

# Statistique quantique de l'émission de Hawking dans un trou noir analogue

Alix Merolle - Quantum Fluids of Light Group

Juin 2022

Stage M1 Physique Fondamentale et Applications - Sorbonne Université  
Supervisé par Maxime Jacquet



 **SORBONNE  
UNIVERSITÉ**

 Laboratoire **Kastler Brossel**  
Physique quantique et applications

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Sujet/problématique</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Simulation quantique analogique des trous noirs</b>	<b>3</b>
3.1	Gravité analogue . . . . .	3
3.1.1	Espace courbe . . . . .	3
3.1.2	Isomorphisme . . . . .	4
3.2	Fluide quantique de lumière . . . . .	6
3.2.1	Fluide de polaritons . . . . .	6
3.2.2	Horizon sonique . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Rayonnement de Hawking</b>	<b>8</b>
4.1	Truncated Wigner approximation . . . . .	8
4.2	Mesure des corrélations . . . . .	9
4.3	Profil de densités et de vitesses . . . . .	10
4.4	Corrélations spatiales . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>annexe</b>	<b>17</b>

# 1 Introduction

Actuellement en stage au sein du Laboratoire Kastler-Brossel (LKB), pour une durée de 4 mois.

Le LKB est une unité mixte de recherche de l'École Normale Supérieure, de Sorbonne Université, du Collège de France et du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS). Celui-ci a obtenu de nombreuses récompenses pour ces recherches en physique quantique depuis sa création en 1951. Il traite un large éventail de sujets allant des tests fondamentaux de la physique quantique à leurs applications, du pompage optique à la spéctroscopie en passant par l'étude des interactions lumière matière dans une grande variété de milieux. Mon stage se réalise uniquement en présentiel sur le campus de Sorbonne université.

Je suis rattachée à l'équipe d'Alberto Bramati "Optique quantique" dont les recherches ciblent plus précisément les fluides quantiques de lumière sous la tutelle de Maxime Jacquet (post-doc). Cette équipe est constituée d'une chercheuse émérite, de deux enseignants-chercheurs, trois post-doc, huit doctorants et quatre stagiaires. J'ai souhaité faire mon stage dans cette équipe afin d'allier la mécanique quantique à la simulation numérique. Je porte également un grand intérêt à l'optique, ce stage a donc confirmé mon attrait pour ces domaines de la physique. De plus cette équipe est à la pointe dans ces champs de recherches que j'affectionne. Ce sont toutes ces raisons qui m'ont donné envie d'effectuer un stage au sein de l'équipe du LKB.

L'équipe des fluides quantiques de lumière comprend trois sous-équipes :

- L'équipe des polaritons, dans laquelle j'évolue
- L'équipe rubidium
- Et l'équipe nano optique

J'ai beaucoup apprécié le fait d'évoluer au sein même du bureau des doctorants et stagiaires de l'équipe. Cela nous permet de bénéficier d'une cohésion d'équipe et d'échanger sur l'avancée de nos différents travaux. J'ai travaillé sur la simulation quantique analogique. Plus précisément, j'ai effectué des calculs numériques pour préparer des expériences de simulation de théorie des champs typique des trous noirs.

# 2 Sujet/problématique

Le trou noir est un des objets célestes qui fascine le plus. Tellelement compact que rien ne peut s'en échapper pas même la lumière. Enfin c'est ce qu'on pensait jusqu'à ce que Stephen Hawking [1] montre en 1974 que les trous noirs émettent un rayonnement. Cette prédiction théorique est invérifiable au niveau des vrais trous noirs, le rayonnement étant très faible et donc inobservable. Heureusement, la gravité analogue permet de faire des simulations quantiques afin d'étudier les effets des trous noirs. Ce qui rend la simulation analogue intéressante est qu'elle permet de recréer les conditions dans lesquelles les ondes se propagent comme au voisinage d'un trou noir alors qu'il serait impossible d'observer leurs rayonnements dans l'espace.

Le groupe d'optique quantique du LKB étudie les excitons-polaritons dans les microcavités semi-conductrices. Le but est que les excitons-polaritons se comportent comme des fluides de lumière afin de recréer un horizon des événements (le point de non-retour qui délimite l'intérieur du trou noir). Ils souhaitent pouvoir observer l'émission spontanée de paires intriquées d'excitations du fluide à l'horizon qui caractérise l'effet Hawking.

En 1981, William Unruh [2] crée un nouveau champ de recherche de la physique en démontrant que les arguments qui mènent à l'évaporation du trou noir prédisent qu'un horizon sonique dans un écoulement transsonique émet un spectre thermique d'ondes sonores. Cette découverte permet l'étude, en laboratoire, de théories quantiques des champs en espace courbe, la gravité analogue. Nous allons maintenant examiner comment ça fonctionne.

Un fluide, dont l'écoulement est transsonique, forme un horizon là où la vitesse du flux excède celle du son. Les ondes sonores sont piégées à l'intérieur de la région supersonique comme les ondes électromagnétiques à l'intérieur de horizon d'un trou noir. Les fluctuations quantiques du vide à l'horizon acoustique font rayonner l'horizon par effet Hawking [3]. Un tel écoulement peut être créé avec un fluide de polaritons[4][5][6][7], c'est le système étudié par le groupe du LKB[8][9][10].

Les excitons-polaritons sont des quasi-particules résultant de l'interaction de la lumière avec la matière dans une microcavité semi-conductrice. Ces photons piégés dans la cavité créent des excitons (des paires électron-trou liées). Un couplage fort entre les photons et les excitons piégés dans les trous quantiques donne lieu à deux états propres, le polariton bas (LP) et le polariton haut (UP)[9]. Dans certaines conditions, la dynamique groupée des polaritons bas est celle d'un fluide de lumière, et c'est l'ingénierie de ce fluide qui permet de recréer un espace-temps effectivement courbé avec un horizon.

La dynamique du champ moyen est régie par une équation de Gross-Piteavskii généralisée[9], dont on peut en déduire les équations d'Euler et de continuité qui décrivent le système comme un fluide quantique[2]. Pour décrire notre système nous utilisons donc l'équation de Gross-Pitaevskii qui permet de connaître l'évolution de la fonction d'onde des polaritons. En effet l'équation de Gross-Pitaevskii permet de décrire l'état fondamental d'un système quantique de bosons identiques, les polaritons pouvant être décrits de cette manière.

Nous utilisons également la théorie de Bogoliubov[11] pour décrire notre système. Cette théorie permet de caractériser les excitations de faible amplitude du champ moyen. Ces excitations vont être découpées de la non-linéarité, ce qui va permettre de décrire les interactions ainsi que la dispersion des fluctuations du vide et rayonnement de Hawking

L'équipe des fluides quantiques de lumière a déjà obtenu des résultats théoriques prometteurs[8][9][10], Nous savons aujourd'hui que la physique hors équilibre affecte la relation de dispersion et l'émission et la propagation des ondes, c'est pourquoi il est très important de prendre en compte l'influence des propriétés du fluide sur l'effet Hawking. Il a été constaté [8] que pour améliorer l'intensité du signal, la densité du fluide en amont de l'horizon doit être dans un système de bistabilité optique, ce qui permet l'observation expérimentale de l'effet Hawking dans des systèmes hors équilibre. L'équipe cherche maintenant à vérifier ces prédictions théoriques expérimentalement et observer l'effet Hawking dans les polaritons, qui n'a jusqu'ici jamais été observé.

C'est pourquoi je me suis personnellement intéressée à la théorie et à la simulation afin de trouver les meilleurs dispositifs expérimentaux afin de pouvoir observer l'effet Hawking. Je me suis notamment orientée vers les profils de densité et de vitesse des polaritons et vers les corrélations spatiales en changeant des paramètres dans le but d'obtenir un horizon des événements le plus grand possible et donc un signal de plus grande intensité. J'ai également cherché à analyser les dynamiques différentes que je pouvais observer dans certains cas.

Dans la première partie, je vais aborder la gravité analogue et plus précisément comment on peut l'appliquer à notre système et quels sont les caractéristiques des fluides quantiques de polariton. La deuxième partie sera consacrée à la description du rayonnement de Hawking, à la création d'un horizon des événements et à l'analyse de données sur les corrélations spatiales.

### 3 Simulation quantique analogique des trous noirs

#### 3.1 Gravité analogue

##### 3.1.1 Espace courbe

Nous pouvons comprendre la phénoménologie des ondes près des trous noirs, et donc l'effet de la courbure de l'espace-temps sur leur cinématique, grâce à une analogie inventée par Unruh[2]. Imaginons une rivière, avec des poissons qui coule vers une chute d'eau. La vitesse d'écoulement

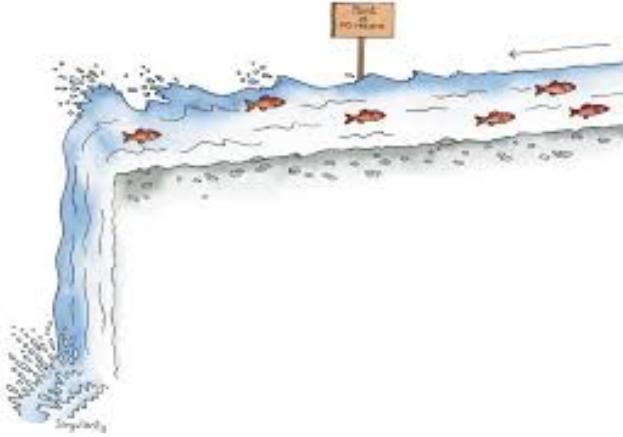


FIGURE 2 – Poissons dans une rivière

de l'eau augmente vers la cascade. Les poissons nagent à une vitesse  $v$  constante. Le débit de l'eau est accéléré et entraîne les poissons, jusqu'à atteindre un point où la vitesse d'écoulement est égale à la vitesse de nage maximale des poissons. C'est un point de non-retour. A partir de ce point, les poissons sont emmenés par le courant et ne peuvent plus remonter la rivière. On peut considérer que le point de non-retour sépare notre système en deux régimes, l'un en aval, l'autre en amont.

Avant le point de non-retour, les poissons ont un mouvement bidirectionnel c'est à dire qu'ils peuvent aller soit dans le sens du courant soit contre le courant. A partir du moment où ils déplacent le point de non-retour, ils sont entraînés vers le bas de la rivière et ont un mouvement unidimensionnel, les poissons ne peuvent pas revenir dans le régime en amont, une fois passé le point de non-retour ils ne pourront jamais revenir. La lumière se comporte de la même manière proche de l'horizon des événements. L'accélération du flux crée une courbure de l'espace-temps avec un horizon des événements.

Cette métaphore de l'effet de la courbure de l'espace-temps que nous venons d'utiliser nous permet de faire une analogie avec les ondes, on peut donc aussi remplacer les poissons par des ondes sonores. On admet que cette analogie est également valable pour des fluctuations du vide du champ acoustique dans l'espace. Elle est également valable pour n'importe quel fluide.

### 3.1.2 Isomorphisme

Maintenant que nous avons une compréhension phénoménologique de la cinétique des ondes sur un espace courbe. Nous allons faire la démonstration mathématique qui formalise l'analogie entre la cinétique des ondes près des trous noirs et dans un fluide à l'écoulement transsonique.

A l'horizon on sait qu'il y a un rayonnement d'Hawking qui est dû aux fluctuations du vide, on a donc un signal très faible. C'est également ce qui va se produire dans notre système. Nous devons utiliser un fluide très froid dans lequel il faut qu'on puisse voir les fluctuations. C'est pourquoi nous utilisons un fluide quantique.

Notre système, les excitons-polaritons en microcavité (ci-après, polaritons) est décrit par l'évolution de la fonction d'onde du polariton qui est elle-même décrite par une équation similaire à l'équation de Gross-Pitaevskii (GPE) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \hbar g |\psi|^2 \psi + V_{ext} \psi - i\gamma \psi + F_p \quad (1)$$

L'équation de Gross-Pitaevskii décrit l'état fondamental d'un système quantique de bosons

identiques.

Le premier terme à gauche correspond à l'énergie cinétique, le second terme est l'interaction non-linéaire, le troisième terme est le potentiel extérieur  $V_{ext}$  les quatrième et cinquième termes correspondent aux pertes  $\gamma$  dues à la cavité et à la résonance du pompage par un laser. Les pertes sont des termes ajoutées à l'équation classique de Gross-Pitaesskii.

Les fluides quantiques de polariton nous permettent de générer un flux transsonique à une ou deux dimensions spatiales pour la gravité analogue.

Reprendons l'équation de Gross-Pitaevskii mais cette fois ci pour les polaritons L'analogie mathématique que nous allons utiliser entre l'équation d'onde pour les excitations de Bogoliubov dans un écoulement fluide et dans un espace-temps courbe n'est valable que pour un faible  $k$ . Les excitations se comportent comme des ondes sonores avec une vitesse de groupe constante  $c_s$  lorsque la relation de dispersion est linéaire à  $k$  faible on a :

$$\omega(k) = \delta k \cdot v_0 \pm \sqrt{\frac{\hbar \delta k^2}{2m} \left( \frac{\hbar \delta k^2}{2m} + 2gn \right)} \quad (2)$$

Où  $v_0$  est la vitesse de l'écoulement des polaritons,  $\delta k = k - k_p$  est la différence moyenne entre le vecteur d'onde de la perturbation et le vecteur d'onde de la pompe et  $n = |\psi_0|^2$  et  $g$  est le coefficient d'interaction polariton-polariton. Dans ce régime l'influence de la pompe, des pertes et du potentiel externe est nulle. On peut donc négliger ces termes. Notre équation d'onde devient une équation non linéaire de Schrödinger :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + g|\psi|^2 \psi \quad (3)$$

$\nabla^2 \psi$  représente l'énergie cinétique, le second terme décrit l'interaction non linéaire (auto-focalisation) avec  $|\psi|^2$  l'intensité du polariton.

La dérivation effectuée en annexe nous permet d'obtenir une équation de continuité hydrodynamique et une équation d'Euler. Avec la phase  $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}$ ,  $\rho$  étant la densité des polaritons et  $v = (\frac{\hbar}{m}) \nabla \phi$  qui correspond à la vitesse du fluide.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0 \quad (4)$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2\hbar} mv^2 + g\rho - \frac{\hbar \Delta \rho^{1/2}}{2m \rho^{1/2}} = 0 \quad (5)$$

On obtient l'équation d'onde pour les excitations de Bogoliubov (ondes sonores à faible  $k$ ) en linéarisant les équations sur un état de fond : nous fixons  $\rho = \rho_0 + \rho_1 + O(\epsilon^2)$  et  $\psi = \delta\rho/\rho$  et nous négligeons la pression quantique (dernier terme de (5)) pour arriver à :

$$\frac{\partial(\frac{\rho_0}{c_s^2}(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \psi_1))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \psi_1 - \frac{\rho_0 v_0}{c_s^2}(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \psi_1)) = 0 \quad (6)$$

Avec  $c_s \equiv \sqrt{\frac{\hbar g \rho_0}{m}}$  qui correspond à la vitesse locale du son et

$$\nabla \psi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \frac{\partial \sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu}}{\partial \mu} \quad (7)$$

L'espace-temps étant tridimensionnel, le tenseur métrique  $\eta$  s'écrit sous la forme d'une matrice symétrique  $3 \times 3$  symétrique avec  $\eta = \det(\eta_{\mu\nu})$  et  $\eta_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & -v_0^x & -v_0^y \\ -v_0^x & 1 & 0 \\ -v_0^y & 0 & 1 \end{pmatrix}$

l'équation (6) est strictement isomorphe à l'équation d'onde d'un champ scalaire sans masse se propageant sur un espace-temps courbé 2+1D. Nous pouvons donc utiliser l'analogie entre la cinétique des ondes près des trous noirs et dans un fluide à l'écoulement transsonique.

### 3.2 Fluide quantique de lumière

#### 3.2.1 Fluide de polaritons

Le système utilisé dans le cadre de la gravité analogue est une microcavité de Fabry-Perot semi-conductrice [9], constituée de puits quantiques situés entre deux miroirs de Bragg comme on peut le voir dans la figure 3.a). Lorsqu'on pompe la cavité avec un laser, l'interaction entre les photons et les excitons (appariement d'un électron et d'un trou) et le couplage fort entre les photons de cavité et les excitons donnent naissance aux polaritons. Ces états mixtes ont deux états propres, l'upper et le lower polariton. La dispersion des deux états propres, le lower polariton et l'upper polariton, est représentée sur la figure 3.b). Nous pompons à résonance, l'excitation se fait uniquement sur la branche LP dont la dynamique est décrite par la GPE de la partie précédente. C'est pourquoi, par la suite, nous étudions uniquement le lower polariton. Les polaritons sont des quasi-particules, ils ont la masse effective des photons confinés et ont le potentiel d'interaction des paires électron-trou générées par les puits quantiques. L'interaction coulombienne entre les excitons entraîne une non-linéarité pour les polaritons, qui se traduit par le terme Kerr-like de non-linéarité dans la GPE. Ce qui nous permet d'utiliser l'équation non-linéaire de Schrödinger pour décrire l'évolution de la fonction d'onde du polariton inférieur.

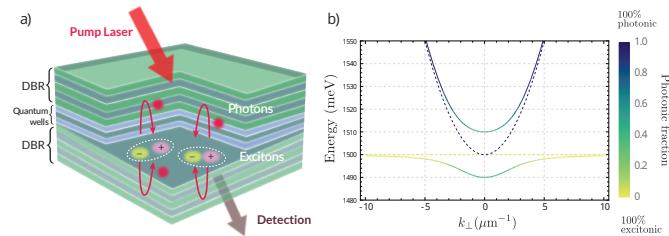


FIGURE 3 – (a) microcavité de notre système. (b) Courbe de dispersion des excitons et des photons de la cavité fortement couplés, donnant lieu à des polaritons supérieurs et inférieurs.

Nous avons un fluide hors équilibre dans notre système. La densité des polariton est décrite par  $|\Psi|^2$ . On s'attend donc à observer une relation monotone pour l'évolution de la vitesse des excitations cB en fonction de la puissance de la pompe  $F_p$ . Mais ici, l'évolution présente une boucle d'hystérésis, appelée bistabilité car le système peut à la fois être dans un régime d'interaction linéaire et non-linéaire. Cette dynamique est due aux interactions non linéaires entre polaritons et au fait que dans notre système nous avons des pertes. Nous allons décrire ici l'importance de la bistabilité dans notre étude et de son influence sur la dispersion de Bogoliubov. Elle est représentée figure 4.

En effet on peut voir sur la figure 5, 5 courbes de dispersion de Bogoliubov de 5 densités de fluide différentes le long de la boucle de bistabilité. On peut voir sur les deux premières courbes que les deux branches de la courbe de dispersion se croisent. Sur la figure 5b) on observe l'apparition de

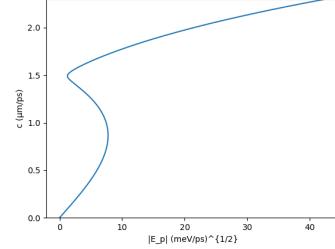


FIGURE 4 – Boucle de bistabilité pour un fluide de polaritons homogène

plateaux caractéristiques d'un fluide instable aux points de croisements. La fig 5e) présente deux branches qui sont divisées en énergie par un gap. On retrouve la relation de dispersion sonique, linéaire à bas  $k$  pour les figures 5c) et 5d), mais la figure 5c) retrouve les caractéristiques d'un fluide instable comme pour la figure 5b). Dans le papier [8], le groupe du LKB a montré que l'émission de Hawking était augmentée lorsqu'on se rapproche du point C, comme on peut le voir sur la figure 5d), Aussi, dans mes calculs je vais essayer de travailler aussi près que possible de ce point.

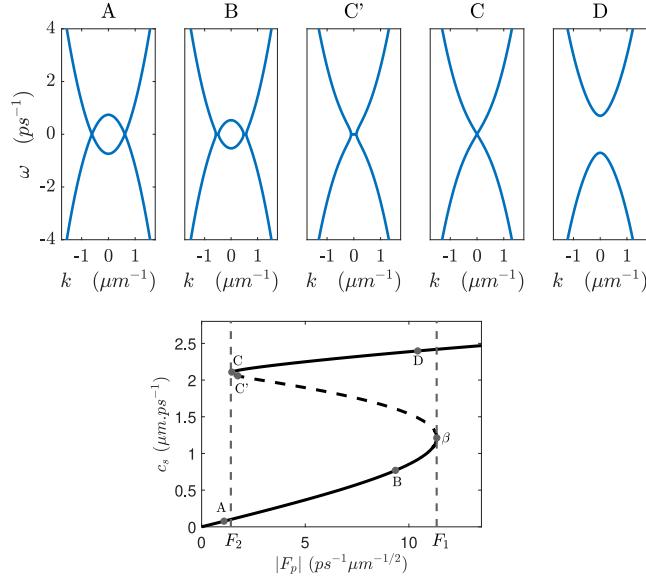


FIGURE 5 – Dispersion de Bogoliubov pour différentes densités de fluide. Rangée supérieure : a) et b), régime de faible densité ; c), fluide instable ; d), dispersion sonique ; e) régime de haute densité. En bas : f), courbe de bistabilité pour un fluide homogène. A, faible densité ; B, faible densité et bistable ; C', instable ; C, dispersion sonique point ; D, haute densité et bistable

Dans la suite nous utilisons la théorie de Bogoliubov pour décrire notre système.

### 3.2.2 Horizon sonique

La microcavité est pompée par un laser de pompage cohérent avec une excitation continue. Ce qui permet de former un flux stationnaire. Le profil d'intensité est en forme d'escalier comme le montre la figure 6 (milieu). Un défaut gaussien est placé après la région où se trouve la pompe. L'ensemble des polaritons se comporte comme un fluide dont les propriétés dispersives dépendent de sa densité et de sa vitesse[8]. Le système est séparé deux régions de densité de fluide  $n$  et de phase  $\theta$  comme on peut le voir sur la figure 4 (haut). Le fluide de polariton s'écoule à travers

le défaut à  $x = 0$  dans la direction positive  $x$  à la vitesse  $v = \frac{\hbar}{m^*} \frac{\partial \theta}{\partial x}$  où  $m^*$  est la masse des polaritons. Pour  $x < 0$ , le flux est subsonique et pour  $x > 0$  le flux est supersonique. D'après les arguments des sections précédentes, nous identifions le point  $x=0$  avec un horizon acoustique. Les propriétés spatiales du fluide lorsque la densité et la phase du fluide dans la région en amont sont au plus près du point C de la bistabilité sont représentées figure 6.

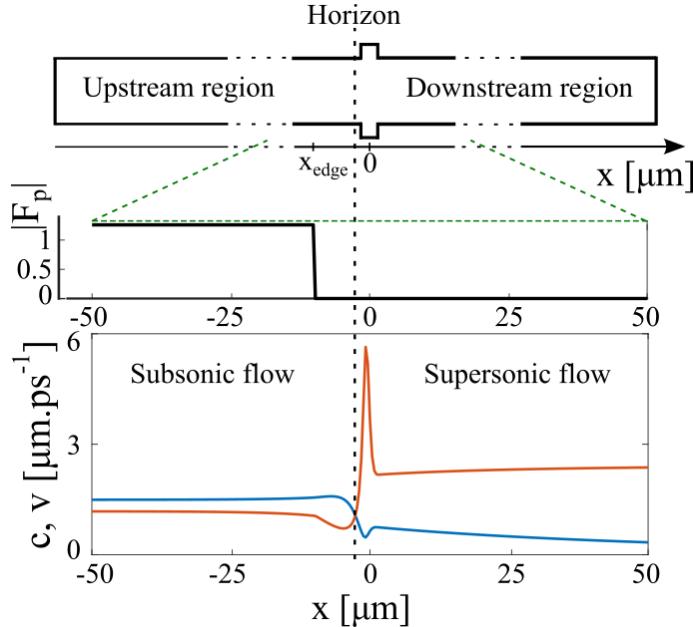


FIGURE 6 – En haut : différent régime de part et d'autre de l'horizon, au milieu : intensité de la pompe  $|F_p|$ , en bas : Vélocités  $[μm.ps^{-1}]$ . bleu, vitesse des excitations  $c_B$  ; rouge, vitesse d'écoulement du fluide  $v$  fixée par  $k$

On peut voir sur cette figure que  $v$  qui correspond à la vitesse du fluide est plat sauf lorsqu'il est poche de l'horizon où il atteint un pic autour de  $x=0$ . On peut donc considérer que la vitesse d'écoulement est homogène de chaque côté de la région.  $c_B$  qui correspond à la vitesse des excitations est plat dans la région pompée.  $c_B$  possède une légère bosse entre la fin de la pompe et le défaut.  $c_B$  décroît brusquement autour de  $x=0$  puis possède une autre légère bosse après le défaut. En effet l'écoulement du courant est conservé.

Dans cette section, nous avons montré comment un fluide à l'écoulement transsonique recrée un espace-temps effectivement courbé pour les ondes acoustiques. Le point où  $v=c$  est l'horizon acoustique. Nous avons aussi vu comment un tel écoulement peut être créé dans un fluide quantique de polaritons. Nous allons maintenant faire la simulation numérique de ce système pour étudier le rayonnement de Hawking.

## 4 Rayonnement de Hawking

### 4.1 Truncated Wigner approximation

Pour résoudre numériquement l'équation non linéaire de Schrödinger pour un flux de polaritons, j'utilise la méthode numérique Truncated Wigner approximation (TWA)[12]. Cette approximation permet de décrire un flux de polaritons comme une distribution de quasi-probabilité de Wigner à l'aide d'un algorithme de Monte-Carlo. Le principe de base de la TWA à 1D est de générer d'abord un ensemble de champs classiques qui représente la fonction de quasi-distribution de Wigner de l'opérateur de densité du gaz initial à l'équilibre thermique. Par la suite, l'évolu-

tion de chacun des champs classique est définit par la GPE à un pas de temps périodiques. Pour réaliser cette méthode stochastique, on calcule les observables quantiques. Par ailleurs j'ai besoin de faire un très grand nombre de réalisations afin d'obtenir des statistiques cohérentes. En pratique, j'ai fait 1 million de réalisations puis moyenné. Enfin j'applique les formules de l'optique quantique afin de calculer  $g_1$  et  $g_2$  qui correspondent aux corrélations. On part donc de la description quantique des excitations de Bogoliubov couplée et de la relation de dispersion du champ classique. Afin de prendre en compte les effets quantiques, l'équation de mouvement est tronquée pour pouvoir la transformer en une équation différentielle partielle stochastique pour un champ classique  $\psi$ . L'émission à l'horizon peut être caractérisée par les corrélations qui sont quantifiées par la fonction de corrélation spatiale normalisée  $g$  :

$$g^{(2)}(x, x') = \frac{G^{(2)}(x, x')}{G^{(1)}(x)G^{(1)}(x')} \quad (8)$$

avec

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x, x') &= \left\langle \hat{\Psi}^\dagger(x)\hat{\Psi}^\dagger(x')\hat{\Psi}(x')\hat{\Psi}(x) \right\rangle \\ &= \langle \Psi^*(x)\Psi^*(x')\Psi(x')\Psi(x) \rangle_W - \frac{1}{2\Delta x}(1 + \delta_{x,x'}) \times \\ &\quad \left( \langle \Psi^*(x)\Psi(x) \rangle_W + \langle \Psi^*(x')\Psi(x') \rangle_W - \frac{1}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

et

$$G^{(1)}(x) = \left\langle \hat{\Psi}^\dagger(x)\hat{\Psi}(x) \right\rangle = \langle \Psi^*(x)\Psi(x) \rangle_W - \frac{1}{2\Delta x}. \quad (10)$$

Afin de comprendre le fonctionnement du code ainsi que la manière dont la TWA est utilisée, j'ai d'abord retranscrit un code Matlab préexistant en Python. J'ai, par la suite, utilisé un code Julia sur un des super ordinateurs, cluster de CPUs du laboratoire composé de 64 coeurs afin de pouvoir faire très rapidement  $10^5$  réalisations.

## 4.2 Mesure des corrélations

En raison de l'état d'équilibre du système, les excitations de Bogoliubov sont définies par des modes d'ondes planes. Leurs dynamiques est modifiées par la géométrie d'écoulement du fluide.

Comme l'horizon sépare les deux régions aux propriétés d'écoulement différentes (subsonique/-supersonique), la décomposition en ondes planes de part et d'autre de l'horizon est différente : en entrée uin, d1in, d2in ; en sortie uout, d1out, d2out ; comme on peut le voir sur la figure 7. L'effet Hawking résulte de leurs couplages à l'horizon, c'est à dire de la manière dont ils interagissent les uns avec les autres à l'horizon, pouvant être modélisés par le mélange d'opérateurs annihilations et créations du champ[10]. Ce couplage se traduit en l'apparition de corrélation entre modes d'entrée et de sortie : uout - d1out (Hawking-compagnon), uout - d2out (Hawking-partenaire) et d1out-d2out (compagnon-partenaire).

Si on regarde le bruit quantique de ces modes, on les modélise comme une assemblée de particules et non plus comme des ondes. On parle alors de paires d'excitations corrélés, ce qu'on étudiera par la suite.

Nous allons effectuer maintenant des calculs avec les paramètres de la cavité suivants  $\hbar\gamma = 0.047$  meV,  $\hbar g = 0.005$  meV $\mu\text{m}$ ,  $m^* = 3.10^{-5}m_e$  avec un défaut attractif. Dans l'expérience, la taille des défauts placés près de l'horizon n'est pas toujours bien contrôlée. Ici nous allons étudier l'influence de la taille du défaut sur l'écoulement et sur les corrélations de Hawking.

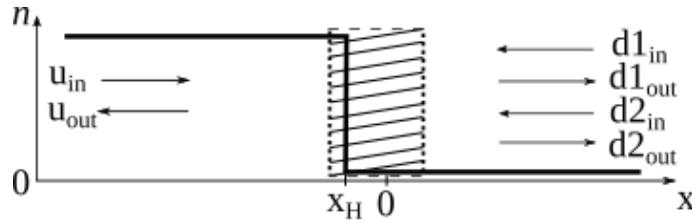


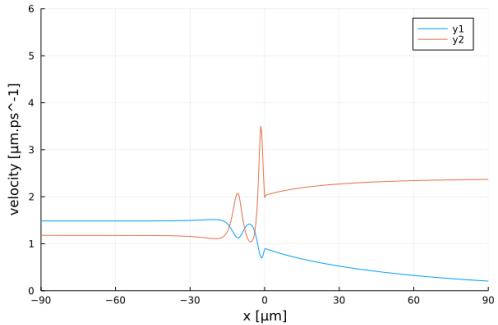
FIGURE 7 – Mode d'entrée et de sortie de part et d'autre de l'horizon

#### 4.3 Profil de densités et de vitesses

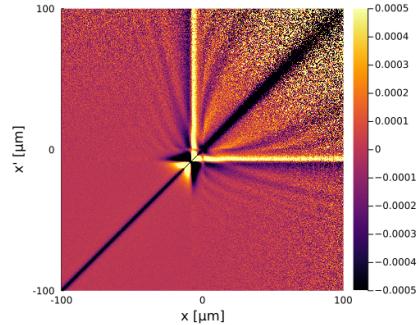
Toutes les configurations ne nous intéressent pas, je vais présenter ici celles qui ont un comportement typique. La densité du fluide qu'on peut voir dans la rangée de gauche de la figure 8 et 9 est fixée au point sonique. La taille du défaut augmente à chaque figure. La pompe s'arrête à 10  $\mu\text{m}$  du défaut qui est en  $x=0$ . On s'intéresse à la figure 8c, réalisée dans les conditions idéales. La densité du fluide diminue progressivement lorsqu'il n'y a pas de pompe dans la région aval. On remarque que la densité diminue très rapidement jusqu'au défaut où on peut voir un pic de vitesse très abrupte. Il s'agit de notre horizon. On a donc un pic et un creux en phase, il y a bien une conservation du flux du courant.

Dans la figure 8a le défaut est très petit, on voit une structure avec des motifs supplémentaires se former. Ces motifs correspondent à une accumulation de fluide en cloche qui correspondent aux solutions fondamentales de l'équation d'onde. Ici la solution de la fonction d'onde est décrite par la GPE, dont la solution fondamentale est appelée soliton. Les solitons ont une énergie et une forme constante au cours de la dispersion, en effet la non-linéarité compense la diffraction. On a trois horizons puisque les profils de densité et de vitesse se croisent en trois points. On a donc un horizon qui passe de subsonique à supersonique en  $x=-15$ , un deuxième horizon qui passe de supersonique à subsonique en  $x=-10$  et enfin un dernier horizon qui passe de subsonique à supersonique en  $x=0$ . Dans la figure 8e on double la taille de notre défaut. On voit apparaître également des structures supplémentaires dans notre motif. On a un seul point où les profils de densité et de vitesse se croisent, on va donc observer seulement un seul horizon. On augmente ensuite petit à petit la taille de notre défaut dans les figures suivantes. On voit notre pic, qui était très abrupte, s'affaisser et de nouvelles structures se former. On a toujours du fluide à l'intérieur de l'horizon. On remarque que même si on change de défaut est que la courbure est de plus en plus plate à l'horizon, on peut toujours l'apercevoir.

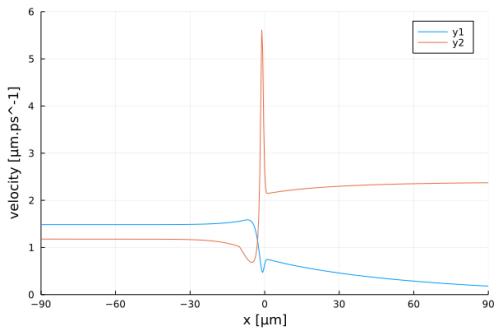
Pour la suite de mon stage il pourrait être intéressant d'aller chercher à partir de quelle taille de défaut, il n'y a plus de fluide derrière le défaut. Avec les petits défauts, les profils sont monotones de part et d'autre de l'horizon, on perd petit à petit la monotonie. On conserve toujours une variation rapide mais le pic de vitesse décroît puis s'affaisse.



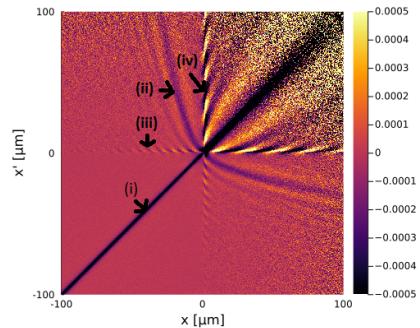
(a) Profil de vitesse pour un défaut de  $0.25\mu\text{m}$  de largeur



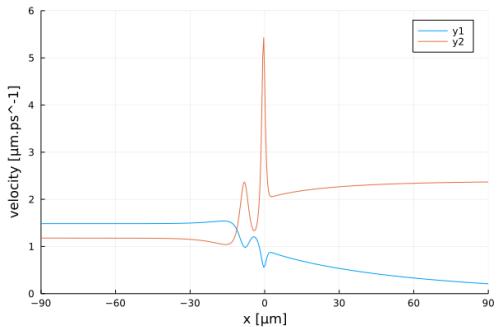
(b) Fonction de corrélation spatiale pour un défaut de  $0.25\mu\text{m}$  de largeur



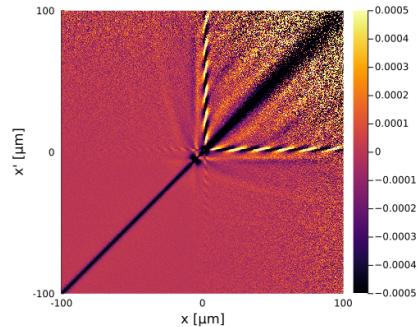
(c) Profil de vitesse pour un défaut de  $0.75\mu\text{m}$  de largeur



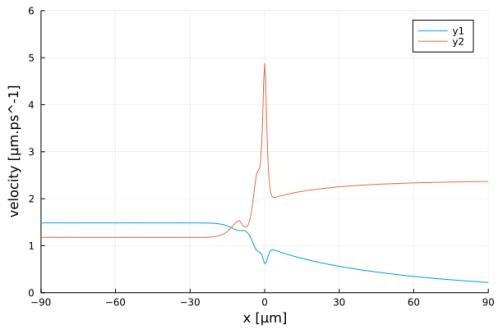
(d) Fonction de corrélation spatiale pour un défaut de  $0.75\mu\text{m}$  de largeur



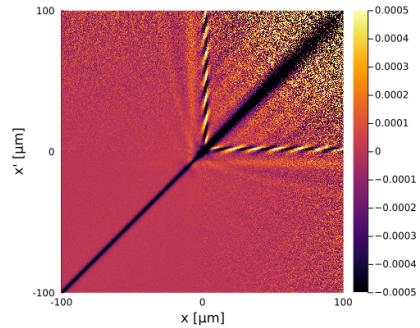
(e) Profil de vitesse pour un défaut de  $1.5\mu\text{m}$  de largeur



(f) Fonction de corrélation spatiale pour un défaut de  $1.5\mu\text{m}$  de largeur

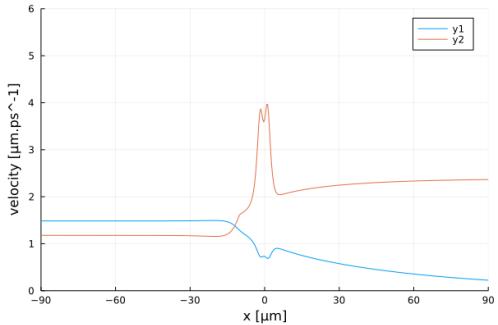


(g) Profil de vitesse pour un défaut de  $2\mu\text{m}$  de largeur

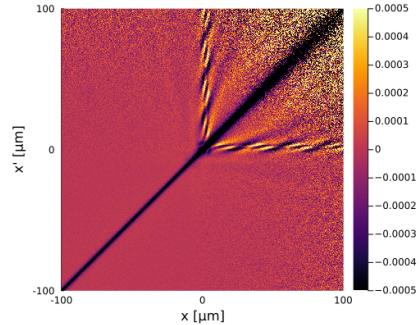


(h) Fonction de corrélation spatiale pour un défaut de  $2\mu\text{m}$  de largeur

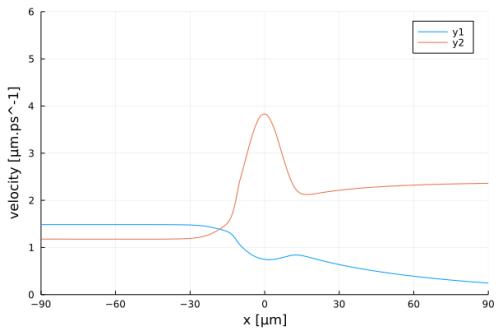
FIGURE 8 – Pour différentes tailles de défaut : A gauche ; Profil de vitesse, En bleu, vitesse des excitations cB ; en rouge, vitesse d'écoulement du fluide  $v$  fixée par  $k$ . Colonne de droite, fonction de corrélation spatiale  $g^{(2)}(x, x')$



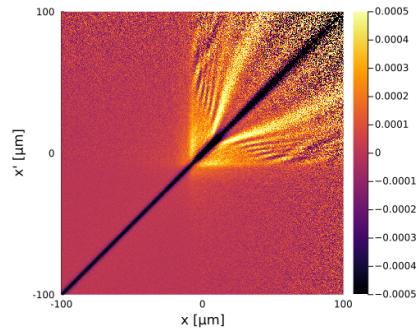
(a) Profil de vitesse pour un défaut de 3μm de largeur



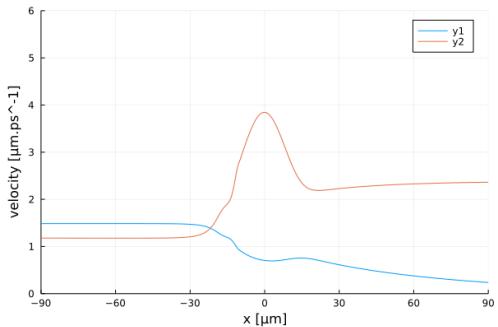
(b) Fonction de corrélation spatiale pour un défaut de 3μm de largeur



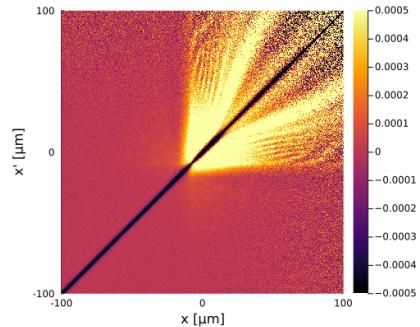
(c) Profil de vitesse pour un défaut de 8μm de largeur



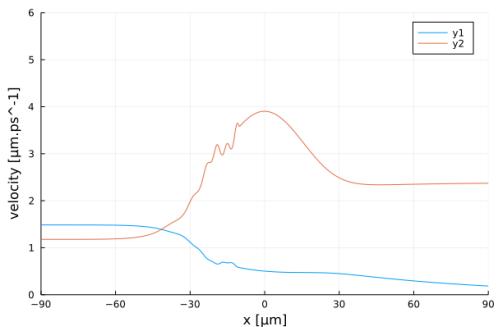
(d) Fonction de corrélation spatiale pour un défaut de 8μm de largeur



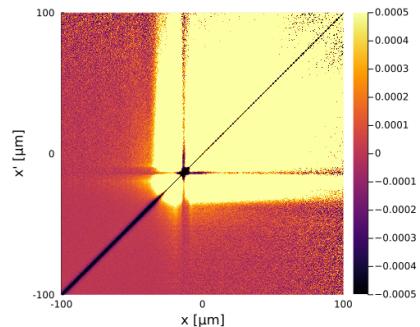
(e) Profil de vitesse pour un défaut de 10μm de largeur



(f) Fonction de corrélation spatiale pour un défaut de 10μm de largeur



(g) Profil de vitesse pour un défaut de 19.5μm de largeur



(h) Fonction de corrélation spatiale pour un défaut de 19.5μm de largeur

FIGURE 9 – Pour différentes tailles de défaut : A gauche ; Profil de vitesse, En bleu, vitesse des excitations cB ; en rouge, vitesse d'écoulement du fluide  $v$  fixée par  $k$ . Colonne de droite, fonction de corrélation spatiale  $g^{(2)}(x, x')$

#### 4.4 Corrélations spatiales

Les corrélations sont séparées en fonction des régions spatiales dans lesquelles les modes impliqués se propagent. Le premier quadrant en bas à gauche ( $x < 0, x' < 0$ ) correspond aux corrélations dans la région upstream. Les quadrants en haut à gauche et en bas à droite correspondent aux corrélations à travers l'horizon dans les régions upstream et downstream. Le dernier quadrant en haut à droite correspond aux corrélations dans la région downstream, soit à l'intérieur de l'horizon.

Sur nos figures, on peut noter des traces communes. Des anti-corrélations, le long de la diagonale  $x = x'$  diagonale, qui indiquent une anti-corrélation sous l'effet des interactions répulsives des polaritons sont représentées en (i). En (ii) on peut remarquer une trace en forme de moustache dans la région upstream-downstream. Cette trace correspond aux corrélations à travers l'horizon entre le rayonnement de Hawking et les modes dans la région upstream. En (iii) on peut observer des franges obliques localisées le long de la zone  $x = 0, x' > 0$ , on les observe également en symétrique en  $x' = 0, x > 0$ . On observe aussi une autre série de franges en (iv) en  $x = 0, x' < 0$ .

S'il y a une corrélation entre modes qui se propagent de part et d'autre de l'horizon, les ondes auront une vitesse de part et d'autre de l'horizon. Cette vitesse donnera un angle par rapport à la diagonale. Cet angle dépend de la vitesse relative des ondes. Si cette trace est strictement horizontale ou verticale, on note un angle de  $90^\circ$ , on a donc des corrélations localisées, ce qui signifie que la région est entièrement corrélée dans l'entièreté de l'espace. Si les traces sont courbées, elles correspondent à des corrélations délocalisées. Ce sont donc les corrélations délocalisées qui nous intéressent.

L'échelle des couleurs est calculée en fonction de l'amplitude de corrélation des fluides non-linéaires. Les corrélations en  $5.10^4$  signifient donc qu'on a une amplitude des corrélations  $5.10^4$  plus petite que les corrélations du fluide non-linéaire. On a un fluide auto-corrélé et ensuite les corrélations des petites fluctuations du vide qui sont donc 10000 fois plus faibles que celle du fluide. Les modes normaux d'oscillations correspondent à des modes propres. Lorsque le champ est excité, on obtient des modes normés du champ, ce sont des modes stationnaires. Ils ne vont pas chercher à se déexciter. Les modes quasi-normaux (QNMs) sont des modes non-stationnaires qui, eux, veulent se déexciter. Ils correspondent aux modes de relaxation d'un trou noir perturbé. Si on laisse une particule massive tomber sur un trou noir, celle-ci va vibrer (comme une cloche) : une partie de la masse de la particule fera grossir le trou noir et une partie sera relâchée par vibration (relaxation) dans les QNMs (ondes gravitationnelles). Lorsqu'ils sont excités, ils vont immédiatement chercher à se déexciter en relâchant de l'énergie en relation de couplage.

Sur la figure 8b on peut voir, comme on s'y attendait, deux autres horizons représentés par la croix noir au centre.

Sur la figure 8d, on voit les franges apparaître en iii et iv, Ces traces indiquent des corrélations entre les excitations dans un mode spatiallement localisé près de l'horizon et les ondes se propageant dans les régions upstream (iv) ou downstream (iii). Ces modulations sont des franges d'interférence dues à l'excitation des QNMs par le vide du champ acoustique. On observe également des traces de corrélations positives qui correspondent au corrélations Hawking-partenaire et Hawking-témoin, proche de la moustache. Elles ont leurs origines dans les bandes horizontales et verticales de QNMs, s'intensifie, c'est la marque de la radiation d'Hawking.

Dans le cadran en haut à droite, on remarque les corrélations à l'intérieur de l'horizon. On discerne une structure en éventail due à la dispersion et aussi à l'émission des QNMs qui ne viennent pas de  $x, x'=0$  mais des bandes des QNMs représentées en iii et iv. En fait, quel que soit le cadran, on voit que les QNMs sont une superposition linéaire d'excitations coincées à  $x, x'=0$  et d'excitations qui se propagent.

Lorsque le défaut augmente, on observe de moins en moins de corrélations délocalisées figure 8f, puis elles disparaissent totalement sur les figures 8h,9b.... Par contre, on distingue de plus en plus de structures dans les modes quasi-normaux à l'intérieur de l'horizon, mais on n'en a plus à

l'extérieur. On perd toute corrélation non locale entre l'intérieur et l'extérieur de l'horizon. On a alors plus de corrélations proche de la moustache, on a donc plus de traces de corrélations Hawking-partenaire et Hawking-témoin, et donc du rayonnement d'Hawking. En revanche à l'extérieur, on observe une nouvelle dynamique, avec de nouvelles structures jusqu'à observer une saturation. Il pourrait être intéressant pour la suite de mon stage d'étudier plus particulièrement cette nouvelle dynamique.

La trace en forme de moustache qui correspond aux rayonnements de Hawking, est encore visible jusqu'à ce que le défaut dépasse les  $2 \mu\text{m}$ , après on perd le rayonnement de Hawking. Au fur et à mesure qu'on augmente la taille du défaut les bandes de corrélations des QLMs se propagent de plus en plus à l'horizon et deviennent de plus en plus importantes vis à vis des auto-corrélations du vide comme on peut le noter dans le quadrant en haut à gauche figure 9d, 9f. En effet, ces fluctuations deviennent de plus en plus importantes dû au fait qu'on a de moins en moins de fluide à l'intérieur de l'horizon.

On perd donc petit à petit le rayonnement d'Hawking mais on gagne des structures différentes qui se développent à l'intérieur de l'horizon. Il serait intéressant d'étudier ces structures pour comprendre la physique à l'intérieur de l'horizon dans le système analogue.

D'après nos observations on peut conclure que pour chercher à trouver le meilleur régime pour avoir du rayonnement de Hawking, cela implique d'avoir de la densité après le défaut pour supporter la propagation des ondes à l'intérieur de l'horizon.

Il faudra donc prendre un tout petit défaut pour avoir un grand signal de Hawking. On peut donc conseiller à l'expérimentateur de prendre un défaut proche de  $0.75 \mu\text{m}$  si la diffraction optique le permet et sinon de s'en approcher le plus possible .

## 5 Conclusion

Au cours de mon stage, j'ai pu me familiariser avec de nouvelles notions de l'optique quantique comme les polaritons, les fluides de lumière, l'équation de Gross-Pitaevskii ou encore les excitations de Bogolubov. J'ai également pu utiliser la gravité analogue afin d'étudier le rayonnement de Hawking en utilisant des fluides quantiques de lumière.

Je suis actuellement en train de réaliser de nouvelles simulations en changeant certains paramètres de notre dispositif, en rapprochant le défaut de la pompe ou en prenant un défaut répulsif plutôt qu'attractif.

De manière plus générale, ce stage complète et approfondit mes connaissances théoriques comme pratiques sur le champ de recherche de l'optique quantique. Il me permet d'améliorer sensiblement mes compétences en recherche académique : constitution d'une bibliographie, présentation orale en français et en anglais, optimisation et développement d'algorithmes. Enfin ce stage au LKB, m'a appris à travailler dans un laboratoire au sein d'une équipe de manière plus rapide et efficace pour la communauté.

Je remercie mon maître de stage, Maxime Jacquet, ainsi que l'ensemble de l'équipe pour leurs conseils avisés et l'accueil réservé. Ce stage, très enrichissant et stimulant, confirme mon envie de poursuivre dans cette voie. Je souhaite en effet poursuivre, après mon Master 2, avec une thèse en optique quantique mais, cette fois ci, je souhaiterai m'orienter vers une thèse à la fois théorique et expérimentale. En effet, l'échange avec les expérimentateurs du groupe m'a mieux permis de comprendre la physique en jeu. J'espère vivement dans ce cadre pouvoir coupler la théorie et l'expérimentale.

Concernant la suite de mon stage, il pourrait être particulièrement intéressant de chercher à comprendre la dynamique observée à l'extérieur de l'horizon lorsqu'on a un grand défaut de plus de  $8 \mu\text{m}$ . Je pourrais également m'intéresser aux intrications quantiques dans un trou noir ou chercher à passer le code 1D des corrélations spatiales à un code 2D.

$$L_{cell} = 7.5\text{cm} \quad (11)$$

$$\omega_{ramp} = 10\text{Hz} \quad (12)$$

$$P_{laser} = 150\text{mW} \quad (13)$$

$$P_{laser} = 300\text{mW} \quad (14)$$

## Références

- [1] S. W. Hawking, “Black hole explosions?” *Nature*, vol. 248, no. 5443, pp. 30–31, Mar. 1974. [Online]. Available : <https://www.nature.com/articles/248030a0>
- [2] W. G. Unruh, “Experimental Black-Hole Evaporation?” *Physical Review Letters*, vol. 46, no. 21, pp. 1351–1353, May 1981. [Online]. Available : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.46.1351>
- [3] I. Carusotto, S. Fagnocchi, A. Recati, R. Balbinot, and A. Fabbri, “Numerical observation of Hawking radiation from acoustic black holes in atomic Bose–Einstein condensates,” *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 10, p. 103001, Oct. 2008. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/10/10/103001>
- [4] D. D. Solnyshkov, H. Flayac, and G. Malpuech, “Black holes and wormholes in spinor polariton condensates,” *Physical Review B*, vol. 84, no. 23, p. 233405, Dec. 2011, publisher : American Physical Society. [Online]. Available : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.233405>
- [5] D. Gerace and I. Carusotto, “Analog Hawking radiation from an acoustic black hole in a flowing polariton superfluid,” *Physical Review B*, vol. 86, no. 14, p. 144505, Oct. 2012, tex.ids : gerace\_analog\_2012.tex.numPages : 12.tex.publisher : American Physical Society.
- [6] H. Nguyen, D. Gerace, I. Carusotto, D. Sanvitto, E. Galopin, A. Lemaître, I. Sagnes, J. Bloch, and A. Amo, “Acoustic Black Hole in a Stationary Hydrodynamic Flow of Microcavity Polaritons,” *Physical Review Letters*, vol. 114, no. 3, p. 036402, Jan. 2015. [Online]. Available : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.036402>
- [7] P. Grišins, H. S. Nguyen, J. Bloch, A. Amo, and I. Carusotto, “Theoretical study of stimulated and spontaneous Hawking effects from an acoustic black hole in a hydrodynamically flowing fluid of light,” *Physical Review B*, vol. 94, no. 14, p. 144518, Oct. 2016. [Online]. Available : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.94.144518>
- [8] M. J. Jacquet, M. Joly, F. Claude, L. Giacomelli, E. Giacobino, Q. Glorieux, I. Carusotto, and A. Bramati, “Enhanced Hawking radiation in an out-of-equilibrium quantum fluid,” *arXiv :2201.02038 [cond-mat, physics :gr-qc, physics :quant-ph]*, Jan. 2022, arXiv : 2201.02038. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/2201.02038>
- [9] M. J. Jacquet, T. Boulier, F. Claude, A. Maître, E. Cancellieri, C. Adrados, A. Amo, S. Pigeon, Q. Glorieux, A. Bramati, and E. Giacobino, “Polariton fluids for analogue gravity physics,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 378, no. 2177, p. 20190225, Aug. 2020. [Online]. Available : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2019.0225>
- [10] M. J. Jacquet, L. Giacomelli, Q. Valnais, M. Joly, F. Claude, E. Giacobino, Q. Glorieux, I. Carusotto, and A. Bramati, “Quantum vacuum excitation of a quasi-normal mode in an analog model of black hole spacetime,” *arXiv :2110.14452 [gr-qc, physics :quant-ph]*, Mar. 2022, arXiv : 2110.14452. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/2110.14452>
- [11] Q. Fontaine, T. Bienaimé, S. Pigeon, E. Giacobino, A. Bramati, and Q. Glorieux, “Observation of the Bogoliubov dispersion relation in a fluid of light,” *Physical Review Letters*, vol. 121, no. 18, Oct. 2018, tex.ids : fontaine2018Observation, fontaineObservationBogoliubovDispersion2018.
- [12] I. Carusotto and C. Ciuti, “Spontaneous microcavity-polariton coherence across the parametric threshold : Quantum Monte Carlo studies,” *Physical Review B*, vol. 72, no. 12, p. 125335, Sep. 2005, tex.ids : carusotto2005Spontaneous, carusottoSpontaneousMicrocavityPolaritonCoherence2005a publisher : American Physical Society. [Online]. Available : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.72.125335>

## 6 annexe

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + g |\Psi|^2 \Psi \quad n = (\hbar/m) \frac{1}{2\pi} \frac{\Psi \partial \Psi / i}{\partial x}$$

on remplace  $\Psi$  par sa valeur

$$i \partial \sqrt{\rho} e^{i\theta} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho} e^{i\theta}}{\partial x^2} + g |\sqrt{\rho} e^{i\theta}|^2 \sqrt{\rho} e^{i\theta}$$

$$i (\sqrt{\rho} e^{i\theta} + i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial^2 (\sqrt{\rho} e^{i\theta}) / \partial x^2 + i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho} + g \rho \sqrt{\rho} e^{i\theta}$$

$$i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial^2 (\sqrt{\rho} e^{i\theta}) / \partial x^2 + i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho} + g \rho \sqrt{\rho} e^{i\theta}$$

$$\sqrt{\rho} e^{i\theta} = i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho} + g \rho \sqrt{\rho} e^{i\theta}$$

on pose  $\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$

$$\partial (i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho}) = \nabla (i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho})$$

$$= i (\Psi' \partial x + \Psi'' \partial^2 x) \quad \Psi' = \partial \sqrt{\rho} e^{i\theta} / \partial x = \sqrt{\rho} e^{i\theta} + \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho}$$

$$= i ((\partial \sqrt{\rho} e^{i\theta} / \partial x) + \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho}) \Psi' + \partial^2 \Psi' / \partial x^2$$

$$= i \partial \sqrt{\rho} e^{i\theta} / \partial x + i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho} + i \partial^2 \sqrt{\rho} e^{i\theta} / \partial x^2$$

$$i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho} = -\frac{1}{2} (i \partial \sqrt{\rho} e^{i\theta} / \partial x + \frac{g}{m} \sqrt{\rho} e^{i\theta} + i \partial \sqrt{\rho} e^{i\theta} / \partial x - \frac{g}{m} \sqrt{\rho} e^{i\theta} + i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho}) + g \rho \sqrt{\rho} e^{i\theta}$$

Partie imaginaire:

$$i (\partial \sqrt{\rho} e^{i\theta} / \partial x) = -\frac{1}{2} i \partial \sqrt{\rho} e^{i\theta} / \partial x - \frac{1}{2} i \sqrt{\rho} e^{i\theta} - \frac{i m \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho}}{2m}$$

$$\partial_x \sqrt{\rho} = -i \sqrt{\rho} \partial_x \theta - \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x} \sqrt{\rho}$$

$$\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x} = -i \sqrt{\rho} \partial_x \theta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \sqrt{\rho}$$

$$\partial_x \sqrt{\rho} + (i \sqrt{\rho} \partial_x \theta - \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x} \sqrt{\rho}) = 0$$

$$\text{on pose } n = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$$

$$\boxed{\partial_x \theta + \nabla \cdot (\rho \nabla \theta) = 0}$$

Partie réelle:

$$-i \partial \theta / \partial x \sqrt{\rho} = -\frac{g}{m} \sqrt{\rho} \partial_x \theta + \frac{m}{2m} \sqrt{\rho} e^{i\theta} + g \rho \sqrt{\rho} e^{i\theta}$$

$$-\rho \Delta \theta = -\frac{g}{m} \partial_x^2 \theta + \frac{m}{2m} \partial_x^2 \theta + g \rho \sqrt{\rho}$$

$$\boxed{\Delta \theta + \frac{m}{2m} \nabla^2 \theta + g \rho - \frac{g}{m} \Delta \rho / \rho = 0}$$