

Gráficas y Juegos: Notas 6 y 7

Para demostrar el siguiente lema usaremos la siguiente observación.

Obs. Sean G_1 y G_2 gráficas tales que hay un isomorfismo φ entre G_1 y G_2 . Entonces φ^{-1} también es un isomorfismo entre G_2 y G_1 .

Lemma 1 *Sean $G = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ gráficas tales que $G_1 \cong G_2$ bajo el isomorfismo φ . Entonces $d_{G_1}(v) = d_{G_2}(\varphi(v))$ para todo $v \in V_1$.*

Demostración.

Sea $v \in V_1$, llamemos $N = N_{G_1}(v)$ y $N' = N_{G_2}(\varphi(v))$. Hay que demostrar que $|N| = |N'|$ dando una biyección. Veamos que $\varphi|_N : N \rightarrow N'$ es la biyección buscada.

Notamos que si $x, y \in N$ son tales que $\varphi|_N(x) = \varphi|_N(y)$, dado que $\varphi|_N$ es solo la restricción de φ en N , tenemos que $\varphi(x) = \varphi(y)$, la inyectividad de φ implica que $x = y$. Por lo tanto $\varphi|_N$ es inyectiva también.

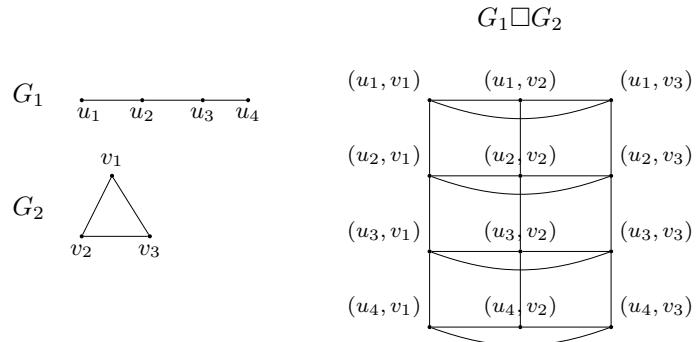
Para la suprayectividad consideremos $w \in N'$, veamos que existe $z \in N$ tal que $\varphi|_N(z) = w$. Proponemos $z = \varphi^{-1}(w)$.

Sabemos que $w \in N' = N_{G_2}(\varphi(v))$, entonces $w \text{ ady}_{G_2} \varphi(v)$. La observación anterior nos dice que φ^{-1} es un isomorfismo y por lo tanto preserva adyacencias, concluimos que $\varphi^{-1}(w) \text{ ady}_{G_1} v$ y que $\varphi^{-1}(w) \in N$. Así $\varphi|_N : N \rightarrow N'$ es una biyección y $|N| = |N'|$.

Definición 1 Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ gráficas. Definimos el **producto cuadro** de G_1 por G_2 como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_1 \times V_2$ y cuyo conjunto de aristas es:

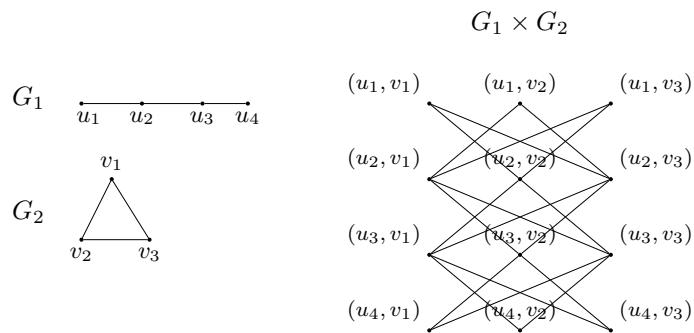
$$\{(u_1, v_1)(u_2, v_2) | u_1 \text{ ady}_{G_1} u_2 \text{ y } v_1 = v_2 \text{ o } u_1 = u_2 \text{ y } v_1 \text{ ady}_{G_2} v_2\}.$$

La denotamos por $G_1 \square G_2$.



Definición 2 Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ gráficas. Definimos el **producto cruz** de G_1 por G_2 como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_1 \times V_2$ y cuyo conjunto de aristas es:

$$\{(u_1, v_1)(u_2, v_2) | u_1 \text{ ady}_{G_1} u_2 \text{ y } v_1 \text{ ady}_{G_2} v_2\}$$



Veamos cómo son las matrices de adyacencia de las gráficas G_1 y G_2 dibujadas en los ejemplos anteriores y después las matrices de adyacencia de $G_1 \square G_2$ y $G_1 \times G_2$.

$$M_A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_A(G_1 \square G_2) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$M_A(G_1 \times G_2) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si G_1 y G_2 son gráficas de ordenes n_1 y n_2 , respectivamente, y tales que $V(G_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_1}\}$ y $V(G_2) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_2}\}$, podemos elegir el siguiente orden lineal del producto cartesiano

$$V_1 \times V_2 = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_{n_2}), \dots, (u_{n_1}, v_1), \dots, (u_{n_1}, v_{n_2})\}.$$

Entonces la matriz de adyacencia $M_A(G_1 \square G_2)$ se puede pensar como una matriz de $n_1 \times n_1$ cuyas entradas (i, j) son las submatrices A_{ij} de $n_2 \times n_2$, definidas para $i, j \in \{1, \dots, n_1\}$ como sigue:

$$A_{ij} = \begin{cases} M_A(G_2) & \text{si } i = j \\ Id_{n_2} & \text{si } u_i \text{ ady}_{G_1} u_j \\ \bar{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Similarmente la matriz de adyacencia $M_A(G_1 \times G_2)$ puede pensarse como una matriz de $n_1 \times n_1$ cuyas entradas (i, j) son las submatrices A_{ij} de $n_2 \times n_2$, pero definidas para $i, j \in \{1, \dots, n_1\}$ como sigue:

$$A_{ij} = \begin{cases} M_A(G_2) & \text{si } u_i \text{ ady}_{G_1} u_j \\ \bar{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$