

TP1

Traitement du signal

S5 1SN

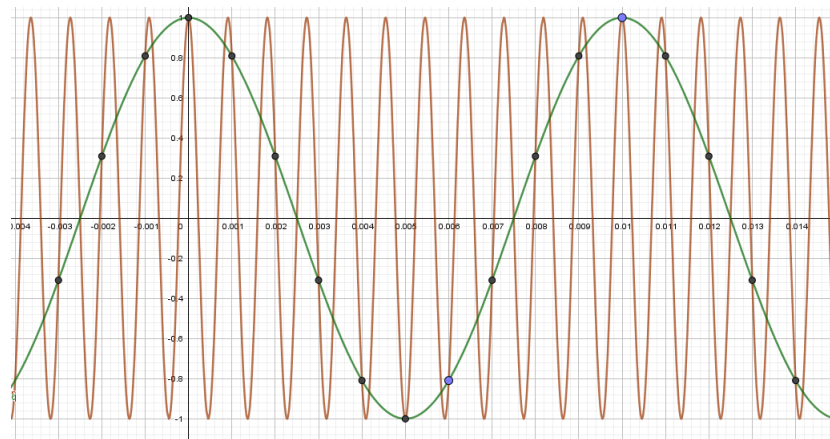
Quentin Thuet

Décembre 2019

Tous les tracés théoriques ont été effectués sur GeoGebra après avoir été tracé à la main.

5.2

- On voit sur le graphique ci-après que si on échantillonne à la fréquence 1000 Hz le cosinus de fréquence 1100 Hz (en rouge sur la figure), alors les points d'échantillonnage correspondent également à un cosinus de fréquence 100 Hz (en vert sur la figure). Le tracé sur Matlab correspond alors naturellement à un cosinus de fréquence 100 Hz.



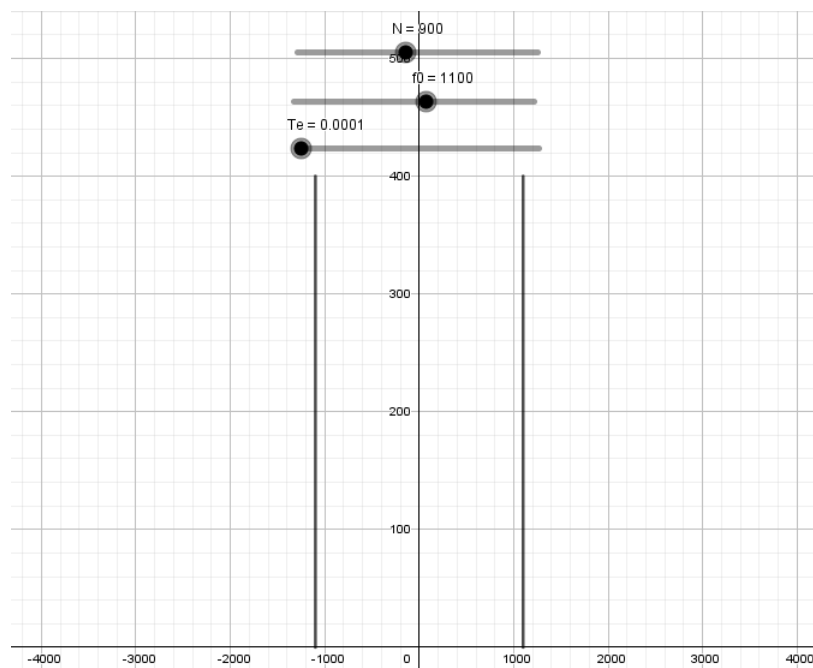
5.3

Sans Zero-Padding

1. Etude théorique

(a)

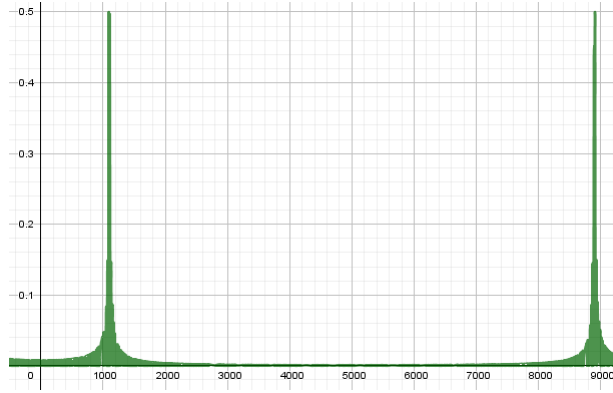
$$\begin{aligned}
 X(f) &= \widehat{\cos(2\pi f_0 t)}(f) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} e^{-i2\pi f t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(f-f_0)t} + e^{-i2\pi(f+f_0)t} dt \\
 &= \frac{1}{2} (\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))
 \end{aligned}$$



(b)

$$\begin{aligned}
X_D(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi f_0 k T_e) e^{-j2\pi f k T_e} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(f-f_0)k T_e} + e^{-j2\pi(f+f_0)k T_e} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)N T_e}}{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)T_e}} + \frac{1 - e^{-j2\pi(f+f_0)N T_e}}{1 - e^{-j2\pi(f+f_0)T_e}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-j\pi(f-f_0)N T_e}}{e^{-j\pi(f-f_0)T_e}} \frac{e^{j\pi(f-f_0)N T_e} - e^{-j\pi(f-f_0)N T_e}}{e^{j\pi(f-f_0)T_e} - e^{-j\pi(f-f_0)T_e}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-j\pi(f+f_0)N T_e}}{e^{-j\pi(f+f_0)T_e}} \frac{e^{j\pi(f+f_0)N T_e} - e^{-j\pi(f+f_0)N T_e}}{e^{j\pi(f+f_0)T_e} - e^{-j\pi(f+f_0)T_e}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{-j\pi(f-f_0)(N-1)T_e} \frac{\sin(\pi(f-f_0)N T_e)}{\sin(\pi(f-f_0)T_e)} \right. \\
&\quad \left. + e^{-j\pi(f+f_0)(N-1)T_e} \frac{\sin(\pi(f+f_0)N T_e)}{\sin(\pi(f+f_0)T_e)} \right)
\end{aligned}$$

(c) Sur ce tracé, on peut retrouver une estimation de la forme du module de $X_D(f)$ (la valeur de l'ordonnée est arbitraire sur ce tracé).



2. (a) On retrouve bien les deux pics en f_0 et $F_e - f_0$ qui correspondent (en remarquant que l'intervalle $[5000; 10000]$ sur le tracé de la question 5.3.1c correspond en réalité à la partie négative du spectre) aux deux diracs calculés dans l'étude théorique. En revanche, en raison de la quantification du cosinus généré, le tracé n'est sans doute pas exactement similaire au calcul théorique.
- (b) Le résultat obtenu correspond bien à celui du tracé obtenu question 5.2.4. On distingue deux pics aux fréquences -100 Hz et 100 Hz, ce qui correspond bien à la transformée de Fourier d'un cosinus de fréquence 100 Hz.

Avec Zero-Padding

1. La transformée de Fourier discrète étant périodique de période F_e , son calcul entre 0 et F_e permet en réalité de connaître toutes les valeurs de la TFD.
- 2.

$$\begin{aligned} X_D \left(n \frac{F_e}{N} \right) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi n \frac{F_e}{N} kT_e} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi \frac{n}{N} k} \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} Y_D \left(n \frac{F_e}{MN} \right) &= \sum_{k=0}^{MN-1} y(kT_e) e^{-j2\pi \frac{n}{MN} k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi \frac{n}{MN} k} \end{aligned}$$

- (b) La seconde expression permet de calculer davantage de termes à des fréquences comprises entre 0 et F_e . En effet, X_D fournit N valeurs de la TFD entre 0 et F_e , alors que Y_D en fournit MN sur le même intervalle.
4. On retrouve bien le tracé de la question 5.3.1c (au changement d'échelle près et en prenant en compte que l'intervalle $[5000; 10000]$ correspond à la partie négative du spectre).
5. On remarque que pour M de plus en plus grand, le nombre de points du tracé augmente et on observe une convergence vers le tracé calculé théoriquement.
6. On peut retrouver ces informations en observant les coordonnées des pics. Par symétrie, on peut se restreindre à cette observation sur la partie positive du spectre. L'abscisse du pic nous renseigne sur la fréquence du cosinus. Plus on ajoute de 0 via la technique du Zero Padding, plus la fréquence que l'on observe est proche de la fréquence réelle. Pour l'amplitude, on peut remarquer (en essayant différentes valeurs de A et de N) que l'on a la relation suivante $A = \frac{2\lambda}{N}$.

5.4

2. On retrouve bien la fréquence du cosinus en observant un pic à la fréquence 1100 Hz. Le second pic que l'on observe est bien sûr le symétrique du premier en considérant l'intervalle [5000; 10000] Hz comme la partie négative du spectre. En revanche, on ne retrouve pas la valeur de l'amplitude
5. La DSP théorique calculée lors du TD1 était :

$$S_x(f) = \left(\frac{A}{2}\right)^2 (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

On remarque alors que le périodogramme classique met bien en valeur la fréquence du cosinus (comme expliqué question 2). Le périodogramme de Welch fournit la valeur de l'amplitude la plus proche de la vraie (on lit une valeur légèrement supérieure à $\frac{A^2}{2}$ en f_0 , soit deux fois l'amplitude théorique calculée). Les périodogrammes fenêtrés sont un compromis entre ces deux extrêmes.

Figures

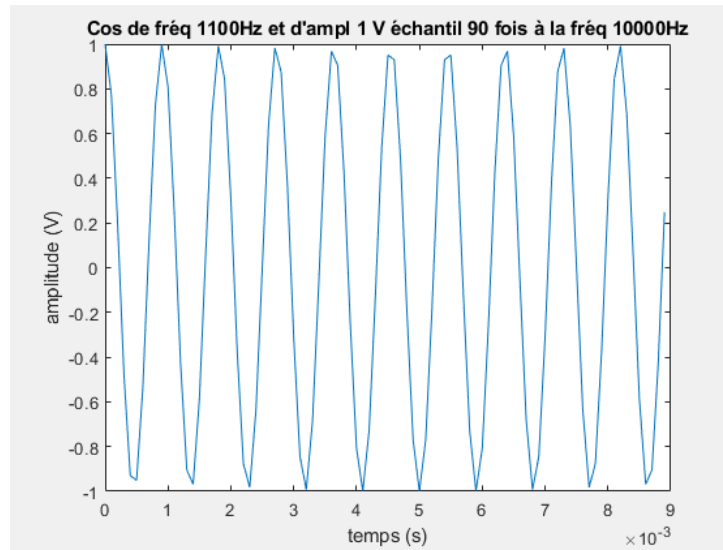


Figure 1: Cosinus de fréquence 1100 Hz et d'amplitude 1V échantillonné 90 fois à la fréquence 10000 Hz

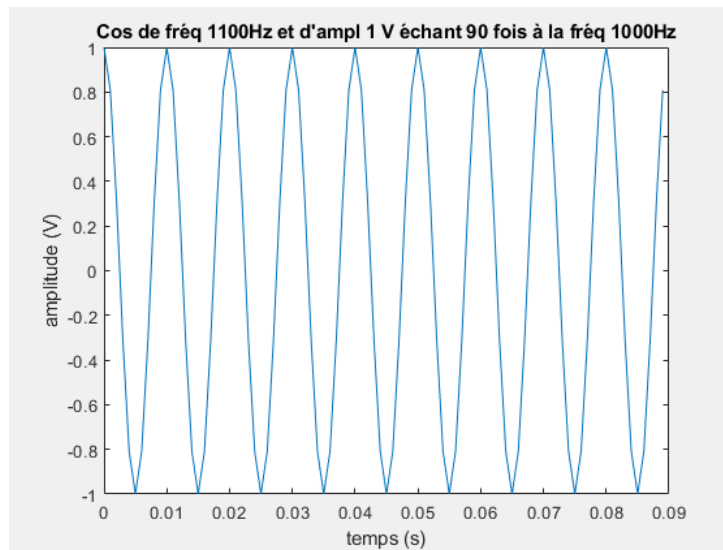


Figure 2: Cosinus de fréquence 1100 Hz et d'amplitude 1V échantillonné 90 fois à la fréquence 1000 Hz

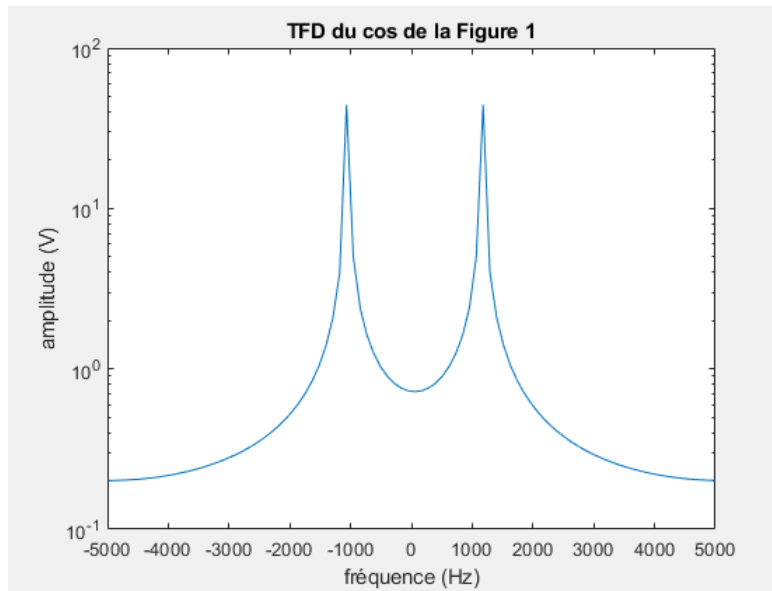


Figure 3: TFD du cosinus de la figure 1

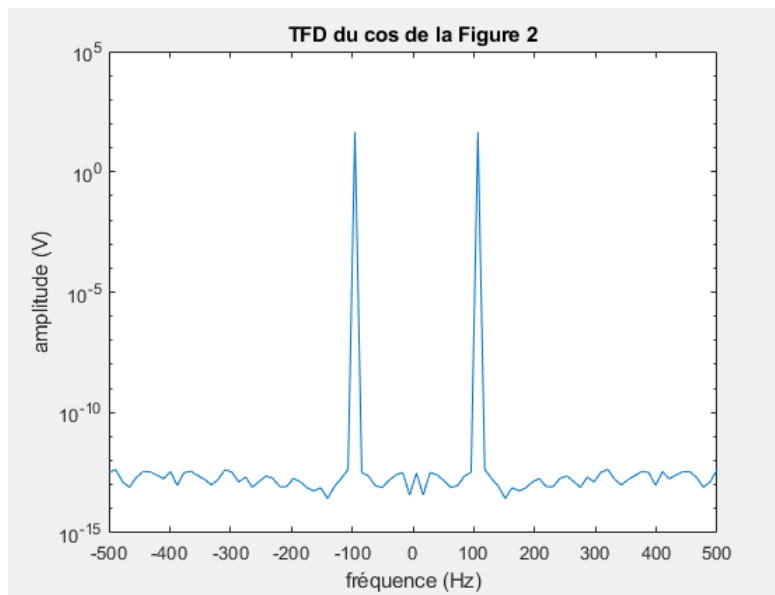


Figure 4: TFD du cosinus de la figure 2

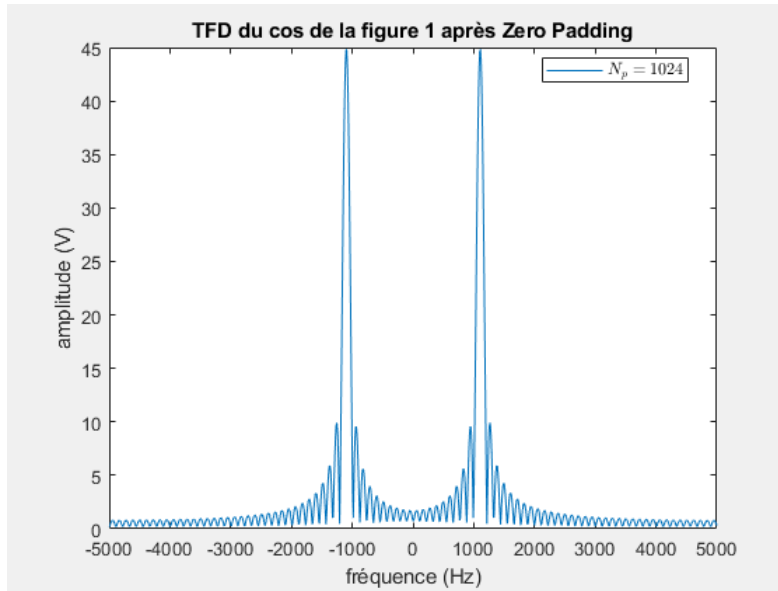


Figure 5: TFD du cosinus de la figure 1 avec Zero Padding

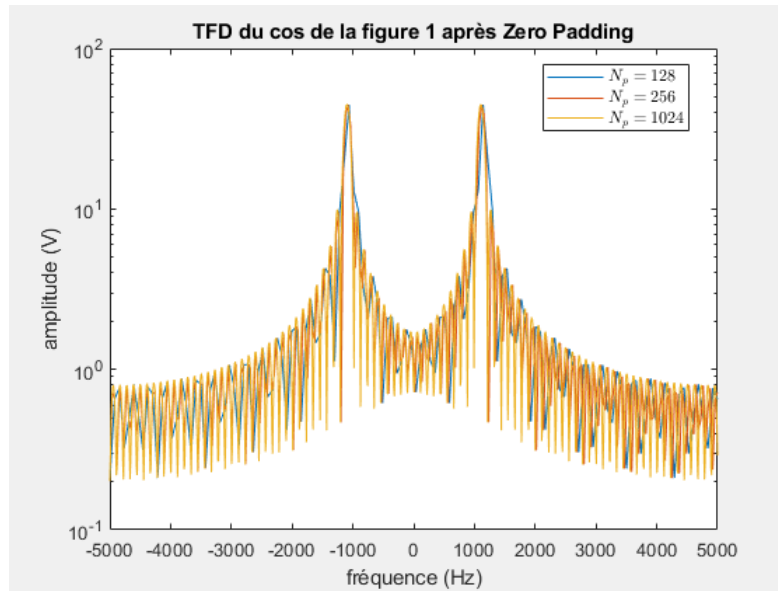


Figure 6: TFD du cosinus de la figure 1 avec Zero Padding

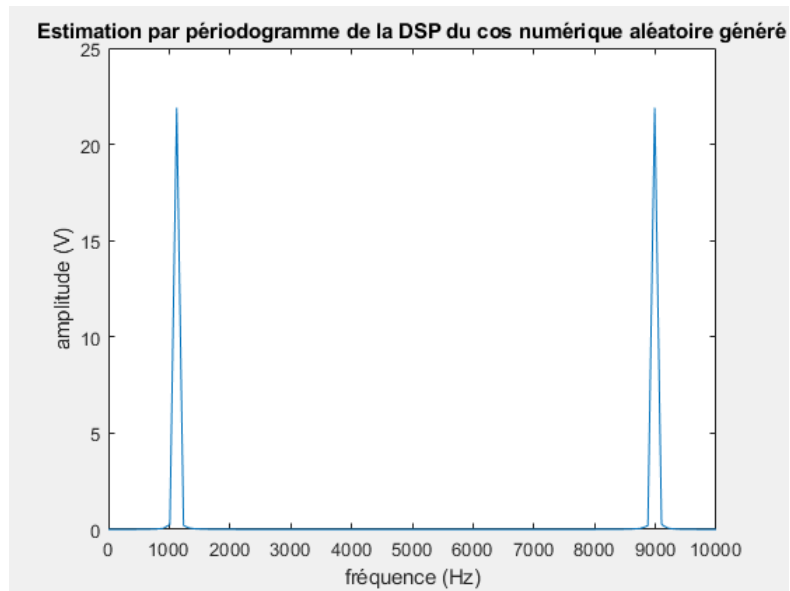


Figure 7: Estimation par périodogramme de la DSP du cosinus numérique aléatoire

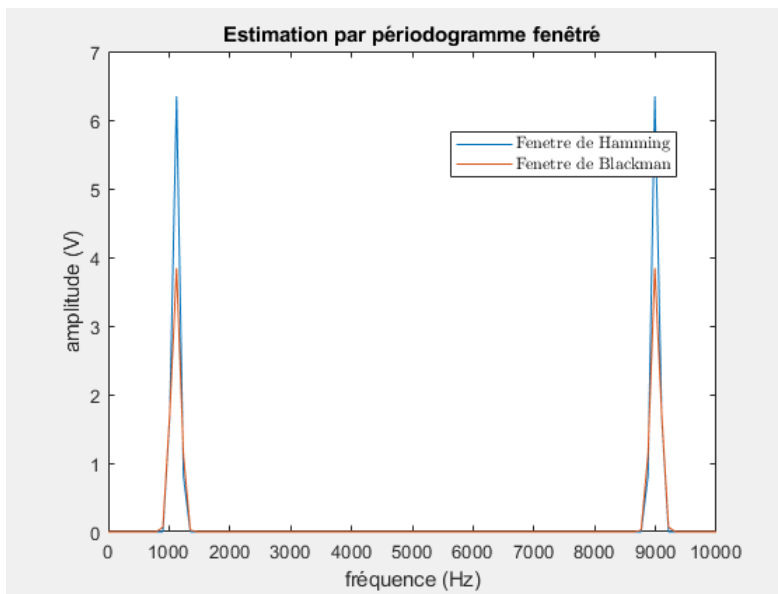


Figure 8: Estimation par périodogramme fenêtré

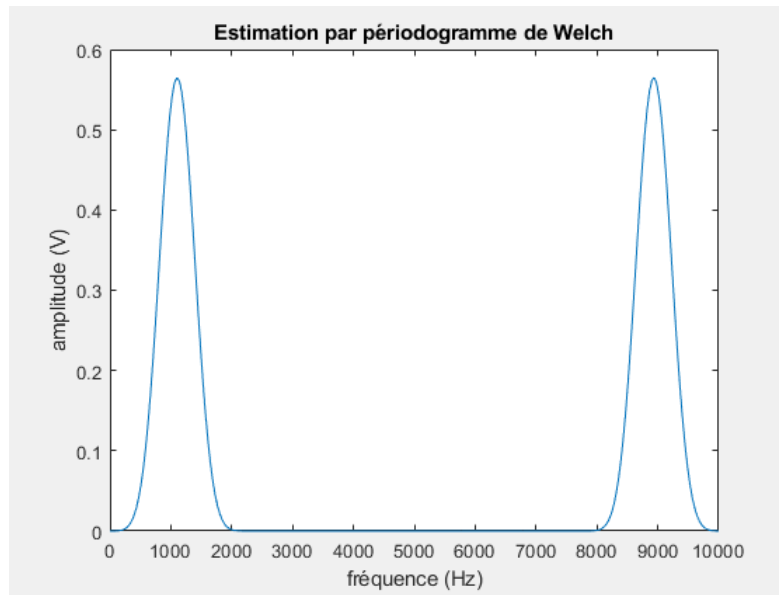


Figure 9: Estimation par périodogramme de Welch

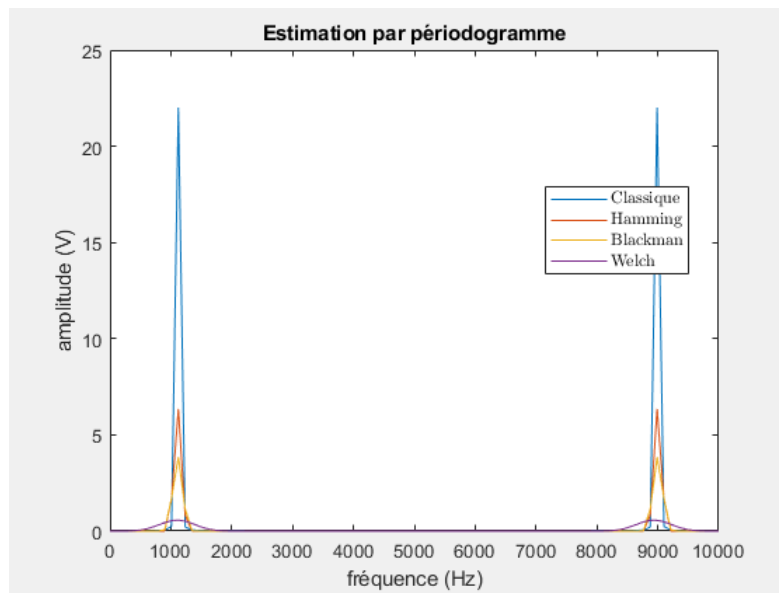


Figure 10: Estimation par périodogramme