

# Un método de Descomposición Propia Generalizada para operadores diferenciales de alto orden

*Autor: Carlos Quesada Granja*

*Directores: Icíar Alfaro Ruiz, David González Ibáñez*

Máster Universitario en  
**Mecánica Aplicada**

Julio de 2014



**Universidad**  
Zaragoza

Applied Mechanics and Bioengineering





# Un método de Descomposición Propia Generalizada para operadores diferenciales de alto orden

*Autor: Carlos Quesada Granja*

*Directores: Icíar Alfaro Ruiz, David González Ibáñez*

Máster Universitario en  
**Mecánica Aplicada**

Julio de 2014



**Universidad**  
Zaragoza

Applied Mechanics and Bioengineering





# Agradecimientos

Me gustaría agradecer a Icíar Alfaro, David González y Elías Cueto la oportunidad que me han brindado de trabajar con ellos, así como su ayuda, dedicación y disponibilidad en todo momento.

Asimismo, quisiera agradecer la beca de Formación de Personal Investigador otorgada por el Ministerio de Economía e Innovación dentro del proyecto CICYT DPI2011-27778-C02/01.



# Resumen

En este trabajo se realiza un breve repaso a la metodología de reducción de modelos *a priori*, basada en representaciones separadas, conocida como Descomposición Propia Generalizada (o PGD, por sus siglas en inglés). A continuación, se desarrolla una aproximación para la resolución de problemas de alto orden que utiliza polinomios de Hermite en el marco de una formulación de Galerkin. Dicha aproximación se analiza en detalle con la ayuda de dos problemas clásicos de validación: la flexión de una placa rectangular apoyada y la cavidad con pared móvil.



# Contenido



# Índice general

<b>Documento</b>	<b>15</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>17</b>
1.1. Un repaso a la Descomposición Propia Generalizada . . . . .	19
<b>2. Descomposición Propia Generalizada</b>	<b>21</b>
2.1. Enriquecimiento de la aproximación . . . . .	22
2.2. Método del punto fijo . . . . .	22
2.2.1. Cálculo de $R(x)$ a partir de $S(y)$ . . . . .	23
2.2.2. Cálculo de $S(y)$ a partir de $R(x)$ . . . . .	24
2.3. Ejemplo numérico . . . . .	26
<b>3. PGD para operadores de alto orden</b>	<b>29</b>
3.1. Método de Galerkin con polinomios de Hermite . . . . .	30
3.2. Imposición de condiciones de contorno esenciales no homogéneas . . . . .	32
3.2.1. Empleo de $R$ -funciones . . . . .	32
3.2.2. Formulación penalizada . . . . .	34
3.3. Resultados numéricos . . . . .	35
3.3.1. Flexión de una placa de Kirchhoff rectangular . . . . .	35
3.3.2. Problema con condiciones de contorno no homogéneas: la cavidad con pared móvil . . . . .	36
<b>4. Conclusiones</b>	<b>41</b>

<b>Apéndice</b>	<b>43</b>
<b>A. Artículo</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

2.1.	Modos para el problema propuesto. . . . .	27
2.2.	Solución para el problema propuesto. . . . .	27
2.3.	Error $E(u)$ como función del número de nodos $M$ que componen la malla en el problema propuesto. . . . .	28
3.1.	Polinomios de Hermite. . . . .	30
3.2.	Ejemplo de aplicación del método de las $R$ -funciones a la imposición de condiciones de contorno esenciales no homogéneas. Arriba, PSLG que define el contorno esencial. Abajo, $R$ -función resultante que, como se puede observar, se anula en el contorno esencial. . . . .	34
3.3.	Definición del problema de una placa apoyada en flexión, solicitada por una carga distribuida $f(x, y)$ . . . . .	35
3.4.	Modos obtenidos en desplazamientos para la placa rectangular apoyada. . . . .	36
3.5.	Solución en desplazamientos (izda.) y giros (dcha.) para el problema de la placa rectangular apoyada. . . . .	36
3.6.	Geometría y condiciones de contorno del problema de la cavidad con pared móvil. . . . .	37
3.7.	Solución en la variable $z$ para el problema de la cavidad con pared móvil. . . . .	39
3.8.	$R$ -función $\psi$ para el problema de la cavidad con pared móvil. . . . .	39
3.9.	Solución $u$ para el problema de la cavidad con pared móvil. . . . .	40



# Documento



# Capítulo 1

## Introducción

Los ingenieros han acudido tradicionalmente a la reducción de los modelos como la única metodología disponible para solucionar problemas complejos en épocas en las que la capacidad de cálculo disponible no era mucha. Así, por ejemplo, el modelo de viga de Euler, Bernoulli y Navier, desarrolla unas ecuaciones monodimensionales para la resolución práctica del campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones en piezas que realmente son tridimensionales. De la misma manera, el método de los modos normales para resolver problemas elastodinámicos lineales supone que la solución del problema se puede escribir como una combinación lineal de unos pocos *modos*, esto es, las frecuencias propias de vibración de la estructura analizada.

Más recientemente (ya en el s. XX, de hecho), esta metodología de *reducción* de la complejidad de los modelos ha sido sistematizada y aplicada con éxito en multitud de campos de las ciencias aplicadas y la ingeniería, tanto para problemas lineales (Karhunen, 1946), (Lorenz, 1956), (Loève, 1963), (Ryckelynck et al., 2006) como no lineales (Tenenbaum et al., 2000), (Chaturantabut and Sorensen, 2010). En general, estas técnicas, que reciben distintos nombres en distintos campos de la ciencia y que han sido redescubiertas en multitud de ocasiones, como *Principal Component Analysis* (PCA), *Proper Orthogonal Decomposition* (POD), *empirical eigenvectors* o muchos otros nombres similares, tienen como objetivo encontrar una *buen*a aproximación de la solución buscando un número mínimo de funciones. Para ello, generalmente se han de resolver problemas *similares* al propuesto. Mediante un proceso de minimización estadística, se extraen las funciones que contienen más información (o energía) de la solución. Esto se hace con la esperanza de que las funciones encontradas constituyan una buena solución para el problema dado y que difieran muy poco de la solución exacta.

En problemas definidos en coordenadas espacio-temporales, se trataría, en suma,

de encontrar aproximaciones del tipo:

$$u(x, t) \approx \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \lambda_i(t), \quad (1.1)$$

donde  $\lambda_i(t)$  representa una colección de coeficientes temporales y  $\phi_i(\mathbf{x})$  una serie de funciones dependientes únicamente de variables espaciales y que son las que mejor representan, desde un punto de vista estadístico, la solución del problema. Si consideramos los resultados de una simulación de elementos finitos, de la que dispondríamos de los valores nodales para cada incremento de tiempo, y los agrupáramos todos en una matriz  $A$  cuyas columnas fueran los valores nodales  $u(\mathbf{x}_j, t_k)$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $k = 1, \dots, T$ , entonces los  $N$  vectores  $\phi_i(\mathbf{x})$  se corresponderían con los autovectores asociados a los  $N$  mayores valores singulares de la matriz  $A$ .

En general, este tipo de técnicas ha gozado de un amplio predicamento en muchas ramas de la ciencia, pero posee severas limitaciones. La primera, el hecho de que sean necesarias las soluciones de ciertos problemas completos *similares* para determinar la base  $\phi_i$  con la que resolver el problema dado, con la esperanza de que ésta también sea óptima para él. La segunda, que su complejidad aumenta exponencialmente si el problema propuesto es paramétrico, es decir, del tipo:

$$u = u(\mathbf{x}, t, p_1, p_2, \dots, p_P), \quad (1.2)$$

donde los distintos  $p_m$ ,  $m = 1, \dots, P$ , representan parámetros del problema. Intentar obtener soluciones completas mallando el hiperdominio que resultaría es simplemente imposible, por el crecimiento exponencial del número de grados de libertad de la malla resultante con el número de dimensiones del espacio de fase. Es lo que se ha dado en llamar como la *maldición de la dimensionalidad* (Laughlin and Pines, 2000).

Para intentar solucionar la primera de las dificultades antes mencionadas, P. Ladeveze desarrolló un método *a priori*, es decir, que no necesitaba de la solución de problemas similares *a posteriori*, obteniendo así una aproximación espacio-temporal que denominó *Radial Loading Approximation*, incluido en su método *LArge Time INcrements* (LATIN) (Ladeveze, 1999), (Ladeveze et al., 2010).

Más recientemente, F. Chinesta generalizó de manera independiente esta aproximación, orientándola hacia el problema multidimensional, dando así lugar a la Descomposición Propia Generalizada (PGD), por oposición a la Descomposición Propia Ortogonal (POD) (Ammar et al., 2006), (Ammar et al., 2007), (Gonzalez et al., 2010), (Chinesta et al., 2010), (Chinesta et al., 2011), (Chinesta et al., 2013). Desde entonces, la PGD ha tenido un tremendo desarrollo en multitud de aplicaciones, como lo prueba la larga lista

de referencias posibles que, sin ánimo de ser exhaustivos, se incluyen: Ammar et al. (2012), Boucinha et al. (2013), Ghnatios et al. (2012), Gonzalez et al. (2012), Ladeveze and Chamoin (2011), Ladeveze et al. (2010), Nouy (2010), Pruliere et al. (2010), Ammar et al. (2010). Los métodos *reduced bases* (Maday et al., 2002) han tratado de obtener la base reducida haciendo un muestreo óptimo del espacio paramétrico. Sin embargo, este muestreo requiere conocer estimadores de error a priori cuya obtención resulta en muchas circunstancias delicada. Por ello, en lo que sigue, este trabajo se centra en la PGD, que resulta ser una técnica más sistemática.

En la Sección 1.1 se realiza un breve resumen de las características más importantes de la técnica PGD en su versión más estándar, aquélla basada en la aproximación por polinomios a trozos lineales en un método de Galerkin.

## 1.1. Un repaso a la Descomposición Propia Generalizada

La Descomposición Propia Generalizada (en inglés *Proper Generalized Decomposition* o PGD) es una metodología de reducción de modelos *a priori* basada en el uso de representaciones separadas. Como se ha comentado anteriormente, inicialmente se desarrolló para la resolución de problemas estructurales no lineales en espacio-tiempo (Ladeveze, 1999). Pronto evolucionó hacia su aplicación en modelos definidos en espacios con un alto número de dimensiones y, posteriormente, se extendió a modelos generales en mecánica computacional.

La característica principal de la PGD es que aproxima la solución exacta del problema imponiendo separación de variables. Así, si  $u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Re^d$ , es la solución del problema, ésta se aproxima en la PGD como

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^N F_1^i(x_1) \cdot F_2^i(x_2) \cdot \dots \cdot F_d^i(x_d), \quad (1.3)$$

donde  $d$  es el número de dimensiones del problema. A diferencia de otras metodologías (como la Descomposición Propia Ortogonal, POD), las funciones  $F_n^s(x_n)$  son funciones desconocidas a priori. Nótese que no es estrictamente necesario realizar una descomposición completa del *espacio de fase*, pudiéndose agrupar ciertas dimensiones y otras no. Por ejemplo, en Bognet et al. (2012) se utiliza de manera especialmente eficiente la PGD para obtener soluciones tridimensionales en geometrías degeneradas,

como placas y láminas, mediante una descomposición del tipo:

$$\mathbf{u}(x, y, z) \approx \sum_i F_1^i(x, y) \cdot F_2^i(z),$$

donde la complejidad resultante del método es esencialmente la de la determinación de las funciones  $F_1^i(x, y)$ , y por tanto, aproximadamente la de un problema bidimensional, siendo la determinación de las funciones  $F_2^i(z)$  de coste despreciable, al ser problemas unidimensionales.

La estrategia de determinación de las funciones incógnita  $F_j^i$  sigue un algoritmo voraz (*greedy algorithm*). Esto significa que en la determinación de cada sumando se selecciona un óptimo local con la esperanza de llegar al óptimo global. Pero cada sumando está compuesto por un producto de funciones desconocidas, que suelen aproximarse mediante elementos finitos, cuyos valores nodales deben determinarse. Esto da lugar a un problema no lineal. El método con el que se calculan los nuevos términos de la suma puede ser cualquiera de los muchos existentes (Newton, cuasi-Newton, ...), pero se prefiere siempre que se pueda, por su sencillez conceptual y de programación, el método de punto fijo. En cada paso de este algoritmo se obtiene una de las funciones separadas, que se van actualizando sucesivamente para minimizar el residuo.

En este trabajo se desarrolla la aplicación de la PGD a la resolución de problemas de alto orden. Se presenta una estrategia para resolver el problema biarmónico (cuarto orden), mediante la combinación del método de Galerkin con polinomios de Hermite para las funciones de forma. Por supuesto, no es la única estrategia posible. Otras, como el uso de funciones de aproximación *suaves* como MLS (Belytschko et al., 1994), máxima entropía local (González et al., 2010), etc., serían igualmente posibles.

## Capítulo 2

# Descomposición Propia Generalizada

En esta sección se desarrollan los detalles de la implementación de la PGD, y para ello se comienza con un caso sencillo e ilustrativo (Chinesta et al., 2014).

Se considera la solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \text{en} \quad \Omega,$$

en un dominio rectangular bidimensional  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (0, L) \times (0, H)$ .

Se especifican condiciones de contorno de Dirichlet para el campo desconocido  $u(x, y)$ , es decir, que  $u(x, y)$  debe ser nulo en el contorno del dominio  $\Gamma$ .

Para todas las funciones test  $u^*$  adecuadas, el residuo ponderado tiene la siguiente forma:

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y} u^* \cdot (\Delta u - f) dx \cdot dy = 0,$$

o, de forma más explícita,

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y} u^* \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f \right) dx \cdot dy = 0. \quad (2.1)$$

El objetivo de la PGD es obtener una solución aproximada para la Ec. (2.1) con la forma separada

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y). \quad (2.2)$$

La construcción de esta solución implica calcular cada término de la aproximación uno por uno, enriqueciendo así la aproximación PGD hasta satisfacer un criterio de convergencia determinado.

## 2.1. Enriquecimiento de la aproximación

La construcción progresiva de la representación separada se conoce como *etapa de enriquecimiento*. En cada paso  $n$  del enriquecimiento (para  $n \geq 1$ ), los primeros  $n - 1$  términos de la aproximación PGD descrita en la Ec. (2.2) ya se suponen calculados:

$$u^{n-1}(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) \cdot Y_i(y).$$

A continuación, se desea calcular el siguiente término de la aproximación, que se denotará como  $R(x) \cdot S(y)$ :

$$u^n(x, y) = u^{n-1}(x, y) + R(x) \cdot S(y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) \cdot Y_i(y) + R(x) \cdot S(y). \quad (2.3)$$

Tanto  $R(x)$  como  $S(y)$  son funciones desconocidas en el paso actual  $n$  del enriquecimiento. Puesto que aparecen en forma de producto, el problema resultante es no lineal y requiere de un esquema de linealización adecuado.

El esquema iterativo más sencillo es una estrategia de direcciones alternadas conocida como *método del punto fijo*. Este método permite obtener la  $R(x)$  de la iteración actual  $p$  a partir de la  $S(y)$  de la iteración anterior  $p - 1$  para, a continuación, obtener la  $S(y)$  de la iteración actual  $p$  a partir de  $R(x)$  que se acaba de calcular. Para que comience el proceso iterativo, se debe especificar un valor inicial arbitrario  $S_0(y)$ . Las iteraciones se sucederán hasta alcanzar un punto fijo (de ahí el nombre del método), delimitado por una tolerancia  $\epsilon$  previamente especificada, es decir

$$\frac{\|R_p(x) \cdot S_p(y) - R_{p-1}(x) \cdot S_{p-1}(y)\|}{R_{p-1}(x) \cdot S_{p-1}(y)} < \epsilon,$$

donde  $\|\cdot\|$  es una norma adecuada.

Una vez halladas las funciones, el paso  $n$  del enriquecimiento termina identificando  $R(x)$  con  $X_n(x)$  y  $S(y)$  con  $Y_n(y)$ .

El proceso de enriquecimiento se detiene cuando se obtiene una determinada medida del error  $e(n)$  lo bastante pequeña, esto es  $e(n) < \tilde{\epsilon}$ .

En el siguiente epígrafe se describe con más detalle una iteración del método del punto fijo para un paso cualquiera del enriquecimiento.

## 2.2. Método del punto fijo

Como ya se ha comentado anteriormente, cada iteración del esquema del método del punto fijo consta de los dos siguientes pasos:

- Cálculo de la función  $R(x)$  de la iteración actual, siendo conocida la función  $S(y)$  de la iteración anterior.
- Cálculo de la función  $S(x)$  a partir de la función  $R(x)$ .

### 2.2.1. Cálculo de $R(x)$ a partir de $S(y)$

Recordando la Ec. (2.3), la aproximación se puede escribir como

$$u^n(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) \cdot Y_i(y) + R(x) \cdot S(y), \quad (2.4)$$

donde todas las funciones son conocidas excepto  $R(x)$ .

La elección más sencilla para la función de ponderación  $u^*$  en la formulación de residuos de ponderación de la Ec. (2.1) es

$$u^*(x, y) = R^*(x) \cdot S(y) + R(x) \cdot S^*(y), \quad (2.5)$$

que es equivalente a seleccionar la forma residual ponderada de Galerkin de la ecuación de Poisson. En este caso, la función  $S(y)$  es conocida y, por lo tanto,  $S^*(y) = 0$ . La Ec. (2.5) queda entonces como

$$u^*(x, y) = R^*(x) \cdot S(y). \quad (2.6)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.4) y (2.9) en la Ec. (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^*(x) \cdot S(y) \cdot \left( \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \cdot S(y) + R(x) \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \right) dx \cdot dy = \\ &= - \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^*(x) \cdot S(y) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \cdot Y_i + X_i \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} \right) dx \cdot dy + \\ & \quad + \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^*(x) \cdot S(y) \cdot f(x, y) dx \cdot dy. \end{aligned} \quad (2.7)$$

El término fuente  $f(x, y)$  también se debe escribir como una representación separada de la forma

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^M F_j^x(x) \cdot F_j^y(y), \quad (2.8)$$

que se puede obtener mediante descomposición en valores singulares (SVD) para el caso bidimensional o mediante descomposición en valores singulares de alto orden (HOSVD) cuando el número de dimensiones es mayor.

Puesto que todas las funciones de  $y$  son conocidas en la Ec. (2.7), se pueden calcular las siguientes integrales unidimensionales en el dominio  $\Omega_y$ :

$$\begin{cases} \alpha^x = \int_{\Omega_y} (S(y))^2 dy, \\ \beta^x = \int_{\Omega_y} S(y) \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} dy, \\ \gamma_i^x = \int_{\Omega_y} S(y) \cdot Y_i(y) dy, \\ \delta_i^x = \int_{\Omega_y} S(y) \cdot \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} dy, \\ \xi_j^x = \int_{\Omega_y} S(y) \cdot F_j^y(y) dy. \end{cases}$$

La Ec. (2.7) queda entonces como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} R^*(x) \cdot \left( \alpha^x \cdot \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \beta^x \cdot R(x) \right) dx &= \\ &= - \int_{\Omega_x} R^*(x) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left( \gamma_i^x \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} + \delta_i^x \cdot X_i \right) dx + \\ &\quad + \int_{\Omega_x} R^*(x) \cdot \left( \sum_{j=1}^M \xi_j^x \cdot F_j^x(x) \right) dx. \end{aligned}$$

De esta manera, se ha obtenido la forma del residuo ponderado de un problema unidimensional definido en el dominio  $\Omega_x$ , que se puede resolver (por ejemplo, mediante el método de los elementos finitos) para obtener la función  $R(x)$  que se está buscando.

Una vez obtenido  $R(x)$ , se puede proceder con el segundo paso de la iteración  $p$ .

### 2.2.2. Cálculo de $S(y)$ a partir de $R(x)$

El procedimiento es idéntico al que se ha seguido en el apartado anterior. De hecho, simplemente se intercambian los papeles de las funciones relevantes de  $x$  e  $y$ .

La aproximación PGD actual sigue teniendo la expresión de la Ec. (2.4), con la diferencia de que, en esta ocasión, todas las funciones son conocidas excepto  $S(y)$ . La formulación de Galerkin de la Ec. (2.1) se obtiene nuevamente con la Ec. (2.5). En este caso, la función  $R(x)$  es conocida y, por lo tanto,  $R^*(x) = 0$ :

$$u^*(x, y) = R(x) \cdot S^*(y). \quad (2.9)$$

De esta manera, al sustituir en 2.1 se obtiene

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y} R(x) \cdot S^*(y) \cdot \left( \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \cdot S(y) + R(x) \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \right) dx \cdot dy =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R(x) \cdot S^*(y) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \cdot Y_i + X_i \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} \right) dx \cdot dy + \\
&\quad + \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R(x) \cdot S^*(y) \cdot f(x, y) dx \cdot dy. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Puesto que todas las funciones de  $x$  son conocidas, las integrales en el dominio  $\Omega_x$  se puede calcular para obtener

$$\begin{cases} \alpha^y = \int_{\Omega_x} (R(x))^2 dx, \\ \beta^y = \int_{\Omega_x} R(x) \cdot \frac{d^2 R(x)}{dx^2} dx, \\ \gamma_i^y = \int_{\Omega_x} R(x) \cdot X_i(x) dx, \\ \delta_i^y = \int_{\Omega_x} R(x) \cdot \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} dx, \\ \xi^y = \int_{\Omega_x} R(x) \cdot F_j^x(x) dx. \end{cases}$$

La Ec. (2.10) se puede escribir ahora como

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_y} S^*(y) \cdot \left( \alpha^y \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} + \beta^y \cdot S(y) \right) dy = \\
&= - \int_{\Omega_y} S^*(y) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left( \gamma_i^y \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} + \delta_i^y \cdot Y_i \right) dy + \\
&\quad + \int_{\Omega_y} S^*(y) \cdot \left( \sum_{j=1}^{j=M} \xi_j^y \cdot F_j^y(y) \right) dy. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Igual que antes, se ha obtenido la forma residual ponderada de un problema elíptico definido en el dominio de  $\Omega_y$ , cuya solución es la función  $S(y)$ . La formulación fuerte correspondiente a este problema unidimensional tiene la forma

$$\alpha^y \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} + \beta^y \cdot S(y) = - \sum_{i=1}^{n-1} \left( \gamma_i^y \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} + \delta_i^y \cdot Y_i \right) + \xi^y.$$

De nuevo, se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, ya que la ecuación de Poisson original implica derivadas de segundo orden del campo desconocido con respecto a  $y$ . A partir del residuo ponderado y de las formulaciones fuertes, se siguen de forma inmediata las condiciones de contorno homogéneas de Dirichlet  $S(y=0) = S(y=L) = 0$ .

En este punto, la iteración  $p$  del paso  $n$  de la etapa de enriquecimiento está completada.

Es importante observar que la ecuación de Poisson bidimensional original, definida en el dominio  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ , se ha transformado, siguiendo la metodología PGD, en

una serie de *problemas unidimensionales desacoplados* formulados en  $\Omega_x$  y  $\Omega_y$ . Si se hubiera considerado la ecuación de Poisson definida sobre un dominio de dimensión  $D$ , esto es  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_D$ , su solución PGD habría supuesto de manera similar una serie de problemas unidimensionales desacoplados formulados en cada  $\Omega_i$ . Esto permite explicar la viabilidad de la obtención de soluciones PGD a problemas con un número elevado de dimensiones.

## 2.3. Ejemplo numérico

En esta sección se ilustra el desarrollo de las secciones previas. Se comparan las soluciones PGD y analítica de un problema de transferencia de calor bidimensional:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y),$$

definido en un dominio cuadrado bidimensional  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (-1, 1) \times (-1, 1)$  y con condiciones de contorno homogéneas. Se considera la siguiente representación separada para el término fuente  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = 2 \sin(2\pi y) + 4\pi^2(1 - x^2) \sin(2\pi y)$$

La solución exacta del problema se conoce de antemano:

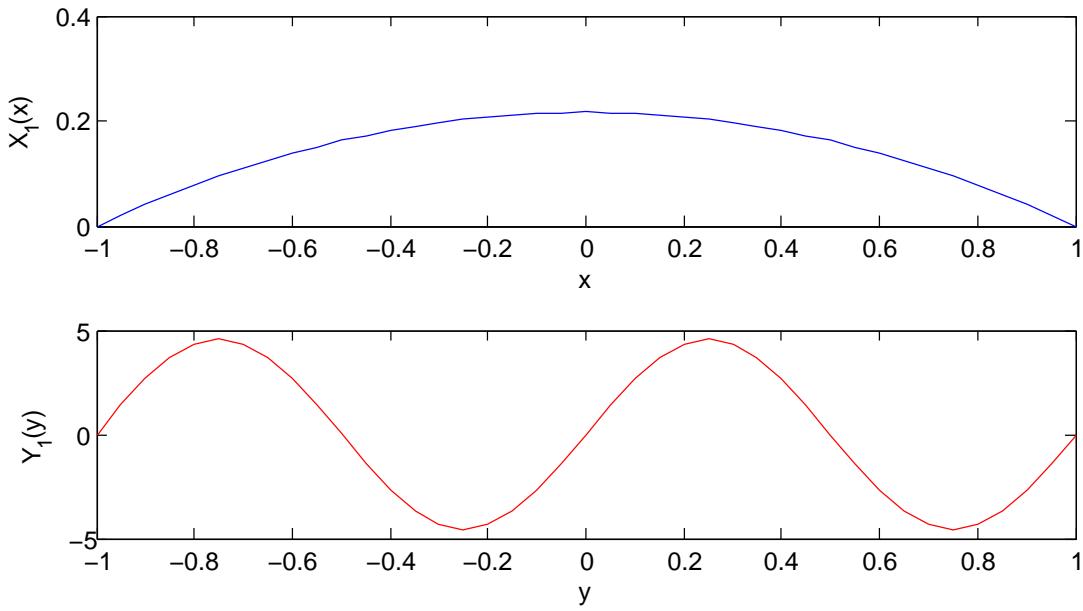
$$u_e(x, y) = (1 - x^2) \sin(2\pi y).$$

Desde un punto de vista práctico, las funciones se deben definir de forma discreta. De esta forma, las funciones desconocidas  $X_i(x)$ ,  $Y_i(y)$ ,  $R(x)$  y  $S(y)$  se definen usando una interpolación en elementos finitos unidimensional que se asumirá lineal por tramos. Para este problema, se ha considerado una malla uniforme unidimensional con el mismo número de nodos en las dos dimensiones espaciales ( $M = 41$ ), y se ha asumido un criterio de parada de  $\epsilon < 10^{-4}$ .

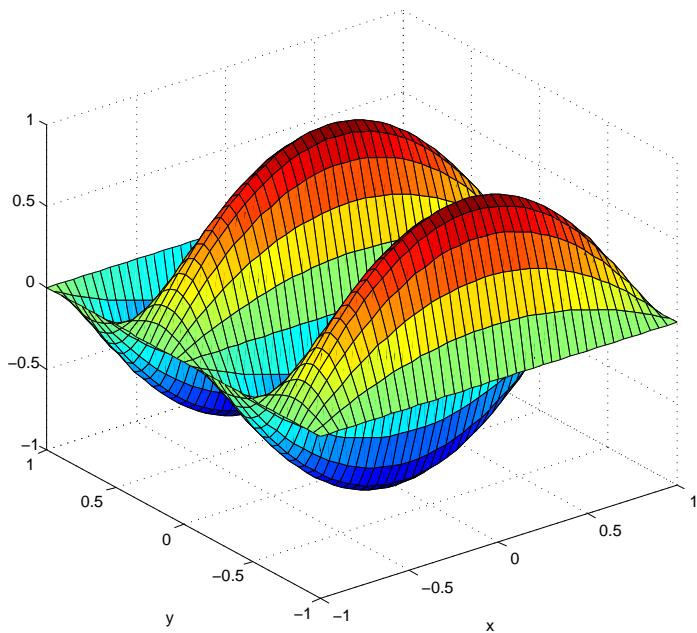
La solución se alcanza en una sola iteración ( $N = 1$ ). Las dos funciones que componen este único modo se representan en la Fig. 2.1; y su producto,  $X_1(x) \cdot Y_1(y) = u(x, y)$ , en la Fig. 2.2.

Puesto que la solución analítica  $u_e(x, y)$  es conocida, es posible obtener la norma del error relativo  $L^2$  de la aproximación  $u(x, y)$  mediante la expresión:

$$E(u) = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u_e(x, y) - u(x, y))^2 d\Omega}{\int_{\Omega} u_e(x, y)^2 d\Omega}},$$

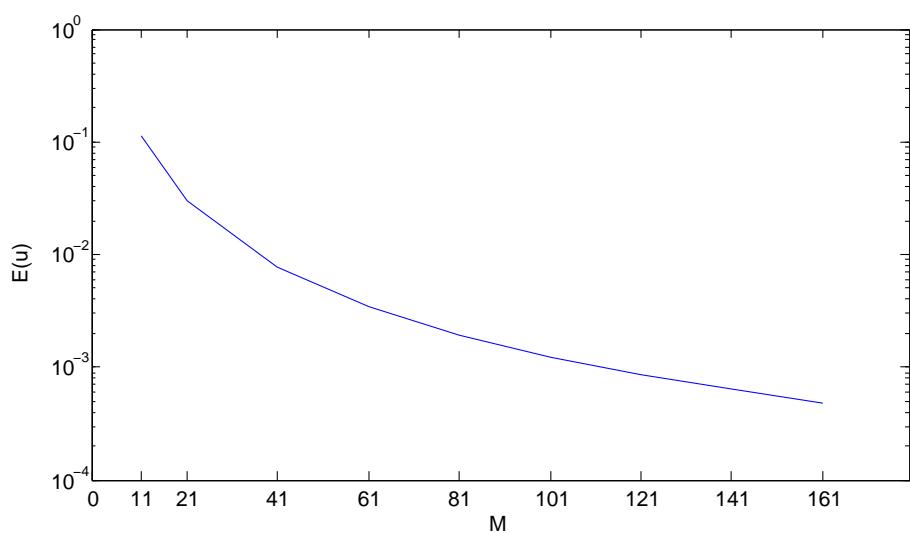


**Figura 2.1.** Modos para el problema propuesto.



**Figura 2.2.** Solución para el problema propuesto.

donde la integración numérica se realiza, en este caso, usando la cuadratura de Gauss. En la Fig. 2.3 se ilustra la convergencia de la solución PGD para este ejemplo, mostrando  $E(u)$  como función de  $M$ . Se observa cómo el error disminuye a medida que se refina la malla (Chinesta et al., 2014).



**Figura 2.3.** Error  $E(u)$  como función del número de nodos  $M$  que componen la malla en el problema propuesto.

## Capítulo 3

# PGD para operadores de alto orden

El problema biarmónico, además de ser un problema de referencia para métodos numéricos y analíticos, aparece en muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, modela la flexión de placas delgadas o el flujo de un fluido viscoso en 2D cuando se utiliza la llamada función de corriente, por ejemplo. Por ello se ha tomado como problema de referencia sobre el que estudiar el comportamiento de las soluciones desarrolladas en este trabajo: la flexión de placas delgadas y el problema del flujo en una cavidad con pared móvil (*lid-driven cavity*).

El problema biarmónico bidimensional se describe mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta^2 u = f(x, y) \quad \text{en} \quad \Omega, \quad (3.1)$$

donde

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

y se suponen las siguientes condiciones de contorno homogéneas:

$$u = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega. \quad (3.2)$$

En el caso de la PGD, a diferencia de las técnicas de elementos finitos tradicionales, la imposición de condiciones de contorno no homogéneas juega un papel preponderante en el desarrollo del método (Gonzalez et al., 2010). En el siguiente epígrafe se desarrollan estos aspectos en detalle.

### 3.1. Método de Galerkin con polinomios de Hermite

En esta sección se define una estrategia para hallar una solución aproximada al problema biarmónico. Se empleará el método de Galerkin para la discretización del problema y se usarán los polinomios de Hermite como funciones de forma (Fig. 3.1). Los polinomios de Hermite permiten obtener de manera sencilla una solución con continuidad  $C^1$ . A cambio, introducen los giros nodales (primera derivada de la variable esencial) como incógnitas del problema.

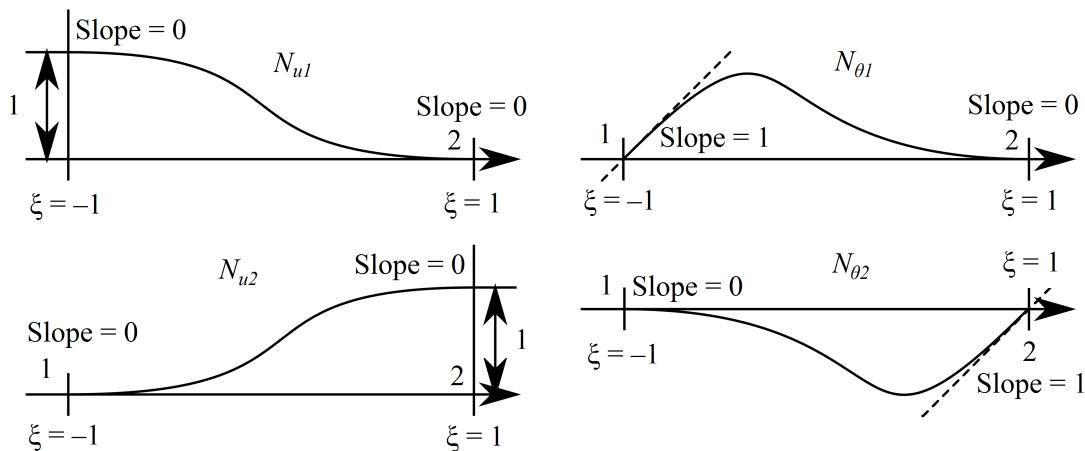


Figura 3.1. Polinomios de Hermite.

El procedimiento parte nuevamente de la forma débil del problema descrito en la Ec. (3.1),

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} \Delta u^*(x, y) \cdot \Delta u(x, y) - u^*(x, y) \cdot f(x, y) dx dy = 0.$$

La función de ponderación  $u^*(x, y)$  tiene la misma expresión que la Ec. (2.5), de tal forma que, al introducirla junto a la función de aproximación en la formulación débil, se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_i(y) \cdot S(y) dy + \\ & + \int_{\Omega_x} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} (S(y))^2 dy + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_i(y) \cdot S^*(y) dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_x} \left( \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} S(y) \cdot S^*(y) dy + \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} X_i(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} dy + \\
& \quad + \int_{\Omega_x} R(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \left( \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \right)^2 dy + \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} X_i(x) \cdot R(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\
& \quad + \int_{\Omega_x} (R(x))^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\
& + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{dX_i(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_i(y)}{dy} \cdot \frac{dS(y)}{dy} dy + \\
& \quad + 2 \int_{\Omega_x} \frac{dR(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \left( \frac{dS(y)}{dy} \right)^2 dy + \\
& + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{dX_i(x)}{dx} \cdot \frac{dR(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_i(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\
& \quad + 2 \int_{\Omega_x} \left( \frac{dR(x)}{dx} \right)^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dS(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\
& - \int_{\Omega_x} R^*(x) \cdot f(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} S(y) \cdot f(y) dy + \\
& \quad - \int_{\Omega_x} R(x) \cdot f(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} S^*(y) \cdot f(y) dy = 0. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Para hallar las funciones  $X_i(x)$  e  $Y_i(y)$  se seguirá el procedimiento descrito en el capítulo anterior: en la etapa de enriquecimiento de la PGD, se utilizará el método iterativo del punto fijo para despejar  $S(y)$ , suponiendo que  $R(x)$  es conocida (y por lo tanto,  $R^*(x) = 0$ ); y una vez obtenido  $S(y)$ , se calculará la función  $R(x)$  (con  $S^*(y) = 0$ ). Estos dos pasos se repetirán hasta que el error en la iteración actual sea menor que un determinado valor de tolerancia. Por su parte, la etapa de enriquecimiento continuará hasta que se alcance la convergencia.

Desde este punto de vista, la formulación PGD del problema biarmónico empleando polinomios de Hermite parecería no introducir ninguna dificultad adicional sobre la formulación estándar con operadores de orden dos. Sin embargo, la imposición de condiciones de contorno esenciales no homogéneas, definidas ahora tanto en la variable esencial como en su primera derivada, merece un comentario especial.

## 3.2. Imposición de condiciones de contorno esenciales no homogéneas

Como es fácil comprobar, el método PGD proporciona siempre soluciones al problema homogéneo. Para la resolución, como es el caso, de problemas con condiciones de contorno de Dirichlet no homogéneas, habitualmente se acude a una técnica de cambio de variable. Así, se supone que es posible encontrar una función  $\psi$ , continua en el dominio  $\Omega$ , que satisface las condiciones de contorno no homogéneas. Entonces, la solución al problema se puede obtener como

$$u = \psi + z,$$

de forma que el problema se traslada a uno homogéneo en la variable  $z$ :

$$\begin{aligned} \Delta^2 z &= f - \Delta^2 \psi && \text{en } \Omega \\ z &= \frac{\partial z}{\partial n} = 0 && \text{en } \Gamma_u \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Se puede encontrar información más detallada sobre cómo cambiar de la condición de contorno inhomogénea a la homogénea en el contexto de la PGD en (Gonzalez et al., 2010).

En lo que sigue, se proponen dos alternativas para hallar la función  $\psi$ :

- Empleo de *R*-funciones.
- Formulación penalizada.

### 3.2.1. Empleo de *R*-funciones

Es fundamental determinar de manera eficiente la función  $\psi$ . En algunos trabajos previos (Gonzalez et al., 2010), la función  $\psi$  se determina mediante el uso de *R*-funciones (Rvachev et al., 2001) (Rvachev et al., 2000). En el caso de problemas de alto orden, las condiciones de contorno están impuestas tanto en la variable del problema como en sus derivadas. Por tanto, es importante obtener una función  $\psi$  que verifique todas las condiciones de contorno con eficiencia. La técnica de las *R*-funciones permite una solución especialmente eficiente para este problema. Así, en Rvachev et al. (2000) se propone la construcción de la función  $\psi$  como se sigue a continuación.

En primer lugar, se supondrá que el contorno se define como un *Planar Straight Line Graph* (PSLG), es decir, un conjunto de líneas rectas  $\partial\Omega_i$  que discretizan dicho contorno.

Sea entonces  $\omega$  una función *normalizada*, es decir, que se comporta como una pseudo-distancia:

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 1, \quad \left. \frac{\partial^k\omega}{\partial\mathbf{n}^k} \right|_{\partial\Omega} = 0,$$

con  $k = 2, \dots, m$  y  $\mathbf{n}$  la normal al contorno esencial. Entonces, se denomina *normalizador* de una función  $f(\mathbf{x})$  a la función

$$f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \omega\nabla\omega).$$

En este caso, por construcción,  $f^*$  verifica que

$$f^*(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = f(\mathbf{x})|_{\partial\Omega}, \quad \left. \frac{\partial^k f^*}{\partial\mathbf{n}^k} \right|_{\partial\Omega} = 0,$$

es decir,  $f^*$  se comporta esencialmente como una constante en la dirección normal al contorno.

Supóngase entonces que cada segmento  $\partial\Omega_i$  del PSLG se define mediante una ecuación implícita  $\omega_i = 0$ . De esta forma, si las condiciones de contorno definidas sobre  $\partial\Omega$  son del tipo

$$u(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = f_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial^k u}{\partial\mathbf{n}^k} \right|_{\partial\Omega} = f_k(\mathbf{x}),$$

con  $k = 1, 2, \dots, m$ , entonces, si se han definido en el contorno condiciones de orden  $m_i - 1$ , se puede construir la función buscada  $\psi$  de la forma

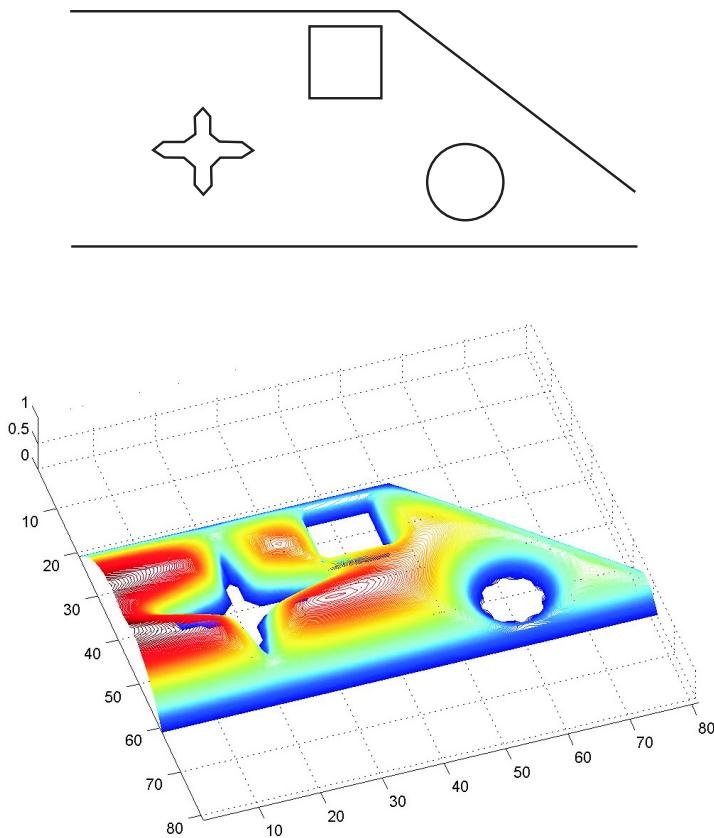
$$\psi = \frac{\sum_{i=1}^s P_i \omega_i^{-m_i}}{\sum_{i=1}^s \omega_i^{-m_i}},$$

donde cada  $P_i$  se corresponde con los polinomios de Taylor generalizados

$$P = f_0^* + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} f_k^* \omega^k.$$

Nótese que hay un polinomio  $P_i$  para cada uno de los  $s$  segmentos del contorno sobre los que se define una condición esencial no homogénea. Para una explicación más detallada sobre la técnica de las  $R$ -funciones, se recomienda la referencia Rvachev et al. (2000).

En la Fig. 3.2 se muestra un ejemplo de construcción de una  $R$ -función para un contorno esencial arbitrario con condiciones esenciales no homogéneas de primer orden. En la Sección 3.3 se incluyen ejemplos de  $R$ -funciones con condiciones en la primera derivada de la variable esencial.



**Figura 3.2.** Ejemplo de aplicación del método de las  $R$ -funciones a la imposición de condiciones de contorno esenciales no homogéneas. Arriba, PSLG que define el contorno esencial. Abajo,  $R$ -función resultante que, como se puede observar, se anula en el contorno esencial.

### 3.2.2. Formulación penalizada

Otra posibilidad, si no se quiere que la función  $\psi$  verifique las condiciones sobre la variable esencial y su primera derivada, es hacer que sólo verifique la condición  $u(\mathbf{x} \in \Gamma) = f_1$  e introducirla en la primera derivada de la formulación diferencial con un coeficiente de penalización, esto es

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} u^*(x, y) (\Delta^2 u(x, y) - f(x, y)) d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Gamma} u^* \left( \frac{\partial u}{\partial n} - f_2 \right) d\mathbf{x} = 0.$$

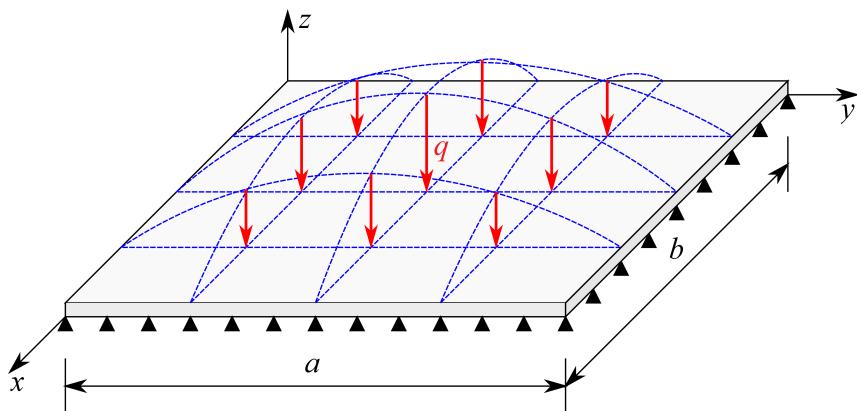
En lo que sigue se aplicará la formulación penalizada combinada con la colocación espectral y el uso de las  $R$ -funciones junto con una discretización Hermite.

### 3.3. Resultados numéricos

En esta sección se muestran los resultados obtenidos con la estrategia anteriormente presentada para dos problemas que se pueden modelar con la ecuación biarmónica: la flexión de una placa rectangular apoyada y la cavidad con pared móvil.

#### 3.3.1. Flexión de una placa de Kirchhoff rectangular

El problema propuesto en las Ecs. (3.1) y (3.2) es equivalente al cálculo de la deformación en una placa apoyada mediante el modelo de Kirchhoff, a la que se le aplica una carga distribuida definida por la función  $f(x, y)$  (Fig. 3.3). En este caso, sin embargo, se considera una placa simplemente apoyada, de forma que las condiciones de contorno esenciales en la primera derivada del desplazamiento no están fijadas, pasando a estarlo las segundas derivadas (condiciones de Neumann, proporcionales al momento flector en el borde que, al considerarse ahora libre el giro, serán nulas).



**Figura 3.3.** Definición del problema de una placa apoyada en flexión, solicitada por una carga distribuida  $f(x, y)$ .

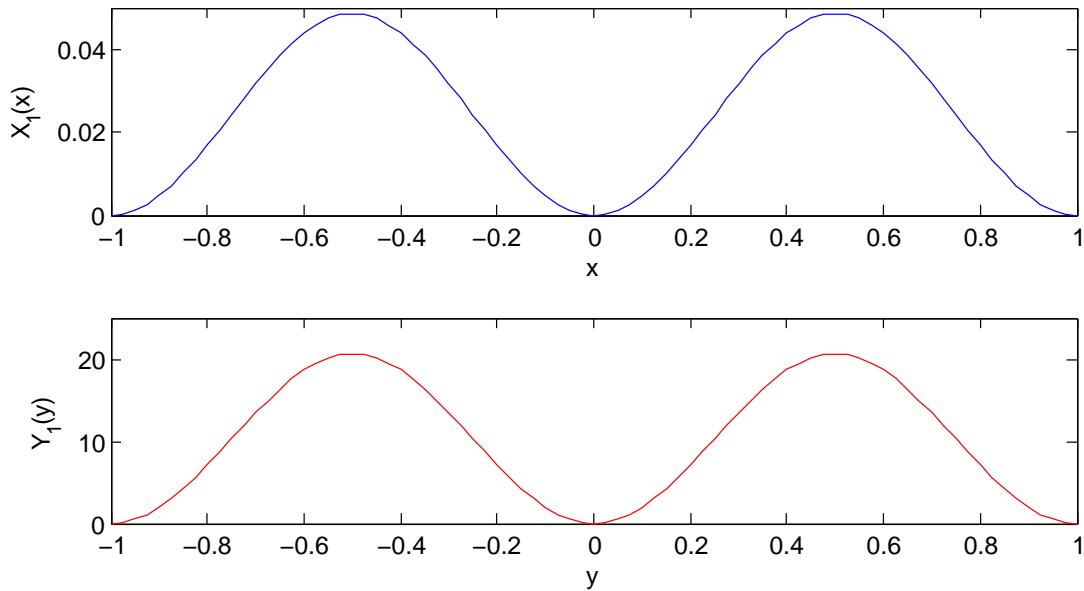
Se ha tomado para este caso,

$$f(x, y) = -8\pi^4 (\cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) + \sin^2(\pi x) \cos(2\pi y) - \cos(2\pi x) \cos(2\pi y)),$$

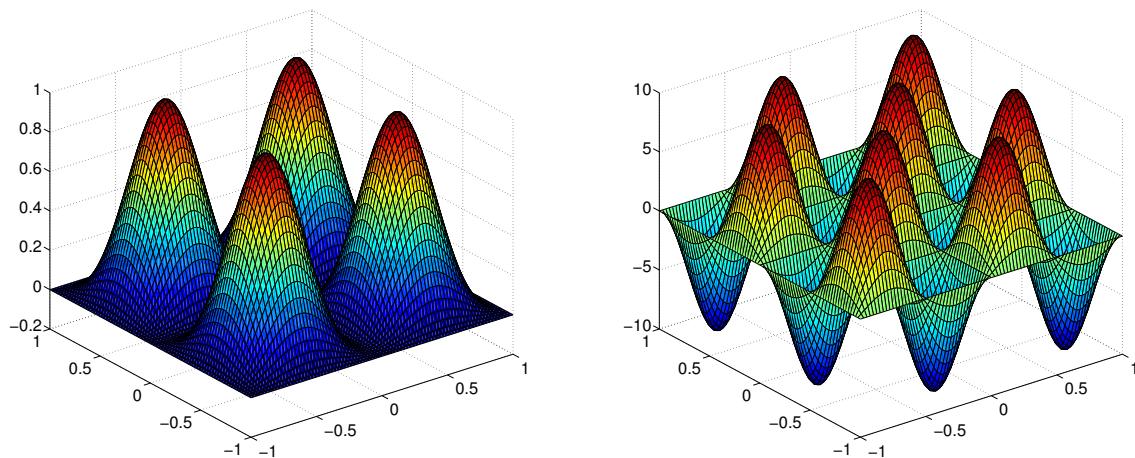
de forma que la solución analítica del problema es

$$u(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y).$$

En la Fig. 3.4 se representan los modos de la solución (un sólo producto  $X_1(x) \cdot Y_1(y)$ ). La solución así construida se muestra en la Fig. 3.5.



**Figura 3.4.** Modos obtenidos en desplazamientos para la placa rectangular apoyada.



**Figura 3.5.** Solución en desplazamientos (izda.) y giros (dcha.) para el problema de la placa rectangular apoyada.

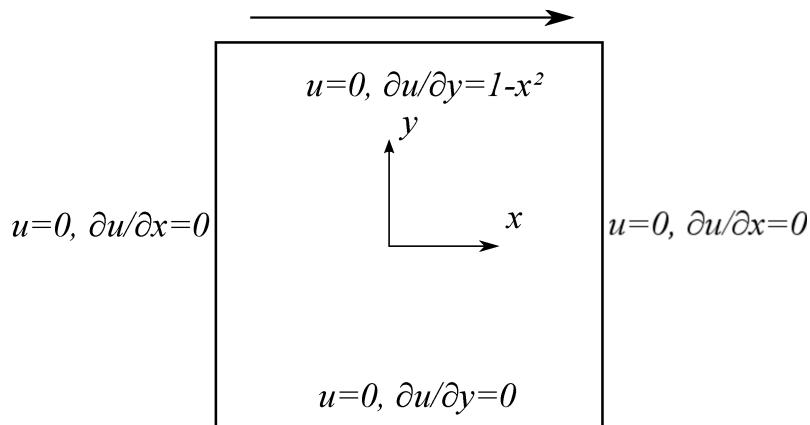
### 3.3.2. Problema con condiciones de contorno no homogéneas: la cavidad con pared móvil

Se considera ahora el problema clásico de la cavidad con pared móvil o *lid-driven cavity problem*. En este problema, un fluido se encuentra contenido en un depósito generalmente cuadrado, con una velocidad conocida en todo el contorno (velocidad nula en tres de sus lados y forzada en el cuarto). Éste último es precisamente el que fuerza el movimiento del fluido en el seno del depósito. En este caso, la solución de la ecuación

biarmónica representa la función de la corriente, a partir de la cual puede calcularse la velocidad del fluido como:

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial u}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

La geometría y las condiciones de contorno del problema de la cavidad con pared móvil se muestran en la Fig. 3.6.



**Figura 3.6.** Geometría y condiciones de contorno del problema de la cavidad con pared móvil.

El problema se considera como biarmónico bidimensional, en el dominio  $\Omega = (-1, 1)^2$  y sujeto a las condiciones de contorno:

$$u = f_1 \frac{\partial u}{\partial n} = f_2$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones dadas.

Utilizando la estrategia comentada anteriormente, la solución del problema biarmónico se redefine mediante un simple cambio de variable para la imposición de las condiciones de contorno, como  $u = z + \psi$ .

Una vez obtenida la función  $\psi$  mediante la aplicación de la técnica de las  $R$ -funciones, la forma débil para el nuevo problema en  $z$  cambia con respecto a la Ec. (3.3). Ahora, para la  $p$ -ésima iteración del  $n$ -ésimo paso de la etapa de enriquecimiento, cuando la función  $R(x)$  es conocida ( $R^*(x) = 0$ ), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_i(y) \cdot S^*(y) dy + \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_j^\psi(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_j^\psi(y) \cdot S^*(y) dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_x} \left( \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} S(y) \cdot S^*(y) dy + \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} X_i(x) \cdot R(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} X_j^\psi(x) \cdot R(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_j^\psi(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\
& \quad + \int_{\Omega_x} R^2(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\
& + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{dX_i(x)}{dx} \cdot \frac{dR(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_i(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\
& + 2 \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} \frac{dX_j^\psi(x)}{dx} \cdot \frac{dR(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_j^\psi(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\
& \quad + 2 \int_{\Omega_x} \left( \frac{dR(x)}{dx} \right)^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dS(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\
& \quad - \int_{\Omega_x} R(x) \cdot f(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} S^*(y) \cdot f(y) dy = 0. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

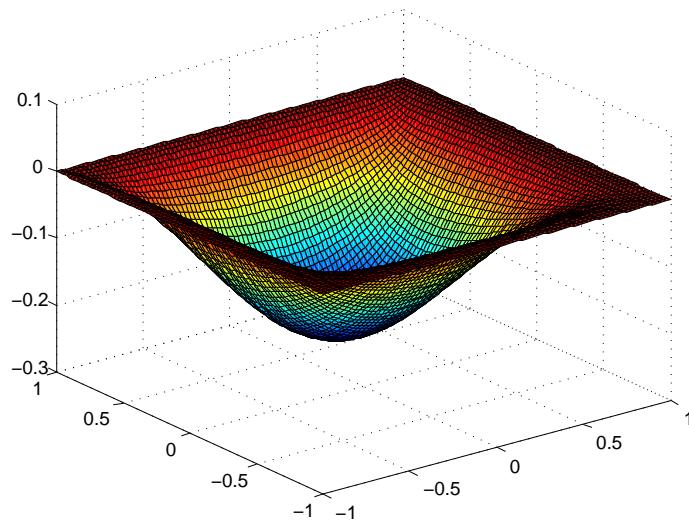
Y cuando la función  $S(y)$  es conocida ( $S^*(y) = 0$ ), se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_i(y) \cdot S(y) dy + \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_j^\psi(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_j^\psi(y) \cdot S(y) dy + \\
& \quad + \int_{\Omega_x} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} S^2(y) dy + \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} X_i(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} dy + \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} X_j^\psi(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_j^\psi(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} dy + \\
& \quad + \int_{\Omega_x} R(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \left( \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \right)^2 dy + \\
& + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{dX_i(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_i(y)}{dy} \cdot \frac{dS(y)}{dy} dy + \\
& + 2 \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} \frac{dX_j^\psi(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_j^\psi(y)}{dy} \cdot \frac{dS(y)}{dy} dy +
\end{aligned}$$

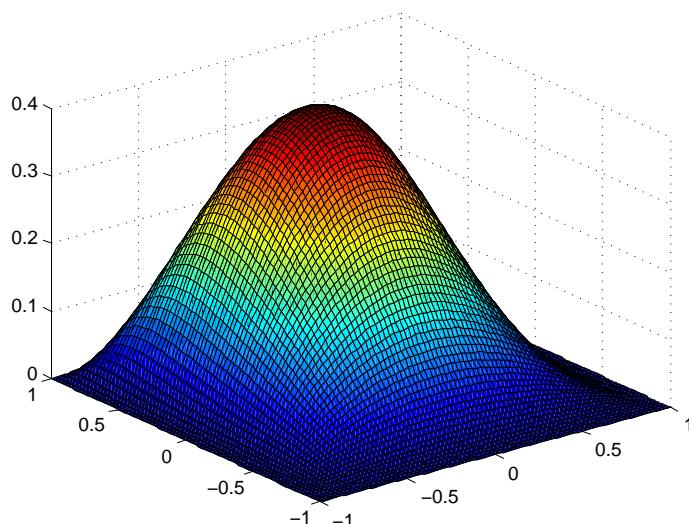
$$\begin{aligned}
 & + 2 \int_{\Omega_x} \frac{dR(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \left( \frac{dS(y)}{dy} \right)^2 dy + \\
 & - \int_{\Omega_x} R^*(x) \cdot f(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} S(y) \cdot f(y) dy = 0, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

donde  $\psi = \sum_{j=1}^m X_j^\psi(x) \cdot Y_j^\psi(y)$ .

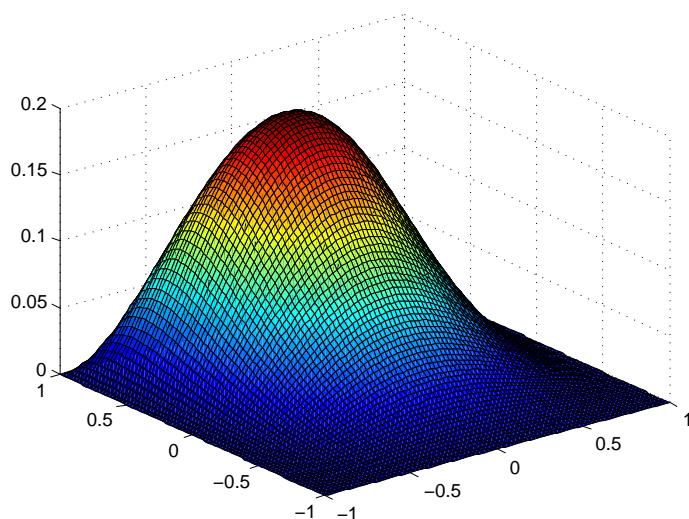
En la Fig. 3.7 se muestra la solución obtenida para la variable homogénea  $z$ , mientras que en la Fig. 3.8 se muestra la función  $\psi$  que permite la imposición de las condiciones esenciales, es decir, la  $R$ -función obtenida. La solución  $u$  se representa en la Fig. 3.9.



**Figura 3.7.** Solución en la variable  $z$  para el problema de la cavidad con pared móvil.



**Figura 3.8.**  $R$ -función  $\psi$  para el problema de la cavidad con pared móvil.



**Figura 3.9.** Solución  $u$  para el problema de la cavidad con pared móvil.

## Capítulo 4

# Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una aplicación del método de la Descomposición Propia Generalizada a problemas de alto orden, con un énfasis especial en problemas de tipo bilaplaciano. Se demuestra que la PGD proporciona, para este tipo de problemas, soluciones de una calidad comparable a las que ya son bien conocidas para problemas de orden uno.



# Apéndice



## Apéndice A

### Artículo

Se adjunta en este anexo el artículo *Un metodo de descomposicion propia generalizada para operadores diferenciales de alto orden*, recientemente enviado (mayo de 2014) a la *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Una parte del artículo se ha incluido en este Trabajo Fin de Master, pues el autor de este trabajo es también coautor del artículo.

En el artículo se presenta, además de la estrategia basada en el uso de polinomios de Hérmita y la formulación de Galerkin, otro enfoque para la resolución de problemas de alto orden mediante métodos PGD, en el que se emplean técnicas de colocación y polinomios de Chebyshev.





# **Un método de descomposición propia generalizada para operadores diferenciales de alto orden**

**Carlos Quesada · Guangtao Xu · David González · Icíar Alfaro · Adrien Leygue · Michel Visonneau · Elías Cueto · Francisco Chinesta**

Received: Abril 2014, Accepted:  
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2008

**Resumen** En este artículo se desarrollan dos aproximaciones distintas para la resolución de problemas de alto orden mediante métodos de descomposición propia generalizada (PGD, por sus siglas en inglés). La primera está basada en el uso de técnicas de colocación y polinomios de Chebyshev, mientras que la segunda se basa en el uso de polinomios de Hermite en el marco de una formulación de Galerkin. Ambas poseen ventajas e inconvenientes, que son analizados en detalle con la ayuda de distintos problemas clásicos de validación.

## **Proper Generalized Decomposition approach for higher-order problems**

**Summary** In this paper two different approximations for solution of high-order problems by proper generalized decompositions (PGD) are developed. The first one is based on the use of collocation techniques, along with Chebyshev polynomials, while the second employs Hermite polynomials in a Galerkin framework. Both approaches having pros and cons, they are studied with the help of some classical benchmark tests.

Carlos Quesada · D. González · I. Alfaro · E. Cueto  
Institute of Engineering Research  
Universidad de Zaragoza  
Ctra. Betancourt  
fa de Luna, 7,  
50018 Zaragoza, España  
ail: {cquesada;gonzal;ecueto}@unizar.es  
Guangtao Xu · A. Leygue · M. Visonneau · F. Chinesta  
e Centrale de Nantes  
le de la Noë  
tes, Francia  
ail: Francisco.Chinesta@ec-nantes.fr

## **1. Introducción**

Los ingenieros han acudido tradicionalmente a la reducción de los modelos como la única metodología disponible para solucionar problemas complejos en épocas en las que la capacidad de cálculo disponible no era mucha. Así, por ejemplo, el modelo de viga de Euler, Bernoulli y Navier, desarrolla unas ecuaciones monodimensionales para la resolución práctica del campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones en piezas que son realmente tridimensionales. De la misma manera, el método de los modos normales para resolver problemas elastodinámicos lineales supone que la solución del problema puede escribirse como una combinación lineal de unos pocos *modos* que son realmente las frecuencias propias de vibración de la estructura a analizar.

Más recientemente (ya en el s. XX, de hecho), esta metodología de *reducción* de la complejidad de los modelos ha sido sistematizada y aplicada con éxito en multitud de campos de las ciencias aplicadas y la ingeniería, tanto para problemas lineales [16] [22] [21] [28] como no lineales [29] [8]. En general, estas técnicas, que reciben nombres distintos en distintos campos de la ciencia, y que han sido re-descubiertas en multitud de ocasiones, como *Principal Component Analysis* (PCA), *Proper Orthogonal Decomposition* (POD), *empirical eigenvectors*, o muchos otros nombres similares, buscan funciones que permitan una *buenaproximación* de la solución empleando un número mínimo de ellas, es decir, de grados de libertad. Para ello, generalmente se han de resolver ciertos problemas *similares* al dado, de los cuales se extraen, mediante un proceso de minimización estadística, las funciones que contienen más información (energía) de la solución, en la esperanza de que constituyan, de la misma manera, una buena elección para

roblema dado, que solo difiere ligeramente de aquellos os cuales se conoce la solución completa.

En problemas definidos en coordenadas espacio-temporales rataría, en suma, de encontrar aproximaciones del tipo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \lambda_i(t),$$

de  $\lambda_i(t)$  representa una colección de coeficientes temiales y  $\phi_i(\mathbf{x})$  una serie de funciones dependientes únicaente de variables espaciales y que son las que mejor representan, desde un punto de vista estadístico, la solución del blema. Si consideramos los resultados de una simulación elementos finitos, de la que dispondríamos de los valores ales para cada incremento de tiempo, y los agrupáramos os en una matriz  $\mathbf{A}$  cuyas columnas fueran los valores ales  $u(\mathbf{x}_j, t_k)$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $k = 1, \dots, T$ , entonces  $N$  vectores  $\phi_i(\mathbf{x})$  se corresponderían con los autovec- s asociados a los  $N$  mayores valores singulares de la riz  $\mathbf{A}$ .

En general, este tipo de técnicas ha gozado de un amplio dicimiento en muchas ramas de la ciencia, pero posee se- as limitaciones. La primera, el hecho de que sean necesarias soluciones de ciertos problemas completos *similares* a determinar la base  $\phi_i$  con la que resolver el problema o, en la esperanza de que ésta sea también óptima para La segunda, que su complejidad aumenta exponencial- mente si el problema a considerar es paramétrico, es decir, tipo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, p_1, p_2, \dots, p_P),$$

de los distintos  $p_m$ ,  $m = 1, \dots, P$ , representan paráme- del problema. Intentar obtener soluciones completas mando el híper-dominio que resultaría es simplemente impo- e, por el crecimiento exponencial del número de grados libertad de la malla resultante con el número de dimen- es del espacio de fase. Es lo que se ha dado en llamar la 'dición de la dimensionalidad' [20].

Para intentar solucionar la primera de las dificultades an- mencionadas, P. Ladeveze desarrolló un método *a priori*, lecir, que no necesitaba de la solución de problemas simi- s *a posteriori*, obteniendo así una aproximación espacio- po que denominó *radial loading approximation* dentro u método de *LArge Time INcrements* (LATIN) [17] [18]. Más recientemente, F. Chinesta generalizó de manera in- endiente esta aproximación, orientándola hacia el pro- na multidimensional, dando así lugar a la PGD, por opon- ón a la POD [4] [3] [13] [9] [11] [10]. Desde entonces la D ha tenido un tremendo desarrollo en multitud de apli- caciones, como lo prueba la larga lista de referencias po- es que, sin ánimo de ser exhaustivos, se incluyen: [2] [12] [14] [19] [18] [24] [25] [1]. Las "reduced bases" han tratado de obtener la base reducida haciendo un

muestreo optimo del espacio paramétrico. Sin embargo, este muestreo requiere conocer estimadores de error a priori cuya obtención resulta en muchas circunstancias delicada. Por ello, en lo que sigue el trabajo se centra en la PGD que resulta ser una técnica mas sistemática.

En la Sección 2 se realiza un breve resumen de las carac- terísticas más importantes de la técnica PGD en su versión más estándar, aquella basada en la aproximación por polino- mios a trozos lineales en un método de Galerkin.

## 2. Un repaso a la Descomposición Propia Generalizada (PGD)

La descomposición propia generalizada (PGD, siglas en inglés de *Proper Generalized Decomposition*) es una meto- dología de reducción de modelos *a priori* basada en el uso de representaciones separadas. Como se ha comentado anteriormente, inicialmente se desarrolló para la resolución de problemas estructurales no lineales en espacio-tiempo [17], pero pronto evolucionó hacia su aplicación en modelos definidos en espacios con un alto número de dimensiones y, posteriormente, se extendió a modelos generales en mecánica computacional.

La característica principal de la PGD es que aproxima la solución exacta del problema imponiendo separación de va- riables. Así, si  $u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , es la solución del problema, ésta se aproxima en la PGD como

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^N F_1^i(x_1) \cdot F_2^i(x_2) \cdot \dots \cdot F_d^i(x_d), \quad (1)$$

donde  $d$  es el número de dimensiones del problema. A dife- rencia de otras metodologías (como la descomposición pro- pia ortogonal, POD), las funciones  $F_n^i(x_n)$  son funciones desconocidas a priori. Nótese que no es estrictamente ne- cesario realizar una descomposición completa del *espacio de fase*, pudiéndose agrupar ciertas dimensiones y otras no. Por ejemplo, en [6] se utiliza de manera especialmente eficiente la PGD para obtener soluciones tridimensionales en geo- metrías degeneradas como placas y láminas mediante una descomposición del tipo:

$$\mathbf{u}(x, y, z) \approx \sum_i F_1^i(x, y) \cdot F_2^i(z),$$

donde la complejidad resultante del método es esencialmen- te la de la determinación de las funciones  $F_1^i(x, y)$ , y por tanto, aproximadamente la de un problema bidimensional, siendo la determinación de las funciones  $F_2^i(z)$  de coste des- preciable, al ser problemas unidimensionales.

La estrategia de determinación de las funciones incógnitas  $F_j^i$  sigue un algoritmo voraz (*greedy*), por lo que en cada determinación de cada sumando se selecciona un óptimo local con la perspectiva de encontrar el óptimo global. Pero

a sumando está compuesto por un producto de funciones conocidas, que se aproximan en general mediante elementos finitos, cuyos valores nodales deben determinarse. En el lugar, como puede comprenderse fácilmente, a un problema no lineal. El método con el que se calculan los dos términos de la suma puede ser cualquiera de los más existentes (Newton, cuasi-Newton, ...), pero los autores creen, siempre que se pueda, por su sencillez conceptual e programación, el de punto fijo. En cada paso del algoritmo se obtiene una de las funciones separadas, que se iteran sucesivamente para minimizar el residuo.

En este artículo se desarrolla la aplicación de la PGD a la solución de problemas de alto orden,  $n > 2$ . Se presentan y comparan dos estrategias alternativas para resolver el problema biarmónico ( $n = 4$ ): la primera hace uso del método espectral de colocación mediante polinomios de Chebyshev, mientras que la segunda combina el método de Galerkin con polinomios de Hermite para las funciones de forma. Por supuesto, no son las únicas posibles. Otras, como el uso de funciones de aproximación *suaves* como MLS [5], máxima óptima local [15], etc., serían igualmente posibles.

### PGD para problemas de alto orden

El problema biarmónico, además de ser un problema de referencia para métodos numéricos y analíticos, aparece en muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, modela la flexión de placas delgadas o el flujo de un fluido viscoso en cuando se utiliza la llamada función de corriente, por ejemplo. Por ello se ha tomado como problema de referencia el que estudia el comportamiento de las soluciones arrolladas en este trabajo: la flexión de placas delgadas y el problema del flujo en una cavidad forzado “por la tapa” (*driven cavity flow*).

El problema biarmónico bidimensional se describe mediante la siguiente ecuación:

$$u = f(x, y) \quad \text{en } \Omega, \quad (2)$$

Suponen las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (3)$$

Al problema con condiciones de contorno homogéneas, de

$$= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

En el caso de la PGD, a diferencia de las técnicas de elementos finitos tradicionales, la imposición de condiciones de contorno no homogéneas juega un papel preponderante en el desarrollo del método [13]. En el siguiente epígrafe se arrollan estos aspectos en detalle.

### 3.1. Un método PGD basado en la colocación de polinomios de Chebyshev

El método de colocación espectral mediante polinomios de Chebyshev se puede describir de la siguiente manera. Por un lado se approxima cada una de las funciones  $F_j^i$  de la Ec. (1) mediante el uso de polinomios de Chebyshev. Por otro, se fuerza la anulación del residuo de las ecuaciones que las gobiernan en los nodos de la discretización. Las condiciones de contorno, en este caso asociadas a  $u$  y  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , se deben satisfacer también en los puntos de colocación del contorno.

En este contexto, el objetivo del método consiste en hallar  $N$  parejas de funciones  $\{X_i(x), Y_i(y)\}, i = 1, \dots, N$  tales que la solución bidimensional para el problema dado por la Ec. (2) tendrá la forma:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y).$$

A pesar de que posteriormente se trabajará en forma fuerte, como corresponde a un método de colocación, el desarrollo de la PGD parte de la forma débil del problema dado por la Ec. (2), que se obtiene a partir de

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} u^*(x, y) (\Delta^2 u(x, y) - f(x, y)) dx \cdot dy = 0,$$

ecuación que, como es sabido, debe cumplirse para todas las funciones test  $u^*(x, y)$  seleccionadas en un espacio funcional adecuado.

A continuación se calculan las funciones que forman parte de la representación separada. Se supone conocido, porque se ha calculado previamente, el conjunto de parejas funcionales  $\{X_i(x), Y_i(y)\}, i = 1, \dots, n$  con  $1 \leq n < N$ . En la iteración actual se busca la pareja de enriquecimiento  $\{R(x), S(y)\}$  mediante la aplicación de un algoritmo de punto fijo en direcciones alternadas que, tras la convergencia, constituirá la siguiente pareja funcional  $\{X_{n+1}, Y_{n+1}\}$ . Por lo tanto, en la iteración  $n + 1$  suponemos la representación separada como

$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot Y_i(y) + R(x) \cdot S(y).$$

La función test  $u^*(x, y)$  se supone entonces como

$$u^*(x, y) = R^*(x) \cdot S(y) + R(x) \cdot S^*(y). \quad (4)$$

Introduciendo las funciones de prueba y ponderación en formulación débil se obtiene

$$\begin{aligned} & [R^*(x)S(y) + R(x)S^*(y)] \\ & \frac{4}{\partial x^4} S(y) + 2 \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 S(y)}{\partial y^2} + R(x) \frac{\partial^4 S(y)}{\partial y^4} \Big] dx dy \\ & \int_{\Omega} [R^*(x)S(y) + R(x)S^*(y)] \\ & (x, y) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^4 X_i(x)}{\partial x^4} Y_i(y) + \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial^2 X_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_i(y)}{\partial y^2} + X_i(x) \frac{\partial^4 Y_i(y)}{\partial y^4} \right) dx dy. \quad (5) \end{aligned}$$

Primero, se supone que  $R(x)$  es conocida, lo que implica  $R^*(x) = 0$ . De esta forma, la ecuación (5) resulta

$$\begin{aligned} & S^*(y) [\alpha_{Rx} S(y) + 2\beta_{Rx} \frac{\partial^2 S(y)}{\partial y^2} + \gamma_{Rx} \frac{\partial^4 S(y)}{\partial y^4}] dy \\ & \int_{\Omega_y} S^*(y) [\eta_{Rx}(y) - \\ & \sum_{i=1}^n (\alpha_{Rx}^i Y_i(y) + 2\beta_{Rx}^i \frac{\partial^2 Y_i(y)}{\partial y^2} + \gamma_{Rx}^i \frac{\partial^4 Y_i(y)}{\partial y^4})] dy, \end{aligned}$$

de

$$\begin{aligned} \alpha_{Rx} &= \int_{\Omega_x} R(x) \frac{\partial R^4(x)}{\partial x^4} dx \\ \beta_{Rx} &= \int_{\Omega_x} R(x) \frac{\partial R^2(x)}{\partial x^2} dx \\ \gamma_{Rx} &= \int_{\Omega_x} R^2(x) dx \\ \alpha_{Rx}^i &= \int_{\Omega_x} R(x) \frac{\partial X_i^4(x)}{\partial x^4} dx \\ \beta_{Rx}^i &= \int_{\Omega_x} R(x) \frac{\partial X_i^2(x)}{\partial x^2} dx \\ \gamma_{Rx}^i &= \int_{\Omega_x} R(x) X_i(x) dx \\ \eta_{Rx}(y) &= \int_{\Omega_x} R(x) f(x, y) dx. \end{aligned}$$

Puesto que la formulación débil se satisface para todo  $y$ , es posible regresar a su forma fuerte asociada:

$$\begin{aligned} & S(y) + 2\beta_{Rx} \frac{\partial^2 S(y)}{\partial y^2} + \gamma_{Rx} \frac{\partial^4 S(y)}{\partial y^4} \\ & \eta_{Rx}(y) - \sum_{i=1}^n (\alpha_{Rx}^i Y_i(y) + 2\beta_{Rx}^i \frac{\partial^2 Y_i(y)}{\partial y^2} + \gamma_{Rx}^i \frac{\partial^4 Y_i(y)}{\partial y^4}). \end{aligned}$$

esta ecuación diferencial de cuarto orden la que resolrá usando el método de colocación de Chebyshev.

Una vez obtenida la función  $S(y)$ , se busca  $R(x)$ . En este caso, la función conocida es  $S(y)$  (y por lo tanto,  $S^*(y)$  es nula), por lo que la Ec. (5) se expresará como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x} R^*(x) [\alpha_{Sy} \frac{\partial^4 R(x)}{\partial x^4} + 2\beta_{Sy} \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} + \gamma_{Sy} R(x)] dx \\ & = \int_{\Omega_x} R^*(x) \eta_{Sy}(x) dx - \int_{\Omega_x} R^*(x) [\sum_{i=1}^n (\alpha_{Sy}^i \frac{\partial^4 X_i(x)}{\partial x^4} \\ & \quad + 2\beta_{Sy}^i \frac{\partial^2 X_i(x)}{\partial x^2} + \gamma_{Sy}^i X_i(x))] dx, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{Sy} &= \int_{\Omega_y} S^2(y) dy \\ \beta_{Sy} &= \int_{\Omega_y} S(y) \frac{\partial S^2(y)}{\partial y^2} dy \\ \gamma_{Sy} &= \int_{\Omega_y} S(y) \frac{\partial S^4(y)}{\partial y^4} dy \\ \alpha_{Sy}^i &= \int_{\Omega_y} S(y) Y_i(y) dy \\ \beta_{Sy}^i &= \int_{\Omega_y} S(y) \frac{\partial Y_i^2(y)}{\partial y^2} dy \\ \gamma_{Sy}^i &= \int_{\Omega_y} S(y) \frac{\partial Y_i^4(y)}{\partial y^4} dy \\ \eta_{Sy}(x) &= \int_{\Omega_y} S(y) f(x, y) dy, \end{aligned}$$

cuya forma fuerte se expresa como

$$\begin{aligned} & \alpha_{Sy} \frac{\partial^4 R(x)}{\partial x^4} + 2\beta_{Sy} \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} + \gamma_{Sy} R(x) \\ & = \eta_{Sy}(x) - \sum_{i=1}^n (\alpha_{Sy}^i \frac{\partial^4 X_i(x)}{\partial x^4} + 2\beta_{Sy}^i \frac{\partial^2 X_i(x)}{\partial x^2} + \gamma_{Sy}^i X_i(x)), \end{aligned}$$

que, de nuevo, se calculará mediante el método de colocación de Chebyshev.

Estos dos pasos se repetirán hasta alcanzar el punto fijo. Si se denota la función  $R(x)$  en las iteraciones actual y previa como  $R^p(x)$  y  $R^{p-1}(x)$  respectivamente y, de la misma forma para la función  $S(y)$ ,  $S^p(y)$  y  $S^{p-1}(y)$ , se puede definir el error en la iteración actual como:

$$e = \int_{\Omega_x \times \Omega_y} (R^p(x) S^p(y) - R^{p-1}(x) S^{p-1}(y))^2 dx dy \leq \varepsilon,$$

donde  $\varepsilon$  es un valor suficientemente pequeño. Tras la convergencia, se puede dar por calculada la siguiente pareja funcional, haciendo la identificación  $X_{n+1} = R$  y  $Y_{n+1} = S$ .

El procedimiento de enriquecimiento debe continuar hasta que se alcance la convergencia, que se puede evaluar a partir del error  $E$ :

$$E = \frac{\|\Delta^2 u - f(x, y)\|}{\|f(x, y)\|} \leq \tilde{\epsilon} \quad (6)$$

siendo  $\tilde{\epsilon}$  otro parámetro lo suficientemente pequeño.

Para la resolución de los problemas unidimensionales de cuarto orden que aparecen en la formulación anterior se

one en primer lugar una ecuación diferencial ordinaria (EOD) de cuarto orden de tipo general:

$$\frac{d^4u}{dx^4} + b \frac{d^2u}{dx^2} + cu = g(x). \quad (7)$$

La función incógnita  $u(x)$  se approxima en el dominio  $= (-1, 1)$  mediante la expresión:

$$= \sum_{i=1}^{i=M} \alpha_i \cdot T_i(x),$$

de  $M$  denota el número de nodos considerados en  $\Omega_x$ . Coordenadas de estos nodos vienen determinadas por

$$= \cos\left(\frac{(i-1) \cdot \pi}{M-1}\right), \quad i = 1, \dots, M.$$

Los interpolantes  $T_i(x)$  basados sobre los polinomios de Chebychev verifican la propiedad de la delta de Kronecker, es decir,  $T_i(x_k) = \delta_{ik}$ . Para cada nodo  $k$ , con  $3 \leq k \leq M - 3$  los cuatro nodos restantes se utilizarán para la imposición de condiciones de contorno, la ecuación discreta (7) se reescribirá como:

$$\sum_{i=1}^{i=M} \alpha_i \cdot \frac{dT_i^4}{dx^4}|_{x_k} + b \cdot \sum_{i=1}^{i=M} \alpha_i \cdot \frac{dT_i^2}{dx^2}|_{x_k} + c \cdot \alpha_k = f(x_k).$$

Las funciones  $R(x)$  y  $S(y)$  están sujetas a las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann. Se debe cumplir entonces que  $u(x_1) = u(x_M) = 0$  y  $\frac{du}{dx}|_{x_1} = \frac{du}{dx}|_{x_M} = 0$ . Imposición de las condiciones da como resultado:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \sum_{i=1}^{i=M} \alpha_i \cdot \frac{dT_i(x)}{dx}|_{x_1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_M &= 0 \\ \sum_{i=1}^{i=M} \alpha_i \cdot \frac{dT_i(x)}{dx}|_{x_M} &= 0. \end{aligned}$$

#### Método de Galerkin con polinomios de Hermite

En esta sección se utilizará otra estrategia para hallar una solución aproximada al problema biarmónico. Se empleará el método de Galerkin para la discretización del problema y se usarán los polinomios de Hermite como función de forma (Fig. 1). Los polinomios de Hermite permiten obtener de manera sencilla una solución con continuidad  $C^1$ , gracias a tener que introducir los giros nodales (primera derivada de la variable esencial) como incógnitas del problema.

El procedimiento parte nuevamente de la forma débil del problema, Ec. (2), resultante de la aplicación de integración por partes y de aplicar las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_y} (\Delta u^*(x, y) \cdot \Delta u(x, y) \\ - u^*(x, y) \cdot f(x, y)) dx dy = 0. \end{aligned}$$

La función de ponderación  $u^*(x, y)$  tiene la misma expresión que la Ec. (4), de tal forma que, al introducirla junto a la función de aproximación en la formulación débil, se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_i(y) \cdot S(y) dy + \\ & + \int_{\Omega_x} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} S^2(y) dy + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_i(y) \cdot S^*(y) dy + \\ & + \int_{\Omega_x} \left( \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} S(y) \cdot S^*(y) dy + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} X_i(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} dy + \\ & + \int_{\Omega_x} R(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \left( \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \right)^2 dy + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} X_i(x) \cdot R(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\ & + \int_{\Omega_x} R^2(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{dX_i(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_i(y)}{dy} \cdot \frac{dS(y)}{dy} dy + \\ & + 2 \int_{\Omega_x} \frac{dR(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \left( \frac{dS(y)}{dy} \right)^2 dy + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{dX_i(x)}{dx} \cdot \frac{dR(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_i(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\ & + 2 \int_{\Omega_x} \left( \frac{dR(x)}{dx} \right)^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dS(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\ & - \int_{\Omega_x} R^*(x) \cdot f(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} S(y) \cdot f(y) dy + \\ & - \int_{\Omega_x} R(x) \cdot f(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} S^*(y) \cdot f(y) dy = 0. \end{aligned}$$

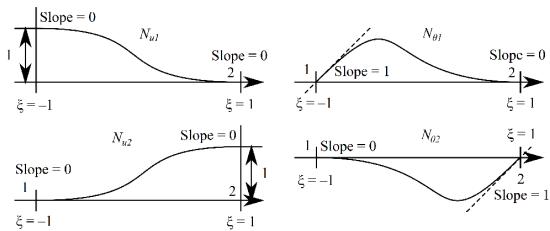


Figura 1. Polinomios de Hermite.

En la etapa de enriquecimiento de la PGD, se utilizará el ciclo iterativo del punto fijo para despejar  $S(y)$ , suponiendo que  $R(x)$  es conocida (y por lo tanto,  $R^*(x) = 0$ ). Una vez obtenido  $S(y)$ , se seguirá el mismo procedimiento para obtener  $R(x)$ . Estos dos pasos se repetirán hasta que el error de la iteración actual sea menor que un determinado valor de tolerancia.

La etapa de enriquecimiento continuará hasta que se alcance la convergencia, evaluada a partir del error  $E$ , como a Ec. (6).

Desde este punto de vista, la formulación PGD del problema biarmónico empleando polinomios de Hermite parecía no introducir ninguna dificultad adicional sobre la formulación estándar con operadores de orden dos. Sin embargo, la imposición de condiciones de contorno esenciales no homogéneas, definidas ahora tanto en la variable esencial  $x$  como en su primera derivada, merece un comentario especial.

#### Imposición de condiciones de contorno esenciales no homogéneas

Como es fácil comprobar, el método PGD proporciona soluciones al problema homogéneo. Para la resolución, como es el caso, de problemas con condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas, habitualmente se acude a la técnica de cambio de variable. Así, se supone que es posible encontrar una función  $\psi$ , continua en  $\Omega$ , que satisface las condiciones de contorno no homogéneas. Entonces, la solución al problema se puede obtener como

$$\psi + z,$$

de forma que el problema se traslada a uno homogéneo en la variable  $z$ :

$$z = f - \Delta^2\psi \text{ en } \Omega, \quad (8)$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma_u \in \partial\Omega. \quad (9)$$

Se puede encontrar información más detallada sobre cómo tratar la condición de contorno inhomogénea a la homogénea en el contexto de la PGD en [13].

En lo que sigue se proponen dos alternativas:

#### Empleo de $R$ -funciones

La determinación eficiente de esta función  $\psi$  se vuelve entonces un ingrediente fundamental de la técnica desarrollada. En algunos trabajos previos de los autores [13], la función  $\psi$  se determina mediante el uso de  $R$ -funciones [27] [26]. Es importante hacer notar que, en el caso de problemas de alto orden, las condiciones de contorno están impuestas tanto en la variable del problema

como en sus derivadas. Por tanto, obtener una función  $\psi$  que las verifique todas y hacerlo de manera eficiente se vuelve un problema de primera magnitud. Sin embargo, la técnica de  $R$ -funciones permite una solución especialmente eficiente para este problema.

En efecto, en [26] se propone una construcción de la función  $\varphi$  como sigue. Supóngase en primer lugar que el contorno se define como un *Planar Straight Line Graph* (PSLG), es decir, un conjunto de líneas rectas  $\partial\Omega_i$  que discretizan el mismo. Sea entonces  $\omega$  una función *normalizada*, es decir, que se comporta como una pseudodistancia:

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial\omega}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 1, \quad \left. \frac{\partial^k\omega}{\partial n^k} \right|_{\partial\Omega} = 0,$$

$k = 2, \dots, m$ , con  $n$  la normal al contorno esencial. Entonces, se denomina *normalizador* de una función  $f(\mathbf{x})$  a la función

$$f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \omega\nabla\omega).$$

Entonces, por construcción,  $f^*$  verifica que

$$f^*(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = f(\mathbf{x})|_{\partial\Omega}, \quad \left. \frac{\partial^k f^*}{\partial n^k} \right|_{\partial\Omega} = 0,$$

es decir,  $f^*$  se comporta esencialmente como una constante en la dirección normal al contorno.

Supóngase entonces que cada segmento  $\partial\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , del PSLG se define mediante una ecuación implícita  $\omega_i = 0$ . De esta forma, si las condiciones de contorno definidas sobre  $\partial\Omega$  son del tipo

$$u(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = f_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right|_{\partial\Omega} = f_k(\mathbf{x}),$$

$k = 1, 2, \dots, m$ , entonces, si se han definido en el contorno condiciones de orden  $m_i - 1$ , se puede construir la función buscada  $\psi$  de la forma

$$\psi = \frac{\sum_{i=1}^s P_i \omega_i^{-m_i}}{\sum_{i=1}^s \omega_i^{-m_i}},$$

donde cada  $P_i$  se corresponde con los polinomios de Taylor generalizados

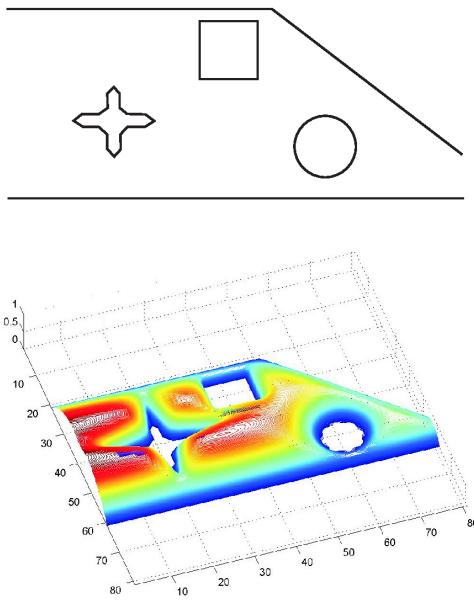
$$P = f_0^* + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} f_k^* \omega^k.$$

Nótese que hay un polinomio  $P_i$  para cada uno de los  $s$  segmentos del contorno sobre los que se define una condición esencial no homogénea. Se recomienda al lector interesado en la técnica de  $R$ -funciones acudir a la referencia [26] para una explicación más detallada.

En la Fig. 2 se muestra un ejemplo de construcción de una  $R$ -función para un contorno esencial arbitrario con condiciones esenciales no homogéneas de primer orden.

de alto orden

7



**Figura 2.** Ejemplo de aplicación del método de las  $R$ -funciones a la imposición de condiciones de contorno esenciales no homogéneas. Arriba, PSLG que define el contorno inicial. Abajo,  $R$ -función resultante que, como se puede ver, se anula en el contorno esencial.

En la Sección 4 se incluyen ejemplos de  $R$ -funciones con condiciones en la primera derivada de la variable esencial.

#### Formulación penalizada

Otra posibilidad si no se quiere obtener la función  $\psi$  verificando las dos condiciones sobre la variable esencial y su primera derivada, es obtener una que solo verifique la condición  $u(\mathbf{x} \in \Gamma) = f_0$  e introducir la condición en la primera derivada en la formulación diferencial con un coeficiente de penalización, i.e.

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} u^*(x, y) (\Delta^2 u(x, y) - f(x, y)) d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Gamma} u^* \left( \frac{\partial u}{\partial n} - f_1 \right) d\mathbf{x} = 0.$$

En lo que sigue se aplicará la formulación penalizada combinada con la colocación espectral y el uso de las  $R$ -funciones junto con una discretización Hermite.

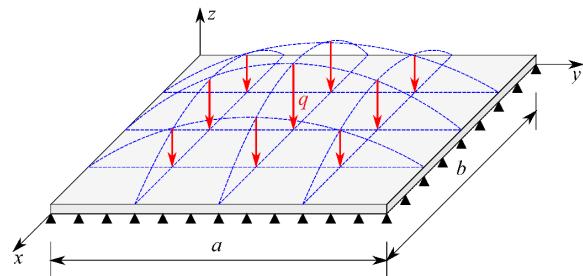
#### Resultados numéricos

En esta sección se comparan los resultados obtenidos las dos estrategias anteriormente presentadas para dos problemas que se pueden modelar con la ecuación biarmónicas

ca: la flexión de una placa de Kirchhoff rectangular y la cavidad forzada (*lid-driven cavity*, en inglés).

#### 4.1. Flexión de una placa de Kirchhoff rectangular

El problema propuesto en las Ecs. (2) y (3) es equivalente al cálculo de la deformación en una placa de Kirchhoff a la que se le aplica una carga distribuida definida por la función  $f(x, y)$  (véase la Fig. 3). En este caso, sin embargo, se considera una placa simplemente apoyada, de forma que las condiciones de contorno esenciales en la primera derivada del desplazamiento no están fijadas, pasando a estarlo las segundas derivadas (condiciones de Neumann, proporcionales al momento flector en el borde que, al considerarse ahora libre el giro, serán nulas).



**Figura 3.** Definición del problema de una placa de Kirchhoff en flexión, solicitada por una carga distribuida  $f(x, y)$ .

Se ha tomado para este caso,

$$f(x, y) = -8\pi^4 [\cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) + \sin^2(\pi x) \cos(2\pi y) - \cos(2\pi x) \cos(2\pi y)],$$

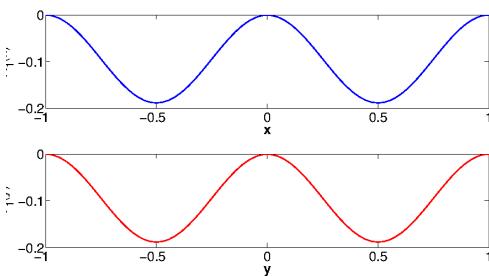
de forma que la solución analítica del problema es

$$u(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y). \quad (10)$$

En la Fig. 4 se representan los modos de la solución (un solo producto  $X_1(x) \cdot Y_1(y)$ ) en el enfoque colocación-Chebyshev. Como corresponde a la solución analítica del problema, Ec. (10), la solución numérica debe obtenerse con un único producto funcional. Lo mismo sucede con el enfoque Galerkin-Hermite, que proporciona un único modo. La solución así construida se muestra en la Fig. 5.

#### 4.2. Problema con condiciones de contorno no homogéneas: la cavidad forzada

Se considera ahora el problema clásico de la cavidad forzada o *lid-driven cavity flow*. En este problema, un fluido se encuentra contenido en un depósito generalmente cuadrado,

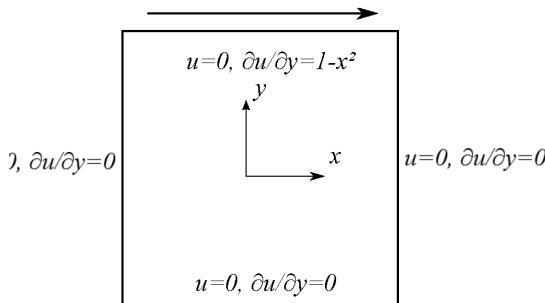


**Figura 4.** Modos obtenidos con el enfoque colocación-Chebyshev para la placa de Kirchhoff rectangular.

condiciones de contorno de velocidad conocida en todo contorno (velocidad nula en tres de sus lados y forzada en uno). Este último es precisamente el que fuerza el movimiento del fluido en el seno del depósito. En este caso, la ecuación de la ecuación biarmónica representa la función de oriente, a partir de la cual puede calcularse la velocidad fluido como:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ y &= -\frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

La geometría y las condiciones de contorno del problema de la cavidad forzada se muestra en la Fig. 6.



**Figura 6.** Condiciones de contorno en el problema de la cavidad forzada.

El problema se considera como biarmónico bidimensional en el dominio  $\Omega = (-1, 1)^2$  y sujeto a las condiciones de contorno:

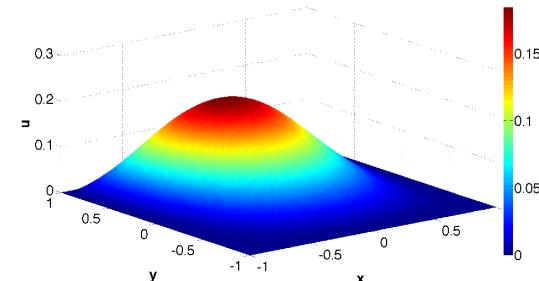
$$f_0 = 0 \quad (11a)$$

$$f_1 = f_1 \quad (11b)$$

de  $f_0$  y  $f_1$  son funciones dadas. La forma de  $f_1$  para este problema se muestra en la Fig. 6 anterior.

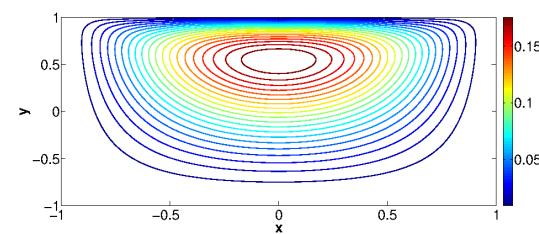
#### 4.2.1. Enfoque colocación-Chebyshev

Se ha obtenido la función  $\psi(x, y)$  que verifica en  $u(x \in \Gamma) = f_0$ , a la que se le ha aplicado la técnica de descomposición en valores singulares (SVD) para obtener los modos previos para el método PGD. En este caso, esta operación es trivial, al ser  $f_0 = 0$ . A continuación se aplica el método de Chebyshev combinado con la PGD anteriormente expuesto, sobre la formulación penalizada, para resolver el problema con condiciones de contorno homogéneas.



**Figura 7.** Solución del problema de la cavidad forzada obtenida mediante colocación-Chebyshev.

La solución numérica que se obtiene aplicando el método de Chebyshev se muestra en la Fig. 7. Las líneas de corriente se muestran en la Fig. 8 y los modos necesarios en la Fig. 9. La evolución del error se muestra en la Fig. 10.



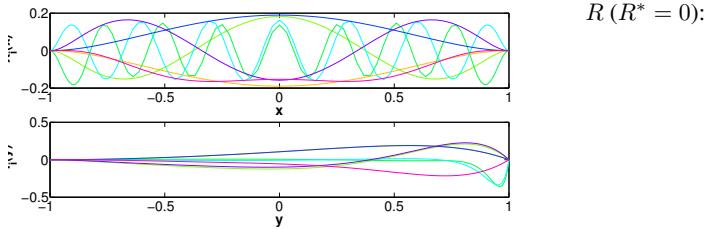
**Figura 8.** Solución del problema de la cavidad forzada obtenida mediante colocación-Chebyshev. Líneas de corriente

#### 4.2.2. Enfoque Galerkin-Hermite

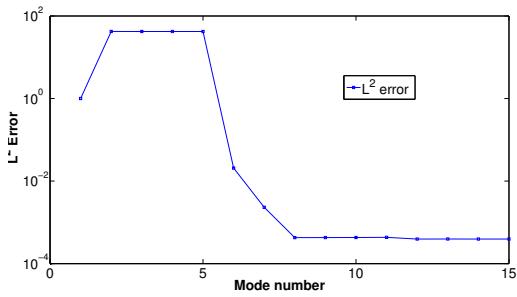
En este enfoque, como se ha comentado anteriormente, la solución del problema biarmónico se redefine, mediante un simple cambio de variable para la imposición de condiciones de contorno, como  $u = z + \psi$ , donde  $\psi$  es una función cuya traza es igual a las condiciones de contorno esenciales (definidas para el operador bilaplaciano sobre la

o de alto orden

9



**ura 9.** Solución del problema de la cavidad forzada obtenida mediante colocación-Chebyshev. Modos obtenidos



**ura 10.** Solución del problema de la cavidad forzada obtenida mediante colocación-Chebyshev. Convergencia del error con el número de funciones empleadas en la aproximación.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_i(y) \cdot S^*(y) dy + \\
 & + \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_j^\psi(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_j^\psi(y) \cdot S^*(y) dy + \\
 & + \int_{\Omega_x} \left( \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} S(y) \cdot S^*(y) dy + \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} X_i(x) \cdot R(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\
 & + \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} X_j^\psi(x) \cdot R(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_j^\psi(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\
 & + \int_{\Omega_x} R^2(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} dy + \\
 & + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{dX_i(x)}{dx} \cdot \frac{dR(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_i(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\
 & + 2 \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} \frac{dX_j^\psi(x)}{dx} \cdot \frac{dR(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_j^\psi(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\
 & + 2 \int_{\Omega_x} \left( \frac{dR(x)}{dx} \right)^2 dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dS(y)}{dy} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} dy + \\
 & - \int_{\Omega_x} R(x) \cdot f(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} S^*(y) \cdot f(y) dy = 0.
 \end{aligned}$$

ción y su primera derivada) no homogéneas impuestas al problema.

Una vez obtenida la función  $\psi$  mediante la aplicación a técnica de  $R$ -funciones mencionada anteriormente, la  $\alpha$  débil para el nuevo problema en  $z$  pasa a ser, para la  $\alpha$ ma iteración de la etapa de enriquecimiento y conocido

Por su parte, cuando la variable conocida es  $S$  ( $S^* = 0$ ):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_i(y) \cdot S(y) dy + \\ & \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} \frac{d^2 X_j^\psi(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} Y_j^\psi(y) \cdot S(y) dy + \\ & \int_{\Omega_x} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 R^*(x)}{dx^2} dx \cdot \int_{\Omega_y} S^2(y) dy + \\ & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} X_i(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} dy + \\ & \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} X_j^\psi(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{d^2 Y_j^\psi(y)}{dy^2} \cdot \frac{d^2 S(y)}{dy^2} dy + \\ & \int_{\Omega_x} R(x) \cdot R^*(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} \left( \frac{d^2 S(y)}{dy^2} \right)^2 dy + \\ & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_x} \frac{dX_i(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_i(y)}{dy} \cdot \frac{dS(y)}{dy} dy + \\ & \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_x} \frac{dX_j^\psi(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \frac{dY_j^\psi(y)}{dy} \cdot \frac{dS(y)}{dy} dy + \\ & 2 \int_{\Omega_x} \frac{dR(x)}{dx} \cdot \frac{dR^*(x)}{dx} dx \cdot \int_{\Omega_y} \left( \frac{dS(y)}{dy} \right)^2 dy + \\ & - \int_{\Omega_x} R^*(x) \cdot f(x) dx \cdot \int_{\Omega_y} S(y) \cdot f(y) dy = 0. \end{aligned}$$

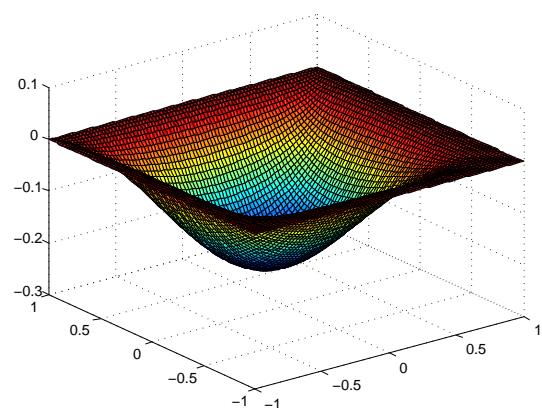
de  $\psi = \sum_{j=1}^m X_j^\psi(x) \cdot Y_j^\psi(y)$ .

La función bidimensional representada por la matriz que obtiene al multiplicar  $Y_j^\psi(y) \cdot X_j^\psi(x)$  debe cumplir las condiciones de contorno. Para obtenerla, se ha recurrido al codo de  $R$ -funciones detallado anteriormente. Una vez enida la superficie, se le ha aplicado descomposición en óres singulares (SVD) para la obtención de las funciones  $(y)$  y  $X_j^\psi(x)$ .

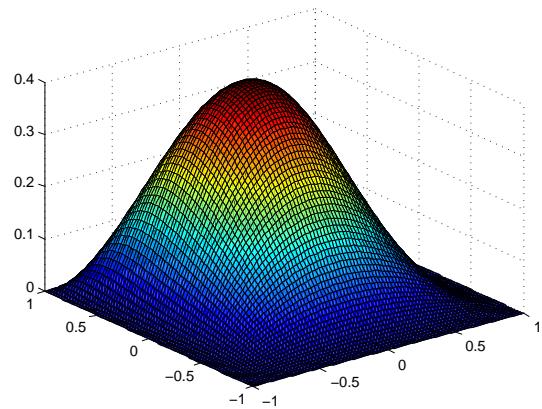
En la Fig. 11 se muestra la solución obtenida para la variable homogénea  $z$ . Por el contrario, en la Fig. 12 se muestra la función  $\psi$  que permite la imposición de las condiciones esenciales, es decir, la  $R$ -función obtenida. La forma de solución obtenida se muestran en la Fig. 13.

## Conclusiones

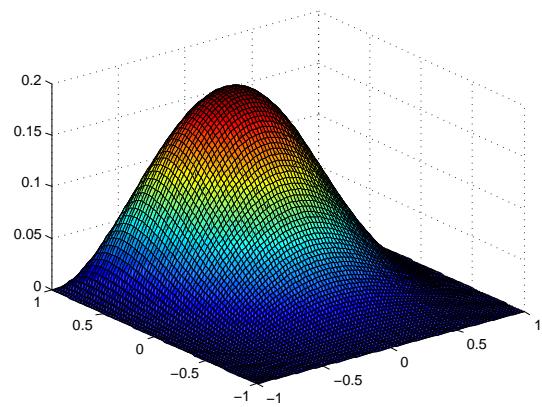
En este trabajo se ha presentado una discusión referente a la aplicación del método de la descomposición propia generalizada a problemas de alto orden, con un énfasis especial en problema de tipo bi-laplaciano. Se han estudiado, de la pléyade de posibles formulaciones, dos que se han considerado como representativas. La primera, basada en el uso de polinomios de Chebyshev y métodos de colocación. La segunda, basada en un método de Galerkin y polinomios



**Figura 11.** Solución en la variable  $z$  para el problema de la cavidad forzada de la Sec. 4.2.



**Figura 12.**  $R$ -función  $\psi$  para el problema de la cavidad forzada de la Sec. 4.2.



**Figura 13.** Solución para el problema de la cavidad forzada de la Sec. 4.2.

de Hermite. No se trata, pues, de comparar la eficiencia de cada una, sino de demostrar que la PGD proporciona, para

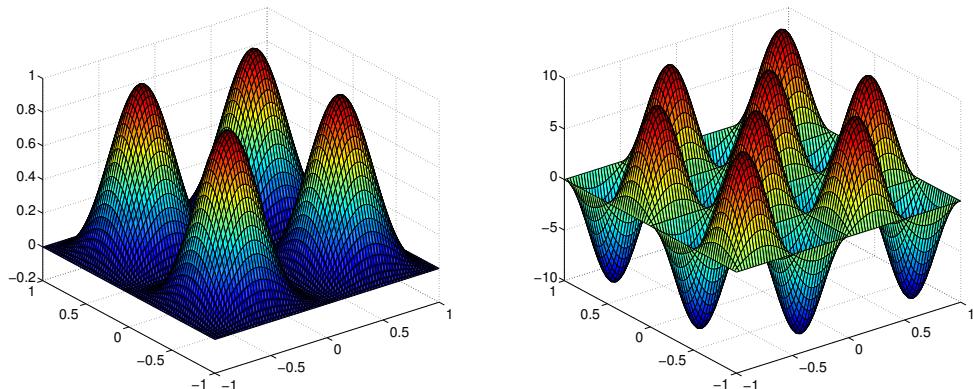
o tipo de problemas, soluciones de calidad comparable a que ya son bien conocidas para problemas de orden uno.

### Acknowledgments

El trabajo recogido en el presente artículo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Economía e Innovación de España, a través del proyecto CICYT-DPI2011-78-C02-01.

### References

- A. Ammar, F. Chinesta, P. Diez, and A. Huerta. An error estimator for separated representations of highly multidimensional models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25-28):1872 – 1880, 2010.
- A. Ammar, E. Cueto, and F. Chinesta. Reduction of the chemical master equation for gene regulatory networks using proper generalized decompositions. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, in press, 2012.
- A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, , and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. part ii: transient simulation using space-time separated representations. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 144:98–121, 2007.
- A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 139:153–176, 2006.
- T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element-Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256, 1994.
- B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, and A. Poitou. Advanced simulation of models defined in plate geometries: 3d solutions with 2d computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204(0):1 – 12, 2012.
- L. Boucinka, A. Gravouil, and A. Ammar. Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255(0):67 – 88, 2013.
- Saifon Chaturantabut and Danny C. Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32:2737–2764, September 2010.
- F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):327–350, 2010.
- F. Chinesta, A. Leygue, F. Bordeu, J.V. Aguado, E. Cueto, D. Gonzalez, I. Alfaro, A. Ammar, and A. Huerta. PGD-Based Computational Vademecum for Efficient Design, Optimization and Control. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(1):31–59, 2013.
- Francisco Chinesta, Pierre Ladeveze, and Elias Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18:395–404, 2011.
- Ch. Ghanatos, F. Masson, A. Huerta, A. Leygue, E. Cueto, and F. Chinesta. Proper generalized decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216(0):29 – 41, 2012.
- D. Gonzalez, A. Ammar, F. Chinesta, and E. Cueto. Recent advances on the use of separated representations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(5), 2010.
- D. Gonzalez, F. Masson, F. Poulhaon, E. Cueto, and F. Chinesta. Proper generalized decomposition based dynamic data driven inverse identification. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82:1677–1695, 2012.
- David González, Elías Cueto, and Manuel Doblaré. A higher order method based on local maximum entropy approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84:741–764, 2010.
- K. Karhunen. Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fenniae, ser. Al. Math. Phys.*, 37, 1946.
- P. Ladeveze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics*. Springer, N.Y., 1999.
- P. Ladeveze, J.-C. Passieux, and D. Neron. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22):1287 – 1296, 2010.
- Pierre Ladeveze and Ludovic Chamoin. On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(23-24):2032–2047, 2011.
- R. B. Laughlin and David Pines. The theory of everything. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(1):28–31, 2000.
- M. M. Loèvè. *Probability theory*. The University Series in Higher Mathematics, 3rd ed. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1963.
- E. N. Lorenz. *Empirical Orthogonal Functions and Statistical Weather Prediction*. MIT, Departement of Meteorology, Scientific Report Number 1, Statistical Forecasting Project, 1956.
- Y Maday, AT Patera, and G Turinici. Global a priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter symmetric coercive elliptic partial differential equations. *COMPTE RENDUS MATHEMATIQUE*, 335(3):289–294, AUG 1 2002.
- Anthony Nouy. A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24):1603–1626, 2010.
- E. Pruliere, F. Chinesta, and A. Ammar. On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the Proper Generalized Decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4):791–810, DEC 2010.
- V. L. Rvachev, T. I. Sheiko, V. Shapiro, and I. Tsukanov. On completeness of rfm solution structures. *Computational Mechanics*, 25:305–316, 2000.
- V. L. Rvachev, T. I. Sheiko, V. Shapiro, and I. Tsukanov. Transfinite interpolation over implicitly defined sets. *Computer Aided Geometric Design*, 18:195–220, 2001.
- D. Ryckelynck, F. Chinesta, E. Cueto, and A. Ammar. On the a priori Model Reduction: Overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 12(1):91–128, 2006.
- J. B. Tenenbaum, V. de Silva, and J. C. Langford. A global framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 290:2319–2323, 2000.



**Figura 5.** Solución en desplazamientos (izda.) y giros (dcha.) para el problema de flexión de placas se la Sección 4.1. La solución está compuesta por un único modo.



# Bibliografía



# Bibliografía

- Ammar, A., Chinesta, F., Diez, P., and Huerta, A. (2010). An error estimator for separated representations of highly multidimensional models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25-28):1872 -- 1880.
- Ammar, A., Cueto, E., and Chinesta, F. (2012). Reduction of the chemical master equation for gene regulatory networks using proper generalized decompositions. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, in press.
- Ammar, A., Mokdad, B., Chinesta, F., , and Keunings., R. (2007). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. part ii: transient simulation using space-time separated representations. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 144:98--121.
- Ammar, A., Mokdad, B., Chinesta, F., and Keunings, R. (2006). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 139:153--176.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L. (1994). Element-Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229--256.
- Bognet, B., Bordeu, F., Chinesta, F., Leygue, A., and Poitou, A. (2012). Advanced simulation of models defined in plate geometries: 3d solutions with 2d computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204(0):1 -- 12.
- Boucinha, L., Gravouil, A., and Ammar, A. (2013). Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255(0):67 -- 88.
- Chaturantabut, S. and Sorensen, D. C. (2010). Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32:2737--2764.

- Chinesta, F., Ammar, A., and Cueto, E. (2010). Recent advances in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):327--350.
- Chinesta, F., Keunings, R., and Leygue, A. (2014). *The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations: a primer*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Springer, Cham.
- Chinesta, F., Ladeveze, P., and Cueto, E. (2011). A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18:395--404.
- Chinesta, F., Leygue, A., Bordeu, F., Aguado, J., Cueto, E., Gonzalez, D., Alfaro, I., Ammar, A., and Huerta, A. (2013). PGD-Based Computational Vademeum for Efficient Design, Optimization and Control. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(1):31--59.
- Ghnatios, C., Masson, F., Huerta, A., Leygue, A., Cueto, E., and Chinesta, F. (2012). Proper generalized decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216(0):29 -- 41.
- Gonzalez, D., Ammar, A., Chinesta, F., and Cueto, E. (2010). Recent advances on the use of separated representations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(5).
- González, D., Cueto, E., and Doblaré, M. (2010). A higher order method based on local maximum entropy approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84:741--764.
- Gonzalez, D., Masson, F., Poulhaon, F., Cueto, E., and Chinesta, F. (2012). Proper generalized decomposition based dynamic data driven inverse identification. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82:1677--1695.
- Karhunen, K. (1946). Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. AI. Math. Phys.*, 37.
- Ladeveze, P. (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics*. Springer, N.Y.
- Ladeveze, P. and Chamoin, L. (2011). On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(23-24):2032--2047.

- Ladeveze, P., Passieux, J.-C., and Neron, D. (2010). The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22):1287 -- 1296.
- Laughlin, R. B. and Pines, D. (2000). The theory of everything. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(1):28--31.
- Loève, M. M. (1963). *Probability theory*. The University Series in Higher Mathematics, 3rd ed. Van Nostrand, Princeton, NJ.
- Lorenz, E. N. (1956). *Empirical Orthogonal Functions and Statistical Weather Prediction*. MIT, Departement of Meteorology, Scientific Report Number 1, Statistical Forecasting Project.
- Maday, Y., Patera, A., and Turinici, G. (2002). Global a priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter symmetric coercive elliptic partial differential equations. *COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE*, 335(3):289--294.
- Nouy, A. (2010). A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24):1603--1626.
- Pruliere, E., Chinesta, F., and Ammar, A. (2010). On the deterministic solution of multi-dimensional parametric models using the Proper Generalized Decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4):791--810.
- Rvachev, V. L., Sheiko, T. I., Shapiro, V., and Tsukanov, I. (2000). On completeness of rfm solution structures. *Computational Mechanics*, 25:305--316.
- Rvachev, V. L., Sheiko, T. I., Shapiro, V., and Tsukanov, I. (2001). Transfinite interpolation over implicitly defined sets. *Computer Aided Geometric Design*, 18:195--220.
- Ryckelynck, D., Chinesta, F., Cueto, E., and Ammar, A. (2006). On the a priori Model Reduction: Overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 12(1):91--128.
- Tenenbaum, J. B., de Silva, V., and Langford, J. C. (2000). A global framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 290:2319--2323.