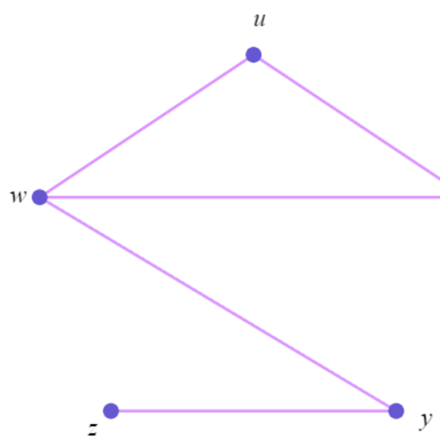
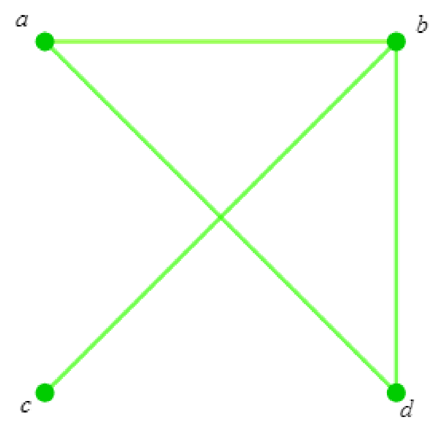
Definición. Una **gráfica G** consiste en un conjunto finito y no vacío de objetos llamados *vértices*, denotado por *V(G)*, y un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de *V(G)* llamados aristas, denotado por *A(G)*.

Notación: Si $\{u, v\} \in A(G)$, podemos escribir $u \; ady_G \; v$ o simplemente uv o $vu \in A(G)$.

Ejemplos:

$V(G) = \{u, v, w, z, y\}$
$A(G) = \{uv, vw, wy, uw, zy\}$





$V(G) = \{a, b, c, d\}$
$A(G) = \{ab, ad, bc, bd\}$

Definición.

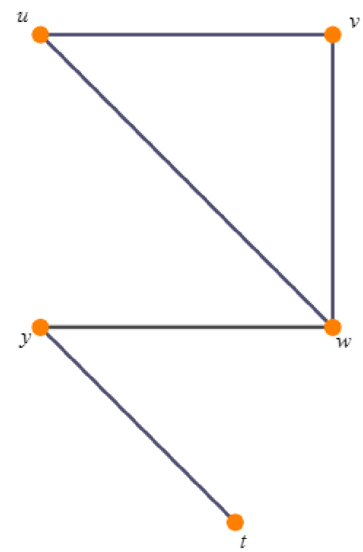
- El **orden**, denotado por n, es el número de vértices de G, es decir $|V(G)| = n$.
- El **tamaño**, denotado por m, es el número de aristas de G, es decir $|A(G)| = m$

Definición. Sea G una gráfica, $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(G)$ y $\{a, b\}$ un subconjunto de $A(G)$. Decimos que:

- u y v son **adyacentes** si $uv \in A(G)$.
- a y b son **adyacentes** si a y b tienen un extremo en común.
- a y u son **incidentes** si u es extremo de la arista a.

Ejemplo:

- v y w son adyacentes pues $vw \in A(G)$.
- u y y no son adyacentes pues $uy \notin A(G)$.
- Las aristas uw y uv son adyacentes pues u es un extremo en común.
- Las aristas yt y uw no son adyacentes porque no tienen extremos en común.
- La arista yt incide en el vértice y y la arista yw no incide en el vértice t.



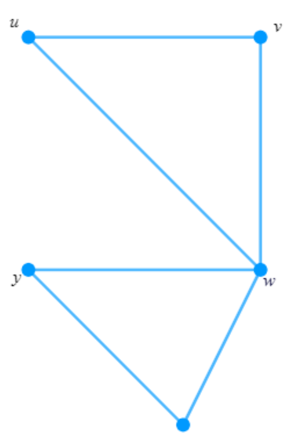
Definición. Sean G una gráfica y $v \in V(G)$ y S un subconjunto de $V(G)$.

- El conjunto de **vecinos de** v, denotado por $N(v)$ o $N_G(v)$ es $\{w \in V(G) : vw \in A(G)\}$.
- El conjunto de **vecinos de** S, denotado por $N(S)$ o $N_G(S)$, es

$$\bigcup_{v \in S} N(v) = \{u \in V(G) : su \in A(G) \text{ para algún } s \in S\}$$

.

Ejemplo:



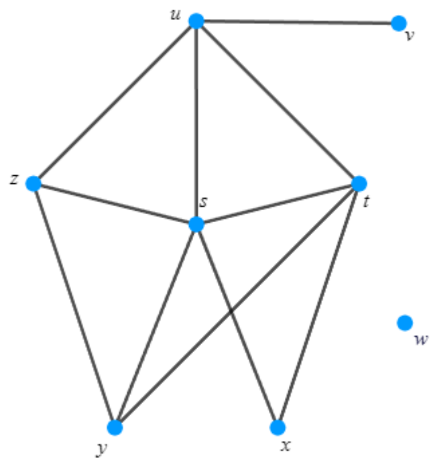
$N(u) = \{v, w\}$
$N(w) = \{u, v, y, z\}$
$S = \{v, y\}$
$N(S) = \{u, w, z\}$

Definición. Sea G una gráfica, $v \in V(G)$ y S un subconjunto de $V(G)$.

- El **grado** de v, denotado por $\delta(v)$ o $\delta_G(v)$ es $|N_G(v)|$.
- El **grado máximo** de G es $\Delta(G) = \text{máx}\{\delta(v) : v \in V(G)\}$.

- El **grado mínimo** de G es $\delta(G) = \text{mín}\{\delta(v) : v \in V(G)\}$.

Ejemplo:



$n = 8$

m = 11

$$\delta(t) = 4$$
$$\delta(v) = 1$$
$$\delta(u) = 4$$
$$\delta(z) = 3$$
$$\delta(y) = 3$$
$$\delta(x) = 2$$
$$\delta(s) = 5$$
$$\delta(w) = 0$$
$$\delta(G) = 0, \quad \Delta(G) = 5$$

Obs:

- si $\delta(v) = 0$ v es un *vértice aislado.*
- si $\delta(v) = 1$ v es un *vértice terminal.*

TEOREMA

En toda gráfica no trivial existen al menos dos vértices con el mismo grado.

Demostración. Sea G una gráfica de orden al menos 2.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\delta(u) \neq \delta(v)$ para cada par de vértices u y $v \in G$. Como tenemos n vértices y todos los grados pertenecen al conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ se sigue que existe un vértice con grado 0 y al mismo tiempo existe un vértice con grado $n-1$, lo cual no es posible. Por lo tanto, existen al menos dos vértices con el mismo grado. $\square$