

## Gráficas y Juegos: Notas 6 y 7

Para demostrar el siguiente lema usaremos la siguiente observación.

Obs. Sean  $G_1$  y  $G_2$  gráficas tales que hay un isomorfismo  $\varphi$  entre  $G_1$  y  $G_2$ . Entonces  $\varphi^{-1}$  también es un isomorfismo entre  $G_2$  y  $G_1$ .

**Lemma 1** Sean  $G = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  gráficas tales que  $G_1 \cong G_2$  bajo el isomorfismo  $\varphi$ . Entonces  $d_{G_1}(v) = d_{G_2}(\varphi(v))$  para todo  $v \in V_1$ .

**Demostración.**

Sea  $v \in V_1$ , llamemos  $N = N_{G_1}(v)$  y  $N' = N_{G_2}(\varphi(v))$ . Hay que demostrar que  $|N| = |N'|$  dando una biyección. Veamos que  $\varphi|_N : N \rightarrow N'$  es la biyección buscada.

Notamos que si  $x, y \in N$  son tales que  $\varphi|_N(x) = \varphi|_N(y)$ , dado que  $\varphi|_N$  es solo la restricción de  $\varphi$  en  $N$ , tenemos que  $\varphi(x) = \varphi(y)$ , la inyectividad de  $\varphi$  implica que  $x = y$ . Por lo tanto  $\varphi|_N$  es inyectiva también.

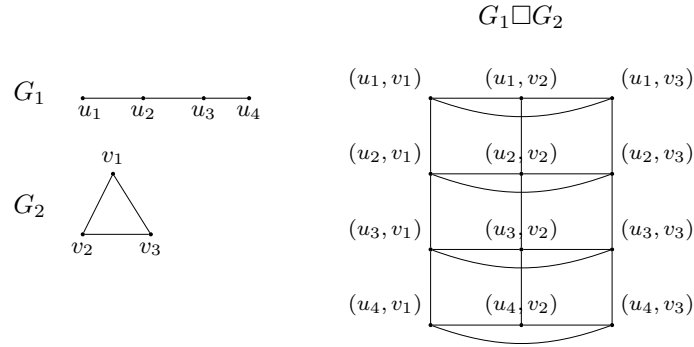
Para la suprayectividad consideremos  $w \in N'$ , veamos que existe  $z \in N$  tal que  $\varphi|_N(z) = w$ . Proponemos  $z = \varphi^{-1}(w)$ .

Sabemos que  $w \in N' = N_{G_2}(\varphi(v))$ , entonces  $w \text{ } \textit{ady}_{G_2} \varphi(v)$ . La observación anterior nos dice que  $\varphi^{-1}$  es un isomorfismo y por lo tanto preserva adyacencias, concluimos que  $\varphi^{-1}(w) \text{ } \textit{ady}_{G_1} v$  y que  $\varphi^{-1}(w) \in N$ . Así  $\varphi|_N : N \rightarrow N'$  es una biyección y  $|N| = |N'|$ .

**Definición 1** Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  gráficas. Definimos el **producto cuadro** de  $G_1$  por  $G_2$  como la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V_1 \times V_2$  y cuyo conjunto de aristas es:

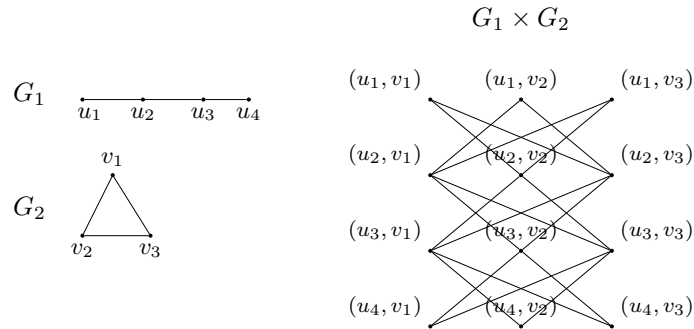
$$\{(u_1, v_1)(u_2, v_2) | u_1 \text{ ady}_{G_1} u_2 \text{ y } v_1 = v_2 \text{ o } u_1 = u_2 \text{ y } v_1 \text{ ady}_{G_2} v_2\}.$$

La denotamos por  $G_1 \square G_2$ .



**Definición 2** Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  gráficas. Definimos el **producto cruz** de  $G_1$  por  $G_2$  como la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V_1 \times V_2$  y cuyo conjunto de aristas es:

$$\{(u_1, v_1)(u_2, v_2) | u_1 \text{ ady}_{G_1} u_2 \text{ y } v_1 \text{ ady}_{G_2} v_2\}$$



Veamos cómo son las matrices de adyacencia de las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  dibujadas en los ejemplos anteriores y después las matrices de adyacencia de  $G_1 \square G_2$  y  $G_1 \times G_2$ .

$$M_A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_A(G_1 \square G_2) = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

$$M_A(G_1 \times G_2) = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

Si  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas de ordenes  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente, y tales que  $V(G_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_1}\}$  y  $V(G_2) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_2}\}$ , podemos elegir el siguiente orden lineal del producto cartesiano

$$V_1 \times V_2 = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_{n_2}), \dots, (u_{n_1}, v_1), \dots, (u_{n_1}, v_{n_2})\}.$$

Entonces la matriz de adyacencia  $M_A(G_1 \square G_2)$  se puede pensar como una matriz de  $n_1 \times n_1$  cuyas entradas  $(i, j)$  son las submatrices  $A_{ij}$  de  $n_2 \times n_2$ , definidas para  $i, j \in \{1, \dots, n_1\}$  como sigue:

$$A_{ij} = \begin{cases} M_A(G_2) & \text{si } i = j \\ Id_{n_2} & \text{si } u_i \text{ } ady_{G_1} \text{ } u_j \\ \bar{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Similarmente la matriz de adyacencia  $M_A(G_1 \times G_2)$  puede pensarse como una matriz de  $n_1 \times n_1$  cuyas entradas  $(i, j)$  son las submatrices  $A_{ij}$  de  $n_2 \times n_2$ , pero definidas para  $i, j \in \{1, \dots, n_1\}$  como sigue:

$$A_{ij} = \begin{cases} M_A(G_2) & \text{si } u_i \text{ } ady_{G_1} \text{ } u_j \\ \bar{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$