

## Gráficas y Juegos: Notas 1

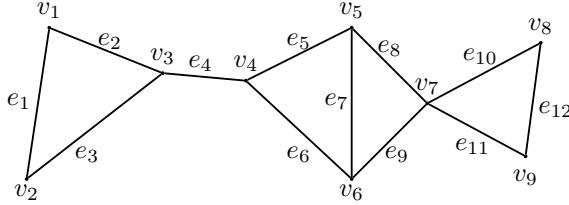
Podemos pensar una gráfica como un conjunto de puntos en el espacio, que llamamos vértices, y un conjunto de líneas que los conectan, a las cuales llamamos aristas.

Formalmente definimos una **gráfica**  $G$  como un par ordenado  $(V, E)$ , en donde  $V$  es un conjunto de vértices y  $E$  es un conjunto de aristas que los conectan.

Trabajaremos con gráficas finitas, es decir, que la cardinalidad tanto de  $V$  como de  $E$  es finita. La cardinalidad del conjunto de vértices es el **orden** y la cardinalidad del conjunto de aristas es el **tamaño**. Dada una arista  $e = (u, v)$  decimos que  $u$  es **adyacente** a  $v$  y que tanto  $u$  como  $v$  son **incidentes** con  $e$ .

Notación: Si  $G$  es una gráfica, denotamos por  $V(G)$  al conjunto de vértices de  $G$  y  $E(G)$  a su conjunto de aristas.

**Ejemplo 1** Consideremos la siguiente gráfica  $G_1$ .



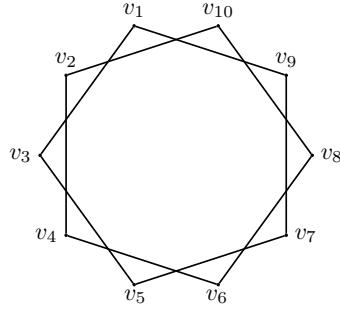
De esta forma  $G_1 = (V, E)$  donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$  y  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{12}\}$ . Notemos que  $G$  tiene orden 9 y tamaño 12.

En algunos casos conviene considerar que un vértice puede ser adyacente a si mismo, a una arista que conecta a un mismo vértice se llama lazo, también podría ocurrir que hay más de una arista conectando un mismo par de vértices, a estas se les llama aristas paralelas. Usualmente no nos interesan estos casos, cuando una gráfica no tienen ni lazos ni aristas paralelas decimos que la gráfica es **simple**. Salvo que se indique lo contrario, una gráfica será finita y simple.

Como ya vimos en el ejemplo 1, podemos definir una gráfica escribiendo de forma extensiva los conjuntos de vértices y aristas, sin embargo podemos también definirla dando una regla de adyacencia como en el siguiente ejemplos:

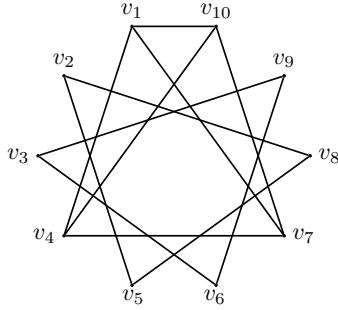
**Ejemplo 2** Dado un entero positivo  $n$ , definimos la gráfica  $G = (V, E)$  donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y tal que  $v_i$  es adyacente a  $v_j$  si y sólo si  $i$  y  $j$  tienen la misma paridad.

Por ejemplo si  $n = 10$ , obtenemos la siguiente gráfica.



**Ejemplo 3** Dado un entero positivo  $n$ , definimos la gráfica  $G = (V, E)$  donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y tal que  $v_i$  es adyacente a  $v_j$  si y sólo si  $i \equiv j \pmod{3}$ .

Cuando  $n = 10$  en el ejemplo anterior obtenemos la siguiente gráfica:



Como mencionamos, el problema de los puentes de Königsberg se puede plasmar utilizando gráficas, sin embargo aparecen aristas paralelas.

Podemos colocamos una vértice por cada isla y una arista si hay un puente entre ellas.

No es muy difícil observar que no podemos encontrar un paseo que pase por todos los puentes, sin embargo podemos preguntarnos si existirá un puente entre dos islas tal que agregarlo este paseo si existe. La respuesta es afirmativa y la gráfica resultante es la siguiente:

