Simuler et commenter à nouveau le comportement de S_n lorsque $n \to \infty$, lorsque le choix du jeu A ou du jeu B à chaque étape est plus généralement une variable de Bernoulli(α) pour différentes valeurs de $\alpha \in]0, 1[$.