09/02/2026

Gráficas y Juegos: Notas 2

Definición 1 *Sea $G = (V, E)$ una gráfica de orden n y tamaño m. Consideremos las etiquetacióñes $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ de los vértice y aristas de G, respectivamente. Definimos la* ***matriz de incidencia*** *de G como la matriz M de $n \times m$ con entradas en $\{0, 1\}$ y cuya entrada (i, j) está dada por:*

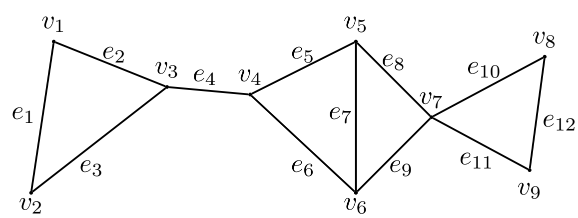
$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es incidente con } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Similarmente, la ***matriz de adyacencia*** *de G es la matriz M de $n \times n$ con entradas en $\{0, 1\}$ y cuya entrada (i, j) está dada por:*

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente con } v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las denotamos por $M_I(G)$ y $M_A(G)$, respectivamente.

Por ejemplo, volvamos a considerar la siguiente gráfica:



Su matriz de incidencia es una matriz de 9×12:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

La matriz de adyacencia de esta misma gráfica es una matriz de 9×9 y queda de ejercicio.

Ahora si estamos listos para demostrar el *Handshake Lemma* el cual dice lo siguiente:

Lema 1 *Sea $G = (V, E)$ una gráfica de orden n y tamaño m. Supongamos que $V = \{v_1, ..., v_n\}$ y $E = \{e_1, ..., e_m\}$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2m$$

Demostración. Sea $M = M_I(G)$ la matriz de incidencia de G. Primero notemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, al hacer la suma de los 1's en el i-ésimo renglón obtenemos que:

$$\sum_{j=1}^{m} M_{ij} = d_G(v_i)$$

Pues v_i es adyacente a tantos vértices como aristas con las que es incidente.

Entonces, para contar en total cuántas entradas iguales a 1 tiene M, hacemos la suma sobre cada renglón.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i)$$

Por otro lado, notamos que como cada arista incide en exactamente 2 vértices, para cada $j \in \{1, ..., m\}$ se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 2$$

De esta forma, el número total de entradas de M iguales a 1 es también:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 2m$$

.

Por lo tanto se cumple la igualdad. □

Tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1 *Toda gráfica tiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración. Notemos que $2m$ es un número par, lo que implica que hay un número par de sumandos impares en la suma $\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i)$. □

La siguiente definición nos da mucha información sobre una gráfica.

Definición 2 *Sea $G = (V, E)$ una gráfica y etiquetemos $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de tal forma que $d_G(v_i) \geq d_G(v_{i+1})$ para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$. Definimos la* ***sucesión de grados*** *de G como la sucesión decreciente $d_G(v_1), d_G(v_2), ..., d_G(v_n)$.*

Observación. Si la gráfica tiene vértices aisaldos, entonces su sucesión de grados termina con 0 y si tiene un vértice adyacente con todos los vértices, entonces su sucesión de grados comienza con $n - 1$.