

Le problème du voyageur de commerce

SALL Amadou

PIGNÉ Quentin

14 novembre 2014

1 Structure de données

Nous avons une structure de données modélisant les graphes. Cette structure utilise une liste de sommets, une liste d'arcs et la fonction coût associé au graphe sous forme de matrice. Cette structure est nécessaire juste pour afficher les graphes et vérifier leur complétude. Tous les algorithmes que nous avons implémenté n'utilisent que la matrice de distance qui à elle seule définit le graphe.

2 Algorithmes

Floyd-Warshall

$d^{k+1}(i, j)$ est le plus court chemin de i à j n'utilisant que les sommets $\{1, \dots, k+1\}$ comme sommet intermédiaires. Dès lors, il n'y a que deux cas possibles :

on passe par le sommet $k+1$: dans ce cas, il faut aller de i à $k+1$ de façon optimale (coût $d^k(i, k+1)$) puis quitter $k+1$ pour aller jusqu'à j de façon optimale aussi (coût $d^k(k+1, j)$)

on ne passe pas par le sommet $k+1$: dans ce cas on a toujours un coût de $d^k(i, j)$

Ainsi on a la formule :

$$d^{k+1}(i, j) = d^k(i, k+1) + d^k(k+1, j)$$

Nous fallant calculer la matrice des $d^n(i, j)$, le coeur de l'algorithme de Floyd-Warshall s'écrit :

```
for  $k \leftarrow 1, n$  do
  for  $i \leftarrow 1, n$  do
    for  $j \leftarrow 1, n$  do
       $d^{k+1}(i, j) = d^k(i, k+1) + d^k(k+1, j)$ 
    end for
  end for
end for
```

Ainsi l'algorithme de Floyd-Warshall a un coût de $O(n^3)$

Énumération

Cette algorithme a un coût en $O(n!)$. En effet lors à l'étape k on a $k-1$ choix. Pour faire donc les n étapes, on a un coût de $(n-1)!$. On a aussi n possibilités pour le choix d'un noeud de départ. La figure 1 montre que le temps d'exécution de L'algorithme d'énumération est $O(n!)$ Le taille maximale qu'on a pu résoudre est $n = 10$

Temps d'exécution de l'algo énumération en fonction de la taille du graphe

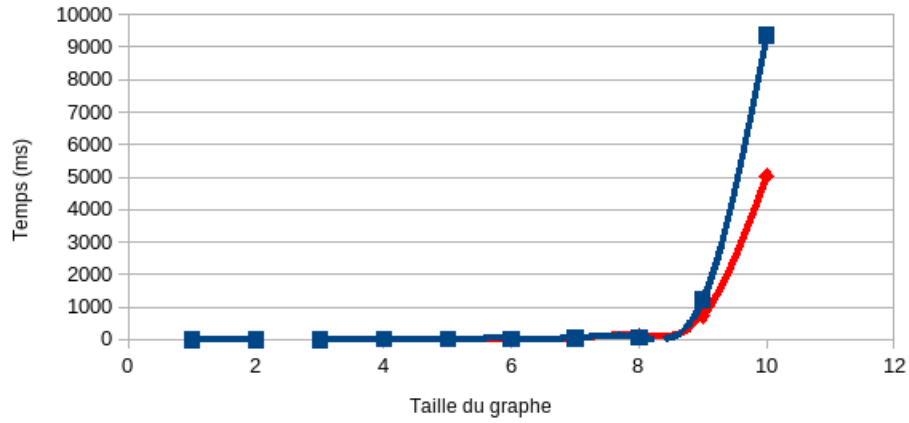


FIGURE 1 – Analyse de performances pour Énumération

Algorithme glouton

Il y a n possibilités pour le choix du sommets de départ. Une fois le sommet de départ choisi (nommons le i) on choisit le sommet qui minimise la distance. A l'étape k on doit choisir entre $k - 1$ sommets restants donc $k - 1$ valeurs possibles, ce qui fait un coût de $k - 1$. Au total on a $O(\sum_{k=1}^{n-1} k)$ opérations. Ainsi l'algorithme glouton a un coût en $O(n^2)$

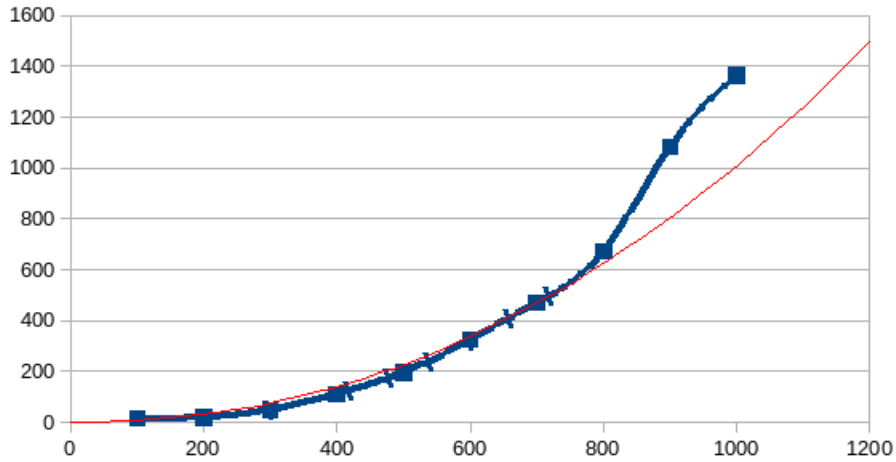


FIGURE 2 – Analyse de performances pour L'algorithme glouton

Algorithme de recherche locale

Pour un arc donné, disons (u, v) , le nombre d'arcs à tester est $n - 4$. On a $n - 1$ possibilités pour le choix de (u, v) . Le coût de la recherche locale est donc $O(n^2)$. L'amélioration apportée par le recherche locale peut atteindre plus de 50%. Cependant on itère la recherche locale tant que c'est possible et rien

ne ne garantit que, dans le pire cas, on a pas un coût exponentiel. En tout cas, lorsque nous avons fait

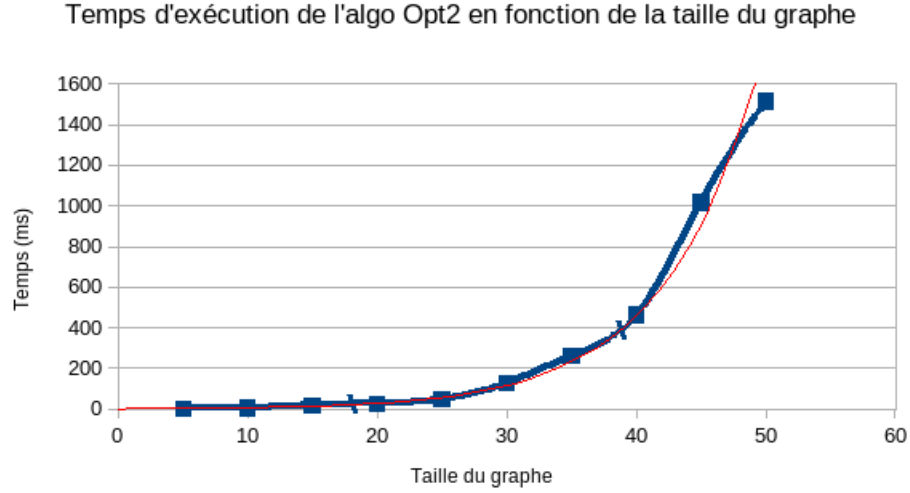


FIGURE 3 – Analyse de performances pour 2-OPT

tourné l'algorithme, nous avons eu un coût exponentiel (voir figure 3). Sans doute sommes-nous tombés dans le pire cas.

Programmation dynamique

Dans le chemin correspondant à $C(S, j)$ le prédécesseur i_0 de j est l'un des $|S| - 1$ éléments de $\{S\} \setminus \{j\}$. Il faut arriver jusqu'à i_0 en passant par le plus court chemin utilisant une et une seule fois les sommets de $\{S\} \setminus \{j\}$. Ainsi le coût est $C(\{S\} \setminus \{j\}, i_0) + l_{(i_0, j)}$. Le i_0 correspondant est celui qui minimise la précédente somme car sinon on serait passé par autre « prédécesseur potentiel » de j . Ainsi on a :

$$C(S, j) = \min_{i \in S, i \neq j} C(\{S\} \setminus \{j\}, i) + l_{(i, j)}$$

La solution au problème est $C(E, n)$. Le nombre de sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ est 2^n . Chacun de ces sous-ensembles contient $O(n)$ sommets. Pour un sommet j de S , le calcul de $C(S, j)$ nécessite $O(n)$ opérations.

Ainsi la programmation dynamique a un coût en $O(n^2 2^n)$

l'algorithme de programmation dynamique peut s'écrire :

```

for chaque sous-ensemble  $S$  commençant par 1 do
  if  $|S| = 2$  then
    for  $i$  de 1 à  $n$  do
       $C(S, i) \leftarrow l_{(1, i)}$ 
    end for
  else
    for  $i$  de 1 à  $n$  do
      for tous les  $k \notin S - \{1\}$  do
         $C(S, i) \leftarrow \min \{ C(S - \{k\}, k) + l_{(k, i)} \}$ 
      end for
    end for
  end if
end for
retourner  $\min \{ C(S, i) + l_{(1, i)} \}$  avec  $|S| = (\text{nombre de sommets} - 1)$ 

```

3 Comparaison des algorithmes

Avantage de la programmation dynamique sur l'énumération : les sous-chemins du circuit minimal sont aussi minimaux, on ne teste donc pas tous les circuits possibles. La complexité passe de $O(n!)$ à $O(n^2 2^n)$

Avantage de la combinaison glouton + recherche locale : L'algorithme glouton permet de trouver des solutions en des temps raisonnables. Cependant la valeur trouvée n'est pas forcément l'optimum. Appliquer l'algorithme de recherche locale permet de gagner très nettement en précision (50%)

Glouton + recherche locale vs programmation dynamique : La programmation dynamique est beaucoup plus précise mais le coût en mémoire est forcément plus élevé. Juste le stockage de la matrice des sous-problèmes coûte $O(n^2 2^n)$