25/02/2026-26/02/2026

Gráficas y Juegos: Notas 9 y 10

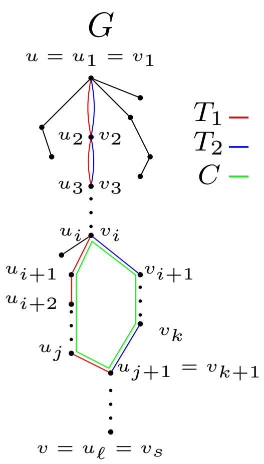
Lema 1 *Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Entonces G es un árbol si y sólo si para todo par de vértices $u, v \in V$ se cumple que hay una única uv-trayectoria.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Supongamos que G es un árbol y que $u, v \in V$, tales que $u \neq v$. Sean $T_1 = (u = u_1, u_2, ..., u_\ell = v)$ y $T_2 = (u = v_1, v_2, ..., v_s = v)$ dos uv-trayectorias. Si $T_1 \neq T_2$, entonces existe $1 \leq i < \ell, s$ tal que $u_i = v_i \in V(T_1) \cap V(T_2)$ pero $u_{i+1} \neq v_{i+1}$. Dado que $v = u_\ell = v_s$, podemos encontrar $j, k > i$ tales que $u_j \neq v_k$ pero $u_{j+1} = v_{k+1}$ y son mínimos con esta propiedad. Pero entonces:

$$C = (u_i, u_{i+1}, ..., u_j, u_{j+1} = v_{k+1}, v_k, ..., v_{i+1}, v_i = u_i)$$

es un ciclo en G, que es acíclica. Por lo tanto $T_1 = T_2$ y hay una única uv-trayectoria en G.



$\Leftarrow$ Por contrapositiva, veremos que si G no es árbol, entonces existen $u, v \in V$ tales que no hay una única uv-trayectoria. Si G no es un árbol, entonces G no es conexa o G contiene un ciclo. En el primer caso podemos encontrar vértices u, v tales que no hay una uv-trayectoria y en el segundo caso podemos encontrar u, v tales que hay dos uv-trayectorias.

Teorema 1 *Sea G una gráfica de orden n. Entonces son equivalentes:*

i. *G es un árbol.*

ii. *G es conexa y tiene tamaño $n-1$.*

iii. *G es acíclica y tiene tamaño $n-1$.*

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Procediendo por inducción en n.

Caso base. Supongamos que $n = 2$, lo que implica que G tiene a lo más una arista, como G es conexa, $G = K_2$, por lo que G es conexa y tiene tamaño $n-1$.

Hipótesis inductiva. $n = k$. Supongamos que si G es una gráfica de orden $n = k$ y G es un árbol, entonces G es conexa y tiene tamaño $n-1 = k-1$.

Paso inductivo. $n = k+1$. Consideremos una gráfica G de orden $k+1$ y supongamos que G es un árbol. Sabemos entonces que G es conexa, solo hay que ver que tiene tamaño $n-1 = k+1-1 = k$. Por el Lema 2 sabemos que G tiene una hoja h. Consideremos la subgráfica $G' \leq G$ dada por $G' = G-h$. De esta forma G' es una gráfica de orden k. Como h es una hoja, G' también es conexa y acíclica, por lo que es un árbol. Por la hipótesis inductiva concluimos que G' tiene orden $k-1$. Sabemos que $|E(G)| = |E(G')|+1$, así G tiene tamaño k.

$ii) \Rightarrow iii)$ Procediendo por inducción en n.

Caso base. Supongamos que $n = 2$, lo que implica que G tienen a lo más una arista, como G es conexa, $G = K_2$ la cual es acíclica y tiene tamaño $n-1$.

Hipótesis inductiva. $n = k$. Supongamos que si G es una gráfica de orden $n = k$, es conexa y tiene tamaño $k-1$, entonces G es acíclica y tiene tamaño $n-1 = k-1$.

Paso inductivo. $n = k+1$. Sea G una gráfica de orden $k+1$, conexa y de tamaño k. Por el Lema 3 G tiene una hoja h. Sea $G' \leq G$ dada por $G' = G-h$. Como h es una hoja, G' es conexa de orden k y tiene tamaño $k-1$. Sea e la arista de G incidente con h. Por hipótesis inductiva tenemos que G' es acíclica. Notemos que al agregar una hoja no se forman ciclos, entonces $G = G' \cup h + e$ también es acíclica y tiene tamaño $n-1 = k$.

$iii) \Rightarrow i)$ Procediendo por inducción en n.

Caso base. Si $n = 2$ tenemos que $G = K_2$, por lo que G es un árbol.

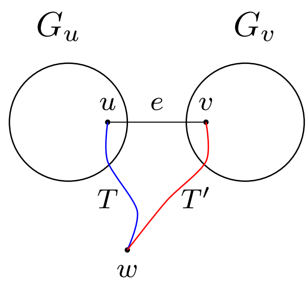
Hipótesis inductiva. $n = k$. Si G es una gráfica de orden k, acíclica y de tamaño $n-1 = k-1$, entonces G es un árbol.

Paso inductivo. $n = k+1$. Sea G una gráfica de orden $k+1$, acíclica y de tamaño $n-1 = k$. Por el Lema 4 G tiene una hoja h. Sea $G' \leq G$ dada por $G' = G - h$. Notemos que G' es de orden k, también es acíclica y tiene tamaño $k-1$. Sea e la arista de G incidente con h. La hipótesis inductiva no dice que G' es un árbol, como al agregar una hoja a un árbol obtenemos un árbol, $G = G \cup h + e$ es un árbol.

Para demostrar los lemas que utilizamos en la demostración del teorema anterior vamos a definir o que es una arista de corte o puente.

Definición 1 *Sea G una gráfica conexa. Una arista $e \in E(G)$ es un* ***puente*** *si $G - e$ no es conexa.*

Obs. Si G es conexa y e es un puente, entonces $G - e$ tiene dos componentes conexas. Para observar esto consideremos los extremos de $e = uv$. Hay que notar que dado que $G - e$ no es conexa, entonces tiene al menos dos componentes conexas G_u y G_v, una donde está u y otra donde está v, respectivamente. Veamos que son las únicas componentes conexas de $G - e$. Basta observar que todo vértices de G está en $V(G_u)$ o en $V(G_v)$. Sea $w \in V(G)$. Pueden ocurrir dos casos, o toda wu-trayectoria pasa por e, o existe una wu-trayectoria T que no pasa por e. En el primer caso consideramos alguna wu-trayectoria T' dado que todas pasan por e, tenemos que $T' - u$ es una wv-trayectoria en $G - e$, por lo que $w \in G_v$. En el segundo caso tenemos que T es una wu-trayectoria en $G - e$, por lo que $w \in G_u$.



Lema 2 *Sea T un árbol. Entonces T tiene al menos una hoja.*

Lema 3 *Supongamos que G es una gráfica conexa y de orden $n-1$, entonces G tiene al menos una hoja.*

Lema 4 *Supongamos que G es una gráfica acíclica y de orden $n-1$, entonces G tiene al menos una hoja.*