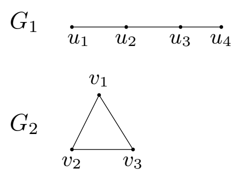
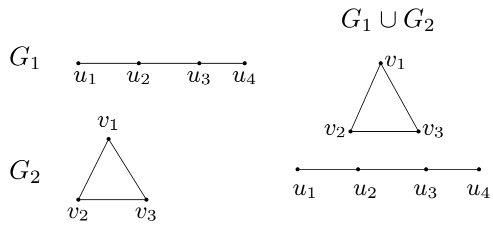
Gráficas y Juegos: Notas 5

Entre las operaciones de gráficas se incluyen la unión, la suma, la resta y el complemento y las cuales definimos a continuación. Para ejemplificarlas nos valdremos de las siguientes gráficas:

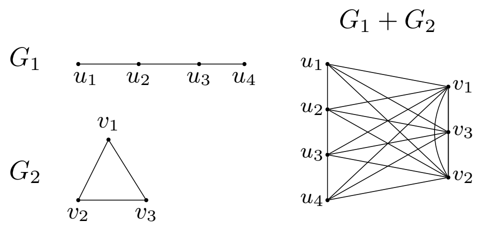


Definición 1 *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ gráficas. Definimos la* ***unión*** *de G_1 y G_2 como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ y cuyo conjunto de aristas es $E_1 \cup E_2$. La denotamos por $G_1 \cup G_2$.*



Obs. Si G_1 y G_2 tienen ordenes n_1 y n_2; y tamaños m_1 y m_2, entonces $G_1 \cup G_2$ tiene orden $n_1 + n_2$ y tamaño $m_1 + m_2$.

Definición 2 *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ gráficas. Definimos la* ***suma*** *de G_1 y G_2 como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ y cuyo conjunto de aristas es $E_1 \cup E_2 \cup \{uv | u \in V_1, v \in V_2\}$. La denotamos por $G_1 + G_2$.*



Obs. Si G_1 y G_2 tienen ordenes n_1 y n_2; y tamaños m_1 y m_2, entonces $G_1 + G_2$ tiene orden $n_1 + n_2$ y tamaño $m_1 + m_2 + n_1 n_2$.

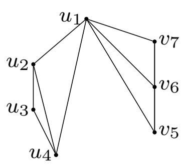
Definición 3 *Sean $G = (V, E)$ una gráfica y $U \subset V$, $D \subset E$. Definimos la **resta de vértices** de G menos U como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V \setminus U$ y cuyo conjunto de aristas es $E \setminus \{uv \in E | u \in U\}$. La denotamos por $G \setminus U$ o $G - U$.*

*Ahora, la **resta de aristas** de G menos D es la gráfica cuyo conjunto de vértices es V pero cuyo conjunto de aristas es $E \setminus D$. La denotamos por $G \setminus D$ o $G - D$.*

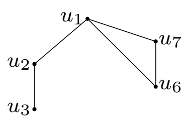
Cuando U o D son unitarios, digamos $U = \{v\}$ y $D = \{e\}$, entonces simplemente escribimos $G - v$ y $G - e$.

Restando vértices:

G

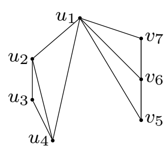


$G - \{u_4, u_5\}$

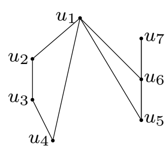


Restando aristas:

G

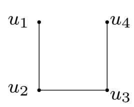


$G - \{u_1u_7, u_3u_4\}$

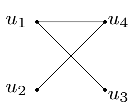


Definición 4 *Sea $G = (V, E)$ una gráfica, definimos el **complemento** de G como la gráfica cuyo conjunto de vértices es V y conjunto de aristas es $\{uv | u, v \in V,\ u \neq v\} \setminus E$. La denotamos por $\overline{G}$.*

G



$\overline{G}$



Obs. Si G es una gráfica de orden n y tamaño m, entonces $\overline{G}$ es una gráfica de orden n y tamaño $\binom{n}{2}-m$.

Notemos que en el ejemplo mostrado se cumple que G y $\overline{G}$ son esencialmente la misma gráfica, cuando esto ocurre decimos que G es autocomplementaria. Para esta definición primero hay que definir isomorfismo.

Definición 5 *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_1, E_2)$. Un* ***ismorfismo*** *entre G_1 y G_2 es una función biyectiva $\varphi : V_1 \to V_2$ tal que para todo $u, v \in V_1$ se cumple que u ady_{G_1} v si y sólo si $\varphi(u)$ ady_{G_2} $\varphi(v)$. En este caso decimos que G_1 es isomorfa a G_2 y lo denotamos por $G_1 \cong G_2$.*

Definición 6 *Una gráfica G es* ***autocomplementaria*** *si $G \cong \overline{G}$.*