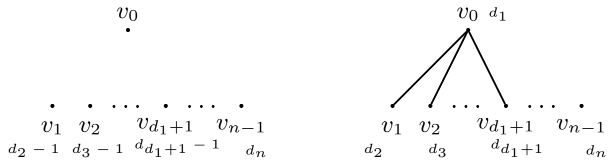
Gráficas y Juegos: Notas 3

Dada una gráfica G es fácil obtener la sucesión de grados de G simplemente ordenando $V(G)$ de tal forma que sus grados queden en orden descendente. Sin embargo, dada una sucesión decreciente de números enteros positivos, no siempre podremos encontrar una gráfica con esa sucesión de grados. Supongamos que $S: d_1, d_2, ..., d_n$ es una sucesión decreciente de números enteros positivos. Sabemos que en el caso de que S sea la sucesión de grados de una gráfica se tiene que cumplir que $d_i \leq n-1$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ y además por el "Handshake Lemma" tenemos que $\sum_{i=1}^{n} d_i$ es par. Con estas condiciones podemos descartar sucesiones como $S_1 : 5, 3, 1$ o $S_2 : 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1$. Sin embargo, aunque una sucesión cumpla estas condiciones, no podemos asegurar que sea la sucesión de grados de una gráfica. Para determinar esto veremos el siguiente teorema.

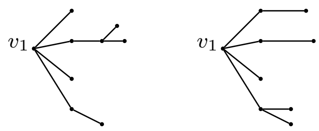
Teorema 1 *Sea $S : d_1, d_2, ..., d_n$ una sucesión de números enteros positivos tal que $n \geq 2$ y $0 \leq d_1 \leq n-1$. Entonces S es la sucesión de grados de una gráfica de orden n si y sólo si $S' : d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2} ..., d_n$ es la sucesión de grados de una gráfica de orden $n-1$.*

Demostración.

$\Leftarrow$ Supongamos que $S' : d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2} ..., d_n$ es la sucesión de grados de una gráfica G' de orden $n-1$. Entonces podemos escribir $V(G') = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ de tal forma que $d_G(v_i) = d_{i+1} - 1$ si $i \in \{1, ..., d_1\}$ y $d_G(v_i) = d_{i+1}$ cuando $i \in \{d_1 + 1, ..., n\}$. Construimos G a partir de G' de la siguiente forma: $V(G) = V(G') \cup \{v_0\}$ y $E(G) = E(G') \cup \{v_0 v_i | i \in \{1, ..., d_1\}\}$. Dado que v_0 tiene grado d_1 y sumamos 1 al grado de cada vértice $v_1, ..., v_{d_1}$, obtenemos que G tiene sucesión de grados S.



$\Rightarrow$ Supongamos que $S : d_1, d_2, ..., d_n$ es la sucesión de grados de una gráfica G de orden n. Entonces podemos escribir $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ donde $d_G(v_i) = d_i$. Además podemos elegir a G de tal forma que $x = \sum_{u \in N(v_1)} d_G(u)$ sea ḿaximo. Por ejemplo, entre las siguientes dos gráficas con la misma sucesión de grados $4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$ elegiríamos a la segunda pues en ella la suma de los grados de los vecinos de v_1 es máxima.



Afirmamos que por la elección de G se cumple que v_1 es adyacente a $v_2, ..., v_{d_1+1}$ que son los vértices con mayor grado después de v_1. De suponer lo contrario podríamos encontrar vértices v_r y v_s tales que $d_r = d_G(v_r) > d_G(v_s) = d_s ...(1)$ pero donde v_1 es adyacente a v_s pero no a v_r. Por (1) podemos encontrar un vecino de v_r, digamos v_t, el cual no es vecino de v_s. Pero entonces podemos construir una gráfica G' a partir de G obtenida al quitar las aristas v_1v_s y v_rv_t y agregando las aristas v_1v_r y v_sv_t. El resultado es una gráfica con la misma sucesión de grados pero en donde la suma de los grados de vécinos de v_1 es estrictamente mayor a la suma en G, contradiciendo su elección. Basta entonces considerar la gráfica $G - v_1$, la cuál resulta de quitar el vértice v_1 y todas sus arista incidentes. Esta gráfica tiene sucesión de grados S'.