

LEPL1502 (P2) - RAPPORT DE LABORATOIRE L5

Bobine et amplificateur

1 Objectifs

L'objectif de ce laboratoire est de comprendre et d'analyser l'interaction bobine-aimant du circuit. Cette interaction provoque une tension induite que l'on va nommer V_L . C'est cette tension que on cherche à caractériser.

Si l'on a assez de temps, il est aussi envisagé de commencer à tester chaque partie du circuit afin de pouvoir les mettre ensemble par la suite.

Circuit WeeMove

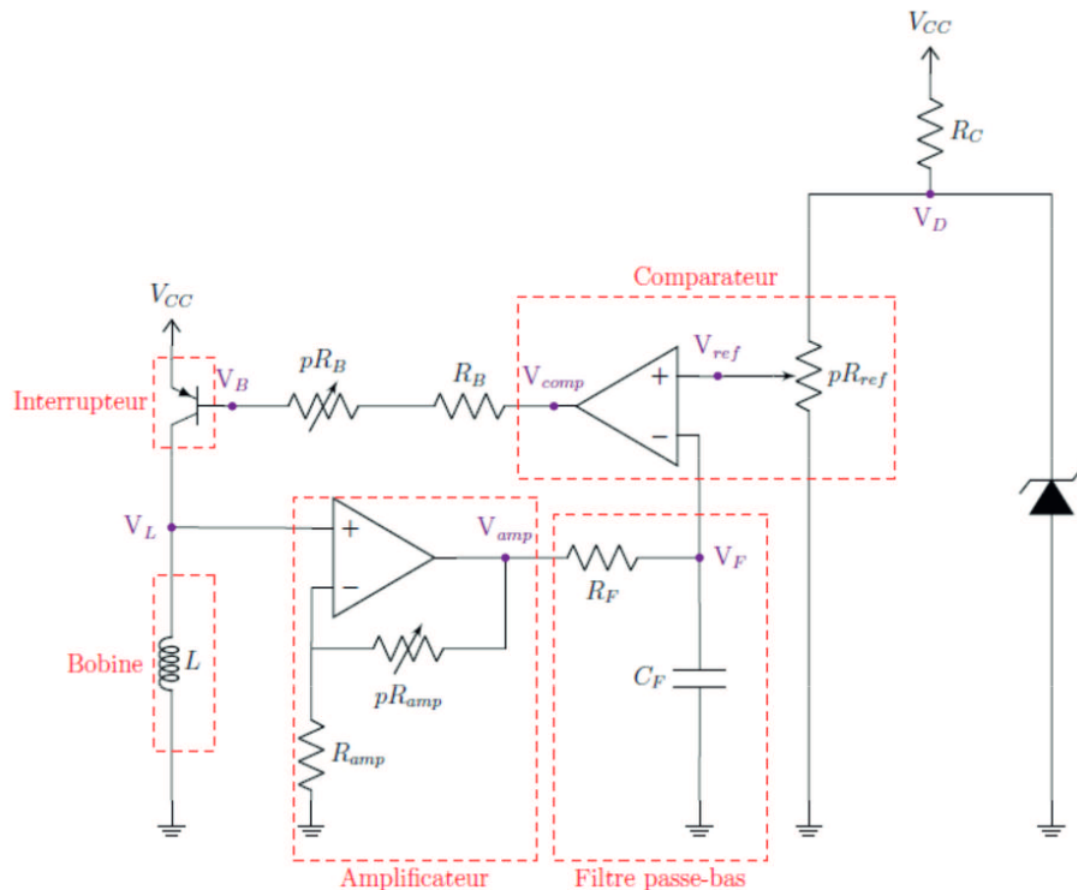


FIGURE 1 – Circuit électrique du Projet P2 et sections étudiées durant ce laboratoire

On visualise donc bien la tension V_L juste aussi de la bobine L ainsi que l'amplificateur.

2 Interaction bobine-aimant

2.1 Rappels théorique

Tension V_L

On nomme V_L la tension induite par la variation de flux magnétique ϕ engendré par le passage de l'aimant au dessus de la bobine. En effet, une bobine crée un certain champ autour d'elle et, par la loi de Lenz-Faraday, on sait qu'une modification de flux engendrera une force électromagnétique, et donc une certaine tension induite V_L . Cette tension peut être décrite via l'équation suivante :

$$V_L = -N \frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -N \frac{\partial}{\partial t} \int_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

où N est le nombre spire de la bobine L , ϕ_B le flux magnétique \vec{B} , $A(t)$ l'aire de l'aimant de l'aimant qui passe au dessus de la bobine (il dépend donc de la position de ce dernier, et ainsi du temps), \vec{B} le champ magnétique généré par l'aimant et \vec{S} un élément infinitésimal de surface.

On remarque que cette équation dépend de deux paramètres importants :

1. Le *temps*. En effet, puisque l'on examine une variation de flux et ce, par rapport au temps ($\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$), il est logique que chaque passage de l'aimant provoque une certaine tension V_L dépendante du temps. Cela est induit par le changement de d'air de l'aimant prise en compte au cours du temps. On se pose alors la question suivante : *Quel est l'influence de la vitesse d'oscillation de l'aimant sur la tension V_L ?*
2. La *distance* entre l'aimant et la bobine. $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{S}$ introduit la notion du champ \vec{B} , et ainsi des lignes de champ. Or, plus l'aimant sera distant de la bobine, plus ses lignes de champs auront tendance à diverger (et le champ 'vu' par la bobine sera moins intense). La question qui se pose donc ici est : *Quel est l'influence de la distance aimant-bobine sur la tension V_L ?*

Répulsion de l'aimant

Le circuit décrit à la figure 1 va se charger de détecter le passage de l'aimant et d'envoyer suffisamment de courant dans la bobine L pour pouvoir le repousser. Cette force de répulsion appliquée à l'aimant, nommée F , peut se calculer grâce à la force de Laplace. En effet, on sait que :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (2)$$

Avec I le courant passant dans la bobine, $d\vec{l}$ un petit élément de longueur de fil et \vec{B} le champ magnétique de l'aimant.

Étant donnée qu'il est nécessaire d'intégrer sur l'ensemble du contour de l'aimant, cela pose certains problèmes d'intégration en deux dimensions que nous ne désirons pas avoir, pour esquiver intelligemment le problème, il est pertinent de passer du repère cartésien dans lequel nous sommes à un repère cylindrique. Ce faisant, la composante infinitésimal de longueur $d\vec{l}$, peut maintenant s'exprimer comme le produit du rayon du cylindre r qui est ici constant et de la composante infinitésimale d'angle $d\vec{\theta}$

Il est désormais temps de passer au produit vectoriel, l'amplitude du résultat de ce produit vectoriel peut également être représenté sous la forme de scalaire. En effet, le champ et l'intensité électrique étant constants et le sinus de l'angle entre les deux valant 1, l'angle faisant 90° , on peut simplement réécrire le produit vectoriel comme ceci.

$$d\vec{F} = IB d\vec{\theta} r (\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}) \quad (3)$$

La séparation en sinus et cosinus servant à séparer les valeurs de la force en \hat{x} et en \hat{y} .

Pour trouver la force final, il va falloir intégrer l'expression ci-dessus. En substituant les constantes à l'intégral, soient I, B et r , et en retirant la fonction sinus, fonction impaire dont l'intégral symétrique est systématiquement nulle, l'intégral simplifiée devient facile à résoudre.

$$\vec{F} = IBr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(\theta) d\theta = 2IBr \sin(\alpha) \quad (4)$$

Le champ magnétique de l'aimant \vec{B}

Cherchons maintenant l'expression du champ magnétique \vec{B} généré par l'aimant en un point $P(x, y, z)$ quelconque de l'espace. On remarque que ce point de l'espace est exprimé dans des coordonnées cartésiennes, ce qui facilitera grandement les calculs dans un premier temps. Pour résoudre ce problème, on considère qu'un aimant est une juxtaposition de dipôles alignés.

Considérons dans un premier temps le champ magnétique d'un simple dipôle comme illustré sur la figure suivante.

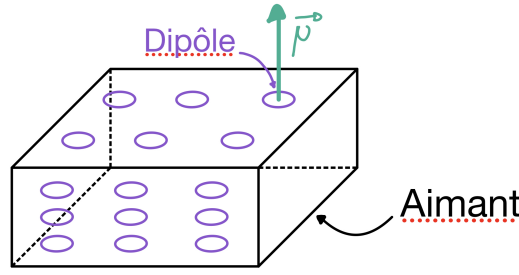


FIGURE 2 – Représentation d'un dipôle au sein d'un aimant

On connaît, via la loi de Biot et Savart, la valeur du champ autour de l'axe du dipôle, il vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Avec μ_0 la perméabilité du vide égale à $4\pi \times 10^{-7} Tm/A$, I le courant ..., R , le rayon autour de l'axe du dipôle, x ..., \hat{x} ... et μ (ou M) le moment magnétique valant $I\pi R^2 S$ (avec S la section de ...).

Dans un deuxième temps, il faut trouver l'équation de ce champ B pour un point quelconque P de l'espace à la position $r\hat{r}$ (le vecteur position du point P). En appliquant la loi de Biot et Savart en 3 dimensions, on trouve l'expression suivante :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^3} (3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{\mu}) \quad (6)$$

Plaçons maintenant ce dipôle au centre de l'aimant (et au centre du repère cartésien) et localisons précisément le point P dans le repère :

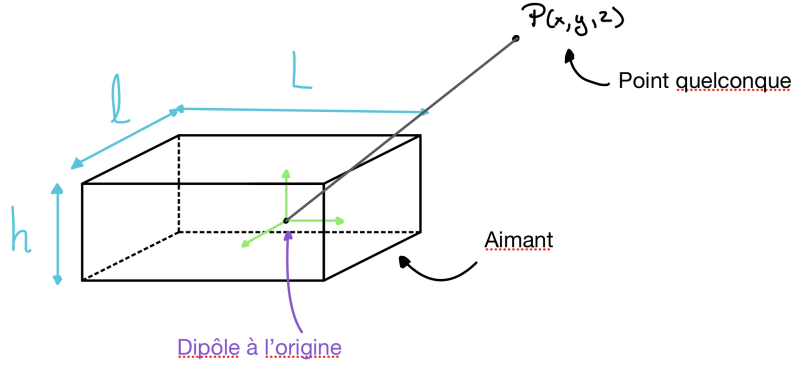


FIGURE 3 – Dipôle au centre d'un aimant rectangulaire

On peut alors exprimer le point P comme étant $P(x, y, z)$ et donc ré-exprimer les vecteurs \vec{r} et \hat{r} en fonction des coordonnées de P . En remplaçant par ces valeurs dans l'équation du champ magnétique B , on obtient :

$$B(x, y, z) = \frac{\mu_0 \mu_B}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{3z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{r} - \hat{z} \quad (7)$$

Dans un troisième temps, il faut déplacer le dipôle partout à l'intérieur de l'aimant. Pour cela, on ré-exprime une nouvelle fois les vecteurs \vec{r} et \hat{r} pour trouver les expressions suivantes :

$$\vec{r} = (x - x_m)\hat{x} + (y - y_m)\hat{y} + (z - z_m)\hat{z} \quad (8)$$

$$\hat{r} = \frac{(x - x_m)\hat{x} + (y - y_m)\hat{y} + (z - z_m)\hat{z}}{\sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2}} \quad (9)$$

Avec (x, y, m) les coordonnées du point P et (x_m, y_m, z_m) les coordonnées d'un dipôle magnétique. On remarque que $-l/2 \leq x_m \leq l/2$, $-L/2 \leq y_m \leq L/2$ et $-h/2 \leq z_m \leq h/2$. Une fois cela fait, on peut sommer la contribution de tout ces petits dipôles, ce qui revient à intégrer l'expression de B pour un dipôle m . On trouve donc :

$$B(x, y, z) = \int_{x_m=-l/2}^{l/2} \int_{y_m=-L/2}^{L/2} \int_{z_m=-h/2}^{h/2} B_m \mu_B \eta \, dz_m dy_m dx_m \quad (10)$$

Où μ_B est le magnéton de Bohr d'une valeur de $9.27400949 \times 10^{-24} J/T$ et η le nombre de magnéton pour un certain volume. Cette dernière valeur est inconnue mais, puisqu'il ne s'agit que d'une constante, sa valeur peut-être déterminée par expérimentation.

Finalement, il ne reste plus qu'à transformer l'aimant carré en un aimant rond en changeant le couple de coordonnées cartésiennes d'un dipôle (x_m, y_m, z_m) par des coordonnées dans un repère cylindrique $(\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), y_m)$ avec $0 \leq \rho \leq R$ (le rayon de l'aimant) et $(0, \phi, 2\pi)$.

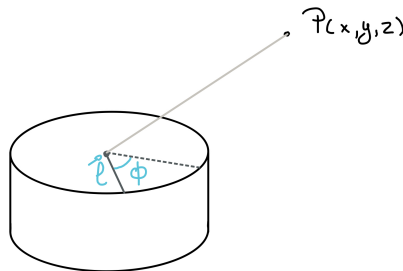


FIGURE 4 – Aimant de forme cylindrique

On obtient ainsi l'expression suivante pour le champ magnétique B en un point $P(x, y, z)$:

$$B(x, y, z) = \mu_B \eta \int_{\rho=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z_m=-h/2}^{h/2} B_m dz_m d\phi d\rho \quad (11)$$

où

$$B_m(x, y, z) \Big|_{\rho, \phi, z_m} = \frac{\mu_0 \mu_B}{2\pi(x - \rho \cos \phi)^2 + (y - \rho \sin \phi)^2 + (z - z_m)^2} \left(\left(\frac{3(z - z_m)}{\sqrt{(x - \rho \cos \phi)^2 + (y - \rho \sin \phi)^2 + (z - z_m)^2}} \right) \left(\frac{(x - \rho \cos \phi)\hat{x} + (y - \rho \sin \phi)\hat{y} + (z - z_m)\hat{z}}{\sqrt{(x - \rho \cos \phi)^2 + (y - \rho \sin \phi)^2 + (z - z_m)^2}} \right) - \hat{z} \right) \quad (12)$$

2.2 Méthodes de mesure

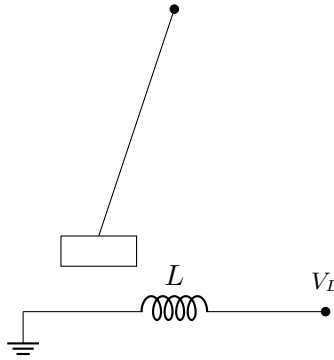


FIGURE 5 – Schéma de mesure de la tension V_L

Afin de mesurer la tension induite par le passage de l'aimant au dessus de la bobine L , nous allons faire passer l'aimant au dessus de celle-ci comme indiqué sur la figure ci-dessus. Nous mesurons ensuite la tension induite V_L . Durant l'expérience, il peut être intéressant de réaliser les modifications suivantes :

- Faire varier la fréquence de balancement.
- Faire varier la distance bobine - aimant.

2.3 Compte rendu des mesures (brutes)

Lorsque l'aimant passe au dessus de la bobine, on peut observer la courbe de tension V_L comme on le voit à la figure 6. Lorsque l'on inverse les deux bornes + et - de la bobine, ou que l'on retourne l'aimant, la courbe devient celle de la figure 7.

Pour cette expérience, l'aimant était lâché à une hauteur d'environ 20cm au dessus de la bobine, puis le mouvement pendulaire s'occupait de la faire passer devant la bobine (comme sur la figure 5). En réalisant plusieurs fois l'expérience, on remarque que plus la vitesse de passage est élevée, plus les deux tensions de pics seront élevées et la courbe "resserrée". Tandis que si l'aimant passe plus loin de la bobine, la tension V_L sera plus faible. On remarque qu'au delà de quelques centimètre, plus aucune tension n'est engendrée.

2.4 Interprétation des résultats, discussion et conclusion

D'abord, essayons de comprendre pourquoi nous obtenons ce type de courbe. On sait que une approximation de la tension V_L nous est donné par l'équation (1). Or, on pourrait supposer, pour simplifier encore le modèle, que le champ B est constant et est uniquement

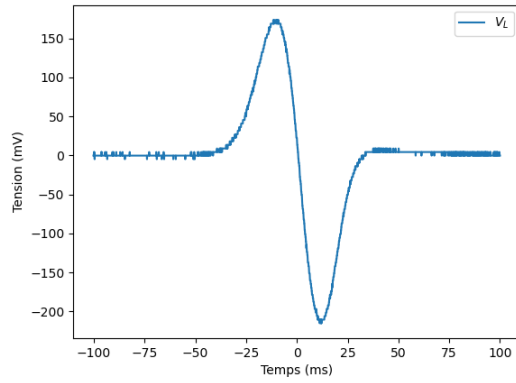


FIGURE 6 – Tension V_L mesurée

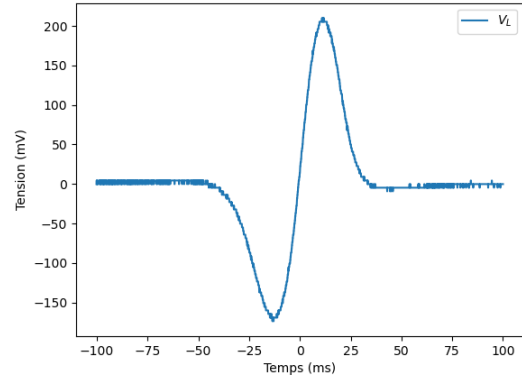


FIGURE 7 – Tension V_L mesurée avec les bornes + et - de la bobine inversées

perpendiculaire à la surface de l'aimant, on peut alors le sortir de l'intégrale. La seule chose qui varie au cours du temps est l'intersection de la surface de la bobine et celle de l'aimant lorsque ils se trouvent l'un au dessus de l'autre.

Ensuite, regardons comment nous allons nous servir de cette courbe dans le circuit. Lorsque l'aimant s'approche de la bobine, il induit une tension qui augmente elle aussi, jusqu'à ce qu'il se trouve à moitié au dessus de la bobine. À ce moment là, V_L est maximum. Puis, la tension va diminuer jusqu'à ce que l'aimant soit exactement au dessus de la bobine. Il n'y a alors plus de variation de flux, et la tension V_L est nulle. L'aimant continue sa course et s'éloigne de la bobine, la tension continue de descendre jusqu'à ce qu'une nouvelle moitié de l'aimant soit en dehors de la bobine (V_L est minimum). En continuant de s'éloigner, la tension induite par l'aimant va augmenter jusqu'à être nulle.

Enfin, comment prédire l'allure de cette tension engendrée.

3 Amplificateur

3.1 Rappels théoriques

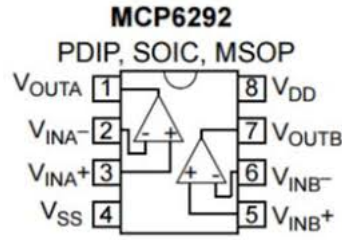


FIGURE 8 – Amplificateur utilisé dans le cadre de ce projet

Le but de ce montage est d'amplifier la tension d'entrée V_L . Cette tension va se retrouver, mais en plus grande, en V_{amp} . Cette tension de sortie vaut :

$$V_{amp} = V_L \left(1 + \frac{pR_{amp}}{R_{amp}}\right) \quad (13)$$

En effet, et tant donné que la tension V_L est très petite, il va être utile de l'amplifier. Il va donc être utile de savoir de combien il est nécessaire d'amplifier cette tension. Cependant, il faut être vigilant à ne pas saturer la tension de sortie. En effet, la tension de sortie est bornée par :

$$0V \leq V_{amp} \leq 5V \quad (14)$$

Ces deux valeurs sont les tensions d'alimentation de l'ampli-op (on va donc l'alimenter avec une source DC de 5V). Il faut donc faire en sorte que la tension de sortie reste bien comprise entre ces bornes.

3.2 Méthodes de mesure

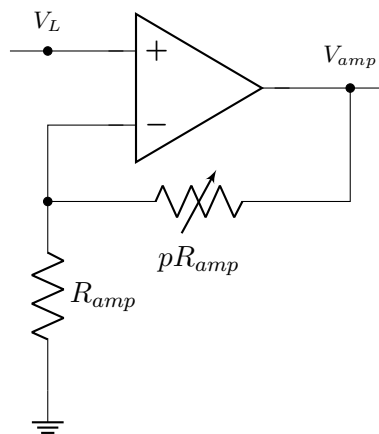


FIGURE 9 – Bloc Ampli-op du circuit final

La question que l'on peut se poser est la suivante :

Comment évolue la tension V_{amp} en fonction du changement de valeur de pR_{amp} .

3.3 Compte rendu des mesures (brutes)

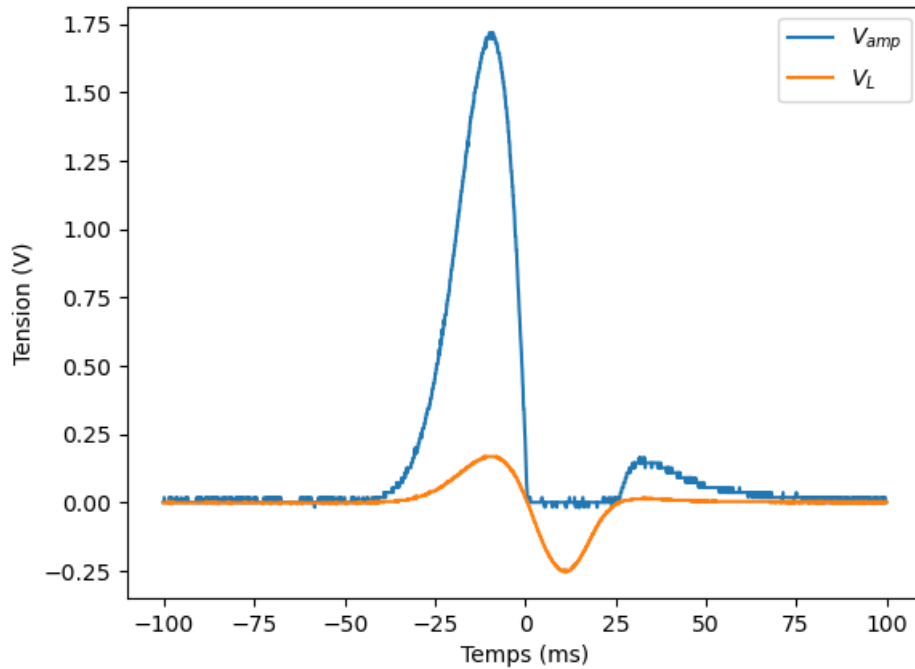


FIGURE 10 – Tension en sortie de l'ampli-op en fonction de la tension d'entrée

La tension V_L passe ensuite dans l'amplificateur de tension. On remarque que, lorsque la tension V_L est positive, elle est amplifiée, tandis que lorsqu'elle est négative l'ampli-op sature et bloque à 0V (voir les bornes de l'ampli-op). Le gain de l'ampli était sur ce montage d'environ 10.

3.4 Interprétation des résultats, discussion et conclusion

Les résultats que nous obtenons sont tout à fait cohérents. En effet, la tension V_{amp} correspond bien à une valeur 10 fois supérieure à la tension V_L induite dans notre bobine.

On remarque que le montage n'amplifie pas les tensions négatives. Cela est logique car l'ampli-op est alimenté avec une tension d'entrée $V_{DD} = 5V$ et une tension de sortie $V_{SS} = 0V$. Donc lorsque les tensions passeront en dessous de 0V, l'ampli-op renverra dans tous les cas une tension nulle.

On remarque également que la partie descendante de la courbe de V_{amp} est assez abrupt. Cela est dû au fait que la tension chute rapidement lorsque le centre de l'aimant arrive au niveau du centre de la bobine. La variation de champ magnétique se faisant de plus en plus faible, la tension induite est moindre. Et puisque la tension est amplifiée, la chute paraît quasi instantanée. Le filtre passe-bas aidera justement à allonger le signal pour qu'il soit plus simple à traiter.

Le montage amplificateur servira donc à amplifier le signal sortant de notre bobine pour le rendre détectable par notre montage comparateur et nous permettra par conséquent de sélectionner avec plus de précision le moment où l'on enverra du courant dans la bobine.

4 Filtre passe-bas

4.1 Rappels théorique

Le filtre passe-bas est un montage électrique qui permet d'atténuer les hautes-fréquences et de laisser passer les basses-fréquences. En faisant varier la résistance R , nous pouvons choisir la fréquence de coupure, soit la fréquence au delà de laquelle le courant ne passera plus. Fréquence de coupure est égal à

$$F_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (15)$$

On se rend compte ici que plus la valeur de notre résistance est petite, plus la fréquence de coupure sera élevée. A l'inverse, si la résistance a une valeur élevée, la fréquence de coupure sera basse.

4.2 Méthodes de mesure

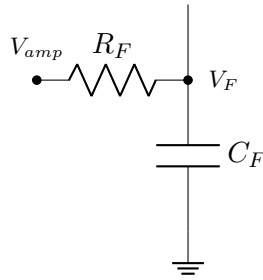


FIGURE 11 – Bloc filtre basse-bas du circuit final

Avec comme valeur de la capacité C_F une valeur de $1\mu F$, soit $10^{-6}F$.

4.3 Compte rendu des mesures (brutes)

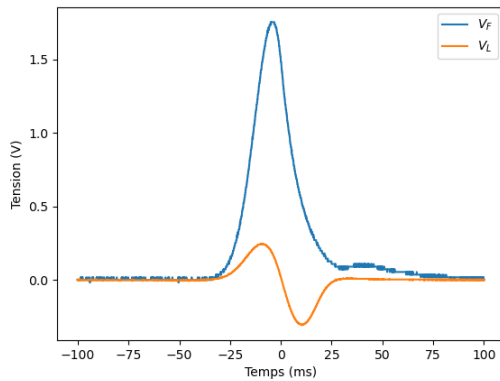


FIGURE 12 – Tension V_F mesurée

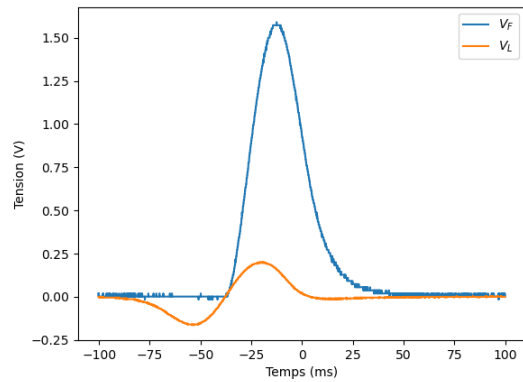


FIGURE 13 – Tension V_F mesurée avec les bornes + et - de la bobine inversées

Après avoir été amplifiée, la tension V_L passe dans le filtre passe-bas. On remarque alors que la courbe est plus allongée, mais ses valeurs extrêmes ne changent pas. Lorsque les bornes de la bobine sont inversées, on remarque exactement le même phénomène. Attention, puisque la tension a été amplifiée, là où V_L était négative, l'ampli-op a fait passer cette valeur à 0V.

4.4 Interprétation des résultats, discussion et conclusion

Le filtre passe bas joue son rôle en "agrandissant" la fréquence de la tension qu'il filtre. D'abord, lorsque la tension V_{amp} augmente, la tension V_F vaut environ cette tension d'entrée là. Mais, dans un même temps, les électrons s'accumulent aux bornes de la capacité (ce qui la recharge). Lorsque la tension V_{amp} diminue fortement et devient nulle, la capacité prend le relais et se décharge. Cela a pour effet d'allonger la courbe et donc de créer une tension de sortie plus douce.

Regardons maintenant le raisonnement mathématique derrière ce circuit. On sait que les deux tension V_{amp} et V_F sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$V_{amp}(t) = RC \frac{dV_F(t)}{dt} + V_F(t) \quad (16)$$

En isolant V_F dans l'équation ci-dessus, on est capable de déterminer la tension en sortie du filtre. Elle vaut :

$$V_F = V_{amp} + ke^{\frac{-t}{RC}} \quad (17)$$

Avec k la constante d'intégration.

$$\frac{\partial A}{\partial T} = Z \left[\frac{-R_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_A^2 - R_B^2 + X_A^2}{2|X_A|R_A} \right)^2}} - \sqrt{R_A^2 - \left(\frac{R_A^2 - R_B^2 + X_A^2}{2|X_A|} \right)^2} + \frac{(R_A^2 - R_B^2 + X_A^2)^2}{2X_A^2} \right] \quad (18)$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial T}(|X_A|) - Z \right] \left[\frac{-R_B}{\sqrt{1 - \left(\frac{2X_A^2 - R_A^2 + R_B^2 - X_A^2}{2|X_A|R_B} \right)^2}} - \sqrt{R_A^2 - \left(\frac{R_A^2 - R_B^2 + X_A^2}{2|X_A|} \right)^2} \right] \quad (19)$$

$$+ \left[|X_A|^2 - \left(\frac{R_A^2 - R_B^2 + X_A^2}{2|X_A|} \right)^2 \right] \frac{R_A^2 - R_B^2 + X_A^2}{2|X_A|} \frac{1}{2\sqrt{R_A^2 - \left(\frac{R_A^2 - R_B^2 + X_A^2}{2|X_A|} \right)^2}} \quad (20)$$

$$Z = \frac{2X_A^2 \frac{\partial}{\partial T}(|X_A|) - (R_A^2 - R_B^2 + X_A^2) \frac{\partial}{\partial T}(|X_A|)}{2|X_A|^2} \quad (21)$$