



МГУ - ШКОЛЕ

М. К. Потапов А. В. Шевкин

Алгебра

7

Дидактические материалы

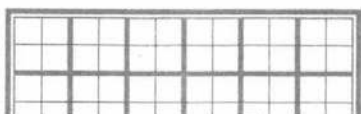


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

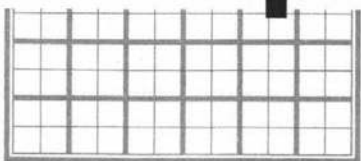


МГУ - ШКОЛЕ

М. К. Потапов А. В. Шевкин



Алгебра



**Дидактические
материалы**

7 класс

Учебное пособие для общеобразовательных
организаций

11-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
П64

6+

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Потапов М. К.

П64 Алгебра. Дидактические материалы. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — 11-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 96 с. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-045947-1.

Пособие содержит задания для подготовки к самостоятельным работам по основным темам учебника «Алгебра, 7». С. М. Никольского и др., а также самостоятельные и контрольные работы в четырёх вариантах.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Потапов Михаил Константинович
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА

Дидактические материалы

7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики

Зав. редакцией **Т. А. Бурмистрова**, редактор **Т. Г. Войлокова**, младший редактор **Е. А. Андреевкова**, художественный редактор **О. П. Богомолова**, техническое редактирование и компьютерная вёрстка **Л. В. Марухно**, корректоры **И. А. Григалашвили**, **И. В. Чернова**

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 25.07.16. Формат 60 × 90 ¹/₁₆. Бумага типографская. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,81. Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 40410.

Анционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в АО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
www.sagpk.ru

ISBN 978-5-09-045947-1

© Издательство «Просвещение», 2004
© Издательство «Просвещение», 2015,
с изменениями
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2015
Все права защищены



Предисловие

Дидактические материалы по курсу алгебры содержат 27 самостоятельных и 7 контрольных работ в четырёх вариантах. Ко всем вариантам контрольных работ имеются ответы.

Содержание дидактических материалов полностью соответствует учебнику алгебры для 7 класса серии «МГУ — школе» и дополняет его более сложными заданиями, необходимыми для работы в классах, нацеленных на подготовку к обучению на повышенном уровне. Дидактические материалы можно использовать при работе по любым учебникам, а также для восполнения пробелов в знаниях и самообразования. Представленные здесь самостоятельные работы могут предлагаться учащимся как обучающие для классной или домашней работы.

К каждой самостоятельной работе в первой части книги даны примеры выполнения заданий, аналогичных заданиям из самостоятельных работ, разбор которых существенно повысит результативность выполнения самостоятельных и контрольных работ и усвоение темы в целом.

Материалы для подготовки к самостоятельным работам содержат подробный разбор решений заданий, так как имеют целью объяснение выбранных способов действий. А оформление решений учащимися может быть кратким.

Темы «Бесконечные десятичные дроби», «Приближённые вычисления», «Делимость чисел», «Делимость многочленов», «Линейные уравнения с параметром», «Системы трёх линейных уравнений», отмеченные в дидактических материалах звёздочкой, не являются обязательными для изучения в общеобразовательном классе. Они охватывают программу углублённого изучения математики.

Любые из самостоятельных работ учитель может использовать для контроля на отметку. Но при этом следует учесть, что многие самостоятельные и все контрольные работы избыточны по объёму, предполагается, что учитель самостоятельно отберёт из них часть заданий с учётом уровня подготовки учащихся и времени, отводимого на выполнение работы.

Некоторые задания вариантов III и IV несколько сложнее соответствующих заданий вариантов I и II. Так как в классах с углублённым изучением математики контрольных работ должно быть больше, чем в классе, работающем по общеобразовательной программе, то отдельные самостоятельные работы, отмеченные звёздочками, можно провести как контрольные.

Материалы для подготовки к самостоятельным работам

1. Действия с натуральными числами

Пример 1. Вычислим, не пользуясь калькулятором:

- а) $98\,765 + 2345$; б) $123\,456 - 56\,789$; в) $67 \cdot 68$;
г) $403 \cdot 306$; д) $1593 : 27$; е) $44\,850 : 65$.

Решение.

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{r} 98765 \\ + 2345 \\ \hline 101110 \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{r} 123456 \\ - 56789 \\ \hline 66667 \end{array} \quad \text{в) } \begin{array}{r} \times 67 \\ 68 \\ \hline 536 \\ + 402 \\ \hline 4556 \end{array} \quad \text{г) } \begin{array}{r} \times 403 \\ 306 \\ \hline 2418 \\ + 1209 \\ \hline 123318 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{д) } \begin{array}{r|l} 1593 & 27 \\ \hline 135 & 59 \\ - 243 & \\ \hline - 243 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{е) } \begin{array}{r|l} 44850 & 65 \\ \hline 390 & 690 \\ - 585 & \\ \hline - 585 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Пример 2. Вычислим, не пользуясь калькулятором:

- а) $3926 : 13 - 12 \cdot 21 + 50$; б) $59 \cdot (27 + 27 : 9) - 770$.

Решение.

$$\begin{array}{l} \text{а) 1) } \begin{array}{r|l} 3926 & 13 \\ \hline 39 & 802 \\ - 26 & \\ \hline - 26 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad 2) \begin{array}{r} \times 12 \\ 21 \\ \hline 12 \\ + 24 \\ \hline 252 \end{array} \quad 3) \begin{array}{r} 302 \\ - 252 \\ \hline 50 \end{array} \quad 4) 50 + 50 = 100. \\ \text{б) 1) } 27 : 9 = 3; \quad 2) 27 + 3 = 30; \\ \quad 3) \begin{array}{r} \times 59 \\ 30 \\ \hline 1770 \end{array} \quad 4) 1770 - 770 = 1000. \end{array}$$

Пример 3. Придумаем пятизначное число, которое делилось бы:

- а) на 2 и на 9; б) на 5 и на 3; в) на 4440.

Решение. а) Чтобы число делилось на 2, его запись должна оканчиваться на чётную цифру, а чтобы оно делилось ещё и на 9, сумма его цифр должна делиться на 9. Пример: 99 990;

б) чтобы число делилось на 5, его запись должна оканчиваться на 0 или на 5, а чтобы оно делилось ещё и на 3, сумма его цифр должна делиться на 3. Пример: 33 315;

в) чтобы найти пятизначное число, делящееся на 4440, умножим, например, число 4440 на 11, получим 48 840.

Пример 4. Используя свойства арифметических действий, найдём значение числового выражения

$$623 \cdot 81 - 623 \cdot 71 + 10 \cdot 77.$$

Решение. $623 \cdot 81 - 623 \cdot 71 + 10 \cdot 77 = 623 \cdot (81 - 71) + 10 \cdot 77 = 623 \cdot 10 + 10 \cdot 77 = (623 + 77) \cdot 10 = 700 \cdot 10 = 7000.$

Пример 5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдём значение числового выражения $181\,818 : 54 - 818\,181 : 243.$

Решение. Применяя основное свойство частного, разделим делимое и делитель первого частного на 18, а второго — на 81:

$$181\,818 : 54 - 818\,181 : 243 = 10\,101 : 3 - 10\,101 : 3 = 0.$$

2. Действия с рациональными числами

Пример 1. Вычислим:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \frac{5}{11} + \frac{3}{22}; & \text{б)} \frac{12}{35} - \frac{11}{28}; & \text{в)} -\frac{2}{13} \cdot \frac{39}{40}; & \text{г)} \frac{25}{51} : \frac{15}{17}; \\ \text{д)} 5\frac{7}{25} + 1\frac{1}{30}; & \text{е)} 6\frac{5}{6} - 4\frac{7}{8}; & \text{ж)} 1\frac{3}{26} \cdot 2; & \text{з)} 8\frac{3}{4} : 25. \end{array}$$

Решение. а) $\frac{5}{11} + \frac{3}{22} = \frac{10}{22} + \frac{3}{22} = \frac{13}{22};$

б) $\frac{12}{35} - \frac{11}{28} = \frac{48}{140} - \frac{55}{140} = \frac{48-55}{140} = -\frac{7}{140} = -\frac{1}{20};$

в) $-\frac{2}{13} \cdot \frac{39}{40} = -\frac{2 \cdot 39}{13 \cdot 40} = -\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 20} = -\frac{3}{20};$

г) $\frac{25}{51} : \frac{15}{17} = \frac{25 \cdot 17}{51 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9};$

д) $5\frac{7}{25} + 1\frac{1}{30} = 5\frac{42}{150} + 1\frac{5}{150} = 6\frac{47}{150};$

е) $6\frac{5}{6} - 4\frac{7}{8} = 6\frac{20}{24} - 4\frac{21}{24} = 5 + \frac{44}{24} - 4\frac{21}{24} = 1\frac{23}{24};$

ж) $1\frac{3}{26} \cdot 2 = \frac{29 \cdot 2}{26} = \frac{29 \cdot 1}{13} = 2\frac{3}{13};$

з) $8\frac{3}{4} : 25 = \frac{35}{4 \cdot 25} = \frac{7}{4 \cdot 5} = \frac{7}{20}.$

Пример 2. Вычислим:

а) $41,34 + 3,8;$ б) $13,2 - 15,18;$

в) $2,5 \cdot (-0,64);$ г) $0,42 : 0,007.$

Решение.

а) $41,34 + 3,8 = 41,34 + 3,80 = 45,14;$

б) $13,2 - 15,18 = -(15,18 - 13,20) = -1,98;$

в) $2,5 \cdot (-0,64) = -2,5 \cdot 4 \cdot 0,16 = -10 \cdot 0,16 = -1,6;$

г) $0,42 : 0,007 = 420 : 7 = 60.$

Пример 3. Вычислим:

а) $3\frac{1}{12} + 4,3$; б) $\frac{1}{5} \cdot 0,5$; в) $-1\frac{3}{5} \cdot 1,5$; г) $-0,9 : (-2\frac{1}{4})$.

Решение. а) $3\frac{1}{12} + 4,3 = 3\frac{1^{15}}{12} + 4\frac{3^{16}}{10} = 3\frac{5}{60} + 4\frac{18}{60} = 7\frac{23}{60}$;

б) $\frac{1}{5} \cdot 0,5 = 0,2 - 0,5 = -0,3$;

в) $-1\frac{3}{5} \cdot 1,5 = -1,6 \cdot 1,5 = -2,4$;

г) $-0,9 : (-2\frac{1}{4}) = +\frac{9}{10} : \frac{9}{4} = \frac{9 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{4}{10} = 0,4$.

Пример 4*. Вычислим: $\frac{4,8 \cdot 6,25 \cdot 0,36}{0,125 \cdot 3,6 \cdot 0,48}$.

Решение.

$$\frac{4,8 \cdot 6,25 \cdot 0,36}{0,125 \cdot 3,6 \cdot 0,48} = \frac{0,48 \cdot 10 \cdot 6,25 \cdot 0,36}{0,125 \cdot 0,36 \cdot 10 \cdot 0,48} = \frac{6,25}{0,125} = \frac{6250}{125} = 50.$$

3*. Бесконечные десятичные дроби

Пример 1. Какая из двух десятичных дробей: 0,71 или 0,72 — является более точным приближением числа $\frac{5}{7}$?

Решение. Для ответа на вопрос задачи сравним числа $|\frac{5}{7} - 0,71|$ и $|\frac{5}{7} - 0,72|$:

$$|\frac{5}{7} - 0,71| = |\frac{5}{7} - \frac{71}{100}| = |\frac{500}{700} - \frac{497}{700}| = \frac{3}{700};$$

$$|\frac{5}{7} - 0,72| = |\frac{5}{7} - \frac{72}{100}| = |\frac{500}{700} - \frac{504}{700}| = \frac{4}{700}.$$

Так как $\frac{3}{700} < \frac{4}{700}$, то десятичная дробь 0,71 является более точным приближением числа $\frac{5}{7}$.

Пример 2. Запишем обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:

а) $\frac{13}{99}$; б) $\frac{23}{33}$; в) $\frac{17}{999}$; г) $\frac{10}{3333}$.

Решение. а) $\frac{13}{99} = 0,(13)$; б) $\frac{23}{33} = \frac{69}{99} = 0,(69)$;

в) $\frac{17}{999} = 0,(017)$; г) $\frac{10}{3333} = \frac{30}{9999} = 0,(0030)$.

- **Замечание 1.** Те же результаты можно получить, разделив числитель дроби на знаменатель уголком.
- **Замечание 2.** Если в числителе дроби цифр меньше, чем девяток в её знаменателе, то при записи периода впереди дописывают нули так, чтобы цифр в периоде стало столько же, сколько девяток в знаменателе дроби.

Пример 3. Сравним числа:

а) $7,8(3)$ и $7,(83)$; б) $-1,98(7)$ и $-1,9(87)$.

Решение. а) Так как $7,8(3) = 7,8333\dots$ и $7,(83) = 7,8383\dots$, то $7,8(3) < 7,(83)$;

б) так как $1,98(7) = 1,98777\dots$ и $1,9(87) = 1,98787\dots$, то $1,98(7) < 1,9(87)$, поэтому $-1,98(7) > -1,9(87)$.

Пример 4. Запишем периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

а) $0,(7)$; б) $0,(14)$; в) $0,12(7)$.

Решение.

а) Пусть $x = 0,(7) = 0,777\dots$, тогда

$$10x = 7,777\dots,$$

$$10x - x = 7,777\dots - 0,777\dots,$$

$$9x = 7,$$

$$x = \frac{7}{9}.$$

Итак, $0,(7) = \frac{7}{9}$;

б) пусть $x = 0,(14) = 0,1414\dots$, тогда

$$100x = 14,1414\dots,$$

$$100x - x = 14,1414\dots - 0,1414\dots,$$

$$99x = 14,$$

$$x = \frac{14}{99}.$$

Итак, $0,(14) = \frac{14}{99}$;

в) пусть $x = 0,12(7) = 0,12777\dots$,

$$100x = 12,777\dots,$$

$$1000x = 127,777\dots,$$

$$1000x - 100x = 127,777\dots - 12,777\dots,$$

$$900x = 115,$$

$$x = \frac{115}{900},$$

$$x = \frac{23}{180}.$$

Итак, $0,12(7) = \frac{23}{180}$.

- **Замечание.** При переводе периодической дроби в обыкновенную мы пользовались интуитивно ясным, но недоказанным правилом умножения десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д., поэтому полученный результат нужно проверить, разделив числитель дроби на знаменатель уголком.

Пример 5. Вычислим:

а) $0,(25) + \frac{1}{4}$; б) $0,(4) - 0,(41)$;

в) $-0,(8) \cdot 0,(4)$; г) $-0,4848\dots + \frac{7}{11}$.

Решение. а) $0,(25) + \frac{1}{4} = \frac{25}{99} + \frac{1}{4} = \frac{100}{396} + \frac{99}{396} = \frac{199}{396}$;

б) $0,(4) - 0,(41) = \frac{4}{9} - \frac{41}{99} = \frac{44}{99} - \frac{41}{99} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$;

в) $-0,(8) \cdot 0,(4) = -\frac{8}{9} \cdot \frac{4}{9} = -\frac{8 \cdot 4}{9 \cdot 9} = -\frac{32}{81}$;

г) $-0,4848... + \frac{7}{11} = -\frac{48}{99} + \frac{63}{99} = \frac{63}{99} - \frac{48}{99} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$.

Пример 6. Вычислим: $\frac{0,(5) \cdot 0,(3) \cdot 0,(14)}{0,(15) \cdot 0,(2) \cdot 0,(7)}$.

Решение. $\frac{0,(5) \cdot 0,(3) \cdot 0,(14)}{0,(15) \cdot 0,(2) \cdot 0,(7)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{14}{99}}{\frac{15}{99} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9}} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 99 \cdot 9 \cdot 9}{9 \cdot 9 \cdot 99 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 7} = 1$.

4*. Приближённые вычисления

Пример 1. Найдём приближение десятичной дроби 4,298 с точностью до единицы второго разряда после запятой:

а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

Решение. а) $4,298 \approx 4,29$ с недостатком;

б) $4,298 \approx 4,30$ с избытком;

в) $4,298 \approx 4,30$ с округлением.

Пример 2. Округлим число:

а) 3,859 с точностью до сотых;

б) 83,95 с точностью до десятых;

в) 649,8 с точностью до единиц;

г) 649,8 с точностью до десятков;

д) 2731,54 с точностью до сотен.

Решение. а) $3,859 \approx 3,86$ с точностью до сотых;

б) $83,95 \approx 84,0$ с точностью до десятых;

в) $649,8 \approx 650$ с точностью до единиц;

г) $649,8 \approx 650 = 65 \cdot 10$ с точностью до десятков;

д) $2731,54 \approx 2700 = 27 \cdot 100$ с точностью до сотен.

* Замечание. Результат округления в заданиях «г» и «д» записан так, чтобы в записи числа после последней верной цифры ответа не было нулей.

Пример 3. Округлим до второй значащей цифры число:

а) 0,00385; б) 2 013 000.

Решение. а) $0,00385 \approx 0,0039$;

б) $2\,013\,000 \approx 2\,000\,000 = 20 \cdot 10^5$.

Пример 4. Вычислим приближённо:

а) $a + b$ и $a - b$, если $a = 13,529$, $b = -3,(14)$, округлив данные числа и результаты с точностью до одной сотой;

б) $a \cdot b$ и $a : b$, если $a = 8,91$, $b = 6,(5)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.

Решение. а) Сначала округлим числа a и b с точностью до одной сотой:

$$a \approx 13,53; b = -3,1414... \approx -3,14.$$

Затем вычислим сумму $a + b$ и разность $a - b$:

$$a + b \approx 13,53 + (-3,14) = 13,53 - 3,14 = 10,39;$$

$$a - b \approx 13,53 - (-3,14) = 13,53 + 3,14 = 16,67;$$

б) сначала округлим числа a и b с точностью до второй значащей цифры:

$$a \approx 8,9; b = 6,555... \approx 6,6.$$

Затем вычислим произведение $a \cdot b$, частное $a : b$ и округлим полученные результаты до второй значащей цифры:

$$a \cdot b \approx 8,9 \cdot 6,6 = 58,74 \approx 59;$$

$$a : b \approx 8,9 : 6,6 = 1,34... \approx 1,3.$$

Пример 5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3,14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:

а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 25,1 м;

б) площади круга, если его радиус приближённо равен 4,1 м?

Вычислим приближённо длину окружности и площадь круга.

Решение. а) Радиус окружности измерен с точностью до третьей значащей цифры, следовательно, множитель π и произведение должны содержать не больше трёх значащих цифр.

$$C = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 25,1 = 157,628 \approx 158 \text{ (м)};$$

б) радиус круга измерен с точностью до второй значащей цифры, следовательно, множители π , R^2 и произведение должны содержать не больше двух значащих цифр.

$$R^2 \approx 4,1 \cdot 4,1 = 16,81 \approx 17 \text{ (м}^2\text{)},$$

$$S = \pi R^2 \approx 3,1 \cdot 17 = 52,7 \approx 53 \text{ (м}^2\text{)}.$$

5*. Делимость чисел

Пример 1. Пусть a , b и c — натуральные числа. Докажем, что если a делится на b , b делится на c , то a делится на c .

Доказательство. Так как a делится на b , то $a = bn$, где n — натуральное число. Так как b делится на c , то $b = cm$, где m — натуральное число. Но тогда $a = bn = cmn$, где mn — натуральное число. Это означает, что a делится на c , что и требовалось доказать.

Пример 2. Докажем, что если натуральное число a делится и на 2, и на 3, то число a делится на произведение $2 \cdot 3 = 6$.

Доказательство. Так как число a делится на 2, то $a = 2x$, где x — натуральное число. Так как a делится на 3, а 2 на 3 не делится, то число x делится на 3, т. е. $x = 3y$, где y — натуральное число. Но тогда $a = 2 \cdot 3y = 6y$. Это означает, что число a делится на 6, что и требовалось доказать.

Пример 3. Используя алгоритм Евклида, вычислим:

а) НОД (425, 500); б) НОК (425, 500).

Решение. а) Применим алгоритм Евклида для чисел 425 и 500:

$$\begin{aligned} 500 &= 425 \cdot 1 + 75, \\ 425 &= 75 \cdot 5 + 50, \\ 75 &= 50 \cdot 1 + 25, \\ 50 &= 25 \cdot 2 \end{aligned}$$

(справа показаны вычисления столбиком).

$$\begin{array}{r|l} 500 & 425 \\ \hline 425 & 1 \\ \hline 75 & \\ \hline 75 & 50 \\ \hline 50 & 1 \\ \hline 50 & 25 \\ \hline 50 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Последний, отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида равен 25, следовательно, НОД (425, 500) = 25;

б) так как $425 = 25 \cdot 17$, а $500 = 25 \cdot 20$ и 17 и 20 взаимно простые числа, то наименьшее число, которое делится и на 425, и на 500, содержит множители 25, 17 и 20. Значит, НОК (425, 500) = $25 \cdot 17 \cdot 20 = 8500$.

Тот же результат можно получить из равенства $a \cdot b = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$:

$$\text{НОК}(425, 500) = \frac{425 \cdot 500}{\text{НОД}(425, 500)} = \frac{425 \cdot 500}{25} = 8500.$$

Пример 4*. Докажем, что числа 111 111 и 111 113 — взаимно простые.

Доказательство. Если числа 111 111 и 111 113 имеют общий делитель, то их разность $111\,113 - 111\,111 = 2$ имеет тот же делитель. Число 2 имеет единственный простой делитель 2, но ни 111 111, ни 111 113 на 2 не делятся, следовательно, числа 111 111 и 111 113 не имеют другого общего делителя, кроме числа 1, т. е. они взаимно простые, что и требовалось доказать.

6. Одночлены

Пример 1. Является ли одночленом выражение:

- а) $a + 3ab$; б) $\frac{1}{7}ab$; в) $\frac{5a}{3b}$;
г) 5; д) b ; е) 0?

Решение. а) Сумма $a + 3ab$ не является одночленом;

б) $\frac{1}{7}ab$ — одночлен;

в) частное $\frac{5a}{3b}$ не является одночленом;

г) 5 — одночлен;

д) b — одночлен;

е) 0 — одночлен (нулевой одночлен).

Пример 2. Запишем одночлен в стандартном виде, укажем его коэффициент и степень:

а) $\frac{3}{7}a^5 \cdot 2a$; б) $\frac{1}{8}a^2b \cdot \frac{3}{4}ab^2$; в) $\left(\frac{1}{7}ac\right)^2$; г) $-(c^3d^2)^2$.

Решение. а) $\frac{3}{7}a^5 \cdot 2a = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{1}a^5a = \frac{6}{7}a^6$; коэффициент $\frac{6}{7}$, степень 6;

б) $\frac{1}{8}a^2b \cdot \frac{3}{4}ab^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}a^2abb^2 = \frac{1}{4}a^3b^3$; коэффициент $\frac{1}{4}$, степень 6;

в) $\left(\frac{1}{7}ac\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot a^2 \cdot c^2 = \frac{1}{49}a^2c^2$; коэффициент $\frac{1}{49}$, степень 4;

г) $-(c^3d^2)^2 = -(c^3)^2 \cdot (d^2)^2 = -c^6d^4$; коэффициент -1, степень 10.

Пример 3. Запишем одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $49c^6d^8$; б) $2\frac{7}{9}c^4d^{12}$.

Решение. а) $49c^6d^8 = 7^2 \cdot (c^3)^2 \cdot (d^4)^2 = (7c^3d^4)^2$;

б) $2\frac{7}{9}c^4d^{12} = \frac{25}{9}c^4d^{12} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot (c^2)^2 \cdot (d^6)^2 = \left(\frac{5}{3}c^2d^6\right)^2$.

Пример 4. Запишем одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $27b^{12}$; б) $3\frac{3}{8}a^3b^{27}$.

Решение. а) $27b^{12} = 3^3 \cdot (b^4)^3 = (3b^4)^3$;

б) $3\frac{3}{8}a^3b^{27} = \frac{27}{8}a^3b^{27} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot a^3 \cdot (b^9)^3 = \left(\frac{3}{2}ab^9\right)^3$.

Пример 5. Выпишем подобные одночлены:

$12a^2b$, $11ab^2$, $3a^2b$, $-ab$, $-4ab^2$.

Решение. Подобные одночлены: $12a^2b$ и $3a^2b$, $11ab^2$ и $-4ab^2$, у одночлена $-ab$ нет подобного одночлена.

Пример 6*. Запишем все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 2, a , b не более одного раза.

Решение. Запишем все одночлены, взяв по одному, по два, по три множителя всеми возможными способами:

2 , a , b , $2a$, $2b$, ab , $2ab$.

Всего 7 одночленов.

7. Многочлены

Пример 1. Является ли многочленом выражение:

а) $3a + b - 7ab$; б) $\frac{12}{13}a^2b$; в) $\frac{12}{13a}$; г) 150 ?

Решение. а) $3a + b - 7ab$ — многочлен;

б) $\frac{12}{13}a^2b$ — многочлен (одночлен является многочленом);

в) $\frac{12}{13a}$ — не является многочленом, так как это не одночлен и не сумма одночленов;

г) 150 — многочлен.

Пример 2. Запишем многочлен в стандартном виде:

а) $7 - 8a + 9a - 12$; б) $13a + 5a^2 - 22a - 13a^2$.

Решение. а) $7 - 8a + 9a - 12 = (9 - 8)a + (7 - 12) = a - 5$;

б) $13a + 5a^2 - 22a - 13a^2 = (5 - 13)a^2 + (13 - 22)a = -8a^2 - 9a$.

Пример 3. Приведём многочлен к стандартному виду и укажем его степень:

а) $\frac{1}{7}a^2 + 12a - 13a$;

б) $14a^2 - 3a^2b + a^2b$;

в) $a^3b - 5a \cdot 4a^2b + 3abb - 4bab$; г) $5b^2 \cdot 6b - 6b \cdot 5b^2 - b$.

Решение. а) $\frac{1}{7}a^2 + 12a - 13a = \frac{1}{7}a^2 + (12 - 13)a = \frac{1}{7}a^2 - a$;
степень многочлена 2;

б) $14a^2 - 3a^2b + a^2b = (-3 + 1)a^2b + 14a^2 = -2a^2b + 14a^2$; степень многочлена 3;

в) $a^3b - 5a \cdot 4a^2b + 3abb - 4bab = a^3b - 20a^3b + 3ab^2 - 4ab^2 = (1 - 20)a^3b + (3 - 4)ab^2 = -19a^3b - ab^2$; степень многочлена 4;

г) $5b^2 \cdot 6b - 6b \cdot 5b^2 - b = 30b^3 - 30b^3 - b = -b$; степень многочлена 1.

Пример 4. Вместо каждой из букв C и D подберём одночлен так, чтобы выполнялось равенство:

а) $7a + C + 3a = 12b + D$; б) $12a^2 - C + 11a = 3a^2 + D$.

Решение.

а) Приведя подобные члены в левой части равенства, перепишем его в виде $10a + C = 12b + D$. Если $C = 12b$, $D = 10a$, то равенство верно.

Возможно и другое решение: $C = -10a$, $D = -12b$;

б) вычтя из обеих частей равенства по $3a^2$, перепишем его в виде $9a^2 - C + 11a = D$. Если $C = 9a^2$, $D = 11a$, то равенство верно.

Возможно и другое решение: $C = 11a$, $D = 9a^2$.

Пример 5*. Составим все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов x^2 , $-2x$, 1 не более одного раза.

Решение. Запишем все многочлены, взяв по одному, по два, по три члена всеми возможными способами:

$$x^2, -2x, 1, x^2 + (-2x) = x^2 - 2x, \\ x^2 + 1, -2x + 1, x^2 + (-2x) + 1 = x^2 - 2x + 1.$$

Всего 7 многочленов.

8. Сложение и вычитание многочленов

Пример 1. Вычислим сумму многочленов:

а) $5x - 4y$ и $7x + y$; б) $7 - x + x^2$ и $5x - x^2$.

Решение.

а) $(5x - 4y) + (7x + y) = \underline{5x} - \underline{4y} + \underline{7x} + \underline{y} = 12x - 3y$;

б) $(7 - x + x^2) + (5x - x^2) = \underline{7} - \underline{x} + \underline{x^2} + \underline{5x} - \underline{x^2} = 4x + 7$.

Пример 2. Вычислим разность многочленов:

а) $5x + 4y$ и $7x - y$; б) $5 - 4x + 3x^2$ и $4x^2 - 2x - 1$.

Решение.

а) $(5x + 4y) - (7x - y) = \underline{5x} + \underline{4y} - \underline{7x} + \underline{y} = -2x + 5y$;

б) $(5 - 4x + 3x^2) - (4x^2 - 2x - 1) = \underline{5} - \underline{4x} + \underline{3x^2} - \underline{4x^2} + \underline{2x} + \underline{1} = -x^2 - 2x + 6$.

Пример 3. Преобразуем выражение в многочлен стандартного вида:

а) $13x^2 - (3 - 5x + x^2)$; б) $5 + (-2x + 3x^2) + 2x$;

в) $x - (5 + 4x - x^2) + (4 - x^2)$;

г) $15 + (12x^2 - 13x) - (14x^2 + 15) + 2x$.

Решение.

а) $13x^2 - (3 - 5x + x^2) = \underline{13x^2} - \underline{3} + \underline{5x} - \underline{x^2} = 12x^2 + 5x - 3$;

б) $5 + (-2x + 3x^2) + 2x = \underline{5} - \underline{2x} + \underline{3x^2} + \underline{2x} = 3x^2 + 5$;

в) $x - (5 + 4x - x^2) + (4 - x^2) = \underline{x} - \underline{5} - \underline{4x} + \underline{x^2} + \underline{4} - \underline{x^2} = -3x - 1$;

г) $15 + (12x^2 - 13x) - (14x^2 + 15) + 2x = \underline{15} + \underline{12x^2} - \underline{13x} - \underline{14x^2} - \underline{15} + \underline{2x} = -2x^2 - 11x$.

Пример 4. Перепишем выражение, изменив знак перед скобкой на противоположный:

а) $2x^2 - (3 - 8x)$; б) $3x + (-x^2 + 4)$.

Решение.

а) $2x^2 - (3 - 8x) = 2x^2 + (-3 + 8x)$;

б) $3x + (-x^2 + 4) = 3x - (x^2 - 4)$.

Пример 5. Заклучим два последних члена многочлена $8 - 3x + 2y - z$ в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.

Решение. а) $8 - 3x + 2y - z = 8 - 3x + (2y - z)$;

б) $8 - 3x + 2y - z = 8 - 3x - (-2y + z)$.

Пример 6*. Подберём такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = (x - 2x^2) - (x^2 - 3x + 1) + A.$$

Решение. $B = (x - 2x^2) - (x^2 - 3x + 1) + A = \underline{x - 2x^2 - x^2} + \underline{+ 3x - 1} + A = -3x^2 + 4x - 1 + A$. Если $A = 3x^2 - 4x + 1$, то $B = 0$.

9. Умножение многочлена на одночлен

Пример 1. Найдём произведение многочлена и одночлена:

- а) $5(a - 3)$; б) $a(5 + 2a)$;
в) $0,3x(2x - 7)$; г) $-0,2x(5x - 4)$.

Решение. а) $5(a - 3) = 5a - 15$; б) $a(5 + 2a) = 5a + 2a^2$;
в) $0,3x(2x - 7) = 0,6x^2 - 2,1x$;
г) $-0,2x(5x - 4) = -x^2 + 0,8x$.

Пример 2. Запишем произведение многочлена и одночлена в виде многочлена стандартного вида:

- а) $2a(a^2 - 5a + 9)$; б) $3a^2(7 - 6a + 5a^2)$;
в) $0,3x(10 - x + x^2)$; г) $-5x(0,2x - 4)$;
д) $4x(3 - 2x) + 3(2x^2 - x) - 2(x - 3)$.

Решение. а) $2a(a^2 - 5a + 9) = 2a^3 - 10a^2 + 18a$;
б) $3a^2(7 - 6a + 5a^2) = 21a^2 - 18a^3 + 15a^4 = 15a^4 - 18a^3 + 21a^2$;
в) $0,3x(10 - x + x^2) = 3x - 0,3x^2 + 0,3x^3 = 0,3x^3 - 0,3x^2 + 3x$;
г) $-5x(0,2x - 4) = -x^2 + 20x$;
д) $4x(3 - 2x) + 3(2x^2 - x) - 2(x - 3) = \underline{12x - 8x^2} + \underline{6x^2 - 3x} - \underline{2x} + 6 = -2x^2 + 7x + 6$.

Пример 3. Вынесем за скобки общий множитель:

- а) $2x - 12$; б) $5x^2 - 10x + 15$;
в) $7x - 14x^2$; г) $6x^3 - 12x^2 + 18x$.

Решение. а) $2x - 12 = 2(x - 6)$;
б) $5x^2 - 10x + 15 = 5(x^2 - 2x + 3)$;
в) $7x - 14x^2 = 7x(1 - 2x)$;
г) $6x^3 - 12x^2 + 18x = 6x(x^2 - 2x + 3)$.

Пример 4. Перепишем выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:

- а) $3(5x - 7) + x(2x - 1)$; б) $x(2x - 3) - 5(-2x + 1)$.

Решение. а) $3(5x - 7) + x(2x - 1) = 3(5x - 7) - x(-2x + 1)$;
б) $x(2x - 3) - 5(-2x + 1) = x(2x - 3) + 5(2x - 1)$.

Пример 5*. Подберём такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если $B = -9x(x - 7) + 5(x - 6) + A$.

Решение. $B = -9x^2 + 63x + 5x - 30 + A = -9x^2 + 68x - 30 + A$. Если $A = 9x^2 - 68x + 30$, то $B = 0$.

10. Умножение многочленов

Пример 1. Вычислим произведение многочленов:

- а) $(a+5)(3a+1)$; б) $(a^2+4)(a-3)$;
в) $(x-5)(2x-3)$; г) $(-x-1)(2x-2)$.

Решение. а) $(a+5)(3a+1) = 3a^2 + 15a + a + 5 = 3a^2 + 16a + 5$;

б) $(a^2+4)(a-3) = a^3 + 4a - 3a^2 - 12 = a^3 - 3a^2 + 4a - 12$;

в) $(x-5)(2x-3) = 2x^2 - 10x - 3x + 15 = 2x^2 - 13x + 15$;

г) $(-x-1)(2x-2) = -2x^2 - 2x + 2x + 2 = -2x^2 + 2$.

Пример 2. Запишем выражение в виде многочлена стандартного вида:

- а) $8 - (x+1)(x-2)$; б) $3a^3 + (a^2 - a)(3a - 2)$;
в) $(2-x)(x-1) + (x+1)(x+2)$;
г) $(3x+3)(5-x) - (5x-5)(3x-2)$.

Решение.

а) $8 - (x+1)(x-2) = 8 - (x^2 + x - 2x - 2) = 8 - x^2 - x + 2x + 2 = -x^2 + x + 10$;

б) $3a^3 + (a^2 - a)(3a - 2) = 3a^3 + (3a^3 - 3a^2 - 2a^2 + 2a) = 3a^3 + 3a^3 - 3a^2 - 2a^2 + 2a = 6a^3 - 5a^2 + 2a$;

в) $(2-x)(x-1) + (x+1)(x+2) = (2x - x^2 - 2 + x) + (x^2 + x + 2x + 2) = 2x - x^2 - 2 + x + x^2 + x + 2x + 2 = 6x$;

г) $(3x+3)(5-x) - (5x-5)(3x-2) = (15x + 15 - 3x^2 - 3x) - (15x^2 - 15x - 10x + 10) = 15x + 15 - 3x^2 - 3x - 15x^2 + 15x + 10x - 10 = -18x^2 + 37x + 5$.

Пример 3. Вынесем за скобки общий множитель:

- а) $5x^3 - 10x^2$; б) $4(x-1) - x(x-1)$.

Решение. а) $5x^3 - 10x^2 = 5x^2(x-2)$;

б) $4(x-1) - x(x-1) = (x-1)(4-x)$.

Пример 4. Разложим на множители выражение:

- а) $2(x-5) + x^2 - 5x$; б) $3x - 9 - x(x-3)$;
в) $x^3 + 6x^2 - 3x - 18$; г) $x^3 - 5x^2 - 5x + 25$.

Решение.

а) $2(x-5) + x^2 - 5x = 2(x-5) + x(x-5) = (x-5)(2+x)$;

б) $3x - 9 - x(x-3) = 3(x-3) - x(x-3) = (x-3)(3-x) = -(x-3)(x-3) = -(x-3)^2$;

в) $x^3 + 6x^2 - 3x - 18 = x^2(x+6) - 3(x+6) = (x+6)(x^2-3)$;

г) $x^3 - 5x^2 - 5x + 25 = x^2(x-5) - 5(x-5) = (x-5)(x^2-5)$.

Пример 5*. Представим многочлен $x^2 - 2x - 3$ в виде произведения двучленов.

Решение. $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 3x + x - 3 = x(x-3) + 1(x-3) = (x-3)(x+1)$.

11. Числовое значение выражения

Пример 1. Вычислим значение выражения:

а) $6(3-a) + 5(2a-3)$, если $a = 2,5$;

б) $2,5(a^2 + 2a) - 5(a - 2a^2)$, если $a = -0,8$;

в) $(5-2x) - (7-3x) + (8-x)$, если $x = 2,007$.

Решение. а) Если $a = 2,5$, то $6(3-a) + 5(2a-3) =$
 $= 18 - 6a + 10a - 15 = 4a + 3 = 4 \cdot 2,5 + 3 = 13$;

б) если $a = -0,8$, то $2,5(a^2 + 2a) - 5(a - 2a^2) = 2,5a^2 + 5a -$
 $- 5a + 10a^2 = 12,5a^2 = 12,5 \cdot (-0,8)^2 = 8$;

в) если $x = 2,007$, то $(5-2x) - (7-3x) + (8-x) =$
 $= 5 - 2x - 7 + 3x + 8 - x = 0 \cdot x + 6 = 6$.

• **Замечание.** В случае с заданием «в» говорят, что значение выражения не зависит от значений x , так как при любом значении x значение выражения равно 6.

Пример 2. Найдём значение x , при котором числовое значение выражения $5x - (8x - 11)$ равно 2.

Решение. Упростим выражение

$$5x - (8x - 11) = 5x - 8x + 11 = -3x + 11.$$

Значение выражения $-3x + 11$ равно 2 лишь при $x = 3$.
Значит, значение выражения $5x - (8x - 11)$ равно 2 при $x = 3$.

Пример 3. Найдём числовое значение выражения

$$(3+x)(2-x) - (4-x)(1+x)$$

при $x = -\frac{3}{4}$.

Решение. Если $x = -\frac{3}{4}$, то

$$\begin{aligned} (3+x)(2-x) - (4-x)(1+x) &= 6 + 2x - 3x - x^2 - \\ - (4 - x + 4x - x^2) &= 6 + 2x - 3x - x^2 - 4 + x - 4x + x^2 = \\ &= -4x + 2 = -4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 2 = 5. \end{aligned}$$

Пример 4*. Докажем, что значение выражения

$$(2x-1)(3x-2) - (3x+2)(2x+1) + 14x + 1$$

не зависит от значений x .

Решение. $(2x-1)(3x-2) - (3x+2)(2x+1) + 14x + 1 =$
 $= 6x^2 - 3x - 4x + 2 - (6x^2 + 4x + 3x + 2) + 14x + 1 = 6x^2 - 3x -$
 $- 4x + 2 - 6x^2 - 4x - 3x - 2 + 14x + 1 = 1$ не зависит от значений x .

12. Формулы сокращённого умножения

Пример 1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишем выражение в виде многочлена стандартного вида:

$$\text{а) } (a+2)^2; \quad \text{б) } (x-3)(x+3); \quad \text{в) } (a+3)^3.$$

Решение. а) $(a+2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$;

б) $(x-3)(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$;

в) $(a+3)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 3 + 3 \cdot a \cdot 3^2 + 3^3 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27$.

Пример 2. Запишем выражение в виде многочлена:

а) $(a+3b)^2$;

б) $(2a-b)(2a+b)$;

в) $(3x-y)^3$;

г) $(x-1)(x^2+x+1)$.

Решение. а) $(a+3b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3b + (3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2$;

б) $(2a-b)(2a+b) = (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2$;

в) $(3x-y)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot y + 3 \cdot 3x \cdot y^2 - y^3 = 27x^3 -$
 $- 27x^2y + 9xy^2 - y^3$;

г) $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1^3 = x^3 - 1$.

Пример 3. Запишем выражение в виде квадрата или куба двучлена:

а) $x^2 - 6x + 9$;

б) $x^2 + 10x + 25$;

в) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

г) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Решение. а) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x-3)^2$;

б) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x+5)^2$;

в) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3 = (x-1)^3$;

г) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = (x-2)^3$.

Пример 4*. Запишем многочлен $x^2 + 2x - 8$ в виде произведения двучленов.

Решение. I способ. $x^2 + 2x - 8 = x^2 - 2x + 4x - 8 =$
 $= x(x-2) + 4(x-2) = (x-2)(x+4)$.

II способ. $x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + 1 - 9 = (x+1)^2 - 3^2 =$
 $= (x+1-3)(x+1+3) = (x-2)(x+4)$.

13. Разложение многочленов на множители

Пример 1. Разложим на множители многочлен:

а) $a^3 - 4a^2 + 4a$;

б) $ab^3 + 4a^2b^2 + 4a^3b$;

в) $7a - b + 7ab - b^2$;

г) $6a + 6b - ay - by$;

д) $13a - 13b + 5a^2 - 5ab$;

е) $b^3 - b - 4b^2 + 4$.

Решение. а) $a^3 - 4a^2 + 4a = a(a^2 - 4a + 4) = a(a-2)^2$;

б) $ab^3 + 4a^2b^2 + 4a^3b = ab(b^2 + 4ab + 4a^2) = ab(b+2a)^2$;

в) $7a - b + 7ab - b^2 = 1(7a - b) + b(7a - b) = (7a - b)(1 + b)$;

г) $6a + 6b - ay - by = 6(a + b) - y(a + b) = (a + b)(6 - y)$;

д) $13a - 13b + 5a^2 - 5ab = 13(a - b) + 5a(a - b) = (a - b) \times$
 $\times (13 + 5a)$;

е) $b^3 - b - 4b^2 + 4 = b(b^2 - 1) - 4(b^2 - 1) = (b^2 - 1)(b - 4) =$
 $= (b-1)(b+1)(b-4)$.

Пример 2. Разложим на множители многочлен:

а) $x^2 - 25 - 3ax + 15a$;

б) $x^2 + 14x + 13$;

в) $x^3 + 4$.

Решение. а) $x^2 - 25 - 3ax + 15a = (x-5)(x+5) - 3a(x-5) =$
 $= (x-5)(x+5-3a)$;

$$6) x^2 + 14x + 13 = x^2 + x + 13x + 13 = x(x+1) + 13(x+1) = (x+1)(x+13);$$

$$в) x^8 + 4 = x^8 + 4x^4 + 4 - 4x^4 = (x^4 + 2)^2 - (2x^2)^2 = (x^4 + 2 - 2x^2)(x^4 + 2 + 2x^2) = (x^4 - 2x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 2).$$

Пример 3*. Разложим многочлен $x^4 - 37x^2 + 36$ на возможно большее число множителей.

Решение. $x^4 - 37x^2 + 36 = x^4 - x^2 - 36x^2 + 36 = x^2(x^2 - 1) - 36(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 - 36) = (x - 1)(x + 1)(x - 6)(x + 6).$

14. Алгебраические дроби

Пример 1. Сократим дробь:

а) $\frac{8x^2}{36x^3}$; б) $\frac{5x-15}{4x-12}$; в) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$.

Решение. а) $\frac{8x^2}{36x^3} = \frac{4 \cdot 2 \cdot x^2}{4 \cdot 9 \cdot x^2 \cdot x} = \frac{2}{9x}$;

б) $\frac{5x-15}{4x-12} = \frac{5(x-3)}{4(x-3)} = \frac{5}{4}$;

в) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16} = \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{x+4}$.

Пример 2. Преобразуем дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

а) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-9}$; б) $-\frac{13x-14}{2x-1}$.

Решение. I способ. а) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-9} = -\frac{-x^2+5x-1}{x^2-9}$;

б) $-\frac{13x-14}{2x-1} = \frac{-13x+14}{2x-1}$.

II способ. а) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-9} = -\frac{x^2-5x+1}{-x^2+9}$;

б) $-\frac{13x-14}{2x-1} = \frac{13x-14}{-2x+1}$.

Пример 3. Приведём дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{x}{x-4}$ и $\frac{7}{20-5x}$; б) $\frac{2x}{(x-3)^2}$ и $\frac{6}{x^2-9}$; в) $\frac{2}{2x-1}$ и $\frac{3}{3x+2}$.

Решение. а) $\frac{x}{x-4} = \frac{5x}{5(x-4)}$ и $\frac{7}{20-5x} = \frac{7}{5(4-x)} = \frac{-7}{5(x-4)}$;

б) $\frac{2x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x+3)}{(x-3)^2(x+3)}$ и $\frac{6}{x^2-9} = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{6(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}$;

в) $\frac{2}{2x-1} = \frac{2(3x+2)}{(2x-1)(3x+2)}$ и $\frac{3}{3x+2} = \frac{3(2x-1)}{(3x+2)(2x-1)}$.

Пример 4. Запишем многочлен $2x - 5$ в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) $x + 2$; в) $x^2 + 1$.

Решение. а) $2x - 5 = \frac{2x - 5}{1}$;

б) $2x - 5 = \frac{(2x - 5)(x + 2)}{x + 2} = \frac{2x^2 - 5x + 4x - 10}{x + 2} = \frac{2x^2 - x - 10}{x + 2}$;

в) $2x - 5 = \frac{(2x - 5)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x - 5}{x^2 + 1}$.

Пример 5*. Сократим дробь $\frac{x^3 - 125}{2x^2 + 10x + 50}$.

Решение. $\frac{x^3 - 125}{2x^2 + 10x + 50} = \frac{(x - 5)(x^2 + 5x + 25)}{2(x^2 + 5x + 25)} = \frac{x - 5}{2}$.

15. Сложение и вычитание алгебраических дробей

Пример 1. Преобразуем выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{3x - 7}{x - 2} + \frac{7x + 3}{2 - x}$; б) $\frac{11 - 12x}{7x - 9} - \frac{13x + 14}{9 - 7x}$.

Решение.

а) $\frac{3x - 7}{x - 2} + \frac{7x + 3}{2 - x} = \frac{3x - 7}{x - 2} + \frac{-7x - 3}{x - 2} = \frac{3x - 7 + (-7x - 3)}{x - 2} = \frac{-4x - 10}{x - 2}$;

б) $\frac{11 - 12x}{7x - 9} - \frac{13x + 14}{9 - 7x} = \frac{11 - 12x}{7x - 9} + \frac{13x + 14}{7x - 9} = \frac{11 - 12x + 13x + 14}{7x - 9} = \frac{x + 25}{7x - 9}$.

Пример 2. Выполним действия:

а) $\frac{2x + 11}{x + 6} + \frac{x + 7}{x + 6}$; б) $\frac{10 - 9x}{3x - 5} + \frac{8 - 7x}{5 - 3x}$;

в) $\frac{5x - 1}{3x + 9} - \frac{3x - 7}{3x + 9}$; г) $\frac{2x - 1}{5x - y} - \frac{3y + 2}{y - 5x}$.

Решение.

а) $\frac{2x + 11}{x + 6} + \frac{x + 7}{x + 6} = \frac{2x + 11 + x + 7}{x + 6} = \frac{3x + 18}{x + 6} = \frac{3(x + 6)}{x + 6} = \frac{3}{1} = 3$;

б) $\frac{10 - 9x}{3x - 5} + \frac{8 - 7x}{5 - 3x} = \frac{10 - 9x}{3x - 5} + \frac{7x - 8}{3x - 5} = \frac{10 - 9x + 7x - 8}{3x - 5} = \frac{2 - 2x}{3x - 5}$;

в) $\frac{5x - 1}{3x + 9} - \frac{3x - 7}{3x + 9} = \frac{5x - 1 - (3x - 7)}{3x + 9} = \frac{5x - 1 - 3x + 7}{3x + 9} = \frac{2x + 6}{3x + 9} = \frac{2(x + 3)}{3(x + 3)} = \frac{2}{3}$;

г) $\frac{2x - 1}{5x - y} - \frac{3y + 2}{y - 5x} = \frac{2x - 1}{5x - y} + \frac{3y + 2}{5x - y} = \frac{2x - 1 + 3y + 2}{5x - y} = \frac{2x + 3y + 1}{5x - y}$.

Пример 3*. Найдём многочлен A , для которого верно равенство

$$\frac{3x-4}{5x-6} - \frac{2x-7}{6-5x} = \frac{A}{5x-6}.$$

Решение.

Так как $\frac{3x-4}{5x-6} - \frac{2x-7}{6-5x} = \frac{3x-4}{5x-6} + \frac{2x-7}{5x-6} = \frac{3x-4+2x-7}{5x-6} = \frac{5x-11}{5x-6}$,
то $A = 5x - 11$.

16. Умножение и деление алгебраических дробей

Пример 1. Вычислим произведение:

а) $\frac{7x}{9} \cdot \frac{6}{x^3}$; б) $(x-2) \cdot \frac{x+3}{5x-10}$; в) $\frac{3x+21}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{2x+14}$.

Решение. а) $\frac{7x}{9} \cdot \frac{6}{x^3} = \frac{7x \cdot 6}{9 \cdot x^3} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot x^2} = \frac{14}{3x^2}$;

б) $(x-2) \cdot \frac{x+3}{5x-10} = \frac{(x-2)(x+3)}{5(x-2)} = \frac{x+3}{5}$;

в) $\frac{3x+21}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{2x+14} = \frac{(3x+21)(x+3)}{(x^2-9)(2x+14)} = \frac{3(x+7)(x+3)}{(x-3)(x+3) \cdot 2(x+7)} =$
 $= \frac{3}{2(x-3)} = \frac{3}{2x-6}.$

Пример 2. Вычислим частное:

а) $\frac{4x-8}{x+1} : (3x-6)$; б) $\frac{2x^2-2}{3x-3} : \frac{3x+3}{4x-4}$; в) $\frac{5x+10}{x^2-25} : \frac{x^2+2x}{x-5}$.

Решение.

а) $\frac{4x-8}{x+1} : (3x-6) = \frac{4x-8}{x+1} : \frac{3x-6}{1} = \frac{(4x-8) \cdot 1}{(x+1)(3x-6)} =$
 $= \frac{4(x-2)}{(x+1) \cdot 3(x-2)} = \frac{4}{3x+3}$;

б) $\frac{2x^2-2}{3x-3} : \frac{3x+3}{4x-4} = \frac{(2x^2-2)(4x-4)}{(3x-3)(3x+3)} = \frac{2(x^2-1) \cdot 4(x-1)}{3(x-1) \cdot 3(x+1)} =$
 $= \frac{8(x^2-1)(x-1)}{9(x^2-1)} = \frac{8(x-1)}{9} = \frac{8x-8}{9}$;

в) $\frac{5x+10}{x^2-25} : \frac{x^2+2x}{x-5} = \frac{(5x+10)(x-5)}{(x^2-25)(x^2+2x)} = \frac{5(x+2)(x-5)}{(x-5)(x+5) \cdot x(x+2)} =$
 $= \frac{5}{x(x+5)} = \frac{5}{x^2+5x}.$

Пример 3*. Вычислим: $\frac{2x-2}{3x+3} \cdot \frac{5x-15}{4x-4} : \frac{x-3}{x+1}$.

Решение.

$$\frac{2x-2}{3x+3} \cdot \frac{5x-15}{4x-4} : \frac{x-3}{x+1} = \frac{(2x-2)(5x-15)(x+1)}{(3x+3)(4x-4)(x-3)} = \frac{2(x-1) \cdot 5(x-3)(x+1)}{3(x+1) \cdot 4(x-1)(x-3)} = \frac{5}{6}.$$

17. Рациональные выражения

Пример 1. Упростим рациональное выражение:

$$a) \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) \cdot \frac{2x-2}{x^2};$$

$$б) (x^2 - 1) \cdot \left(\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right).$$

Решение.

$$a) 1) x + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1};$$

$$2) \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{2x-2}{x^2} = \frac{x^2 \cdot (2x-2)}{(x-1) \cdot x^2} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2;$$

$$б) 1) \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{3x}{x^2-1};$$

$$2) (x^2 - 1) \cdot \frac{3x}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{1} \cdot \frac{3x}{x^2-1} = \frac{(x^2-1) \cdot 3x}{x^2-1} = 3x.$$

Пример 2. Выполним действия:

$$a) \left(\frac{5x-4y}{5x+4y} - \frac{5x+4y}{5x-4y} \right) : \frac{16xy}{25x^2-16y^2}; \quad б) \frac{3}{3-4x+5y} - \frac{4}{y} + \frac{5}{x} : \frac{x}{6y}.$$

Решение.

$$a) 1) \frac{5x-4y}{5x+4y} - \frac{5x+4y}{5x-4y} = \frac{(5x-4y)^2}{(5x+4y)(5x-4y)} - \frac{(5x+4y)^2}{(5x+4y)(5x-4y)} = \frac{(5x-4y)^2 - (5x+4y)^2}{(5x+4y)(5x-4y)} = \frac{(5x-4y)(5x-4y) - (5x+4y)(5x+4y)}{(5x+4y)(5x-4y)} = \frac{-80xy}{25x^2-16y^2};$$

$$2) \frac{-80xy}{25x^2-16y^2} : \frac{16xy}{25x^2-16y^2} = \frac{-80xy \cdot (25x^2-16y^2)}{(25x^2-16y^2) \cdot 16xy} = -5;$$

$$б) 1) \frac{3}{xy} - \frac{4}{y} + \frac{5}{x} = \frac{3}{xy} - \frac{4x}{xy} + \frac{5y}{xy} = \frac{3-4x+5y}{xy};$$

$$2) \frac{3-4x+5y}{xy} : \frac{3-4x+5y}{xy(3-4x+5y)} = \frac{1}{xy};$$

$$3) \frac{1}{xy} : \frac{x}{6y} = \frac{1 \cdot 6y}{xy \cdot x} = \frac{6}{x^2}.$$

Пример 3*. Выполним действия:

$$\left(\frac{x+3}{x^2-4x+4} - \frac{x-3}{x^2-4} \right) : \left(\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{x-3}{x^2+4x+4} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. 1)} \quad & \frac{x+3}{x^2-4x+4} - \frac{x-3}{x^2-4} = \frac{x+3}{(x-2)^2} - \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \\ & = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)} - \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{x^2+3x+2x+6 - (x^2-3x-2x+6)}{(x-2)^2(x+2)} = \\ & = \frac{x^2+3x+2x+6 - x^2+3x+2x-6}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{10x}{(x-2)^2(x+2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{x-3}{x^2+4x+4} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-3}{(x+2)^2} = \\ & = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)^2} - \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{x^2+3x+2x+6 - (x^2-3x-2x+6)}{(x-2)(x+2)^2} = \\ & = \frac{x^2+3x+2x+6 - x^2+3x+2x-6}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{10x}{(x-2)(x+2)^2}; \end{aligned}$$

$$3) \quad \frac{10x}{(x-2)^2(x+2)} : \frac{10x}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{10x(x-2)(x+2)^2}{(x-2)^2(x+2) \cdot 10x} = \frac{x+2}{x-2}.$$

18. Числовое значение рационального выражения

Пример 1. Найдём значение рационального выражения:

а) $\frac{30}{x^2-25} + \frac{3}{x-5}$ при $x = 305$;

б) $\frac{x^2}{x^2-4x+4} - \frac{x+2}{x-2}$ при $x = 202$;

в) $\frac{a^3-27b^3}{a^2+3ab+9b^2} + \frac{a^3+27b^3}{a^2-3ab+9b^2}$ при $a = 0,48$, $b = -17\frac{18}{19}$.

Решение. а) При $x = 305$

$$\begin{aligned} \frac{30}{x^2-25} + \frac{3}{x-5} &= \frac{30}{(x-5)(x+5)} + \frac{3(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{30+3x-15}{(x+5)(x-5)} = \\ &= \frac{3x+15}{(x+5)(x-5)} = \frac{3(x+5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{3}{x-5} = \frac{3}{305-5} = 0,01; \end{aligned}$$

б) при $x = 202$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2-4x+4} - \frac{x+2}{x-2} &= \frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{x^2 - (x^2-4)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - x^2 + 4}{(x-2)^2} = \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{4}{(202-2)^2} = \frac{4}{40000} = 0,0001; \end{aligned}$$

в) при $a = 0,48$, $b = -17\frac{18}{19}$

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - 27b^3}{a^3 + 3ab + 9b^3} + \frac{a^3 + 27b^3}{a^3 - 3ab + 9b^3} &= \frac{(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)}{a^3 + 3ab + 9b^3} + \\ &+ \frac{(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2)}{a^3 - 3ab + 9b^3} = \frac{a - 3b}{1} + \frac{a + 3b}{1} = a - 3b + a + 3b = 2a = \\ &= 2 \cdot 0,48 = 0,96. \end{aligned}$$

Пример 2. Преобразуем в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

и найдём значение полученной дроби: а) при $x = 0$; б) при $x = 2$.

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1} &= \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{x-1}{x^2+x+1} = \\ &= \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{2x}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \\ &= \frac{x^2+x+1-2x-(x^2-2x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x+1-2x-x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x}{x^3-1}, \end{aligned}$$

то

а) при $x = 0$ имеем $\frac{x}{x^3-1} = \frac{0}{0-1} = 0$;

б) при $x = 2$ имеем $\frac{x}{x^3-1} = \frac{2}{2^3-1} = \frac{2}{7}$.

Пример 3*. Докажем, что значение рационального выражения

$$\frac{x-3}{2x-5} - \frac{x+3}{2x+5} + \frac{4x^2+2x-25}{4x^2-25}$$

одно и то же при каждом значении x , кроме $x = 2,5$ и $x = -2,5$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2x-5} - \frac{x+3}{2x+5} + \frac{4x^2+2x-25}{4x^2-25} &= \frac{(x-3)(2x+5)}{4x^2-25} - \frac{(x+3)(2x-5)}{4x^2-25} + \\ &+ \frac{4x^2+2x-25}{4x^2-25} = \frac{2x^2-6x+5x-15}{4x^2-25} - \frac{2x^2+6x-5x-15}{4x^2-25} + \frac{4x^2+2x-25}{4x^2-25} = \\ &= \frac{2x^2-x-15-(2x^2+x-15)+4x^2+2x-25}{4x^2-25} = \\ &= \frac{2x^2-x-15-2x^2-x+15+4x^2+2x-25}{4x^2-25} = \frac{4x^2-25}{4x^2-25} = 1. \end{aligned}$$

То есть значение выражения одно и то же при каждом значении x , кроме $x = 2,5$ и $x = -2,5$.

19. Тождества

Пример 1. Докажем тождество:

$$\text{а) } \frac{x+6}{x-6} - \frac{x-6}{x+6} = \frac{24x}{x^2-36}; \quad \text{б) } \frac{3}{x^2-6x+9} : \frac{x}{x-3} = \frac{3}{x^2-3x};$$

$$\text{в) } \left(x+4+\frac{16}{x-4}\right) \cdot \frac{x-4}{x^2} = 1; \quad \text{г) } \left(\frac{x-5}{x+5} + \frac{x+5}{x-5}\right) : \frac{x^2+25}{x^2-25} = 2.$$

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{x+6}{x-6} - \frac{x-6}{x+6} &= \frac{(x+6)^2}{(x-6)(x+6)} - \frac{(x-6)^2}{(x+6)(x-6)} = \\ &= \frac{x^2+12x+36}{x^2-36} - \frac{x^2-12x+36}{x^2-36} = \frac{x^2+12x+36-(x^2-12x+36)}{x^2-36} = \frac{24x}{x^2-36}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Обе части данного тождества определены при каждом значении x , кроме $x=6$ и $x=-6$;

$$\text{б) } \frac{3}{x^2-6x+9} : \frac{x}{x-3} = \frac{3}{(x-3)^2} : \frac{x}{x-3} = \frac{3 \cdot (x-3)}{(x-3)^2 \cdot x} = \frac{3}{(x-3) \cdot x} = \frac{3}{x^2-3x},$$

что и требовалось доказать. Обе части данного тождества определены при каждом значении x , кроме $x=3$ и $x=0$;

$$\begin{aligned} \text{в) } \left(x+4+\frac{16}{x-4}\right) \cdot \frac{x-4}{x^2} &= \left(\frac{x+4}{1} + \frac{16}{x-4}\right) \cdot \frac{x-4}{x^2} = \\ &= \left(\frac{x^2-16}{x-4} + \frac{16}{x-4}\right) \cdot \frac{x-4}{x^2} = \frac{x^2}{x-4} \cdot \frac{x-4}{x^2} = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Обе части данного тождества определены при каждом значении x , кроме $x=4$ и $x=0$;

$$\begin{aligned} \text{г) } \left(\frac{x-5}{x+5} + \frac{x+5}{x-5}\right) : \frac{x^2+25}{x^2-25} &= \left(\frac{(x-5)^2}{x^2-25} + \frac{(x+5)^2}{x^2-25}\right) : \frac{x^2+25}{x^2-25} = \\ &= \frac{x^2-10x+25+x^2+10x+25}{x^2-25} : \frac{x^2+25}{x^2-25} = \frac{2x^2+50}{x^2-25} : \frac{x^2+25}{x^2-25} = \\ &= \frac{2(x^2+25)(x^2-25)}{(x^2-25)(x^2+25)} = 2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Обе части данного тождества определены при каждом значении x , кроме $x=5$ и $x=-5$.

Пример 2*. Докажем тождество

$$\left(\frac{x^3-125}{x^2-10x+25} + \frac{x^3+125}{x^2+10x+25}\right) \cdot \frac{x^2-25}{x^3+50x} = 2.$$

Доказательство.

$$1) \frac{x^3-125}{x^2-10x+25} + \frac{x^3+125}{x^2+10x+25} = \frac{x^3-5^3}{(x-5)^2} + \frac{x^3+5^3}{(x+5)^2} = \frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x-5)^2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(x+5)(x^2-5x+25)}{(x+5)^2} = \frac{x^2+5x+25}{x-5} + \frac{x^2-5x+25}{x+5} = \\
 & = \frac{(x^2+5x+25)(x+5)}{x^2-25} + \frac{(x^2-5x+25)(x-5)}{x^2-25} = \frac{x^3+5x^2+25x+5x^2+25x+125}{x^2-25} + \\
 & + \frac{x^3-5x^2+25x-5x^2+25x-125}{x^2-25} = \frac{x^3+10x^2+50x+125+x^3-10x^2+50x-125}{x^2-25} = \\
 & = \frac{2x^3+100x}{x^2-25} = \frac{2(x^3+50x)}{x^2-25};
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{2(x^3+50x)}{x^2-25} \cdot \frac{x^2-25}{x^3+50x} = \frac{2(x^3+50x) \cdot (x^2-25)}{(x^2-25) \cdot (x^3+50x)} = 2, \text{ что и требова-}$$

лось доказать.

Отметим, что обе части данного тождества определены при каждом значении x , кроме $x = -5$, $x = 0$ и $x = 5$.

20. Степень с целым показателем

Пример 1. Вычислим:

$$\text{а) } 6^{-2}; \quad \text{б) } \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}; \quad \text{в) } (-0,2)^{-3}; \quad \text{г) } -10^{-2}; \quad \text{д) } (-0,4)^0.$$

$$\text{Решение. а) } 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36};$$

$$\text{б) } \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = 1 : \frac{3^3}{5^3} = \frac{1 \cdot 5^3}{3^3} = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27} = 4 \frac{17}{27};$$

$$\text{в) } (-0,2)^{-3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}\right)^3} = 1 : \frac{(-1)^3}{5^3} = \frac{1 \cdot 5^3}{(-1)^3} = -125;$$

$$\text{г) } -10^{-2} = -\frac{1}{10^2} = -\frac{1}{100} = -0,01;$$

$$\text{д) } (-0,4)^0 = 1.$$

• **Замечание.** По аналогии с заданием «б» можно доказать, что для любых отличных от нуля чисел a и b и любого целого n верно равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$. Этим равенством удобно пользоваться. Например, задание «в» с его помощью решается так:

$$(-0,2)^{-3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{-1}\right)^3 = \frac{5^3}{(-1)^3} = -125.$$

Пример 2. Упростим выражение:

$$\text{а) } x^{-5} \cdot x; \quad \text{б) } x^2 : x^{-3}; \quad \text{в) } \frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-5}}.$$

$$\text{Решение. а) } x^{-5} \cdot x = x^{-5} \cdot x^1 = x^{-5+1} = x^{-4};$$

$$\text{б) } x^2 : x^{-3} = x^{2-(-3)} = x^{2+3} = x^5;$$

$$\text{в) } \frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-6}} = \frac{x^{2+(-4)}}{x^{-6}} = \frac{x^{-2}}{x^{-6}} = x^{-2-(-6)} = x^{-2+6} = x^4.$$

Пример 3. Упростим выражение

$$\left(\frac{2x-3}{x}\right)^{-3} \cdot (9x^{-2} - 12x^{-1} + 4).$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x-3}{x}\right)^{-3} \cdot (9x^{-2} - 12x^{-1} + 4) = \left(\frac{x}{2x-3}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{x^2} - \frac{12}{x} + 4\right) = \\ & = \frac{x^3}{(2x-3)^3} \cdot \frac{9-12x+4x^2}{x^2} = \frac{x(2x-3)^2}{(2x-3)^3(2x-3)} = \frac{x}{2x-3}. \end{aligned}$$

Пример 4*. Вычислим: $\frac{6^{n+1} \cdot 5^n}{15^n \cdot 2^n}$, где n — любое целое число.

$$\text{Решение. } \frac{6^{n+1} \cdot 5^n}{15^n \cdot 2^n} = \frac{6^n \cdot 6 \cdot 5^n}{15^n \cdot 2^n} = \frac{(2 \cdot 3)^n \cdot 6 \cdot 5^n}{(3 \cdot 5)^n \cdot 2^n} = \frac{2^n \cdot 3^n \cdot 6 \cdot 5^n}{3^n \cdot 5^n \cdot 2^n} = 6.$$

21*. Делимость многочленов

Пример 1. Разделим многочлен A на многочлен B , если:

$$\text{а) } A = x^3 - 6x^2 + 13x - 10, B = x - 2;$$

$$\text{б) } A = x^4 - x^2 + 2x - 8, B = x + 2;$$

$$\text{в) } A = x^3 + 2x^2 + 3x + 2, B = x^2 + x + 2.$$

Решение. Разделим многочлен A на многочлен B уголком, получим:

$$\begin{array}{r|l} \text{а) } x^3 - 6x^2 + 13x - 10 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & \\ -4x^2 + 13x & \\ \underline{-4x^2 + 8x} & \\ 5x - 10 & \\ \underline{5x - 10} & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = (x - 2)(x^2 - 4x + 5);$$

$$\begin{array}{r|l} \text{б) } x^4 + 0x^3 - x^2 + 2x - 8 & x + 2 \\ \underline{x^4 + 2x^3} & \\ -2x^3 - x^2 & \\ \underline{-2x^3 - 4x^2} & \\ 3x^2 + 2x & \\ \underline{3x^2 + 6x} & \\ -4x - 8 & \\ \underline{-4x - 8} & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^4 - x^2 + 2x - 8 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 3x - 4);$$

$$\begin{array}{r|l} \text{в) } x^3 + 2x^2 + 3x + 2 & x^2 + x + 2 \\ x^3 + x^2 + 2x & x + 1 \\ \hline x^2 + x + 2 & \\ x^2 + x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2 + x + 2)(x + 1).$$

Пример 2. С помощью алгоритма Евклида найдём НОД(A , B), если

$$A = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad B = x^2 - 3x + 2.$$

Решение. Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x^2 - 3x + 2 \\ x^3 - 3x^2 + 2x & x + 1 \\ \hline x^2 - 7x + 6 & \\ x^2 - 3x + 2 & \\ \hline x^2 - 3x + 2 & -4x + 4 \\ x^2 - x & -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ \hline -2x + 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 1)(x^2 - 3x + 2) + (-4x + 4),$$

$$x^2 - 3x + 2 = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)(-4x + 4).$$

Последний неравный нулю остаток равен $-4x + 4 = -4(x - 1)$. Следовательно, НОД(A , B) = $x - 1$. Чтобы в этом убедиться, можно разделить многочлены A и B на $x - 1$:

$$A = (x - 1)(x^2 - x - 6), \quad B = (x - 1)(x - 2)$$

и убедиться, что $x^2 - x - 6$ не делится на $x - 2$ без остатка:

$$x^2 - x - 6 = (x - 2)(x + 1) - 4.$$

Пример 3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 - x^2 - 4x + a$, $B = x^2 + x - 2$?

Решение. Разделим многочлен A на многочлен B уголком, получим

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + a & x^2 + x - 2 \\ x^3 + x^2 - 2x & x - 2 \\ \hline -2x^2 - 2x + a & \\ -2x^2 - 2x + 4 & \\ \hline a - 4 & \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 4x + a = (x^2 + x - 2)(x - 2) + a - 4.$$

Теперь очевидно, что многочлен A делится на многочлен B с остатком 0 лишь при $a = 4$.

22. Линейные уравнения

Пример 1. Решим уравнение:

а) $7x = 2$; б) $-7x = 0$; в) $0x = 7$.

Решение.

а) $7x = 2$; б) $-7x = 0$; в) $0x = 7$;
 $x = 2 : 7$; $x = 0 : (-7)$; нет корней.
 $x = \frac{2}{7}$; $x = 0$;

Пример 2. Решим уравнение:

а) $10x - 9 = 8x + 7$; б) $3x - 4 = 5x + 6$;
в) $3(x - 1) = 7x + 5$; г) $11x - 2(5x - 4) = 7x - 6$.

Решение.

а) $10x - 9 = 8x + 7$; б) $3x - 4 = 5x + 6$;
 $10x - 8x - 9 = 7$; $3x - 5x - 4 = 6$;
 $2x - 9 = 7$; $-2x - 4 = 6$;
 $2x = 7 + 9$; $-2x = 6 + 4$;
 $2x = 16$; $-2x = 10$;
 $x = 8$; $x = -5$;

в) $3(x - 1) = 7x + 5$; г) $11x - 2(5x - 4) = 7x - 6$;
 $3x - 3 = 7x + 5$; $11x - 10x + 8 = 7x - 6$;
 $3x - 7x - 3 = 5$; $x + 8 = 7x - 6$;
 $-4x - 3 = 5$; $x - 7x + 8 = -6$;
 $-4x = 5 + 3$; $-6x = -6 - 8$;
 $-4x = 8$; $-6x = -14$;
 $x = -2$; $x = 2\frac{1}{3}$.

Пример 3. Решим уравнение:

а) $6(0,2x - 8) = 3(0,4x - 15)$;
б) $4(0,2x - 0,8) = 2(0,4x - 1,6)$.

Решение.

а) $6(0,2x - 8) = 3(0,4x - 15)$;
 $1,2x - 48 = 1,2x - 45$;
 $1,2x - 1,2x = 48 - 45$;
 $0x = 3$;
нет корней;

б) $4(0,2x - 0,8) = 2(0,4x - 1,6)$;
 $0,8x - 3,2 = 0,8x - 3,2$;
 $0,8x - 0,8x = 3,2 - 3,2$;
 $0x = 0$;
 x — любое число.

Пример 4*. Решим уравнение

$$x - (2x - (3x - 4)) = 4x - (3x - (2x + 1)).$$

$$\begin{aligned}
\text{Решение. } x - (2x - (3x - 4)) &= 4x - (3x - (2x + 1)); \\
x - (2x - 3x + 4) &= 4x - (3x - 2x - 1); \\
x - (-x + 4) &= 4x - (x - 1); \\
x + x - 4 &= 4x - x + 1; \\
2x - 4 &= 3x + 1; \\
2x - 3x &= 1 + 4; \\
-x &= 5; \\
x &= -5.
\end{aligned}$$

23*. Линейные уравнения с параметром

Пример 1. Решим уравнение $2x - 3a = 12$ для каждого значения a .

Решение. Для каждого значения a данное уравнение можно переписать в виде

$$2x = 3a + 12.$$

Разделив обе части этого уравнения на 2, получим $x = 1,5a + 6$.

Таким образом, для каждого значения a данное уравнение имеет корень $x = 1,5a + 6$.

Пример 2. При каком значении a уравнение $11x - 3a = 10$ имеет корень $x = 5$?

Решение. Так как число 5 является корнем данного уравнения, то при некотором значении a верно равенство

$$11 \cdot 5 - 3a = 10,$$

из которого найдём это значение a :

$$\begin{aligned}
55 - 3a &= 10; \\
-3a &= -45; \\
a &= 15.
\end{aligned}$$

Следовательно, при $a = 15$ данное уравнение имеет корень 5.

Пример 3. При каком значении a уравнения $5x - 2a = 10$ и $3x + 2a = 22$ имеют общий корень? Найдём этот корень.

Решение. Для каждого значения a решим уравнения

$$5x - 2a = 10 \text{ и } 3x + 2a = 22.$$

Первое из этих уравнений имеет корень $\frac{2a+10}{5}$, а второе $\frac{22-2a}{3}$. Найдём значение a , при котором эти корни равны. Для этого решим относительно a уравнение:

$$\begin{aligned}
\frac{2a+10}{5} &= \frac{22-2a}{3}; \\
3(2a+10) &= 5(22-2a); \\
6a+30 &= 110-10a; \\
16a &= 80; \\
a &= 5.
\end{aligned}$$

Так как это уравнение имеет корень $a = 5$, то при $a = 5$ исходные уравнения имеют общий корень. Этот корень равен $\frac{2 \cdot 5 + 10}{5} = 4$.

Пример 4. При каком значении a уравнение $2(x + 5) - ax = 3$ не имеет корней?

Решение. Для каждого значения a данное уравнение можно переписать в виде

$$(2 - a)x = -7.$$

Если $a = 2$, то уравнение имеет вид $0x = -7$, оно не имеет корней. Итак, при $a = 2$ уравнение не имеет корней.

Пример 5. Для каждого значения a решим уравнение $3(x - 2) - ax = 5$.

Решение. Для каждого значения a данное уравнение можно переписать в виде

$$(3 - a)x = 11.$$

1) Если $a = 3$, то уравнение имеет вид $0x = 11$. Оно не имеет корней.

2) Если $a \neq 3$, то уравнение имеет корень $x = \frac{11}{3 - a}$.

Итак, если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 3$, то уравнение имеет корень $x = \frac{11}{3 - a}$.

24. Решение задач с помощью линейных уравнений

Задача 1. Отношение двух чисел равно $3 : 7$, а их разность равна 160. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим данные числа $3k$ и $7k$, где k — некоторое число (коэффициент пропорциональности). Составим уравнение:

$$7k - 3k = 160.$$

Решив это уравнение, получим, что $k = 40$. Следовательно, искомые числа равны $3k = 120$ и $7k = 280$.

Ответ. 120 и 280.

Задача 2. Сумма двух чисел равна 300, а разность — 200. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим данные числа x и $x + 200$. Составим уравнение:

$$x + (x + 200) = 300.$$

Решив это уравнение, получим, что $x = 50$; $x + 200 = 250$. Следовательно, искомые числа равны 50 и 250.

Ответ. 50 и 250.

Задача 3. Сумма трёх последовательных натуральных чисел равна 300. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим данные числа x , $x+1$ и $x+2$. Составим уравнение:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 300.$$

Решив это уравнение, получим, что $x = 99$; $x + 1 = 100$; $x + 2 = 101$. Следовательно, искомые числа равны 99, 100 и 101.

Ответ. 99, 100 и 101.

Задача 4*. На трёх полках стоят книги. На нижней полке книг в 2 раза меньше, чем на двух остальных полках вместе, на средней — в 3 раза меньше, чем на двух остальных полках вместе, а на верхней полке стоит 30 книг. Сколько книг на трёх полках вместе?

Решение. Пусть на средней полке было x книг, тогда на нижней полке было $\frac{x+30}{2}$ книг. Так как на средней полке было в 3 раза меньше книг, чем на двух остальных полках вместе, то если число книг на средней полке увеличить в 3 раза, то получится столько же книг, сколько их стоит на двух остальных полках вместе. Составим уравнение:

$$3x = 30 + \frac{x+30}{2}.$$

Решив это уравнение, получим, что $x = 18$. Следовательно, книг на трёх полках вместе было $30 + 18 + \frac{30+18}{2} = 72$.

Ответ. 72 книги.

25. Системы двух линейных уравнений

Пример 1. Является ли пара чисел $(1; -3)$ решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + y = 2, \\ 2x - y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - 5y = 19, \\ 6x + 7y = 15? \end{cases}$$

Решение. а) Подставив в уравнения системы число 1 вместо x и число -3 вместо y , получим

$$5 \cdot 1 + (-3) = 2 \text{ (верно), } 2 \cdot 1 - (-3) = 5 \text{ (верно).}$$

Следовательно, пара чисел $(1; -3)$ является решением системы уравнений;

б) подставив в уравнения системы число 1 вместо x и число -3 вместо y , получим

$$4 \cdot 1 - 5 \cdot (-3) = 19 \text{ (верно), } 6 \cdot 1 + 7 \cdot (-3) = 15 \text{ (неверно).}$$

Следовательно, пара чисел $(1; -3)$ не является решением системы уравнений.

Пример 2. Решим систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x = 18, \\ 2x - y = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 4x + 3y = 27. \end{cases}$$

Решение. а) Из первого уравнения системы найдём $x = 6$, подставив во второе уравнение системы число 6 вместо x , получим уравнение

$$2 \cdot 6 - y = 8,$$

имеющее единственный корень $y = 4$. Следовательно, пара (6; 4) является решением системы уравнений;

б) умножим первое уравнение системы на 3, а второе — на 2:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 4x + 3y = 27, \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

получим систему

$$\begin{cases} 9x - 6y = -3, \\ 8x + 6y = 54, \end{cases} \quad (1)$$

равносильную данной системе.

Заменив в системе (1) первое уравнение суммой двух уравнений, получим систему

$$\begin{cases} 17x = 51, \\ 8x + 6y = 54, \end{cases} \quad (2)$$

равносильную системе (1), а значит, равносильную данной системе.

Решив систему (2), получим, что $x = 3$, $y = 5$. Следовательно, пара (3; 5) является решением системы (2), а значит, и данной системы уравнений.

Пример 3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x - ay + 5a = 0, \\ x + 2y - 10 = 0: \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений;

б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишем решения системы в виде пар чисел.

Решение. Из первого уравнения системы найдём, что

$$x = ay - 5a,$$

подставив во второе уравнение системы выражение $ay - 5a$ вместо x , получим уравнение

$$ay - 5a + 2y - 10 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(a + 2)(y - 5) = 0. \quad (3)$$

а) Теперь видно, что при $a = -2$ и любом y равенство (3) верно, следовательно, система уравнений имеет бесконечно много решений:

$$x = -2y - 5 \cdot (-2) = 10 - 2y, y — \text{любое число.}$$

То есть при $a = -2$ решением системы является любая пара чисел $(10 - 2y; y)$, где y — любое число;

б) если $a \neq -2$, то из уравнения (3) следует, что $y = 5$, тогда

$$x = 5a - 5a = 0.$$

То есть для каждого числа $a \neq -2$ решением системы является единственная пара чисел вида $(0; 5)$.

26. Решение задач с помощью систем уравнений

Задача 1. Три буханки чёрного хлеба и четыре батона белого хлеба стоят 114 р., а четыре буханки и два батона стоят 102 р. Сколько стоит буханка чёрного хлеба, сколько стоит батон белого хлеба?

Решение. Пусть буханка чёрного хлеба стоит x р., а батон белого хлеба стоит y р. По условиям задачи составим два уравнения:

$$3x + 4y = 114 \text{ и } 4x + 2y = 102.$$

Решив систему этих двух уравнений, получим, что $x = 18$, $y = 15$. Следовательно, буханка чёрного хлеба стоит 18 р., а батон белого хлеба стоит 15 р.

Ответ. 18 р., 15 р.

Задача 2. В классе 27 человек. Чтобы выдать девочкам по три тетради, а мальчикам по две тетради, потребуется 69 тетрадей. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Решение. Пусть в классе было x девочек и y мальчиков. По условиям задачи составим два уравнения:

$$x + y = 27 \text{ и } 3x + 2y = 69.$$

Решив систему этих двух уравнений, получим, что $x = 15$, $y = 12$. Следовательно, в классе было 15 девочек и 12 мальчиков.

Ответ. 12 мальчиков и 15 девочек.

Задача 3*. На трёх банковских картах имелось 3000 р. На третьей карте было в 2 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — третья часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

Решение. Пусть на первой карте было x р., на второй — y р., тогда на третьей карте было $2(x + y)$ р. Составим первое уравнение:

$$x + y + 2x + 2y = 3000.$$

Так как на первой карте была треть той суммы, что на остальных картах вместе, то составим второе уравнение:

$$x = \frac{1}{3}(y + 2x + 2y).$$

Решив систему этих двух уравнений, получим, что $x = 750$, $y = 250$. Следовательно, на первой карте было 750 р., на второй — 250 р., а на третьей — $2(750 + 250) = 2000$ р.

Ответ. 750 р., 250 р., 2000 р.

27*. Системы трёх линейных уравнений

Пример 1. Является ли тройка чисел (1; 2; 3) решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ x - 3y + z = -2, \\ x + y + z = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 3y = 7, \\ 4y - z = 5, \\ 2x + z = 4? \end{cases}$$

Решение. а) Подставив в уравнения системы число 1 вместо x , число 2 вместо y и число 3 вместо z , получим

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 4 \text{ (верно), } 1 - 3 \cdot 2 + 3 = -2 \text{ (верно), } 1 + 2 + 3 = 6 \text{ (верно).}$$

Следовательно, тройка чисел (1; 2; 3) является решением системы уравнений;

б) подставив в уравнения системы число 1 вместо x , число 2 вместо y и число 3 вместо z , получим

$$1 + 3 \cdot 2 = 7 \text{ (верно), } 4 \cdot 2 - 3 = 5 \text{ (верно), } 2 \cdot 1 + 3 = 4 \text{ (неверно).}$$

Следовательно, тройка чисел (1; 2; 3) не является решением системы уравнений.

Пример 2. Решим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x + 2y + 3z = 22, \\ y - 2z = -15, \\ -3z = -21; \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} x + y + z = 5, \\ x - y - z = 3, \\ x + y - z = 1; \end{cases} \\ \text{в) } & \begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ -2x + 3y - 2z = -2, \\ 4x + y - 3z = -17. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение. а) Из третьего уравнения системы найдём, что $z = 7$. Подставив во второе уравнение системы число 7 вместо z , найдём, что $y = -1$. Подставив в первое уравнение системы число -1 вместо y и число 7 вместо z , найдём, что $x = 3$.

Следовательно, решением системы уравнений является тройка чисел (3; -1 ; 7);

б) чтобы привести исходную систему уравнений к «треугольному» виду (как система в задании «а»), сначала исключим z из второго и третьего уравнений этой системы.

Сложив первое уравнение системы с третьим, получим уравнение

$$2x + 2y = 6.$$

Сложив первое уравнение системы со вторым, получим уравнение

$$2x = 8$$

(неизвестное y уже исключено).

«Треугольная» система

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ 2x + 2y = 6, \\ 2x = 8 \end{cases} \quad (1)$$

равносильна исходной системе. Решив систему (1), найдём её единственное решение: $(4; -1; 2)$. Оно и является решением исходной системы;

в) сначала исключим z из второго и третьего уравнений исходной системы. Для этого первое уравнение системы умножим на 2 и сложим со вторым уравнением, получим уравнение

$$4x - y = -6.$$

Теперь первое уравнение системы умножим на 3 и сложим с третьим уравнением, получим уравнение

$$13x - 5y = -23.$$

Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 4x - y = -6, \\ 13x - 5y = -23. \end{cases} \quad (2)$$

Теперь исключим y из третьего уравнения системы (2). Для этого второе уравнение системы (2) умножим на -5 и сложим с третьим уравнением, получим уравнение $-7x = 7$.

Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 4x - y = -6, \\ -7x = 7. \end{cases} \quad (3)$$

Решив систему (3), найдём её единственное решение: $(-1; 2; 5)$. Оно и является решением исходной системы.

• *Замечание.* Решения систем в заданиях «б» и «в» обычно записывают кратко, указывая справа от вертикальной черты числа, на которые умножают уравнения перед сложением:

$$6) \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=5, \\ x-y-z=3, \\ x+y-z=1; \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=5, \\ 2x+2y=6, \\ 2x=8; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=5, \\ x+y=3, \\ x=4; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4, \\ y=-1, \\ z=2; \end{array} \right.$$

$$в) \left\{ \begin{array}{l} 3x-2y+z=-2, \\ -2x+3y-2z=-2, \\ 4x+y-3z=-17; \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x-2y+z=-2, \\ 4x-y=-6, \\ 13x-5y=-23; \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ -5 \\ 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x-2y+z=-2, \\ 4x-y=-6, \\ -7x=7; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1, \\ y=2, \\ z=5. \end{array} \right.$$

При этом знак равносильности систем (\Leftrightarrow) часто опускают, но подразумевают его.

Пример 3*. При каком значении a система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=2, \\ x+2y+3z=12, \\ ax+2y+z=-3; \end{array} \right.$$

а) не имеет решений; б) имеет единственное решение?

Решение. Из первого уравнения системы выразим z через x и y :

$$z = 2 - x - y.$$

Подставив во второе и третье уравнения системы выражение $2 - x - y$ вместо z , получим систему уравнений, равносильную исходной:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 2 - x - y, \\ x + 2y + 6 - 3x - 3y = 12, \\ ax + 2y + 2 - x - y = -3. \end{array} \right. \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (4) выразим y через x :

$$y = -2x - 6.$$

Подставив в третье уравнение системы выражение $-2x - 6$ вместо y , перепишем это уравнение в виде

$$(a - 3)x = 1.$$

Получим систему уравнений, равносильную исходной:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 2 - x - y, \\ y = -2x - 6, \\ (a - 3)x = 1. \end{array} \right. \quad (5)$$

а) Исходная система уравнений не имеет решений, если равносильная ей система (5) не имеет решений. Лишь при $a = 3$ система (5) не имеет решений. Поэтому исходная система не имеет решений при $a = 3$;

б) исходная система уравнений имеет единственное решение, если равносильная ей система (5) имеет единственное решение. При каждом $a \neq 3$ система (5) имеет единственное решение:

$$x = \frac{1}{a-3}, y = -\frac{2}{a-3} - 6, z = \frac{1}{a-3} + 8.$$

Поэтому исходная система имеет единственное решение при каждом $a \neq 3$.

РАЗДЕЛ II

Самостоятельные работы

С—1 Действия с натуральными числами

Вариант I

Вычислите, не пользуясь калькулятором (1—2).

1. а) $38\,571 + 2349$; б) $48\,931 - 39\,582$; в) $48 \cdot 53$;
г) $72 \cdot 205$; д) $736 : 23$; е) $7650 : 25$.
2. а) $724 : 4 - 4 \cdot 41 + 1$; б) $53 \cdot (42 + 24 : 6) - 2315$.
3. Придумайте трёхзначное число, которое делилось бы:
а) на 2 и на 9; б) на 5 и на 3; в) на 150.
4. Используя свойства арифметических действий, найдите значение числового выражения
 $57 \cdot 79 - 57 \cdot 69 + 10 \cdot 43$.

- 5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдите значение числового выражения

$$555\,555 : 15 - 222\,222 : 6.$$

Вариант II

Вычислите, не пользуясь калькулятором (1—2).

1. а) $47\,672 + 3458$; б) $37\,633 - 29\,365$; в) $57 \cdot 49$;
г) $69 \cdot 302$; д) $768 : 24$; е) $1680 : 35$.
2. а) $714 : 6 - 3 \cdot 36 + 2$; б) $52 \cdot (42 + 24 : 4) - 2314$.
3. Придумайте трёхзначное число, которое делилось бы:
а) на 2 и на 3; б) на 5 и на 9; в) на 120.
4. Используя свойства арифметических действий, найдите значение числового выражения
 $48 \cdot 56 - 48 \cdot 46 + 10 \cdot 52$.

- 5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдите значение числового выражения

$$444\,444 : 12 - 333\,333 : 9.$$

Вариант III

Вычислите, не пользуясь калькулятором (1—2).

1. а) $88\,765 + 4567$; б) $23\,232 - 16\,789$; в) $59 \cdot 48$;
г) $405 \cdot 504$; д) $15\,652 : 28$; е) $3780 : 45$.
2. а) $3272 : 8 - 6 \cdot 34 + 3$; б) $57 \cdot (72 + 72 : 9) - 2313$.

3. Придумайте четырёхзначное число, которое делилось бы:
 а) на 2 и на 9; б) на 5 и на 3; в) на 1500.
4. Используя свойства арифметических действий, найдите значение числового выражения
 $607 \cdot 619 - 607 \cdot 608 + 11 \cdot 393$.
- 5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдите значение числового выражения
 $888\ 888 : 24 - 666\ 666 : 18$.

Вариант IV

Вычислите, не пользуясь калькулятором (1—2).

1. а) $77\ 665 + 5476$; б) $32\ 323 - 23\ 987$; в) $58 \cdot 49$;
 г) $506 \cdot 605$; д) $12\ 550 : 25$; е) $3520 : 55$.
2. а) $5472 : 9 - 5 \cdot 43 + 4$; б) $58 \cdot (72 + 72 : 8) - 2312$.
3. Придумайте четырёхзначное число, которое делилось бы:
 а) на 2 и на 3; б) на 5 и на 9; в) на 1200.
4. Используя свойства арифметических действий, найдите значение числового выражения
 $706 \cdot 548 - 706 \cdot 536 + 12 \cdot 294$.
- 5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдите значение числового выражения
 $999\ 999 : 27 - 777\ 777 : 21$.

С—2 Действия с рациональными числами

Вариант I

Вычислите (1—4).

1. а) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$; б) $\frac{11}{15} - \frac{7}{20}$; в) $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{8}$; г) $\frac{3}{20} : \frac{9}{10}$;
 д) $2\frac{2}{5} + 3\frac{1}{6}$; е) $5\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4}$; ж) $4\frac{2}{15} \cdot 5$; з) $7\frac{3}{5} : 19$.
2. а) $4,3 + 0,48$; б) $3,3 - 5,4$;
 в) $2,5 \cdot (-3,2)$; г) $0,48 : 0,006$.
3. а) $2\frac{1}{3} + 1,2$; б) $\frac{3}{4} - 0,5$;
 в) $-1\frac{2}{5} \cdot 2,3$; г) $(-0,8) : (-2\frac{2}{3})$.
- 4*. $\frac{4,9 \cdot 3,24 \cdot 0,32}{1,08 \cdot 0,49 \cdot 3,2}$

Вариант II

Вычислите (1—4).

1. а) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9}$; б) $\frac{23}{30} - \frac{11}{20}$; в) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{5}$; г) $\frac{4}{25} : \frac{8}{5}$;
д) $3\frac{3}{5} + 2\frac{1}{3}$; е) $6\frac{1}{2} - 4\frac{2}{3}$; ж) $3\frac{3}{8} \cdot 4$; з) $5\frac{3}{7} : 19$.

2. а) $3,5 + 0,45$; б) $2,6 - 4,8$;
в) $(-2,4) \cdot (-3,5)$; г) $0,54 : 0,009$.

3. а) $3\frac{2}{3} + 1,1$; б) $\frac{2}{5} - 0,3$;
в) $1\frac{3}{11} \cdot (-2,2)$; г) $(-0,9) : 2\frac{1}{4}$.

4*. $\frac{5,6 \cdot 12 \cdot 0,39}{3,9 \cdot 2,4 \cdot 0,56}$.

Вариант III

Вычислите (1—4).

1. а) $\frac{3}{7} + \frac{1}{14}$; б) $\frac{4}{25} - \frac{11}{15}$; в) $-\frac{11}{14} \cdot \frac{21}{22}$; г) $\frac{12}{19} : \frac{9}{38}$;
д) $7\frac{4}{15} + 3\frac{11}{12}$; е) $3\frac{5}{12} - 2\frac{5}{6}$; ж) $3\frac{3}{13} \cdot 4$; з) $3\frac{7}{9} : 17$.

2. а) $5,78 + 0,342$; б) $4,3 - 6,1$;
в) $2,7 \cdot (-7,5)$; г) $0,72 : 0,025$.

3. а) $5\frac{2}{7} + 5,4$; б) $\frac{2}{9} - 0,3$;
в) $-1\frac{2}{15} \cdot 1,2$; г) $(-2,2) : (-3\frac{2}{3})$.

4*. $\frac{1,25 \cdot 3,2 \cdot 4,8}{0,43 \cdot 16 \cdot 125}$.

Вариант IV

Вычислите (1—4).

1. а) $\frac{3}{8} + \frac{1}{16}$; б) $\frac{7}{15} - \frac{13}{25}$; в) $-\frac{13}{16} \cdot \frac{20}{39}$; г) $\frac{15}{21} : \frac{12}{35}$;
д) $2\frac{7}{18} + 5\frac{13}{24}$; е) $4\frac{5}{18} - 2\frac{5}{9}$; ж) $3\frac{3}{25} \cdot 4$; з) $8\frac{1}{6} : 7$.

2. а) $7,36 + 0,248$; б) $4,5 - 5,1$;
в) $(-3,5) \cdot (-1,8)$; г) $0,64 : 0,025$.

3. а) $4\frac{4}{9} + 6,2$; б) $\frac{3}{7} - 0,2$;
в) $1\frac{3}{14} \cdot (-2,5)$; г) $2,8 : (-4\frac{2}{3})$.

4*. $\frac{1,35 \cdot 4,8 \cdot 4,7}{0,47 \cdot 16 \cdot 135}$.

Вариант I

1. Какая из двух десятичных дробей: 0,14 или 0,15 — является более точным приближением числа $\frac{1}{7}$?
2. Запишите обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:
а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{41}{99}$; г) $\frac{7}{11}$.
3. Сравните числа:
а) 3,4(2) и 3,42; б) -5,73 и -5,(73).
4. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:
а) 0,(8); б) 0,(17).
5. Вычислите:
а) $0,(3) + \frac{1}{2}$; б) $0,(7) - 0,(70)$;
в) $0,(2) \cdot 0,(6)$; г) $0,3636... + \frac{1}{8}$.
6. Вычислите: $\frac{0,(6) \cdot 0,(7) \cdot 0,(12)}{0,(21) \cdot 0,(3) \cdot 0,(2)}$.

Вариант II

1. Какая из двух десятичных дробей: 0,28 или 0,29 — является более точным приближением числа $\frac{2}{7}$?
2. Запишите обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:
а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{43}{99}$; г) $\frac{4}{11}$.
3. Сравните числа:
а) 2,5(7) и 2,57; б) -4,35 и -4,(35).
4. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:
а) 0,(5); б) 0,(13).
5. Вычислите:
а) $0,(4) + \frac{1}{5}$; б) $0,(6) - 0,(60)$;
в) $0,(3) \cdot 0,(4)$; г) $0,4545... + \frac{1}{3}$.
6. Вычислите: $\frac{0,(7) \cdot 0,(8) \cdot 0,(60)}{0,(56) \cdot 0,(4) \cdot 0,(5)}$.

Вариант III

1. Какая из двух десятичных дробей: 0,42 или 0,43 — является более точным приближением числа $\frac{2}{7}$?
2. Запишите обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:
а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{4}{99}$; г) $\frac{13}{111}$.
3. Сравните числа:
а) 5,6(2) и 5,(62); б) -3,12(3) и -3,1(23).
4. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:
а) 0,3(2); б) 0,(19).
5. Вычислите:
а) $0,(71) + \frac{1}{2}$; б) $0,(8) - 0,(80)$;
в) $0,(6) \cdot 0,(4)$; г) $0,7272\dots + \frac{3}{11}$.
6. Вычислите: $\frac{0,(56) \cdot 0,(13) \cdot 0,(3)}{0,(39) \cdot 0,(2) \cdot 0,(14)}$.

Вариант IV

1. Какая из двух десятичных дробей: 0,57 или 0,58 — является более точным приближением числа $\frac{4}{7}$?
2. Запишите обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:
а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{99}$; г) $\frac{14}{111}$.
3. Сравните числа:
а) 6,5(4) и 6,(54); б) -2,73(5) и -2,7(35).
4. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:
а) 0,5(7); б) 0,(16).
5. Вычислите:
а) $0,(17) + \frac{1}{2}$; б) $0,(5) - 0,(50)$;
в) $0,(7) \cdot 0,(3)$; г) $0,8181\dots + \frac{2}{11}$.
6. Вычислите: $\frac{0,(63) \cdot 0,(17) \cdot 0,(6)}{0,(51) \cdot 0,(14) \cdot 0,(3)}$.

Вариант I

1. Найдите приближение десятичной дроби 5,736 с точностью до единицы второго разряда после запятой:
а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.
2. Округлите число:
а) 2,746 с точностью до сотых;
б) 38,43 с точностью до десятых;
в) 184,52 с точностью до единиц;
г) 537,7 с точностью до десятков;
д) 1642,83 с точностью до сотен.
3. Округлите до второй значащей цифры число:
а) 0,02946; б) 2 496 000.
4. Вычислите приближённо:
а) $a + b$ и $a - b$, если $a = 12,537$, $b = 6,28$, округлив данные числа с точностью до одной сотой;
б) $a \cdot b$ и $a : b$, если $a = 2,43$, $b = 1,8$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.
- 5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3,14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:
а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 3,25 м;
б) площади круга, если его радиус приближённо равен 1,4 м?
Вычислите приближённо длину окружности и площадь круга.

Вариант II

1. Найдите приближение десятичной дроби 3,825 с точностью до единицы второго разряда после запятой:
а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.
2. Округлите число:
а) 4,274 с точностью до сотых;
б) 53,84 с точностью до десятых;
в) 618,45 с точностью до единиц;
г) 353,7 с точностью до десятков;
д) 8164,28 с точностью до сотен.
3. Округлите до второй значащей цифры число:
а) 0,09463; б) 4 925 000.

4. Вычислите приближённо:

- а) $a + b$ и $a - b$, если $a = 16,253$, $b = 3,(62)$, округлив данные числа с точностью до одной сотой;
б) $a \cdot b$ и $a : b$, если $a = 6,24$, $b = 3,(1)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.

5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3,14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:

- а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 3,22 м;
б) площади круга, если его радиус приближённо равен 1,5 м?

Вычислите приближённо длину окружности и площадь круга.

Вариант III

1. Найдите приближение десятичной дроби 8,395 с точностью до единицы второго разряда после запятой:
а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

2. Округлите число:

- а) 8,427 с точностью до сотых;
б) 45,38 с точностью до десятых;
в) 861,84 с точностью до единиц;
г) 735,3 с точностью до десятков;
д) 2816,42 с точностью до сотен.

3. Округлите до третьей значащей цифры число:

- а) 0,09495; б) 4 393 600.

4. Вычислите приближённо:

- а) $a + b$ и $a - b$, если $a = 4,625$, $b = -5,(6)$, округлив данные числа с точностью до одной сотой;
б) $a \cdot b$ и $a : b$, если $a = 5,62$, $b = 2,(5)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.

5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3,14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:

- а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 4,58 м;
б) площади круга, если его радиус приближённо равен 1,6 м?

Вычислите приближённо длину окружности и площадь круга.

Вариант IV

1. Найдите приближение десятичной дроби 7,926 с точностью до единицы второго разряда после запятой:
а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.
2. Округлите число:
а) 4,842 с точностью до сотых;
б) 74,53 с точностью до десятых;
в) 636,18 с точностью до единиц;
г) 473,5 с точностью до десятков;
д) 5281,64 с точностью до сотен.
3. Округлите до третьей значащей цифры число:
а) 0,03796; б) 3 364 700.
4. Вычислите приближённо:
а) $a + b$ и $a - b$, если $a = 2,537$, $b = -5,(28)$, округлив данные числа с точностью до одной сотой;
б) $a \cdot b$ и $a : b$, если $a = 8,43$, $b = 3,(2)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.
- 5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3,14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:
а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 4,85 м;
б) площади круга, если его радиус приближённо равен 1,7 м?
Вычислите приближённо длину окружности и площадь круга.

С-5*

Делимость чисел

Вариант I

1. Докажите, что если каждое из двух чисел a и b делится на число c , то их сумма тоже делится на число c .
2. Докажите признак делимости на 4: число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ делится на 4, если либо число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4, либо $a_0 = a_1 = 0$. (Пример: число 67 912 делится на 4, так как число 12 делится на 4; число 67 900 делится на 4, так как запись числа оканчивается на два нуля.)
3. Вычислите: а) НОД (252, 180); б) НОК (252, 180).
- 4*. Докажите, что числа 333 333 и 333 331 взаимно простые.

Вариант II

1. Докажите, что если каждое из двух чисел a и b делится на число c , то их разность тоже делится на число c .
2. Докажите признак делимости на 25: число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ делится на 25, если либо число $\overline{a_n a_0}$ делится на 25, либо $a_0 = a_1 = 0$. (Пример: число 67 975 делится на 25, так как число 75 делится на 25; число 67 900 делится на 25, так как запись числа оканчивается на два нуля.)
3. Вычислите:
а) НОД (264, 231); б) НОК (264, 231).
- 4*. Докажите, что числа 555 555 и 555 553 взаимно простые.

Вариант III

1. Докажите, что если число a делится на число c , а число b не делится на число c , то их сумма не делится на число c .
2. Докажите признак делимости на 8: число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ делится на 8, если либо число $\overline{a_n a_1 a_0}$ делится на 8, либо $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. (Пример: число 67 912 делится на 8, так как число 912 делится на 8; число 679 000 делится на 8, так как запись числа оканчивается на три нуля.)
3. Вычислите:
а) НОД (868, 620); б) НОК (868, 620).
- 4*. Докажите, что числа 777 777 и 777 773 взаимно простые.

Вариант IV

1. Докажите, что если число a делится на число c , а число b не делится на число c , то их разность не делится на число c .
2. Докажите признак делимости на 125: число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ делится на 125, если либо число $\overline{a_n a_1 a_0}$ делится на 125, либо $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. (Пример: число 67 875 делится на 125, так как число 875 делится на 125; число 678 000 делится на 125, так как запись числа оканчивается на три нуля.)
3. Вычислите:
а) НОД (875, 750); б) НОК (875, 750).
- 4*. Докажите, что числа 999 999 и 999 995 взаимно простые.

Вариант I

1. Является ли одночленом выражение:

- а) $a + b^2$; б) $\frac{2}{3}ab$; в) $\frac{2x}{a}$; г) -8 ; д) a ; е) 0 ?

2. Запишите одночлен в стандартном виде, укажите его коэффициент и степень:

- а) $5a^3 \cdot \frac{1}{3}a^3$; б) $8ab \cdot \frac{1}{8}a^2b$; в) $\left(\frac{1}{2}ab\right)^3$; г) $-(a^2b)^3$.

3. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

- а) $4a^4b^2$; б) $2\frac{1}{4}a^2b^{20}$.

4. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

- а) $8a^{12}b^{21}$; б) $\frac{1}{27}a^{18}b^9$.

5. Выпишите подобные одночлены:

$$7ab; 7ab^2; 4a^2b; -ab; -b; 4ab.$$

6*. Запишите все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 3, x , y не более одного раза.

Вариант II

1. Является ли одночленом выражение:

- а) $\frac{1}{2}a^3$; б) $8 + ab$; в) $\frac{x}{2y}$; г) -10 ; д) ab ; е) 0 ?

2. Запишите одночлен в стандартном виде, укажите его коэффициент и степень:

- а) $3c^2 \cdot \frac{1}{3}c^3$; б) $5cd \cdot \frac{1}{4}c^3d^2$; в) $\left(\frac{1}{3}cd\right)^2$; г) $-(c^4d)^3$.

3. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

- а) $9c^6d^4$; б) $6\frac{1}{4}c^{24}d^2$.

4. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

- а) $64c^9d^{24}$; б) $\frac{1}{8}c^{12}d^6$.

5. Выпишите подобные одночлены:

$$5c^2; cd; 3c^2; -d; c; -2cd^2; -c^2.$$

6*. Запишите все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 4, m , n не более одного раза.

Вариант III

1. Является ли одночленом выражение:

а) $a - \frac{1}{3}a^2$; б) $5a \cdot \frac{1}{2}b^4$; в) -17 ; г) $-\frac{x^2}{y}$; д) a^3b ; е) 0 ?

2. Запишите одночлен в стандартном виде, укажите его коэффициент и степень:

а) $14b^2 \cdot \frac{2}{21}b^4$; б) $24ab^2 \cdot \frac{1}{8}a^3b$; в) $\left(\frac{2}{3}a^2b\right)^2$; г) $-(a^4b^3)^3$.

3. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $49a^4b^{12}$; б) $1\frac{7}{9}a^{36}b^{32}$.

4. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $64a^{12}b^{27}$; б) $-3\frac{3}{8}a^{21}b^{36}$.

5. Выпишите подобные одночлены:

$14ab$; $20a^3b^2$; $6a^3b^2$; $-ab$; $-24ab$.

6*. Запишите все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 5, a , b , c не более одного раза.

Вариант IV

1. Является ли одночленом выражение:

а) $a + \frac{1}{2}a^2$; б) $11a^2 \cdot \frac{1}{3}b$; в) -18 ; г) $-\frac{x}{y^2}$; д) ab^3 ; е) 0 ?

2. Запишите одночлен в стандартном виде, укажите его коэффициент и степень:

а) $24c^2 \cdot \frac{3}{8}c^3$; б) $5cd \cdot \frac{1}{4}c^2d^2$; в) $\left(\frac{3}{4}cd^2\right)^2$; г) $(-c^5d^2)^3$.

3. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $81c^{16}d^4$; б) $12\frac{1}{4}c^{20}d^{32}$.

4. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $125c^{18}d^{21}$; б) $-2\frac{10}{27}c^{12}d^{33}$.

5. Выпишите подобные одночлены:

$15c^3d$; cd ; $12c^3d$; $-6cd$; $-2c^3d$.

6*. Запишите все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 6, x , y , z не более одного раза.

Вариант I

1. Является ли многочленом выражение:
а) $a + b - 2a$; б) $\frac{2}{3}ab$; в) $\frac{2}{3a}$; г) 5?
2. Приведите многочлен к стандартному виду:
а) $3 - 2a + 5a - 11$; б) $3a + a^2 + 2a - 3a^2$.
3. Приведите многочлен к стандартному виду, укажите его степень:
а) $\frac{3}{4}a^2 + 3a - a$; б) $8a^2 - a^2b + 3a^2b$;
в) $4a^3b + 5a \cdot 2a^2b + abb - 3bab$; г) $7a^2 \cdot 3a - 4a \cdot 6a^2 - a$.
4. Вместо каждой из букв C и D подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство:
а) $3a + C + 5a = b + D$; б) $6a^2 - C + 3a = a^2 + D$.
- 5*. Составьте все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов $3x^2$, $-2x$, 5 не более одного раза.

Вариант II

1. Является ли многочленом выражение:
а) $a - b + 2b$; б) $\frac{5}{3}ab$; в) $\frac{5}{3b}$; г) 6?
2. Приведите многочлен к стандартному виду:
а) $-5 + x - 3x + 12$; б) $5x - x^2 - 3x + 4x^2$.
3. Приведите многочлен к стандартному виду, укажите его степень:
а) $\frac{1}{3}a^2 + 5a - a$; б) $3a^3 + ab - 4ab$;
в) $5a^3b + 4a \cdot 3a^2b + abb - 4bab$; г) $6a^2 \cdot 4a - 5a \cdot 6a^2 + a$.
4. Вместо каждой из букв C и D подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство:
а) $4a + C + 4a = 2b + D$; б) $5a^2 - C + 4a = a^2 + D$.
- 5*. Составьте все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов $5x^2$, $-10x$, 7 не более одного раза.

Вариант III

1. Является ли многочленом выражение:
а) $ab - ba - 2$; б) $-\frac{2}{7}ab$; в) $\frac{2}{7a}$; г) $\frac{2}{7a+b}$; д) -5 ?

2. Приведите многочлен к стандартному виду:

- а) $5 - 6a + 15a - 12 - a$; б) $6a + a^2 + a - 8a^2$;
в) $7 + 3a - 5a - 7$.

3. Приведите многочлен к стандартному виду, укажите его степень:

- а) $\frac{1}{5}a^2 + 3a - \frac{1}{5}a^2 - a + 4$; б) $5a^2 - ab + ab - 5a^2 + 3$;
в) $6a^3b - 3a \cdot 4a^2b - abb + 7bab$;
г) $5a^2 \cdot 2a - 6a \cdot 6a^2 + a^2$.

4. Вместо каждой из букв C и D подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство (найдите два решения задачи):

- а) $5a + C + 3a = 3b + D$; б) $4a^2 - C + 5a = a^2 + D$.

5*. Составьте все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов x^2 , $-3x$, 4 не более одного раза.

Вариант IV

1. Является ли многочленом выражение:

- а) $ac - ca + 2$; б) $-\frac{5}{7}ab$; в) $\frac{5}{7a}$; г) $\frac{3}{a-2b}$; д) $-6?$

2. Приведите многочлен к стандартному виду:

- а) $-5 + 8x - 12x + 13 - a$; б) $15x - x^2 + x - 5x^2$;
в) $5 + 8a - 10a - 5$.

3. Приведите многочлен к стандартному виду, укажите его степень:

- а) $-\frac{1}{6}a^2 - 4a + a + \frac{1}{6}a^2$; б) $4a - a^2b + a^2b - 4a + 2$;
в) $7a^3b - 3a \cdot 3a^2b - abb + 6bab$;
г) $4a^2 \cdot 3a - 7a \cdot 6a^2 + a^4$.

4. Вместо каждой из букв C и D подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство (найдите два решения задачи):

- а) $6a + C + 2a = 4b + D$; б) $3a^2 - C + 6a = a^2 + D$.

5*. Составьте все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов $7x^2$, $-8x$, 3 не более одного раза.

C-8

Сложение и вычитание многочленов

Вариант I

1. Найдите сумму многочленов:

- а) $(3x - 2y) + (3x + 2y)$; б) $(4 + x - x^2) + (x^2 - x)$.

2. Найдите разность многочленов:
а) $(4x - y) - (2x + y)$; б) $(5 - x + 3x^2) - (2x^2 - x + 5)$.
3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
а) $3x^2 - (2 + 3x - 5x^2)$; б) $4 + (-x + 5x^2) + 2x$;
в) $x - (4 + 3x - x^2) + (2 - x^2)$;
г) $5 + (2x^2 - x) - (4x^2 + 5) + x$.
4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак перед скобкой изменился на противоположный:
а) $x^2 - (2 - 3x)$; б) $5x + (-x + 5)$.
5. Два последних члена многочлена $7 - 2x + 3y - 4z$ заключите в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.
- 6*. Подберите такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если
$$B = (2x - 3x^2) - (x^2 - 5x + 1) + A.$$

Вариант II

1. Найдите сумму многочленов:
а) $(4x - 3y) + (4x + 3y)$; б) $(3 + 2x - x^3) + (x^2 - x)$.
2. Найдите разность многочленов:
а) $(5x - y) - (5x + y)$; б) $(4 - x + 3x^2) - (2x^2 - x + 4)$.
3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
а) $6y^2 - (-3 + 2y - 2y^2)$; б) $9 + (y^2 - 4) + 5y$;
в) $2y - (5 - 3y^2) + (4 - y^2)$;
г) $6 - (9 - 2y^2) + (6y^2 - 7y + 3) + 7y$.
4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак перед скобкой изменился на противоположный:
а) $2x^2 - (4 - 2x)$; б) $4x + (-2x + 1)$.
5. Два последних члена многочлена $9 - x - 2y + 3z$ заключите в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.
- 6*. Подберите такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если
$$B = (3x - 2x^2) - (2x^2 - 4x + 2) + A.$$

Вариант III

1. Найдите сумму многочленов:
а) $(5x - 4y) + (5x + 4y)$;
б) $(2 + 3x - 4x^2) + (4x^2 - 3x + 2)$.

2. Найдите разность многочленов:
 - а) $(6x - 3y) - (6x - 2y)$; б) $(2a + 3) - (2a - 1)$;
 - в) $(3 - 2x + 3x^2) - (4x^2 - 2x + 3)$.
3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
 - а) $5x^2 - (3 - 4x - x^2)$; б) $5 + (-4x + 6x^2) + 4x$;
 - в) $7x - (8 + 4x - 3x^2) + (5 - 3x^2)$;
 - г) $6 + (2x^2 - 5x) - (4x^2 + 6) + 5x$.
4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак перед скобкой изменился на противоположный:
 - а) $4x^2 - (6 - 5x)$;
 - б) $6x + (-3x + 4)$.
5. Три последних члена многочлена $12 - x^2 - 3x^3 + 5x^4$ заключите в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.
- 6*. Подберите такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = (4x - x^2) - (3x^2 - 3x + 3) + A.$$

Вариант IV

1. Найдите сумму многочленов:
 - а) $(6x - 5y) + (6x + 5y)$;
 - б) $(1 + 4x - 3x^2) + (3x^2 - 4x + 2)$.
2. Найдите разность многочленов:
 - а) $(7x - 2y) - (7x - 3y)$; б) $(3a + 5) - (3a - 7)$;
 - в) $(2 - 3x + 3x^2) - (5x^2 - 3x + 2)$.
3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
 - а) $6y^2 - (-3 + y + 2y^2)$; б) $9 + (y^2 - 4) + 5y$;
 - в) $2y - (5 - 3y + 5y^2) + (4 - 5y^2)$;
 - г) $7 + (9y - 3y^2) + (5y^2 - 7y + 7) - 2y$.
4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак перед скобкой изменился на противоположный:
 - а) $3x^2 - (5 - 4x)$;
 - б) $7x + (-4x + 3)$.
5. Три последних члена многочлена $13 - 2x^2 + x^3 - 4x^4$ заключите в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.
- 6*. Подберите такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = (5x - x^2) - (5x^2 - 2x + 4) + A.$$

Вариант I

- Найдите произведение многочлена и одночлена:
а) $3(a-2)$; б) $a(4+3a)$;
в) $0,2x(5x+3)$; г) $-0,5x(4,2x-7)$.
- Преобразуйте произведение многочлена и одночлена в многочлен стандартного вида:
а) $3a(a^2+3a-2)$; б) $2a^2(3-2a+4a^2)$;
в) $0,4x(3-5x+10x^2)$; г) $-3x^2(0,8x-0,7)$;
д) $5x(2-3x)+3(5x^2-x)-7(x-1)$.
- Вынесите за скобки общий множитель:
а) $3x-6$; б) $4x^2-6x+12$;
в) $5x+4x^2$; г) $5x^3+15x^2-25x$.
- Преобразуйте выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:
а) $3(5-2x)-x(-5+2x)$; б) $x(5x-1)+11(-5x+1)$.
- Подберите такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если
$$B = 7x(x-3) - 3(x-10) + A.$$

Вариант II

- Найдите произведение многочлена и одночлена:
а) $4(b-3)$; б) $b(3+2b)$;
в) $0,1y(5y+8)$; г) $-0,6y(1,5y-3)$.
- Преобразуйте произведение многочлена и одночлена в многочлен стандартного вида:
а) $4b(b^2-2b+3)$; б) $3b^2(5+3b-2b^2)$;
в) $0,5y(6-4y+8y^2)$; г) $-4y^2(0,5y-0,3)$;
д) $4x(3-5x)+5(4x^2-2x)-2(x-2)$.
- Вынесите за скобки общий множитель:
а) $4x-8$; б) $15x^2-10x+5$;
в) $3x+2x^2$; г) $3x^3+9x^2-12x$.
- Преобразуйте выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:
а) $4(4-3x)-x(-4+3x)$; б) $x(6x-2)+12(-6x+2)$.
- Подберите такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если
$$B = 6x(x-4) - 5(x-5) + A.$$

Вариант III

1. Найдите произведение многочлена и одночлена:
а) $5(4b - 1,2)$; б) $3b(4 + 5b)$;
в) $0,2y(4y + 9)$; г) $-8y^2(2,5y - 0,6)$.
2. Преобразуйте произведение многочлена и одночлена в многочлен стандартного вида:
а) $5a(2a^2 + 4a - 3)$; б) $4a^2(5 - 6a + 3a^2)$;
в) $0,8x(7 - 8x + 9x^2)$; г) $-1,5x(4x^2 - 6,4x + 7)$;
д) $6x(4 - 5x) + 3(10x^2 - 6x) - 6(x - 3)$;
е) $x - 2(x - 3(x + 4)) + 5$.
3. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $7x - 21$; б) $8x^2 - 12x + 24$;
в) $13x + 17x^2$; г) $6x^3 + 8x^2 - 10x$.
4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:
а) $5(3 - 4x) - x(-3 + 4x)$; б) $x(7x - 3) + 13(-7x + 3)$.
- 5*. Подберите такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если
$$B = 8x(3x - 1) - 10(x - 1) + A.$$

Вариант IV

1. Найдите произведение многочлена и одночлена:
а) $5(b - 7)$; б) $b(4 + 3b)$;
в) $0,1y(4y + 5)$; г) $-5y^2(0,7y - 0,8)$.
2. Преобразуйте произведение многочлена и одночлена в многочлен стандартного вида:
а) $3b(b^2 - 2b + 3)$; б) $4b^2(5 + 3b - 2b^2)$;
в) $1,5y(6 - 4y + 8y^2)$; г) $-0,8y(8y^2 + 2,5y - 3)$;
д) $7x(3 - 6x) + 3(14x^2 - 5x) - 6(x - 1)$;
е) $x + 2(x + 3(x - 4)) - 5$.
3. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $8x - 24$; б) $9x^2 - 18x + 36$;
в) $15x + 11x^2$; г) $5x^3 + 10x^2 - 15x$.
4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:
а) $6(2 - 5x) - x(-2 + 5x)$; б) $x(8x - 4) + 14(-8x + 4)$.
- 5*. Подберите такой многочлен A , чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если
$$B = 9x(2x - 2) - 8(x - 2) + A.$$

Вариант I

1. Выполните умножение:
а) $(3 + a)(2a + 1)$; б) $(5a + a^2)(3 - 2a)$;
в) $(3 - x)(2 - 4x)$; г) $(-x - 3)(2x - 4)$.
2. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $8 - (2 + a)(3a + 4)$; б) $2a^3 + (a + a^2)(5 - 2a)$;
в) $(1 - x)(2 + 2x) + (2 - x)(1 - 2x)$;
г) $(x - 2)(x - 5) - (x - 3)(x - 4)$.
3. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $3x^2 - 6x$; б) $x(x - 3) - 8(x - 3)$.
4. Разложите на множители выражение:
а) $3(x - 4) + x^2 - 4x$; б) $2x - 8 - x(x - 4)$;
в) $x^3 + 5x^2 - 2x - 10$; г) $x^3 - 6x^2 - 2x + 12$.
- 5*. Представьте многочлен $x^2 + 3x - 4$ в виде произведения двучленов.

Вариант II

1. Выполните умножение:
а) $(2 + b)(3b + 2)$; б) $(5b - b^2)(2 + 3b)$;
в) $(2 - b)(3 - 5b)$; г) $(-3b - 4)(2b - 5)$.
2. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $9 - (3 + a)(2a + 3)$; б) $4a^3 + (a - a^2)(3 + 4a)$;
в) $(1 - 2x)(2 + x) + (1 - x)(2 - 2x)$;
г) $(x - 3)(x - 4) - (x - 5)(x - 2)$.
3. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $14x + 7x^2$; б) $x(x - 4) - 5(x - 4)$.
4. Разложите на множители выражение:
а) $2(x - 3) + x^2 - 3x$; б) $3x - 6 - x(x - 2)$;
в) $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$; г) $x^3 - 5x^2 - 3x + 15$.
- 5*. Представьте многочлен $x^2 - 3x + 2$ в виде произведения двучленов.

Вариант III

1. Выполните умножение:
а) $(3 + 4a)(2a + 6)$; б) $(3a + a^2)(4 - 5a)$;
в) $(7 - 4x)(8 - 3x)$; г) $(-3x - 4)(3x - 4)$.
2. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $9a - (4 + a)(2a + 1)$; б) $3a^3 + (2a + 3a^2)(6 - a)$;

- в) $(3-x)(1+2x) + (1-x)(3-2x)$;
 г) $(x-2)(2x-8) - (x-3)(2x-4)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:

- а) $5x^2 - 15x$; б) $x(x^2 - 2) - 4(x^2 - 2)$;
 в) $4(x-6) - 3x(-6+x)$; г) $6(x-6) + x(6-x)$.

4. Разложите на множители выражение:

- а) $4(x-5) + 3x^2 - 15x$; б) $4x - 8 - x(x-2)$;
 в) $2x^3 + 6x^2 - 3x - 9$; г) $x^3 - 7x^2 - 3x + 21$.

5*. Представьте многочлен $x^2 - 4x + 3$ в виде произведения двучленов.

Вариант IV

1. Выполните умножение:

- а) $(5 + 3b)(3b + 4)$; б) $(3b - b^2)(4 + 7b)$;
 в) $(2 - 3b)(4 - 5b)$; г) $(-5b - 3)(5b - 3)$.

2. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

- а) $16a - (5 + a)(2a + 6)$; б) $4a^3 + (a + 4a^2)(4 - a)$;
 в) $(4 - x)(1 + 3x) + (2 - x)(1 - 5x)$;
 г) $(x - 4)(2x - 10) - (2x - 6)(x - 5)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:

- а) $18x + 9x^2$; б) $x(x - 4) - 5(x - 4)$;
 в) $5(x - 5) - 2x(-5 + x)$; г) $5(x - 7) + x(7 - x)$.

4. Разложите на множители выражение:

- а) $5(x - 4) + 2x^2 - 8x$; б) $5x - 10 - x(x - 2)$;
 в) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 10$; г) $x^3 - 8x^2 - 3x + 24$.

5*. Представьте многочлен $x^2 + 4x - 5$ в виде произведения двучленов.

C-11

Числовое значение выражения

Вариант I

1. Вычислите значение выражения:

- а) $5(3 - 2a) + 3(4a - 5)$ при $a = 3,5$;
 б) $7,2(a + a^2) - 3,6(a + 2a^2)$ при $a = -0,1$;
 в) $(3 - x) - (2 - 4x) + (4 - 3x)$ при $x = 0,1234$.

2. Найдите значение x , при котором числовое значение выражения

$$2x - (7x - 13)$$

равно 1.

3. Найдите числовое значение выражения

$$(1 + x)(2 - x) + (2 + x)(3 + x)$$

при $x = \frac{5}{6}$.

4*. Докажите, что значение выражения

$$(3x - 2)(2x - 3) - (3x + 2)(2x + 3) + 26x + 1$$

не зависит от значений x .

Вариант II

1. Вычислите значение выражения:

а) $4(5 - 3a) + 5(3a - 4)$ при $a = 2,5$;

б) $6,4(a + a^2) - 3,2(a + 2a^2)$ при $a = -0,1$;

в) $(4 - 2x) - (3 - 5x) + (4 - 3x)$ при $x = 0,2345$.

2. Найдите значение x , при котором числовое значение выражения

$$3x - (8x - 11)$$

равно 1.

3. Найдите числовое значение выражения

$$(1 - x)(2 + x) + (3 + x)(4 + x)$$

при $x = \frac{5}{6}$.

4*. Докажите, что значение выражения

$$(3x - 1)(4x - 3) - (3x + 1)(4x + 3) + 26x + 2$$

не зависит от значений x .

Вариант III

1. Вычислите значение выражения:

а) $7(8 - 2a) + 4(3a - 14)$ при $a = 4,5$;

б) $7,5(a + a^2) - 2,5(a + 3a^2)$ при $a = -0,12$;

в) $(7 - 5x) - (6,4 - 9x) + (4,4 - 4x)$ при $x = 0,3456$.

2. Найдите значение x , при котором числовое значение выражения

$$5 + 2x - 3(x - 13)$$

равно 50.

3. Найдите числовое значение выражения

$$(2 - x)(3 + x) + (4 - x)(5 - x)$$

при $x = \frac{3}{20}$.

4*. Докажите, что значение выражения

$$(4x - 1)(5x - 2) - (4x + 1)(5x + 2) + 26x + 3$$

не зависит от значений x .

Вариант IV

1. Вычислите значение выражения:

а) $8(5 - 3a) + 2(11a - 20)$ при $a = 5,5$;

б) $5,6(a + a^2) - 2,8(a + 2a^2)$ при $a = -0,11$;

в) $(6 - 7x) - (8,2 - 9x) + (7,2 - 2x)$ при $x = 0,4567$.

2. Найдите значение x , при котором числовое значение выражения

$$7 + 3x - 4(x - 12)$$

равно 60.

3. Найдите числовое значение выражения

$$(3 - x)(2 + x) + (5 - x)(6 - x)$$

при $x = \frac{3}{20}$.

- 4*. Докажите, что значение выражения

$$(3x - 2)(5x - 1) - (3x + 2)(5x + 1) + 26x + 4$$

не зависит от значений x .

С-12 Формулы сокращённого умножения

Вариант I

1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(a + b)^2$; б) $(a + b)(a - b)$; в) $(x - y)^3$.

2. Запишите выражение в виде многочлена:

а) $(a - 4)^2$; б) $(a + 7)(a - 7)$;
в) $(x + 3)^3$; г) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$.

3. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена:

а) $x^2 + 4x + 4$; б) $x^2 - 10x + 25$;
в) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; г) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

- 4*. Запишите многочлен

$$x^2 + 4x - 5$$

в виде произведения двучленов.

Вариант II

1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(a - b)^2$; б) $(a - b)(a + b)$; в) $(x + y)^3$.

2. Запишите выражение в виде многочлена:

а) $(a + 5)^2$; б) $(a + 6)(a - 6)$;
в) $(x - 2)^3$; г) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

3. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена:

а) $x^2 - 2x + 1$; б) $x^2 + 6x + 9$;
в) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; г) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$.

- 4*. Запишите многочлен

$$x^2 + 6x - 7$$

в виде произведения двучленов.

Вариант III

1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $(x+y)^2$; б) $(x+y)(x-y)$; в) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
2. Запишите выражение в виде многочлена:
а) $(a-6)^2$; б) $(a+4)(a-4)$;
в) $(2x+5)^3$; г) $(x-3)(x^2+3x+9)$.
3. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена:
а) $x^2-8x+16$; б) $49x^2+14x+1$;
в) $x^3+15x^2+75x+125$;
г) $x^3-0,6x^2+0,12x-0,008$.
- 4*. Запишите многочлен
$$x^2-4x-5$$

в виде произведения двучленов.

Вариант IV

1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $(x-y)^2$; б) $(x-y)(x+y)$; в) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
2. Запишите выражение в виде многочлена:
а) $(a+4)^2$; б) $(a+5)(a-5)$;
в) $(2x-3)^3$; г) $(x+2)(x^2-2x+4)$.
3. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена:
а) $x^2+18x+81$; б) $100x^2-20x+1$;
в) $x^3+12x^2+48x+64$;
г) $x^3-0,9x^2+0,27x-0,027$.
- 4*. Запишите многочлен
$$x^2-6x-7$$

в виде произведения двучленов.

С-13 Разложение многочленов на множители

Вариант I

1. Разложите на множители многочлен:
а) b^3-2b^2+b ; б) $ab^3+2a^2b^2+a^3b$;
в) $3a+3b-ax-bx$; г) $5a-b+5a^3-ab$;
д) $7a-7b+2b^2-2ab$; е) b^4-b^2+4b+4 .
2. Разложите на множители многочлен:
а) $x^2-4-3ax+6a$; б) x^3+27 .
- 3*. Разложите многочлен x^4-5x^2+4 на возможно большее число множителей.

Вариант II

1. Разложите на множители многочлен:

- а) $a^3 + 2a^2 + a$; б) $a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$;
в) $5a + 5b - ay - by$; г) $a - 5b + a^2 - 5ab$;
д) $8a - 8b - 3b^2 + 3ab$; е) $a^4 - a^2 + 6a + 6$.

2. Разложите на множители многочлен:

- а) $x^2 - 9 - 2ax - 6a$; б) $x^3 - 8$.

3*. Разложите многочлен $x^4 - 10x^2 + 9$ на возможно большее число множителей.

Вариант III

1. Разложите на множители многочлен:

- а) $b^4 - 2b^3 + b^2$; б) $a^2b^3 + 2a^3b^2 + a^4b$;
в) $9a + 9b - ax^2 - bx^2$; г) $3a + b - 3a^3 + ab$;
д) $5a - 5b + b^2 - ab$; е) $b^2 + 8b + 16 - c^2$.

2. Разложите на множители многочлен:

- а) $x^2 - 9 - 3ax + 9a$; б) $x^2 + 5x + 4$; в) $x^3 + 64$.

3*. Разложите многочлен $x^4 - 17x^2 + 16$ на возможно большее число множителей.

Вариант IV

1. Разложите на множители многочлен:

- а) $a^4 + 2a^3 + a^2$; б) $a^3b^2 - 2a^2b^3 + ab^4$;
в) $4a + 4b - ay^2 - by^2$; г) $a - 2b - a^3 - 2ab$;
д) $6a - 6b - 5b^2 + 5ab$; е) $a^2 + 6a + 9 - b^2$.

2. Разложите на множители многочлен:

- а) $x^2 - 16 - ax + 4a$; б) $x^2 + 6x + 5$; в) $x^4 + 64$.

3*. Разложите многочлен $x^4 - 26x^2 + 25$ на возможно большее число множителей.

C-14

Алгебраические дроби

Вариант I

1. Сократите дробь:

- а) $\frac{3x^2}{15x^3}$; б) $\frac{2x-12}{x-6}$; в) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$.

2. Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

- а) $\frac{3x+2}{x-1}$; б) $-\frac{6x-1}{x+1}$.

3. Приведите дроби к общему знаменателю:

- а) $\frac{x}{x-5}$ и $\frac{3}{5-x}$; б) $\frac{x}{(x-4)^2}$ и $\frac{7}{x^2-16}$; в) $\frac{5}{x+1}$ и $\frac{7}{x-2}$.

4. Запишите многочлен $2x + 3$ в виде дроби со знаменателем:

- а) 1; б) 5; в) $x - 1$.

5*. Сократите дробь $\frac{x^3 - 8}{3x^2 + 6x + 12}$.

Вариант II

1. Сократите дробь:

- а) $\frac{4x^3}{12x^2}$; б) $\frac{2x+6}{3x+9}$; в) $\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$.

2. Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

- а) $\frac{2x-3}{x+5}$; б) $-\frac{3x+1}{x-2}$.

3. Приведите дроби к общему знаменателю:

- а) $\frac{4}{x-6}$ и $\frac{x}{6-x}$; б) $\frac{x}{(x+5)^2}$ и $\frac{5}{x^2-25}$; в) $\frac{x}{x-3}$ и $\frac{2}{x+2}$.

4. Запишите многочлен $3x - 2$ в виде дроби со знаменателем:

- а) 1; б) 4; в) $x + 1$.

5*. Сократите дробь $\frac{2x^2 - 4x + 8}{x^3 + 8}$.

Вариант III

1. Сократите дробь:

- а) $\frac{14x^3}{49x^2}$; б) $\frac{2x-8}{3x-12}$; в) $\frac{x^2+12x+36}{x^2-36}$.

2. Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

- а) $\frac{x^2-3x+5}{x-8}$; б) $-\frac{5x-12}{x+13}$.

3. Приведите дроби к общему знаменателю:

- а) $\frac{x}{x-8}$ и $\frac{4x}{24-3x}$; б) $\frac{x}{(6-x)^2}$ и $\frac{5}{x^2-36}$; в) $\frac{11}{3x+4}$ и $\frac{12}{2x-3}$.

4. Запишите многочлен $4x + 5$ в виде дроби со знаменателем:

- а) 1; б) $x + 1$; в) $x^2 - 3$.

5*. Сократите дробь $\frac{x^3 - 27}{4x^2 + 12x + 36}$.

Вариант IV

1. Сократите дробь:

а) $\frac{17x^2}{51x^3}$; б) $\frac{3x+15}{4x+20}$; в) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$.

2. Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

а) $\frac{x^2+6x-7}{x-9}$; б) $-\frac{7x-13}{x-12}$.

3. Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{x}{x-7}$ и $\frac{11}{21-3x}$; б) $\frac{x}{(7-x)^2}$ и $\frac{4}{x^2-49}$; в) $\frac{13}{3x-4}$ и $\frac{11}{2x+6}$.

4. Запишите многочлен $5x+4$ в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) $x-1$; в) x^2+3 .

5*. Сократите дробь $\frac{2x^2-6x+18}{x^3+27}$.

C-15

Сложение и вычитание алгебраических дробей

Вариант I

1. Преобразуйте выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{-x+2}$; б) $\frac{3x}{4x-7} - \frac{1}{7-4x}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{3x+1}{x+1} + \frac{3+x}{x+1}$; б) $\frac{3x}{x-4} + \frac{x+8}{4-x}$;
в) $\frac{5x+1}{x-1} - \frac{6}{x-1}$; г) $\frac{5x-3}{x-3y} - \frac{1-5y}{3y-x}$.

3*. Найдите многочлен A , для которого верно равенство

$$\frac{2x-1}{x-5} - \frac{x+2}{5-x} = \frac{A}{x-5}.$$

Вариант II

1. Преобразуйте выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{5x}{x-4} + \frac{13+x}{4-x}$; б) $\frac{12x}{5x-3} - \frac{3}{3-5x}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{2x+8}{x+1} + \frac{2+3x}{x+1}$; б) $\frac{3x}{x-2} + \frac{2x+2}{2-x}$;

$$\text{в)} \frac{7x-2}{x-1} - \frac{5}{x-1}; \quad \text{г)} \frac{3x-5}{x-4y} - \frac{1-3y}{4y-x}.$$

3*. Найдите многочлен A , для которого верно равенство

$$\frac{3x-1}{x-4} - \frac{x-3}{4-x} = \frac{A}{x-4}.$$

Вариант III

1. Преобразуйте выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\text{а)} \frac{4x+2}{2x-3} + \frac{x-17}{3-2x}; \quad \text{б)} \frac{1-2x}{4x-3} - \frac{3+x}{3-4x}.$$

2. Выполните действия:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{2x+13}{x+5} + \frac{2+x}{x+5}; & \text{б)} \quad & \frac{4x-1}{3x-7} + \frac{13-2x}{7-3x}; \\ \text{в)} \quad & \frac{7x-11}{x-4} - \frac{13+x}{x-4}; & \text{г)} \quad & \frac{5x-6}{x^2-3xy} - \frac{5y-2}{xy-3y^2}. \end{aligned}$$

3*. Найдите многочлен A , для которого верно равенство

$$\frac{4x+5}{2x-7} + \frac{3x-1}{7-2x} = \frac{A}{2x-7}.$$

Вариант IV

1. Преобразуйте выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\text{а)} \frac{x+12}{8x-7} + \frac{2x-7}{7-8x}; \quad \text{б)} \frac{11-x}{5x-9} - \frac{5+4x}{9-5x}.$$

2. Выполните действия:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{3x+11}{x+4} + \frac{9+2x}{x+4}; & \text{б)} \quad & \frac{7x-11}{2x-5} + \frac{x+4}{5-2x}; \\ \text{в)} \quad & \frac{5x-11}{x-6} - \frac{7+2x}{x-6}; & \text{г)} \quad & \frac{4x-10}{x^2-5xy} - \frac{4y-2}{xy-5y^2}. \end{aligned}$$

3*. Найдите многочлен A , для которого верно равенство

$$\frac{5x+4}{7x-2} + \frac{x-3}{2-7x} = \frac{A}{7x-2}.$$

C-16

Умножение и деление алгебраических дробей

Вариант I

1. Вычислите произведение:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{5x}{2} \cdot \frac{6}{x^2}; & \text{б)} \quad & (x-1) \cdot \frac{2x+1}{3x-3}; \\ \text{в)} \quad & \frac{3x+6}{x-3} \cdot \frac{4x-12}{x^2-4}. \end{aligned}$$

2. Вычислите частное:

а) $3x : \frac{2x^2}{x-7}$; б) $\frac{5x+10}{x-5} : \frac{3x+6}{x^2-25}$; в) $\frac{4x-8}{x^2-9} : \frac{5x-10}{(x+3)^2}$.

3*. Вычислите:

$$\frac{2x-4}{x+1} \cdot \frac{4x-12}{3x-6} : \frac{2x-6}{3x+3}.$$

Вариант II

1. Вычислите произведение:

а) $\frac{3x^2}{10} \cdot \frac{5}{x}$; б) $(x+1) \cdot \frac{5x-3}{4x+4}$; в) $\frac{3x+9}{x-4} \cdot \frac{4x-16}{x^2-9}$.

2. Вычислите частное:

а) $2x : \frac{3x^2}{x-4}$; б) $\frac{5x+15}{3x-15} : \frac{3x+9}{x^2-25}$; в) $\frac{7x-14}{(x-3)^2} : \frac{2x-4}{x^2-9}$.

3*. Вычислите:

$$\frac{3x-6}{x+1} \cdot \frac{2x-10}{4x-8} : \frac{x-5}{4x+4}.$$

Вариант III

1. Вычислите произведение:

а) $\frac{4x}{9} \cdot \frac{12}{x^2}$; б) $(x+1) \cdot \frac{2x+5}{3x^2-3}$; в) $\frac{x^2-4}{2x-6} \cdot \frac{5x-15}{2x+4}$.

2. Вычислите частное:

а) $(2x-6) : \frac{3x-9}{5x^2}$; б) $\frac{4x+12}{3x-12} : \frac{x^2+6x+9}{8-2x}$; в) $\frac{2x+12}{(3-x)^2} : \frac{x^2+6x}{x-3}$.

3*. Вычислите:

$$\frac{5x-10}{x+5} : \frac{2x-4}{3x+3} \cdot \frac{2x+10}{5x+5}.$$

Вариант IV

1. Вычислите произведение:

а) $\frac{12x^2}{35} \cdot \frac{5}{2x}$; б) $(x-1) \cdot \frac{3x-7}{4x^2-4}$; в) $\frac{x^2-9}{3x-6} \cdot \frac{5x-10}{3x+9}$.

2. Вычислите частное:

а) $(2x+4) : \frac{3x+6}{7x^2}$; б) $\frac{5x-15}{3x-18} : \frac{x^2-6x+9}{12-2x}$; в) $\frac{3x+12}{(7-x)^2} : \frac{x^2+4x}{x-7}$.

3*. Вычислите:

$$\frac{3x-9}{x+2} : \frac{2x-6}{7x-14} \cdot \frac{2x+4}{3x-6}.$$

Вариант I

1. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(x + 3 + \frac{9}{x-3}\right) \cdot \frac{5x-15}{x^2}$;

б) $(x^2 - 4) \cdot \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right)$.

2. Выполните действия:

а) $\left(\frac{2x-y}{2x+y} - \frac{2x+y}{2x-y}\right) : \frac{4xy}{y^2-4x^2}$; б) $\frac{\frac{1}{xy} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{1-x+y} : \frac{x}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+1}{x^2-6x+9} - \frac{x-1}{x^2-9}\right) : \left(\frac{x+1}{x^2-9} - \frac{x-1}{x^2+6x+9}\right).$$

Вариант II

1. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(x - 2 + \frac{4}{x+2}\right) \cdot \frac{6x+12}{x^2}$;

б) $(x^2 - 9) \cdot \left(\frac{2x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}\right)$.

2. Выполните действия:

а) $\left(\frac{x-2y}{x+2y} - \frac{x+2y}{x-2y}\right) : \frac{4xy}{x^2-4y^2}$; б) $\frac{\frac{1}{xy} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}}{1+x-y} : \frac{x}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+2}{x^2-2x+1} - \frac{x-2}{x^2-1}\right) : \left(\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2+2x+1}\right).$$

Вариант III

1. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(x - 4 + \frac{16}{x+4}\right) \cdot \frac{5x+20}{x^2}$;

б) $(x^2 - 25) \cdot \left(\frac{2x}{25-x^2} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+5}\right)$.

2. Выполните действия:

а) $\left(\frac{4x-3y}{4x+3y} - \frac{4x+3y}{4x-3y}\right) : \frac{12xy}{9y^2-16x^2}$; б) $\frac{\frac{1}{xy} + \frac{2}{y} - \frac{3}{x}}{1+2x-3y} : \frac{x^2}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+3}{x^2-8x+16} - \frac{x-3}{x^2-16}\right) : \left(\frac{x+3}{x^2-16} - \frac{x-3}{x^2+8x+16}\right).$$

Вариант IV

1. Упростите выражение:

а) $\left(x - 5 + \frac{25}{x+5}\right) \cdot \frac{7x+35}{x^2}$;

б) $(x^2 - 16) \cdot \left(\frac{2x}{16-x^2} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4}\right)$.

2. Выполните действия:

а) $\left(\frac{3x-4y}{3x+4y} - \frac{3x+4y}{8x-4y}\right) : \frac{12xy}{16y^2-9x^2}$; б) $\frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{x}}{3-2x-y} : \frac{x^2}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+4}{x^2-10x+25} - \frac{x-4}{x^2-25}\right) : \left(\frac{x+4}{x^2-25} - \frac{x-4}{x^2+10x+25}\right).$$

С-18

Числовое значение рационального выражения

Вариант I

1. Найдите значение рационального выражения:

а) $\frac{12}{x^2-4} + \frac{3}{x+2}$ при $x = 2002$;

б) $\frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{x-1}{x+1}$ при $x = 19$;

в) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ при $a = 0,05$, $b = 13\frac{14}{15}$.

2. Преобразуйте в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{2}{x-2} - \frac{12x}{x^3-8} - \frac{x-2}{x^2+2x+4}$$

и найдите значение полученной дроби при: а) $x = 0$;
б) $x = 2$.

3*. Докажите, что значение рационального выражения

$$\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-2}{x+3} + \frac{2x^2-10x-18}{x^2-9}$$

одно и то же при каждом значении x , кроме $x = 3$ и $x = -3$.

Вариант II

1. Найдите значение рационального выражения:

а) $\frac{-6}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}$ при $x = 1999$;

б) $\frac{x^2}{x^2-2x+1} - \frac{x+1}{x-1}$ при $x = 21$;

в) $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} - \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ при $a = 14\frac{15}{16}$, $b = 0,05$.

2. Преобразуйте в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{2}{x-3} - \frac{18x}{x^3-27} - \frac{x-3}{x^2+3x+9}$$

и найдите значение полученной дроби при: а) $x=0$;
б) $x=3$.

- 3*. Докажите, что значение рационального выражения

$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-3}{x+2} + \frac{2x^2-10x-8}{x^2-4}$$

одно и то же при каждом значении x , кроме $x=2$ и $x=-2$.

Вариант III

1. Найдите значение рационального выражения:

а) $\frac{2x+24}{x^2-9} + \frac{3}{x+3}$ при $x=1997$;

б) $\frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{3x-4}{3x+3}$ при $x=19$;

в) $\frac{8a^3-b^3}{4a^3+2ab+b^2} + \frac{8a^3+b^3}{4a^3-2ab+b^2}$ при $a=0,05$, $b=-13\frac{14}{15}$.

2. Преобразуйте в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{2}{x+3} + \frac{18x}{x^3+27} - \frac{x+3}{x^2-3x+9}$$

и найдите значение полученной дроби при $x=-3$.

- 3*. Докажите, что значение рационального выражения

$$\frac{x+3}{x-5} - \frac{x-3}{x+5} + \frac{3x^2-16x-75}{x^2-25}$$

одно и то же при каждом значении x , кроме $x=5$ и $x=-5$.

Вариант IV

1. Найдите значение рационального выражения:

а) $\frac{3x-28}{x^2-16} + \frac{2}{x-4}$ при $x=1996$;

б) $\frac{x^2}{x^2+4x+4} - \frac{2x-5}{2x+4}$ при $x=18$;

в) $\frac{a^3+8b^3}{a^3-2ab+4b^2} - \frac{a^3-8b^3}{a^3+2ab+4b^2}$ при $a=-14\frac{15}{16}$, $b=0,05$.

2. Преобразуйте в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{2}{x+2} + \frac{12x}{x^3+8} - \frac{x+2}{x^2-2x+4}$$

и найдите значение полученной дроби при $x=-2$.

3*. Докажите, что значение рационального выражения

$$\frac{x+5}{x-4} - \frac{x-5}{x+4} + \frac{3x^2-18x-48}{x^2-16}$$

одно и то же при каждом значении x , кроме $x=4$ и $x=-4$.

С-19

Тождества

Вариант I

1. Докажите тождество:

а) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8x}{x^2-4}$;

б) $\frac{10}{x^2+2x+1} : \frac{x}{x+1} = \frac{10}{x^2+x}$;

в) $\left(x+5+\frac{25}{x-5}\right) \cdot \frac{x-5}{x^2} = 1$;

г) $\left(\frac{x-3}{x+3} + \frac{x+3}{x-3}\right) : \frac{x^2+9}{x^2-9} = 2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

2*. Докажите тождество

$$\left(\frac{x^3-1}{x^2-2x+1} + \frac{x^3+1}{x^2+2x+1}\right) \cdot \frac{x^2-1}{x^3+2x} = 2.$$

Вариант II

1. Докажите тождество:

а) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{12x}{x^2-9}$;

б) $\frac{11}{x^2+4x+4} : \frac{x}{x+2} = \frac{11}{x^3+2x}$;

в) $\left(x-6+\frac{36}{x+6}\right) \cdot \frac{x+6}{x^2} = 1$;

г) $\left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2}\right) : \frac{x^2+4}{x^2-4} = 2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

2*. Докажите тождество

$$\left(\frac{x^3-8}{x^2-4x+4} + \frac{x^3+8}{x^2+4x+4}\right) \cdot \frac{x^3-4}{x^3+8x} = 2.$$

Вариант III

1. Докажите тождество:

а) $\frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{20x}{x^2-25}$;

б) $\frac{12}{x^2-2x+1} : \frac{x}{x-1} = \frac{12}{x^3-x}$;

в) $\left(x+7+\frac{49}{x-7}\right) \cdot \frac{7-x}{x^2} = -1$;

г) $\left(\frac{x-6}{x+6} + \frac{x+6}{x-6}\right) : \frac{x^2+36}{x^2-36} = 2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

2*. Докажите тождество

$$\left(\frac{x^3-27}{x^2-6x+9} + \frac{x^3+27}{x^2+6x+9}\right) \cdot \frac{x^2-9}{x^3+18x} = 2.$$

Вариант IV

1. Докажите тождество:

а) $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{16x}{x^2-16}$;

б) $\frac{13}{x^2-4x+4} : \frac{x}{x-2} = \frac{13}{x^2-2x}$;

в) $\left(x-8+\frac{64}{x+8}\right) \cdot \frac{-x-8}{x^2} = -1$;

г) $\left(\frac{x-4}{x+4} + \frac{x+4}{x-4}\right) : \frac{x^2+16}{x^2-16} = 2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

2*. Докажите тождество

$$\left(\frac{x^3-64}{x^3-8x+16} + \frac{x^3+64}{x^2+8x+16}\right) \cdot \frac{x^2-16}{x^3+32x} = 2.$$

C-20

Степень с целым показателем

Вариант I

1. Вычислите:

а) 2^{-3} ; б) 3^{-4} ; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$; г) $(-10)^{-2}$; д) $(-0,5)^0$.

2. Упростите:

а) $x^{-3} \cdot x$; б) $x^3 : x^{-2}$; в) $\frac{x^3 \cdot x^{-4}}{x^{-3}}$.

3. Упростите выражение $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-2} \cdot (x^{-2} + 2x^{-1} + 1)$.

4*. Вычислите: $\frac{10^{n+1} \cdot 8^n}{15^n \cdot 2^n}$, где n — любое целое число.

Вариант II

1. Вычислите:

а) 3^{-4} ; б) 4^{-2} ; в) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; г) $(-10)^{-3}$; д) $(-0,6)^0$.

2. Упростите:

а) $x^{-4} \cdot x$; б) $x^2 : x^{-1}$; в) $\frac{x^4 \cdot x^{-3}}{x^{-2}}$.

3. Упростите выражение $\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-2} \cdot (x^{-2} - 2x^{-1} + 1)$.

4*. Вычислите: $\frac{15^{n+1} \cdot 2^n}{8^n \cdot 5^n}$, где n — любое целое число.

Вариант III

1. Вычислите:

а) 4^{-1} ; б) $(0,1)^{-2}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; г) -10^{-3} ; д) $(-0,7)^0$.

2. Упростите:

а) $x^{-6} \cdot x^4$; б) $x^4 : x^{-5}$; в) $\frac{x^5 \cdot x^{-7}}{x^{-4}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{-3} \cdot (x^{-2} + 4x^{-1} + 4)$; б) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2b}\right) \cdot \left(\frac{a-2b}{a^2b^2}\right)^{-1}$.

4*. Вычислите: $\frac{12^{n+1} \cdot 5^n}{8^n \cdot 10^{2n}}$, где n — любое целое число.

Вариант IV

1. Вычислите:

а) 5^{-2} ; б) $(0,1)^{-1}$; в) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$; г) -10^{-4} ; д) $(-0,8)^0$.

2. Упростите:

а) $x^{-7} \cdot x^5$; б) $x^5 : x^{-4}$; в) $\frac{x^6 \cdot x^{-8}}{x^{-9}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{3x-1}{x}\right)^{-3} \cdot (x^{-2} - 6x^{-1} + 9)$; б) $\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{2a-b}{a^2b^2}\right)^{-1}$.

4*. Вычислите: $\frac{20^{n+1} \cdot 3^n}{12^n \cdot 5^n}$, где n — любое целое число.

С-21*

Делимость многочленов

Вариант I

1. Разделите многочлен A на многочлен B , если:

а) $A = x^3 - x^2 - 11x + 3$, $B = x + 3$;
б) $A = x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x - 2$, $B = x - 2$;
в) $A = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$, $B = x^2 + x + 1$.

2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД (A , B), если

$$A = x^3 - 6x^2 + 11x - 12, \quad B = x^2 - 2x + 3.$$

3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 - 2x^2 - x + a$, $B = x^2 - x - 2$?

Вариант II

1. Разделите многочлен A на многочлен B , если:

а) $A = x^3 + x^2 + 11x + 3$, $B = x - 3$;
б) $A = x^4 - x^3 - 7x^2 - 3x - 2$, $B = x + 2$;
в) $A = x^3 + 4x^2 - 4x + 5$, $B = x^2 - x + 1$.

2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД (A , B), если

$$A = x^3 + 6x^2 + 5x - 12, \quad B = x^2 + 2x - 3.$$

- 3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 + 2x^2 - x + a$, $B = x^2 + x - 2$?

Вариант III

1. Разделите многочлен A на многочлен B , если:
а) $A = x^3 - 15x + 4$, $B = x + 4$;
б) $A = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 13x + 12$, $B = x - 3$;
в) $A = x^3 - 4x^2 - 6x + 5$, $B = x^2 + x - 1$.
2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД (A , B), если
 $A = x^3 - 2x^2 - 29x + 30$, $B = x^2 + 4x - 5$.
- 3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 - 3x^2 - 4x + a$, $B = x^2 - x - 6$?

Вариант IV

1. Разделите многочлен A на многочлен B , если:
а) $A = x^3 - 15x - 4$, $B = x - 4$;
б) $A = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x + 12$, $B = x + 3$;
в) $A = x^3 + 3x^2 - 5x - 4$, $B = x^2 - x - 1$.
2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД (A , B), если
 $A = x^3 + 2x^2 - 19x + 30$, $B = x^2 - 4x + 5$.
- 3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 + 3x^2 - 4x + a$, $B = x^2 + x - 6$?

С—22

Линейные уравнения

Вариант I

Решите уравнение (1—4).

1. а) $2x = 7$; б) $2x = 0$; в) $0 \cdot x = 2$.
2. а) $7x - 3 = 2x + 1$; б) $2x + 3 = 5x - 1$;
в) $3(x - 2) = 5x + 3$; г) $5x - 7(x - 3) = 4x + 5$.
3. а) $3(2x - 0,8) = 2(3x - 1,2)$;
б) $5(2x - 0,4) - 3x = 7x - 2$.
- 4*. $x + (2x - (3x + 4)) = 4x - (3x + (2x - 1))$.

Вариант II

Решите уравнение (1—4).

1. а) $5x = 3$; б) $3x = 0$; в) $0 \cdot x = 3$.
2. а) $6x - 2 = x + 3$; б) $3x + 2 = 6x - 4$;
в) $2(x - 3) = 4x + 1$; г) $2x - 5(x - 4) = 3x + 4$.

3. а) $4(5x + 1) = 5(4x + 0,8)$;
 б) $3(2x - 0,5) - 4x = 2x - 1,5$.
 4*. $x - (2x + (3x - 4)) = -4x + (3x - (2x + 1))$.

Вариант III

Решите уравнение (1—4).

1. а) $-7x = 5$; б) $4x = 0$; в) $0 \cdot x = 4$.
 2. а) $5x - 12 = 2x + 11$; б) $5x + 7 = 2x - 3$;
 в) $5(2x - 3) = 3x + 3$; г) $x - 3(5x - 4) = -10x + 1$.
 3. а) $5(0,4x - 0,8) = 4(0,5x + 1)$;
 б) $6(0,4x - 0,5) - 1,3x = 1,1x - 3$.
 4*. $x + 2(x - 3(x + 4)) = 4x - 3(x + 2(x - 1))$.

Вариант IV

Решите уравнение (1—4).

1. а) $-3x = -2$; б) $5x = 0$; в) $0 \cdot x = 5$.
 2. а) $6x - 13 = 3x + 10$; б) $7x + 5 = 4x - 5$;
 в) $4(3x - 2) = 5x + 9$; г) $x - 5(3x - 5) = -10x + 2$.
 3. а) $6(0,3x + 0,4) = 3(0,6x - 0,8)$;
 б) $5(0,4x - 0,6) - 0,3x = 1,7x - 3$.
 4*. $x - 2(x + 3(x - 4)) = -5x + 4(x - 3(x + 2))$.

C - 23* Линейные уравнения с параметром

Вариант I

- Решите уравнение $4x - 7a = 11$ для каждого значения a .
- При каком значении a уравнение $12x - 5a = -1$ имеет корень $x = 2$?
- При каком значении a уравнения $3x - 5a = -7$ и $4x + 7a = 18$ имеют общий корень? Найдите этот корень.
- При каком значении a уравнение $4(x + 6) - ax = 3$ не имеет корней?
- Для каждого значения a решите уравнение

$$2(x - 1) - ax = 7.$$

Вариант II

- Решите уравнение $7x - 4a = 13$ для каждого значения a .
- При каком значении a уравнение $9x - 5a = 2$ имеет корень $x = 3$?
- При каком значении a уравнения $5x - 3a = 7$ и $4x + 7a = 15$ имеют общий корень? Найдите этот корень.
- При каком значении a уравнение $3(x + 7) - ax = 6$ не имеет корней?
- Для каждого значения a решите уравнение

$$5(x - 4) - ax = 6.$$

Вариант III

1. Решите уравнение $5x - 8a = 13$ для каждого значения a .
2. При каком значении a уравнение $7x + 4a = 2$ имеет корень $x = -2$?
3. При каком значении a уравнения $5x - 3a = 9$ и $6x + 5a = 28$ имеют общий корень? Найдите этот корень.
4. При каком значении a уравнение $5(x + 1) - ax = 2$ не имеет корней?
5. Для каждого значения a решите уравнение
$$3(x - 2) - ax = 1.$$

Вариант IV

1. Решите уравнение $8x - 5a = 17$ для каждого значения a .
2. При каком значении a уравнение $5x + 6a = 3$ имеет корень $x = -3$?
3. При каком значении a уравнения $6x + 7a = 33$ и $5x - 4a = -2$ имеют общий корень? Найдите этот корень.
4. При каком значении a уравнение $7(x + 2) - ax = 1$ не имеет корней?
5. Для каждого значения a решите уравнение
$$4(x - 3) - ax = 2.$$

С-24

Решение задач с помощью линейных уравнений

Вариант I

1. Одно число в 3 раза больше другого, а их сумма равна 144. Найдите эти числа.
2. Сумма двух чисел равна 120, а разность равна 12. Найдите эти числа.
3. Сумма трёх последовательных натуральных чисел равна 102. Найдите эти числа.
- 4*. У Алёши, Бори и Вани есть по некоторой сумме денег. У Алёши — 100 р., у Бори — в 2 раза меньше, чем у остальных мальчиков вместе, а у Вани — в 3 раза меньше, чем у остальных мальчиков вместе. Сколько денег у трёх мальчиков вместе?

Вариант II

1. Одно число в 2 раза больше другого, а их сумма равна 441. Найдите эти числа.
2. Сумма двух чисел равна 140, а разность равна 14. Найдите эти числа.

3. Сумма трёх последовательных натуральных чисел равна 201. Найдите эти числа.
- 4*. У Поли, Раи и Светы есть по некоторой сумме денег. У Поли — 150 р., у Раи — в 3 раза меньше, чем у остальных девочек вместе, а у Светы — в 2 раза меньше, чем у остальных девочек вместе. Сколько денег у трёх девочек вместе?

Вариант III

1. Отношение двух чисел равно $3:5$, а их сумма равна 440. Найдите эти числа.
2. Сумма двух чисел равна 679, а разность равна 123. Найдите эти числа.
3. Сумма трёх последовательных чётных натуральных чисел равна 372. Найдите эти числа.
- 4*. У Алёши, Бори и Вани есть по некоторой сумме денег. У Алёши — 200 р., у Бори — половина того, что у остальных мальчиков вместе, а у Вани — треть того, что у остальных мальчиков вместе. Сколько денег у трёх мальчиков вместе?

Вариант IV

1. Отношение двух чисел равно $4:5$, а их сумма равна 441. Найдите эти числа.
2. Сумма двух чисел равна 967, а разность равна 321. Найдите эти числа.
3. Сумма трёх последовательных нечётных натуральных чисел равна 669. Найдите эти числа.
- 4*. У Поли, Раи и Светы есть по некоторой сумме денег. У Поли — 250 р., у Раи — треть того, что у остальных девочек вместе, а у Светы — половина того, что у остальных девочек вместе. Сколько денег у трёх девочек вместе?

С—25

Системы двух линейных уравнений

Вариант I

1. Является ли пара чисел $(2; -1)$ решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 2y = 4, \\ x - 3y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + y = 6? \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x = 9, \\ 4x - y = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x + 7y = 20. \end{cases}$$

3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x - ay + 3a = 0, \\ x + 5y - 15 = 0: \end{cases}$$

- а) имеет бесконечно много решений;
б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишите решения системы в виде пар чисел.

Вариант II

1. Является ли пара чисел $(-2; 1)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4x + y = 9, \\ -x - y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = -5, \\ 3x + 7y = 1? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x = 7, \\ 6x - y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 6, \\ x + 4y = 15. \end{cases}$

3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x - ay + 5a = 0, \\ x + 3y - 15 = 0: \end{cases}$$

- а) имеет бесконечно много решений;
б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишите решения системы в виде пар чисел.

Вариант III

1. Является ли пара чисел $(3; -2)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} -x + 2y = -1, \\ x - 3y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - y = 17, \\ 3x + 2y = 6? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x = 2, \\ 9x - y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y = 11, \\ 2x + 5y = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x + 6y = -4, \\ 3x - 6y = 12. \end{cases}$

3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2x - ay + a = 0, \\ x + y - 1 = 0: \end{cases}$$

- а) имеет бесконечно много решений;
б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишите решения системы в виде пар чисел.

Вариант IV

1. Является ли пара чисел $(-2; 3)$ решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ x - y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 2x - y = -7? \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x = 4, \\ 6x - y = 11; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - y = 2, \\ 4x + 2y = 8; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 5x + 7y = -2, \\ 2x - 7y = 23. \end{cases}$$

- 3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 3x - ay + 2a = 0, \\ x + y - 2 = 0; \end{cases}$$

- а) имеет бесконечно много решений;
б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишите решения системы в виде пар чисел.

С-26

Решение задач с помощью систем уравнений

Вариант I

1. Три пирожка и две булки стоят 40 р., а два пирожка и три булки стоят 45 р. Сколько стоит пирожок, сколько стоит булка?
2. В классе 24 человека. Чтобы выдать девочкам по три тетради, а мальчикам по две тетради, потребуется 59 тетрадей. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?
- 3*. На трёх банковских картах имелось 9000 р. На третьей карте было в 2 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — восьмая часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

Вариант II

1. Три ватрушки и пять плюшек стоят 45 р., а пять ватрушек и три плюшки стоят 43 р. Сколько стоит ватрушка, сколько стоит плюшка?
2. В классе 25 человек. Чтобы выдать девочкам по три тетради, а мальчикам по две тетради, потребуется

62 тетради. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

- 3*. На трёх банковских картах имелось 12 000 р. На третьей карте было в 2 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — одиннадцатая часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

Вариант III

1. Три марки и пять конвертов стоят 39 р., а четыре марки и два конверта стоят 24 р. Сколько стоит марка, сколько стоит конверт?
2. Токарь и его ученик за 3 ч обтачивают 75 деталей. Если токарь будет работать 2 ч, а его ученик — 4 ч, то вместе они обточат 70 деталей. Сколько деталей обтачивает каждый из них за 1 ч?
- 3*. На трёх банковских картах имелось 10 000 р. На третьей карте было в 1,5 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — девятая часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

Вариант IV

1. Пять открыток и четыре конверта стоят 44 р., а две открытки и три конверта стоят 26 р. Сколько стоит открытка, сколько стоит конверт?
2. Токарь и его ученик за 2 ч обтачивают 54 детали. Если токарь будет работать 3 ч, а его ученик — 4 ч, то вместе они обточат 92 детали. Сколько деталей обтачивает каждый из них за 1 ч?
- 3*. На трёх банковских картах имелось 8000 р. На третьей карте было в 1,5 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — третья часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

С-27*

Системы трёх линейных уравнений

Вариант I

1. Является ли тройка чисел (1; 1; 1) решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ 2x - 3y + 2z = 1, \\ x + y + z = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3y - z = 2, \\ x + z = 1? \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 4, \\ y + 5z = 7, \\ -z = -1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y - z = 5, \\ x - y + z = 5, \\ x - y - z = 3; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + 3y - z = 2, \\ -2x + 4y + 2z = 4, \\ 3x + y - 5z = -6. \end{cases}$$

3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - 2y - 3z = 6, \\ ax + 3y + z = 2: \end{cases}$$

- а) не имеет решений;
б) имеет единственное решение?

Вариант II

1. Является ли тройка чисел (1; 1; 1) решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 4, \\ 3x - 2y + 2z = 3, \\ x + y - z = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y = -1, \\ 3y + z = 4, \\ x - z = 1? \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ y + 2z = 8, \\ -z = -3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y + z = 6, \\ x - y - z = 2, \\ x + y - z = 6; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - 3y + z = 6, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ -x + 4y + 5z = 5. \end{cases}$$

3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 3y + 2z = -3, \\ ax - 2y + z = 3: \end{cases}$$

- а) не имеет решений;
б) имеет единственное решение?

Вариант III

1. Является ли тройка чисел (1; 2; -1) решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ 2x - 2y + z = -3, \\ x + y - z = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 3y + z = 5, \\ x - y = 1? \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 2z = 7, \\ -2z = -6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = 6, \\ x + y - z = -4; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ 3x - y + 2z = 7, \\ -x + 5y - 4z = -3. \end{cases}$$

3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - 3y - 2z = 7, \\ ax + 2y + 3z = -1; \end{cases}$$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение?

Вариант IV

1. Является ли тройка чисел $(1; -1; 2)$ решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 3y - z = -4, \\ 3x - 2y + z = 7, \\ x + y - z = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y = 3, \\ 3y + 2z = 1, \\ x + z = 2? \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ y + 3z = 9, \\ -2z = -4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y + z = 4, \\ x - y + z = 6, \\ x - y - z = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - 3y - 2z = -2, \\ -x + y + 5z = 13, \\ 3x + y - 4z = -10. \end{cases}$$

3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + 3y + 2z = 7, \\ ax + y - 3z = 1; \end{cases}$$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение?

РАЗДЕЛ III

Контрольные работы

К-1 *Вариант I*

- Разложите на простые множители число:
а) 388; б) 2520.
- Представьте в виде десятичной дроби число:
а) $3\frac{2}{5}$; б) $\frac{48}{30}$.
- Сравните числа: $0,3$; $\frac{1}{3}$; $0,(32)$; $0,(322)$. Выбрав единичный отрезок, укажите расположение данных чисел на координатной оси.
- Вычислите:
а) $(1,075 - 0,05) : 0,25$; б) $\frac{3}{5} : \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 1 : 1\frac{1}{9}$;
в) $(-2)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^4$.

К-1 *Вариант II*

- Разложите на простые множители число:
а) 376; б) 2640.
- Представьте в виде десятичной дроби число:
а) $3\frac{1}{4}$; б) $\frac{41}{30}$.
- Сравните числа: $0,6$; $\frac{2}{3}$; $0,(67)$; $0,(677)$. Выбрав единичный отрезок, укажите расположение данных чисел на координатной оси.
- Вычислите:
а) $(1,225 + 0,05) : 0,25$; б) $1 : 1\frac{7}{8} + \frac{3}{7} \cdot 3\frac{1}{2} - \frac{2}{3} : \frac{5}{6}$;
в) $(-3)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot 3^3$.

К-1 *Вариант III*

- Разложите на простые множители число:
а) 4680; б) 16 830; в) 14 641.
- Представьте в виде десятичной дроби число:
а) $2\frac{1}{8}$; б) $\frac{30}{13}$.

3. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

- а) $0,(7)$; б) $0,(17)$;
в) $0,(045)$; г) $3,6(17)$.

4. Вычислите:

- а) $2,2(7) + 4\frac{1}{6} \cdot (0,625 - 1,64 : 1,6)$;
б) $(0,5)^{20} \cdot 2^{21} + 3^7 \cdot 5^7 : 15^6$.

5. Сколько делителей имеет число 140?

К-1 *Вариант IV*

1. Разложите на простые множители число:

- а) 7020; б) 17 680; в) 28 561.

2. Представьте в виде десятичной дроби число:

- а) $3\frac{1}{4}$; б) $\frac{61}{41}$.

3. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

- а) $0,(8)$; б) $0,(43)$;
в) $0,(027)$; г) $5,2(18)$.

4. Вычислите:

- а) $(0,75 - 0,25 \cdot 4,2) : 0,2(45) + \frac{1}{3}$;
б) $(0,2)^{20} \cdot 5^{21} + 2^8 \cdot 5^6 : 10^5$.

5. Сколько делителей имеет число 150?

К-2 *Вариант I*

1. Запишите одночлен в стандартном виде:

- а) $3a^2bc \cdot 6abc$;
б) $\left(-1\frac{2}{3}\right)b^2c^3 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right)b^2c^2$.

2. Запишите многочлен в стандартном виде:

- а) $a - 7a$; б) $7a + b^2 - 3a - 2b^2$; в) $3x - (2a - x)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель многочлена:

- а) $12x - 6y$; б) $2ab - 6bc$; в) $9x^2 - 12x^2y^3$.

4. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

- а) $2x^2(x - 3y)$; б) $(2x - 3y)(3y + 2x)$;
в) $(a + b)(a - b)(a + b)$.

5. Разложите на множители:

- а) $m(n - 3) + 2(n - 3)$;
б) $x - 2y - a(2y - x)$.

К-2 Вариант II

1. Запишите одночлен в стандартном виде:
а) $4a^3bc \cdot 3ab^2c$;
б) $\left(-2\frac{2}{3}\right)b^3c^2 \cdot \left(-\frac{9}{16}\right)b^2c^2$.
2. Запишите многочлен в стандартном виде:
а) $b - 8b$; б) $15x + 3y^2 - 8x + 3y^2$;
в) $14b - (3a - 7b)$.
3. Вынесите за скобки общий множитель многочлена:
а) $15a + 3b$; б) $14xy - 28ay$; в) $20a^5b^3 - 15b^4$.
4. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
а) $3a(2 - b)$; б) $(5a - 6b)(6b - 5a)$;
в) $(x - y)(x + y)(x - y)$.
5. Разложите на множители:
а) $a(5 - b) + 7(5 - b)$;
б) $7a - 4b - y(4b - 7a)$.

К-2 Вариант III

1. Запишите одночлен в стандартном виде:
а) $-4,5a^3bc \cdot 1,2ab^2c^3$;
б) $\left(-3\frac{3}{4}\right)b^3c^2 \cdot \left(-\frac{8}{25}\right)b^2c^3$.
2. Упростите выражение
 $(x - 1)(x - 3)(x + 4) - (x + 1)(x + 3)(x - 4)$.
3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
а) $(x^2 - 3y)(3y + x^2)$; б) $(a^2 - b^2)(b^4 + a^2b^2 + a^4)$.
4. Разложите на множители:
а) $12x^2y - 18xy^2$; б) $15a^4b^3 - 25a^3b^4$;
в) $mn - 3m + 2n - 6$; г) $x^2 - xy - 2y^2$.
5. Докажите тождество
 $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1$.

К-2 Вариант IV

1. Запишите одночлен в стандартном виде:
а) $-3,5ab^3c^2 \cdot 1,6a^3bc$;
б) $\left(-2\frac{3}{4}\right)b^4c^2 \cdot \left(-\frac{8}{33}\right)b^2c^4$.

2. Упростите выражение

$$(x-1)(x-2)(x+3) - (x+1)(x+2)(x-3).$$

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(2b+a^3)(a^3-2b)$; б) $(x^2+y^2)(y^4-x^2y^2+x^4)$.

4. Разложите на множители:

а) $16ab^3 - 20a^2b^2$; б) $18x^4y^2 - 12x^5y^3$;
в) $mn - 2m + 4n - 8$; г) $x^2 + 3xy - 4y^2$.

5. Докажите тождество

$$(x-1)(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = x^8 - 1.$$

К-3 *Вариант I*

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(x-3)^2$; б) $(2a+5b)^2$;
в) $(a-2)(a+2)$; г) $(3x-y)(y+3x)$.

2. Разложите на множители:

а) $18ab^3 - 2a^3b$; б) $a^4 + 6a^2b + 9b^2$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

$$2(5-y^2)(y^2+5) + (y^2-3)^2 - (y^2+y-1)(4-y^2).$$

К-3 *Вариант II*

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(n-2)^2$; б) $(2a+3b)^2$;
в) $(x-5)(x+5)$; г) $(4x-y)(y+4x)$.

2. Разложите на множители:

а) $(a+3b)^2 - (3a-b)^2$; б) $a-b^2-b+a^2$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

$$3(2-x)^2 - (2x^2+x-5)(x^2-2) + (x^2+4)(4-x^2).$$

К-3 *Вариант III*

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(x^2-3y)^2$; б) $\left(2a^2 + \frac{1}{3}b^3\right)^2$;
в) $(x^2-2y)(x^2+2y)$; г) $(3x-y)(y+3x)$.

2. Разложите на множители:

а) $(3a^2 + 2b)^2 - (3a^2 - b)^2$; б) $0,25a^4 - 3a^2b^2 + 9b^4$;
в) $x^2 - 6x + 5$; г) $x^2 + 4xy - 5y^2$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

$$4(4 - y^2)(y^2 + 4) - (5 - y^3)^2 + (y^4 + 4y^2 + 16)(y^2 - 4).$$

4. Вычислите значение выражения при каждом значении x :

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) - (x + 1)(x + 2)(x - 3).$$

К-3 *Вариант IV*

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(n^2 - 2m)^2$; б) $\left(3a^3 + \frac{1}{2}b^2\right)^2$;
в) $(x^3 - 2y)(x^3 + 2y)$; г) $\left(2x^2 - \frac{1}{3}y\right)\left(2x^2 + \frac{1}{3}y\right)$.

2. Разложите на множители:

а) $(2a^3 - 3b^2)^2 - (2a^3 + b^2)^2$; б) $\frac{1}{4}a^4 + 2a^2b^2 + 4b^4$;
в) $x^2 - 5x + 4$; г) $x^2 + 6xy + 8y^2$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

$$3(3 - x^2)^2 - (9 - 3x^2 + x^4)(x^2 + 3) - 3(x^2 - x)(x^2 + x).$$

4. Вычислите значение выражения при каждом значении x :

$$(x - 1)(x - 3)(x + 4) - (x + 1)(x + 3)(x - 4).$$

К-4 *Вариант I*

1. Сократите дробь:

а) $\frac{18x^3y}{24x^2y^4}$; б) $\frac{15a^2 - 10ab}{8b^2 - 12ab}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{1}{3c} + \frac{5}{c}$; б) $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}$;
в) $\frac{a}{2b^2} \cdot 6b$; г) $\frac{7m^2n}{8x} : \frac{21m}{20x^2y}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{m}{m-n} - \frac{m}{m+n}\right) : \frac{16m^3n}{m^2 - n^2}$;
б) $\left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2x-y} - \frac{1}{y-2x}\right) - \frac{1}{xy^2}$.

К-4 Вариант II

1. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{24ab^2}{18a^4b^2}; \quad \text{б) } \frac{10x^2-15xy}{12y^2-8xy}.$$

2. Выполните действия:

$$\text{а) } \frac{7}{x} + \frac{1}{4x}; \quad \text{б) } \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2};$$

$$\text{в) } 3a \cdot \frac{5b}{3a^2}; \quad \text{г) } \frac{3xy^2}{4a} : \frac{18y}{24a^2b}.$$

3. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{8x^2y^3}{x^2-y^2} : \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y} \right);$$

$$\text{б) } \frac{1}{2xy^2} - \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{y-x} \right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} \right).$$

К-4 Вариант III

1. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{10x^3-15ax^2}{21ax^3-14x^4}; \quad \text{б) } \frac{x^2-4x+4}{5x^2-10x}.$$

2. Выполните действия:

$$\text{а) } \frac{5}{3x} + \frac{2}{7x}; \quad \text{б) } \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3};$$

$$\text{в) } 7a^3 \cdot \frac{3b}{14a^2}; \quad \text{г) } \frac{12xy^2}{5a^3} : \frac{24y}{25a^2b}.$$

3. Упростите выражение:

$$\text{а) } \left(x^2 + \frac{6-x^4}{x^2-1} \right) \cdot \frac{1+x}{6-x^2}; \quad \text{б) } \left(\frac{x+4}{3x+3} - \frac{1}{x+1} \right) : \frac{1+x}{3} - \frac{2}{1-x^2}.$$

4. Докажите тождество

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{4}{x(x+4)}.$$

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

К-4 Вариант IV

1. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{12a^3x-16a^2x^2}{20ax^3-15a^2x^2}; \quad \text{б) } \frac{x^2-6x+9}{9x^2-27x}.$$

2. Выполните действия:

а) $\frac{2}{5x} + \frac{5}{9x}$; б) $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}$;

в) $13a^2 \cdot \frac{5b}{26a^3}$; г) $\frac{15x^2y}{7a^3} : \frac{18y}{35a^2b}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(x + \frac{6-x^2}{1+x}\right) : \frac{6+x}{x^2-1}$; б) $\frac{1}{x-2} + \frac{4x}{4-x^2} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}\right)$.

4. Докажите тождество

$$\frac{1}{(x-4)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)x} = \frac{4}{x(x-4)}.$$

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

К-5 *Вариант I*

1. Вычислите:

а) $3^{-3} \cdot 3^5$; б) $5^{-2} : 5^{-3}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{a^5 \cdot a^{-2}}{a^{-3}}$; б) $(x^2)^{-3} \cdot x^4$.

3. Вычислите: $\frac{6^{-3} \cdot 2^{-4}}{18^{-2}}$.

4. Найдите значение выражения

$$(a^{-1} + b^{-1})^2 - 4a^{-1}b^{-1}$$

при $a = \frac{1}{2000}$, $b = \frac{1}{1999}$.

5. Упростите выражение

$$\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right)^{-1} : \left(\frac{x-y}{2y} \cdot (2x)^{-1}\right).$$

К-5 *Вариант II*

1. Вычислите:

а) $2^{-4} \cdot 2^6$; б) $3^{-2} : 3^{-4}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{a^6 \cdot a^{-4}}{a^{-2}}$; б) $(x^4)^{-2} \cdot x^5$.

3. Вычислите: $\frac{6^{-4} \cdot 2^{-1}}{12^{-3}}$.

4. Найдите значение выражения

$$(a^{-1} - b^{-1})^2 + 4a^{-1}b^{-1}$$

при $a = \frac{1}{2000}$, $b = -\frac{1}{1999}$.

5. Упростите выражение

$$\left((ab)^{-1} \cdot \frac{(2ab)^2}{a^2 - b^2} \right) \cdot \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} \right)^{-1}.$$

К-5 Вариант III

1. Вычислите:

а) $5^{-8} \cdot 5^6$; б) $8^{-7} : 8^{-9}$; в) $25^{-4} : 5^{-8}$.

2. Упростите выражение:

а) $(a^{-5})^3 \cdot a^{14}$ ($a \neq 0$); б) $\frac{a^{-5} - a^{-6}}{a^{-4} - a^{-5}}$.

3. Вычислите: $\frac{81 \cdot 6^{-4} \cdot 21^5}{14^{-5}}$.

4. Найдите значение выражения

$$\frac{a^{-3} + b^{-3}}{a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}} + \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}}$$

при $a = 2$, $b = 1999$.

5. Упростите выражение

$$\left((ab)^{-2} \cdot \frac{(2ab)^3}{4a^2 - b^2} \right) \cdot \left(\frac{2a-b}{2a+b} - \frac{2a+b}{2a-b} \right)^{-1}.$$

К-5 Вариант IV

1. Вычислите:

а) $9^8 \cdot 9^{-10}$; б) $7^{-9} : 7^{-7}$; в) $9^{-6} : 3^{-12}$.

2. Упростите выражение:

а) $(x^{-6})^3 \cdot x^{17}$ ($x \neq 0$); б) $\frac{x^{-5} - x^{-4}}{x^{-4} - x^{-3}}$.

3. Вычислите: $\frac{64 \cdot 25^3 \cdot 14^{-7}}{35^{-6}}$.

4. Найдите значение выражения

$$\frac{a^{-3} - b^{-3}}{a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}} + \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}$$

при $a = 3$, $b = 2000$.

5. Упростите выражение

$$\left(\frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} \right)^{-1} : \left(\frac{x-2y}{(2xy)^3} : (xy)^{-2} \right).$$

К-6 Вариант I

1. Решите уравнение

$$3x + 5 = 2x - 1.$$

2. В треугольнике ABC угол A в 2 раза больше угла B , а угол C в 3 раза больше угла A . Вычислите величины углов треугольника ABC .

3. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

4. На двух полках стояло 210 книг. Если с первой полки убрать половину книг, а на второй увеличить их число вдвое, то на двух полках будет 180 книг. Сколько книг стояло на каждой полке первоначально?

К-6 Вариант II

1. Решите уравнение

$$4x - 3 = 3x + 7.$$

2. В треугольнике ABC угол A в 3 раза больше угла B , а угол C в 2 раза больше угла A . Вычислите величины углов треугольника ABC .

3. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases}$$

4. В двух коробках лежало 210 карандашей. Если в первой коробке число карандашей уменьшить вдвое, а во второй их число увеличить в 2 раза, то в двух коробках станет 240 карандашей. Сколько карандашей было в каждой коробке первоначально?

К-6 Вариант III

1. Решите уравнение

$$3(x - 2) - 5(x + 1) = -8x.$$

2. В треугольнике ABC угол A на 30° больше угла B , а угол C в 2 раза меньше угла A . Вычислите величины углов треугольника ABC .

3. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 3x - 2y = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 3x - 2y - z = -6, \\ 2x - 3y + 2z = -3. \end{cases}$$

4. Если раздать детям по 3 яблока, то 7 яблок останется, а чтобы раздать каждому по 5 яблок, не хватит 3 яблок. Сколько было детей?

К-6 *Вариант IV*

1. Решите уравнение

$$5(x-1) - 3(x+2) = -5x.$$

2. В треугольнике ABC угол A на 50° больше угла C , а угол B в 2 раза меньше угла A . Вычислите величины углов треугольника ABC .

3. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 4y = -7, \\ 2x + 5y = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 2, \\ 2x + 2y - 5z = -5. \end{cases}$$

4. Если раздать детям по 5 конфет, то 13 конфет останется, а чтобы раздать каждому по 8 конфет, не хватит 5 конфет. Сколько было детей?

К-7 *Вариант I*

1. Вычислите:

$$\frac{3,17^2 - 2 \cdot 3,17 \cdot 1,17 + 1,17^2}{6,75^2 - 3,25^2}.$$

2. Упростите выражение:

$$\text{а) } (a-1)(a+3) - (a+1)^2; \quad \text{б) } (x-y)(x+y)(x^2+y^2).$$

3. Упростите выражение

$$\frac{x-2y}{x-3y} \cdot \left(\frac{x}{3x-6y} + \frac{y}{2y-x} \right).$$

4. Решите уравнение

$$(8x-3)(2x+1) = (4x-1)^2.$$

5. Сумма трёх чисел равна 90. Известно, что первое число на 10 меньше второго, а второе в 2 раза больше третьего. Найдите эти числа.

К-7 *Вариант II*

1. Вычислите:

$$\frac{5,15^2 - 2 \cdot 5,15 \cdot 3,15 + 3,15^2}{7,25^2 - 2,75^2}.$$

2. Упростите выражение:

$$\text{а) } (x+1)^2 - (x-2)(x+4); \quad \text{б) } (a+b)(a-b)(a^2+b^2).$$

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{5}{2x-4y} - \frac{1}{2y-x}\right) : \frac{3}{x-2y}.$$

4. Решите уравнение

$$(4x-5)(x+3) = (2x-3)^2.$$

5. Сумма трёх чисел равна 120. Известно, что второе число в 2 раза меньше первого, а третье на 20 больше второго. Найдите эти числа.

К-7 *Вариант III*

1. Вычислите:

$$\frac{3,25^2 + 6,5 \cdot 1,75 + 1,75^2}{6,33^2 - 6,33 \cdot 2,66 + 1,33^2}.$$

2. При каком значении a значение выражения

$$(x-a)(x+8) - (x+4)(x-1)$$

не зависит от x ?

3. Упростите выражение

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} : (x^2-y^2) + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{x^2-y^2}.$$

4. При каком значении d система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 8, \\ 8x + dy = 10 \end{cases}$$

не имеет решений?

К-7 *Вариант IV*

1. Вычислите:

$$\frac{2,45^2 + 4,9 \cdot 3,55 + 3,55^2}{4,23^2 - 4,23 \cdot 2,46 + 1,23^2}.$$

2. При каком значении a значение выражения

$$(x+a)(x-3) - (x-5)(x+3)$$

не зависит от x ?

3. Упростите выражение

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} : (x^2-y^2) - \frac{2x}{x-y} + \frac{xy}{x^2-y^2}.$$

4. При каком значении k система уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 5x + 10y = k \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Дополнительные задачи к контрольным работам

К-1

1. У Алёши марок в 4 раза больше, чем у Бори, у которого на 36 марок меньше, чем у Алёши. Сколько марок у каждого?
2. У Ани открыток в 3 раза меньше, чем у Веры, у которой на 24 открытки больше, чем у Ани. Сколько открыток у каждой?
3. У Алёши марок в n раз больше, чем у Бори, у которого на m марок меньше, чем у Алёши. Сколько марок у каждого?
 - а) Решите задачу в общем виде.
 - б) Получите ответ при $n = 4$, $m = 450$.
4. У Ани открыток в p раз меньше, чем у Веры, у которой на q открыток больше, чем у Ани. Сколько открыток у каждой?
 - а) Решите задачу в общем виде.
 - б) Получите ответ при $p = 3$, $q = 60$.

К-2

5. На двух полках 40 книг. Если с первой полки переставить на вторую 4 книги, то книг на полках станет поровну. Сколько книг на каждой полке?
6. В двух классах 56 учащихся. Если 3 ученика перейдут из одного класса в другой, то учащихся в этих классах станет поровну. Сколько учащихся в каждом классе?
7. На двух полках a книг. Если с первой полки переставить на вторую n книг, то на второй полке станет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько книг на каждой полке?
 - а) Решите задачу в общем виде.
 - б) Получите ответ при $a = 60$, $n = 6$.
8. В двух бригадах a рабочих. Если n рабочих перейдут из первой бригады во вторую, то в первой бригаде станет в 2 раза больше рабочих, чем во второй. Сколько рабочих в каждой бригаде?
 - а) Решите задачу в общем виде.
 - б) Получите ответ при $a = 48$, $n = 6$.

К-3

9. Брат старше сестры на 2 года, а через 3 года сумма их возрастов будет равна 34. Сколько лет каждому сейчас?

10. Сестра старше брата на 3 года, а 2 года назад сумма их возрастов была равна 25. Сколько лет каждому сейчас?
11. Брат старше сестры в n раз, а через a лет он будет старше сестры в $(n - 1)$ раз. Сколько лет каждому сейчас?
 - а) Решите задачу в общем виде.
 - б) Получите ответ при $a = 4$, $n = 3$.
12. Сейчас отец в n раз старше сына, а через a лет он будет старше сына в $(n - 2)$ раз. Сколько лет отцу сейчас?
 - а) Решите задачу в общем виде.
 - б) Получите ответ при $a = 7$, $n = 5$.

К-4

13. Имеющегося сырья хватит первому цеху на 12 дней работы или второму цеху на 24 дня работы. Хватит ли этого сырья на 9 дней их совместной работы?
14. Имеющегося сырья хватит первому цеху на 14 дней работы или второму цеху на 21 день работы. Хватит ли этого сырья на 8 дней их совместной работы?
15. Имеющегося сырья хватит первому цеху на a дней работы, или второму цеху на b дней работы, или третьему цеху на c дней работы. На сколько дней хватит этого сырья для совместной работы трёх цехов?
 - а) Решите задачу в общем виде.
 - б) Получите ответ при $a = 21$, $b = 24$, $c = 28$.
16. Бассейн наполняется через первую трубу за a ч, через вторую трубу за b ч, через третью трубу за c ч. За сколько часов наполнится бассейн через три трубы при их совместной работе?
 - а) Решите задачу в общем виде.
 - б) Получите ответ при $a = 9$, $b = 12$, $c = 18$.

К-5

17. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой 2 кг, содержит 60 % олова, а второй, массой 3 кг, содержит 40 % олова. Сколько процентов олова будет содержать сплав, полученный сплавлением этих двух кусков?
18. Имеется два куска сплава меди и серебра. Первый, массой 3 кг, содержит 60 % серебра, а второй, массой 2 кг, содержит 40 % серебра. Сколько процентов серебра будет содержать сплав, полученный сплавлением этих двух кусков?
19. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой 2 кг, содержит 60 % олова, а второй содержит 40 % олова. Сколько килограммов второго сплава надо добавить к первому, чтобы получить сплав, содержащий 45 % олова?

20. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой 3 кг, содержит 40 % олова, а второй содержит 60 % олова. Сколько килограммов второго сплава надо добавить к первому, чтобы получить сплав, содержащий 45 % олова?

К-6

21. Число увеличили на 20 %, полученный результат увеличили ещё на 20 %. На сколько процентов увеличили число за два раза?
22. Число уменьшили на 20 %, полученный результат уменьшили ещё на 20 %. На сколько процентов уменьшили число за два раза?
23. Число увеличили на 20 %, а полученный результат уменьшили на 20 %. Увеличилось или уменьшилось число после этих двух изменений? На сколько процентов?
24. Число уменьшили на 20 %, а полученный результат увеличили на 20 %. Увеличилось или уменьшилось число после этих двух изменений? На сколько процентов?

К-7

25. Два путника одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 3 ч. Через 2 ч после встречи первый путник пришёл в пункт B . Через сколько часов после встречи второй путник пришёл в пункт A ?
26. Велосипедист и пешеход одновременно отправились навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 2 ч. Через 1 ч после встречи велосипедист прибыл в пункт B . Через сколько часов после встречи пешеход пришёл в пункт A ?
27. Задумали два числа, сумма которых равна a . Если первое число увеличить в 3 раза, а второе уменьшить в 4 раза, то сумма полученных чисел станет равна b . Найдите задуманные числа.
а) Решите задачу в общем виде.
б) Получите ответ при $a = 60$, $b = 70$.
28. Задумали два числа, сумма которых равна a . Если первое число увеличить в 4 раза, а второе уменьшить в 3 раза, то сумма полученных чисел станет равна b . Найдите задуманные числа.
а) Решите задачу в общем виде.
б) Получите ответ при $a = 50$, $b = 90$.

ОТВЕТЫ

Контрольные работы

К-1

В. I. 1. а) $2^2 \cdot 97$; б) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$. 2. а) 3,4; б) 1,4(3).
3. $0,3 < 0,(322) < 0,(32) < \frac{1}{3}$. 4. а) 4,1; б) 0,82; в) -4.

В. II. 1. а) $2^3 \cdot 47$; б) $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. 2. а) 3,25; б) 1,8(6).
3. $0,6 < \frac{2}{3} < 0,(67) < 0,(677)$. 4. а) 5,1; б) $1\frac{7}{30}$; в) 12.

В. III. 1. а) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$; б) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$; в) 11^4 . 2. а) 2,125;
б) 2,(307692). 3. а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{17}{99}$; в) $\frac{5}{111}$; г) $3\frac{611}{990}$. 4. а) $\frac{11}{18}$; б) 17. 5. 12.

В. IV. 1. а) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13$; б) $2^4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$; в) 13^4 . 2. а) 3,25;
б) 1,(48780). 3. а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{43}{99}$; в) $\frac{1}{37}$; г) $5\frac{12}{55}$. 4. а) $-\frac{8}{9}$; б) 15. 5. 12.

К-2

В. I. 1. а) $18a^3b^2c^2$; б) $\frac{2}{9}b^4c^5$. 2. а) $-6a$; б) $4a - b^2$; в) $4x - 2a$.
3. а) $6(2x - y)$; б) $2b(a - 3c)$; в) $3x^2(3 - 4y^3)$. 4. а) $2x^2 - 6x^2y$;
б) $4x^2 - 9y^2$; в) $a^2 - ab^2 + a^2b - b^3$. 5. а) $(n - 3)(m + 2)$; б) $(x - 2y)(1 + a)$.

В. II. 1. а) $12a^4b^3c^2$; б) $\frac{3}{2}b^5c^4$. 2. а) $-7b$; б) $7x + 6y^2$; в) $21b - 3a$.
3. а) $3(5a + b)$; б) $14y(x - 2a)$; в) $5b^3(4a^5 - 3b)$. 4. а) $6a - 3ab$;
б) $-25a^2 + 60ab - 36b^2$; в) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$. 5. а) $(a + 7)(5 - b)$;
б) $(7a - 4b)(1 + y)$.

В. III. 1. а) $-5,4a^4b^3c^4$; б) $\frac{6}{5}b^5c^6$. 2. 24. 3. а) $x^4 - 9y^2$; б) $a^8 - b^6$.
4. а) $6xy(2x - 3y)$; б) $5a^3b^3(3a - 5b)$; в) $(m + 2)(n - 3)$; г) $(x + y) \times$
 $\times (x - 2y)$.

В. IV. 1. а) $-5,6a^4b^4c^3$; б) $\frac{2}{3}b^6c^6$. 2. 12. 3. а) $a^6 - 4b^2$; б) $x^6 + y^6$.
4. а) $4ab^2(4b - 5a)$; б) $6x^4y^2(3 - 2xy)$; в) $(n - 2)(m + 4)$; г) $(x + 4y) \times$
 $\times (x - y)$.

К-3

В. I. 1. а) $x^2 - 6x + 9$; б) $4a^2 + 20ab + 25b^2$; в) $a^2 - 4$; г) $9x^2 - y^2$.
2. а) $2ab(3b - a)(3b + a)$; б) $(a^2 + 3b)^2$. 3. $y^3 - 11y^2 - 4y + 63$.

В. II. 1. а) $n^2 - 4n + 4$; б) $4a^2 + 12ab + 9b^2$; в) $x^2 - 25$;
г) $16x^2 - y^2$. 2. а) $4(2a + b)(2b - a)$; б) $(a - b)(a + b + 1)$. 3. $-3x^4 - x^3 +$
 $+ 12x^2 - 10x + 18$.

В. III. 1. а) $x^4 - 6x^2y + 9y^2$; б) $4a^4 + \frac{4}{3}a^2b^3 + \frac{1}{9}b^6$; в) $x^4 - 4y^2$;
г) $9x^2 - y^2$. 2. а) $3b(6a^2 + b)$; б) $(0,5a^2 - 3b^3)^2$; в) $(x - 1)(x - 5)$;
г) $(x + 5y)(x - y)$. 3. $-4y^4 + 10y^3 - 25$. 4. 12.

В. IV. 1. а) $n^4 - 4n^2m + 4m^2$; б) $9a^6 + 3a^3b^2 + \frac{1}{4}b^4$; в) $x^6 - 4y^2$;
г) $4x^4 - \frac{1}{9}y^2$. 2. а) $8b^2(b^3 - 2a^3)$; б) $\left(\frac{1}{2}a^2 + 2b^2\right)^2$; в) $(x - 1)(x - 4)$;
г) $(x + 4y)(x + 2y)$. 3. $-x^6 - 15x^2$. 4. 24.

K-4

В. I. 1. а) $\frac{3x}{4y^3}$; б) $-\frac{5a}{4b}$. 2. а) $\frac{16}{3c}$; б) $\frac{2}{a^2-1}$; в) $\frac{3a}{b}$; г) $\frac{5mny}{6}$.

3. а) $\frac{1}{8m^2}$; б) $-\frac{1}{2x^2y}$.

В. II. 1. а) $\frac{4}{3a^2}$; б) $\frac{-5}{4y}$. 2. а) $\frac{29}{4x}$; б) $\frac{4}{x^2-4}$; в) $\frac{5b}{a}$; г) $\frac{18abxy}{13}$.

3. а) $4xy$; б) $\frac{1-4x+4y}{2xy^2}$.

В. III. 1. а) $-\frac{5}{7x}$; б) $\frac{x-2}{5x}$. 2. а) $\frac{41}{31x}$; б) $\frac{6}{x^2-9}$; в) $\frac{3ab}{2}$; г) $\frac{5bxy}{2a}$.

3. а) $\frac{1}{x-1}$; б) $\frac{1}{x-1}$.

В. IV. 1. а) $-\frac{4a}{5x}$; б) $\frac{x-3}{9x}$. 2. а) $\frac{43}{45x}$; б) $\frac{8}{x^2-16}$; в) $\frac{5b}{2a}$; г) $\frac{25bx^2}{6a}$.

3. а) $x-1$; б) $\frac{1}{x+2}$.

K-5

В. I. 1. а) 9; б) 5. 2. а) a^6 ; б) x^{-2} . 3. $\frac{3}{32}$. 4. 1. 5. 1.

В. II. 1. а) 4; б) 9. 2. а) a^4 ; б) x^{-8} . 3. $\frac{2}{3}$. 4. 1. 5. -1.

В. III. 1. а) $\frac{1}{25}$; б) 64; в) 1. 2. а) $\frac{1}{a}$; б) $\frac{1}{a}$. 3. $\frac{2}{243}$. 4. 1. 5. -1.

В. IV. 1. а) $\frac{1}{81}$; б) $\frac{1}{49}$; в) 1. 2. а) $\frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{x}$. 3. $\frac{1}{14}$. 4. $\frac{2}{3}$. 5. 1.

K-6

В. I. 1. -6. 2. 20° , 40° , 120° . 3. а) (3; -1); б) (2; 1). 4. 160 и 50 книг.

В. II. 1. 10. 2. 18° , 54° , 108° . 3. а) (2; 1); б) (3; 1). 4. 120 и 90 карандашей.

В. III. 1. $\frac{11}{6}$. 2. 84° , 54° , 42° . 3. а) (1; -1); б) (-1; 1; 1). 4. 5 детей.

В. IV. 1. $\frac{11}{7}$. 2. 92° , 46° , 42° . 3. а) (-1; 1); б) (1; -1; 1). 4. 6 детей.

K-7

В. I. 1. $\frac{4}{35}$. 2. а) -4; б) x^4-y^4 . 3. $\frac{1}{3}$. 4. 0,4. 5. 30, 40, 20.

В. II. 1. $\frac{4}{45}$. 2. а) 9; б) a^4-b^4 . 3. $\frac{7}{6}$. 4. $\frac{24}{19}$. 5. 50, 25, 45.

В. III. 1. 1. 2. При $a=5$. 3. 1. 4. При $d=-20$.

В. IV. 1. 4. 2. При $a=1$. 3. -1. 4. При $k=25$.

Дополнительные задачи к контрольным работам

1. 48 и 12 марок. 2. 12 и 36 открыток. 3. а) $\frac{mn}{n-1}$ и $\frac{m}{n-1}$; б) 600 и 150 марок. 4. а) $\frac{q}{p-1}$ и $\frac{pq}{p-1}$; б) 30 и 90 открыток. 5. 24 и 16 книг.

6. 31 и 25 учащихся. 7. а) $\frac{a}{3}+n$ и $\frac{2a}{3}-n$; б) 26 и 34 книги.

8. а) $\frac{2a}{3}+n$ и $\frac{a}{3}-n$; б) 38 и 10 рабочих. 9. 15 и 13 лет. 10. 16 и 13 лет. 11. а) $an(n-2)$ и $a(n-2)$; б) 12 лет и 4 года. 12. а) $\frac{a(n^2-3n)}{2}$

и $\frac{a(n-3)}{2}$; б) 35 и 7 лет. 13. Нет. 14. Да. 15. а) $\frac{abc}{ab+bc+ac}$; б) на 8 дней. 16. а) $\frac{abc}{ab+bc+ac}$; б) за 4 ч. 17. 48 %. 18. 52 %. 19. 6 кг. 20. 1 кг. 21. На 44 %. 22. На 36 %. 23. Уменьшилось на 4 %. 24. Уменьшилось на 4 %. 25. Через 4,5 ч. 26. Через 4 ч. 27. а) $\frac{4b-a}{11}$ и $\frac{12a-4b}{11}$; б) 20 и 40. 28. а) $\frac{3b-a}{11}$ и $\frac{12a-3b}{11}$; б) 20 и 30.

Содержание

Предисловие	3
Раздел I. Материалы для подготовки к самостоятельным работам	4
1. Действия с натуральными числами	4
2. Действия с рациональными числами	5
3*. Бесконечные десятичные дроби	6
4*. Приближённые вычисления	8
5*. Делимость чисел	9
6. Одночлены	10
7. Многочлены	12
8. Сложение и вычитание многочленов	13
9. Умножение многочлена на одночлен	14
10. Умножение многочленов	15
11. Числовое значение выражения	16
12. Формулы сокращённого умножения	16
13. Разложение многочленов на множители	17
14. Алгебраические дроби	18
15. Сложение и вычитание алгебраических дробей	19
16. Умножение и деление алгебраических дробей	20
17. Рациональные выражения	21
18. Числовое значение рационального выражения	22
19. Тождества	24
20. Степень с целым показателем	25
21*. Делимость многочленов	26
22. Линейные уравнения	28
23*. Линейные уравнения с параметром	29
24. Решение задач с помощью линейных уравнений	30
25. Системы двух линейных уравнений	31
26. Решение задач с помощью систем уравнений	33
27*. Системы трёх линейных уравнений	34
Раздел II. Самостоятельные работы	38
Раздел III. Контрольные работы	80
Дополнительные задачи к контрольным работам	91
Ответы	94