23/02/2026

Gráficas y Juegos: Notas 8

Lema 1 *Sea G una gráfica y $u, v \in V(G)$. Si hay un uv-camino C en G, entonces hay una uv-trayectoria T contenida en C.*

Demostración. Procederemos por inducción en el número de veces que se repiten vértices en C, digamos r.

Caso base. $r = 0$. Supongamos que en C no se repiten vértices. Entonces C es la uv-trayectoria buscada.

Hipótesis inductiva. $r \leq k-1$. Supongamos que si en C se repiten vértices a lo más $k-1$ veces, entonces hay una uv-trayectoria T contenida en C.

Paso inductivo. $r = k$. Supongamos que G tiene un uv-camino C en la cual se repiten vértices k veces. Supongamos que $C = (u_1, u_2, ..., u_\ell)$ y sea u_i el primer vértice que se repite en C. Entonces $u_i = u_j$ para algún j tal que $i < j$. Sea $WC' : u_1, ..., u_i, u_{j+1}, ..., u_\ell)$. Entonces en C se repiten vértices a lo más $k-1$ veces. Por hipótesis inductiva hay una uv-trayectoria T contenida en C' que a su vez está contenida en C.

Teorema 1 *Sea G una gráfica. Definimos la relación $\sim$ en $V(G)$ definida por $u \sim v$ si y sólo si hay una uv-trayectoria. Entonces $\sim$ es un relación de equivalencia.*

Demostración.

Reflexividad. Sea $u \in V(G)$, entonces $T = (u = u)$ es una trayectoria y por lo tanto $u \sim u$.

Simetría. Sean $u, v \in V(G)$ tales que $u \sim v$. Si T es una uv-trayectoria, entonces T^{-1} es una vu-trayectoria. Tenemos que $v \sim u$.

Transitividad. Sean $u, v, w \in V(G)$ tales que $u \sim v$ y $v \sim w$. Entonces hay una uv-trayectoria T_1 y una vw-trayectoria T_2. Entonces $T_1 \cup T_2$ es un uw-camino. Por el Lema 1 concluimos que hay una uw-trayectoria. Entonces $u \sim w$.

Definición 1 *Sea G una gráfica. G es* ***conexa*** *si para todo par de vértices $x, y \in V(G)$ tales que $x \neq y$ hay una xy-trayectoria. Una* ***componente conexa*** *de una gráfica G es una subgráfica conexa H tal que para toda subgráfica conexa $K \leq G$ tal que $H \leq K$, se cumple que $H = K$.*

En el contexto del Teorema anterior, $\sim$ induce una partición del conjunto de vértices en subconjuntos, digamos, $\{V_i\}_{i=1}^{s}$. Observemos que $G[V_i]$ es una componente conexa de G para cada $i \in \{1, ..., s\}$

Árboles

Definición 2 *Un* ***árbol*** *es una gráfica conexa y acíclica.*

Ejemplos:

- Las trayectorias.
- Las estrellas con n picos: $K_1 + \overline{K_n}$.