

Ma orientering anteckningar

Sebastian Miles

Contents

1 Victor Fingal - Volvo	4
1.1 Basel och IRK	4
1.2 Vad menar vi med Kredirisk	4
1.3 Modellerna	4
1.4 Tips och råd	5
2 Viktor2 - Skräddarsy kost med matematik	6
2.1 Kostråd	6
2.2 Identifiering av metabotyper i matriser	6
3 Hur bidrar matematik till utveckling av järnvägar	7
4 Christian Johansson - Att Forska i matematik	8
4.1 Karriärsväg	9
5 Sammanfattning	11
6 Lillemor - Mänsklig rättigheter, jämlikhet, likabehandling och jämställdhet	12
7 Erik - Statistik	13
7.1 ???	13
7.2 Statistik	13
7.3 Statistisk kompetens	14
7.4 Programmering	14
7.5 Statistik Ouput	14
8 SAAB surveillance	16
9 Fackspråk	17
9.1 Sammanfattning	17
9.2 Hur?	17
9.3 Övergångar	17
10 Julie Rowlett	19
10.1 Game of teams	19

<i>CONTENTS</i>	3
11 Can maths combat terrorism?	21
11.1 Noteringar	21
12 Talteori del 1	22
12.1 Modulär aritmetik	23
13 The mathematics of war!	25
13.1 notes	25
13.2 Sammanfattning	25
14 ngt	26
14.1 Matematikens grunder	26
15 Markov kedjor	27
16 Google sökmotor - Linjär Algebra	30
16.1 Idén i kortthe	30

1. Victor Fingal - Volvo

- (i) Systemutvecklare med tillämpningar inom kreditisk och regel.
- (ii) Volvofinans bank:
 - Grundades 1959.

Victor jobbar inom avdelningen IRK. Del av business intelligence, förvaltar :
En vanlig dag: 8:00 Bevaka flöden 8:45 standup teamet samlas och berättar hur arbetet går. 9 - Jobba med de projekt som jag är tilldelad. Eventuella möten med projektledare eller andra avdelningar. Längsta projekt i 300 timmar.

1.1 Basel och IRK

Alla banker inom EU följer Baselkommittens standard för hantering av kreditisk och kapitaltöcknin. Inom ramverket ges möjligheten för banken att använda statistiska metoder.

1.2 Vad menar vi med Kreditrisk

Probability of default. Loss given default Exposure at default

$$ECL = \frac{PD - LGD - EAD}{(1 - r)^2}$$

$$UL = f(EAD, LGD, PD), VaR = EL + UL$$

1.3 Modellerna

- (i) Transparens är väldigt viktigt inom Basel ramverket
- (ii) Modellerna är utvecklade av oss men godkänns av FI.
- (iii) Validering av modeller sker löpande. Modellerna "finjusteras".
- (iv) Banken jämförs mot alla andra banker inom EU.

1.4 Tips och råd

Kurser:

- (i) Topologi
- (ii) Logisk teori
- (iii) Ikelinjär optimering
- (iv) Fourieranalys
- (v) Finansiell risk

Råd:

- (i) Kom ihåg att läsa kurser ni tycker är kul. Men var lite taktiska.
- (ii) Även det man inte använder är bra.
- (iii) Om ni vill jobba med data så hjälper det att veta vad en databas är..

2. Viktor2 - Skräddarsy kost med matematik

2.1 Kostråd

- (i) Det som är nyttigt för en person kanske inte är nyttigt för en annan person
- (ii) Det finns olika nivåer för hur stora grupper kosten passar till, t.e.x Populationsnivå, metabotyper, personnivå,
- (iii) Personer med liknande kost hamnar i en så kallad metabotyper
 - (i) Data speglar metabolismen i.e metabolomics, kliniska mått.
 - (ii) Variablerna mäts oftast vid ett tillfälle i tiden.
 - (iii) Resultat i en matris med en kolumn per variabel.

2.2 Identifiering av metabotyper i matriser

- (i) Högdimensionella data kan ofta komprimeras för att upptäcka övergripande mönster.
- (ii) Matrisdekomponeringsmetoder som principal component analysis (PCA) är ett sådant verktyg.

Studiedesigner som använder upprepande mätningar kan skapa tensordata. En kub..

3. Hur bidrar matematik till utveckling av järnvägar

Fraunhofer-Chalmers center

- (i) Gemensamt grundat av Chalmers och Fraunhofer
- (ii) Fraunhofer är Europas största tillämpningsinriktade

Fluidsimuleringar

4. Christian Johansson - Att Forska i matematik

Att bli en matematiker

Christian Johansson är doktorand i Imperial College London. Lektor i GU/CTH. Forskning inom algebraisk talteori (langlandsteorin) Ex

$$y^2 = x^3 - 16x + 16 \pmod{p}$$

Lösning ges av $p - a_p$, där a_p definieras av $f(z)$ något... f är en modulär form —en speciell typ av komplex funktion. Bara ett exempel av många.

Langlandsprogrammet söker ett systematiskt svar på varför det här sker. Centralt är Galoisteori, matematiken som utvecklades för att visa att femtegradsekvationer inte kan lösas.

Löser existerande problem

- (i) Oftast nyare frågeställningar —Matematiken utvecklas ständigt
- (ii) Ibland äldre —Fermat stora sats, Reimannhypotesen, P=NP, Navier —Stokes ekvationer, ...
- (iii) Gamla problem fungerar som motivation och som måttstockar för framsteg

Hittar nya kopplingar

- (i) Smått —problemlösning kräver ofta att man relaterar ett olöst problem till ett löst problem
- (ii) Stort —kopplingar mellan hela fält

Skapar ny matematik:

- (i) Det är fritt för alla att skapa ny matematik så länge man följer logikens lagar.
- (ii) Fascinerande i sig självt, eller säger något nytt om den matematik som redan finns.

Vad bestämmer vilken forskning som sker?

- (i) Trender
- (ii) Tradition
- (iii) Tillämpningar
- (iv) Nyfikenhet

Maetmatisk Teori \iff Gamla problem \iff Nya problem

- (i) Statistical inference on interacting particle systems
- (ii) Rational lines on cubic hyper surfaces

Hur ser en dag ut? Man sitter och klurar. Länge. I grupp eller ensam. Läser och diskuterar med kollegor. Prova sig fram. Penna och papper. Kanske dator.

Också:

- (i) Undervisar
- (ii) Skriver forskningsartiklar
- (iii) Organiserar eminarier och konferenser
- (iv) Etc

4.1 Karriärsväg

Doktorerar

- (i) Nå forskningsfronten
- (ii) 3-5 år, mestadels forskning, samt undervisning och studier.
- (iii) Lärlingsutbildning —Lära sig forska under handledning

Postdoc

- (i) Etablera sig som forskare

- (ii) Tidsbegränsade tjänster, normalt 1-3 år per tjänst
- (iii) Ofta flera på olika ställn, forskning och undervisning

Tillsvidareanställning

- (i) Mängden forskning variera från fall till fall

Varför är jag matematiker?

- (i) Ett stort matematikintresse
- (ii) Ett jobb med stor frihet
- (iii) En internationell arbetsmiljö

Lästips:

- (i) Fermats gåta, S. Singh
- (ii) Birth of a theorem, C. Villani
- (iii) The Millenium Problems, K. Devlin

Man ska inte börja på ett problem om man inte har någon ide på hur man skulle kunna påbörja

5. Sammanfattning

Christian Johansson is a professional mathematician and lecturer at the University of Gothenburg and Chalmers Technical University. Johansson received his PhD at the Imperial College in London. He is currently researching algebraic number theory (Langlandstheory). The theory is centrally Galois-theory, the theory which was developed to prove that there is no general algebraic formula for the roots of a polynomial of degree five.

6. Lillemor - Mänsklig rättigheter, jämlikhet, likabehandling och jämställdhet

Kvinnor och män ska ha samma makt att forma samhället och sina egna liv. Ett jämställdhetsperspektiv ska finnas med i alla processer, på alla nivåer och i alla steg av processen - från förslag, till genomförande och utvärdering. Det handlar om att systematiskt synliggöra och analysera vilka konsekvenser förslag får för kvinnor respektive män.

Diskrimineringslagen (2008:567) Alla måste ta hänsyn, oberoende av marknad.

Diskrimineringsgrunder:

- Kön
- Könsoverskridande identitet eller uttryck
- Etnisk tillhörighet

Diskriminering är att någon missgynnas genom att behandlas sämre än någon annan behandlas, ha behandlats. Sexuella trakasserier är att agerande av sexuell natur som kränker någons värdighet. Förutom Kommentarer och ord kan det vara att någon till exempel tafsar.

7. Erik - Statistik

7.1 ???

Från karlskrona Ingen matematiker Visste inte vad jag skulle bli när jag blev stor Gillade "Matte"

Var är min Ti-82?? Vadå är definitioner satser, satser, bevis, kollarium? Fast ibland var det spännande Underkänt är det ens möjligt Vart tog alla vägen?

7.2 Statistik

Räknar procent och svara på dumma enkäter Rätt användbart ändå. **Vad är matematisk statistik?**

- Matematisk teori
- Modellantaganden och fördelningar
- Data (om någon är snäll och delar med sig...)
- Programmering (R/Python)
- Slutsatser och ny kunskap om världen
- Ett resultat att presentera och förklara
- En värld att förändra

Chefen vet ingenting, han tror det är bara tråkiga tabeller och fula figurer. Statistiker i VGR 29 st Kanske 30-40 totalt? 5 i Skövde, 1 i Mölndal, 23 i Göteborg Större enheter:

- Regionalt cancercentrum väst (RCC)
- Regional vårdanalys
- Registercentrum

Utspridda på olika förvaltningar Matematiska statistiker, statisitker, epidemiologer, folkhälsovetare civilingenjörer, systemanalytiker etc. Omfattande samarbete med Sahlgrenska akademien, GU Samlar in data inom sjukvården, sjukgymnaster. Använder det för att undersöka jämlikhet. Registercentrum i varje sjukvårdsregion Sveriges kommuner och Regioner (SKR) Socialstyrelsen Regerings-/departementsinitiativ Nordiska samarbeten (motsv personnummer)

7.3 Statistisk kompetens

- Deskriptivt
- Regressionsanalys/modellering
- Prediktion
- Kvalitetssyrning(statistisk processkontroll)
- Överlevnadsanalys
- Kausal inferens

7.4 Programmering

- R dominerar (SAS förekommer)
- Stora datamängder/samkörningar
- Ai-plattform
- Remote desktop
- Single-use programs + ”deployment-kod”

7.5 Statistik Ouput

- Årsrapporter
- Tryckta böcker

- Medförfattare
- Metodval
- Framställning
- Programmering
- Grafisk produktion

En viss nyfikenhet på medicin, går bra även om man är statistiker Nationellt och internationellt samarbete

Löner: 0-5 år: 33-35 kkr 6-10 år: 40-50 kkr Disputerade/seniora:

i 70 kkr

8. SAAB surveillance

Stokastisk värmeekvation.

Doktorand 2009-2015.

Postok på Tu-Berlin 2015-2016.

Konsult och Chief Scientist på Smartr 2019-2020.

Systemingenjör på SAAB sedan 2020.

Specialist i teknisk matematik från 2023.

Adjungerad docent 20% på Chalmers från februari 2021 och handledare för AI.

Radar och konstiga saker

Bra kurser att läsa

- Måste: Bayesiansk statistisk
- Ren matematik
- Sannolikhetssteori
- Beräkningsmatematik
- 2-3 kurser inom maskininlärning Ett par extra programmeringskurser

9. Fackspråk

9.1 Sammanfattning

- ca. 6000-9000 tecken

Ex. För att presentera Optimeringsteori är det lämpligt att referera till en definitions källa.

Jämför med hur en parafras också är ett konceptbegrepp.

Håll texten objektiv, undvik ord som **intressant** och **bra** ty, de är åsikter.

”I sin föreläsning under my-dagen (2011-10-24) talar Maja Johanson om hur användbart matematik kan vara.” bättre än att använda markörer som ^[1]

Upprepad påminnelse om att det är någon annan som skriver, inte mig.

9.2 Hur?

- Påståenden/idéer från föreläsningarna får inte existera i ett vakuum.
- Dra paralleller, hitta kopplingar och var tydlig för läsarens skull.
- Kom ihåg det övergripandet syftet med din text —och upprepa det gärna.

Bra fraser:

- Ett annat exempel ...
- En central idé är ...

9.3 Övergångar

Övergångar till andra föreläsningar är viktiga.

- Matematisk optimering kan användas till mer än...
- Precis som optimering kan statistik tillämpas inom ...

- Currys och åblads presentationer handlade båda om hur de använder optimering i yrkesliv...

Aldrig skriv endast förnamn. Ämnesintroduktion och upprepning av syfte. Fördjupning/Precisering Vi ska förklara överdrivet för att examinatorn ska se att skrivaren förstår. Behöver en inledning och en avslutning. I inledningen ska syftet framställas. Undvik klyschor av typen ”Redan de gamla grekerna insåg att matematiken spelar en avgörande roll ...”

Avslutningen, kan vara, ”Matematik är **alltså** en ..”

- Väj en lagom personlig ton
- Disponera texten på ett logiskt sätt
- Förklara allt som behöver förklaras
- Skriv informativa rubriker
- Undvik långa och invecklade meigar
- Använd begripliga ord och förklara nödvändiga facktermer.

Ordet vi inom ett matematiskt sammanhang placerar läsaren som en kollega. I texten, skriv inte för mycket pronomen, bara om det är motiverat.

Använd inte rubriker ska inte användas istället för övergångar.

Tydliga markörer såsom, ”å andrasidan”, ”o ena sidan”, ”för det första”, ”för det andra”

10. Julie Rowlett

10.1 Game of teams

Part 1: Work with CJ Karlsson & M Nursultanov

Definition 1. A *team* is a collection of players.

Each players of each team is randomly paired to compete.
Players are assigned a positive integer CA (competitive abilities). higher wins, lower loses, same is tie.

Definition 2. A *strategy* is a rule/method/recipe for assigning CAs to your team. If a team has n players then a strategy S is a function from \mathbb{N} to $[0, \infty)$ such that $\sum_{j \in \mathbb{Z}} S(j)$, $S(j) = \#$ players that have $CA = j$.

Constraint 1. Each strategy assigns only a finite $\#$ of CAs. Each strategy has some $M_S \in \mathbb{N}$ such that $S(j) = 0 \forall j > M_S$.

Constraint 2. Mean competitive ability (MCA) constraint fix $c > 0$ and require all strategies to satisfy

$$MCA(S) := \frac{\sum_{j \geq 0} S(j)j}{\sum_{j \geq 0} S(j)} \leq C$$

Team payoffs: For team A vs B the payoff to A is

$$E[A; B] = \sum_{j \in \mathbb{N}} A(j) \left(\sum_{i < j} B(i) - \sum_{k > j} B(k) \right)$$

Question: Does there exist a strategy such that

$$E[S; T] \geq 0, \forall T$$

Theorem 1 (CJK, MN, JR) Assume $C = n + \frac{1}{2}$, for some $n \in \mathbb{N}$ Then

the winning strategies are those with

$$W(j) = \begin{cases} \frac{w}{2n+2}, & 0 \leq j \leq 2n+1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$W(j)$ is the CA value of player j .

Theorem 2. Assume $C = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Then winning strategies are precisely those that are of the form

$$W(j) = \begin{cases} \frac{wa}{(n+1)a+nb}, & 0 \leq j \text{ odd} \leq 2n, \\ \frac{wb}{(n+1)a+nb}, & 0 \leq j \text{ even} \leq 2n, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

for constants $a, b, w \geq 0$ with $w(a+b) > 0$.

If C is *not* $\in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} + \frac{1}{2}$, is *an open problem*.

11. Can maths combat terrorism?

Terrorism is a human activity that may seem random and complex, studying the bigger picture reveals hidden patterns. Mathematicians have been able to use the power law distribution curve to model the frequency of large and small attacks.

Political sciences had been studying terrorism for decades. Political sciences have been viewing terrorism as a phenomena of decisions by studying the motives and culture of the terrorists. In contrast the mathematicians are viewing it as a natural phenomena by looking at the bigger picture and studying the trends of terrorism.

The mathematical model is not able to predict exactly when a terrorist attack will occur. However, by finding trends, the model can predict the frequency and make probabilistic statements about the size of an attack within a rough time frame.

A mathematical model called predictive policing helps police forecast where crime is most likely to occur. The software produces a heat map which highlights areas of interest. After the adaptation of this software crime has fallen by 30%. By using 7 years of data the algorithm can produce useful results.

Very unlikely that there will ever be a model that can predict terrorist attacks exact time and scale, because humans are unpredictable, and to get a sense of how they will act in the future is incredibly hard. Humans are complex and irrational and are very hard to simulate due to their randomness.

11.1 Noteringar

Referera sådan att det inte ska vara själv utvärderande.

12. Talteori del 1

Under hela detta kapitel är varje tal ett heltal.

Man säger att a delar b och skriver $a \mid b$ om det finns ett n sådan att $an = b$.

Sats 1. $a \mid b$ och $a \mid c$ om och endast om $a \mid mb + nc$ för alla m och n .

Bevis.

\Leftarrow : tag $m = 0, n = 1$ respektive $m = 1, n = 0$.

\Rightarrow : Att $a \mid b$ och $a \mid c$ betyder att det finns heltal p och q sådana att $b = pa$ och $c = qa$. Detta ger $mb + nc = (mp + nq)a$.

Sats 2. Om $a \mid b$ och $a, b > 0$ gäller att $a \leq b$

Def 1. Den största gemensamma delaren till a och b ges av

$$\gcd(a, b) = \max\{d : d \mid a \text{ och } d \mid b\}$$

Sats 4. $\gcd(a, b) = \gcd(a + nb, b)$ för alla b .

Bevis.

Låt $d = \gcd(a, b)$ och $d' = \gcd(a + nb, b)$. Eftersom $d \mid a$ och $d \mid b$ gäller $d \mid a + nb$ enligt sats 1. Alltså delar d både b och $a + nb$, så $d \leq d'$.

Å andra sidan medför $d' \mid a + nb$ och $d' \mid b$ att $d' \mid (a + nb) - nb$, dvs $d' \mid a$. Alltså $d' \leq d$.

Euklides algoritmen terminerar med högst $\log_2 b$ iterationer.

Om man kör Euklides algoritmen baklänges får man *Euklides utökade algoritmen*, där man finner två heltal u och v så att $au + bv = \gcd(a, b)$. Att göra det baklänges är egentligen bakåt substitution.

Aritmetikens fundamentalsats: För alla heltal $a \geq 2$ gäller att a kan skrivas som en produkt av primtal. Detta kan göras på endast ett sätt, bortsett från ordningen på faktorerna.

Bevis.

Bevis följer av ett stark induktions bevis. Påståendet är sant för $a = 2$. Tag ett $a > 2$ och antag att alla $b = 2, 3, \dots, a - 1$ kan skrivas som produkter av primtal. Nu är a antingen ett primtal, i vilket fall a är sin egen produkt av primtal, eller så kan man skriva $a = a_1 a_2$ för två tal $2 \leq a_1, a_2 \leq a/2$. Enligt antagande kan båda dessa skrivas som produkter av primtal, vilket då gäller

även för a . Nu följer påståendet av induktionsprincipen.

Sats 5. Om a och b är relativt prima och $a \mid bc$ gäller att $a \mid c$.

Bevis. Enligt euklides baklänges algo kan man finna u och v så att $au + bv = 1$ vilket medför att

$$acu + bcv = c$$

Att $a \mid acu$ är självklart och att $a \mid bcv$ följer av att $a \mid bc$. Därför gäller att $a \mid acu + bcv$, dvs $a \mid c$.

Sats 6. Om p är ett primtal och $p \mid ab$ så måste $p \mid a$ eller $p \mid b$.

Bevis. Om p inte delar a gäller $\gcd(a, p) = 1$, så $p \mid b$ enligt Sats 5. Om p inte delar b är det analogt..

Sats 7. Om p är ett primtal och $p \mid a_1 a_2 \cdots a_k$ gäller att $p \mid a_i$ för minst ett i .

Sats 8. Om p är ett primtal, q_1, q_2, \dots, q_k är primtal och $p \mid q_1 q_2 \cdots q_k$, gäller att $p = q_i$ för minst ett i .

12.1 Modulär aritmetik

Def 2. Man säger att a är kongruent med b modulo n , skrivet

$$a \equiv b \pmod{n}$$

om $n \mid a - b$.

Notera att $a \equiv b \pmod{n}$ är en ekvivalensrelation, ty $a \equiv a$, $a \equiv b \implies b \equiv a$, och $a \equiv b$, $b \equiv c \implies a \equiv c$. Skriv

$$[k] = [k]_n = \{j : j \equiv k \pmod{n}\}$$

för ekvivalensklassen som innehåller k .

Def 3. Heltalen modulo n get av $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$. \mathbb{Z}_n kallas också för den cykliska gruppen av modulo n

Sats 9. Om $a \equiv c$ och $b \equiv d$ modulo n gäller att

(i) $a + b \equiv c + d \pmod{n}$

(ii) $ab \equiv cd \pmod{n}$

Bevis av andra delen. Per definition finns det heltal s och t så att $c - a = sn$ och $d - b = tn$. Detta ger:

$$cd - ab = cd - ad + ad - ab = d(c - a) + a(d - b) = ds n + at n = (ds + at)n$$

□

Def 4. Ett tal $b \in \mathbb{Z}_n$ sägs ha en multiplikativ invers om det finns ett element $c \in \mathbb{Z}_n$ sådan att $bc \equiv 1 \pmod{n}$.

Vilket är $bc + nk = 1$ för något heltal k . För $\gcd(b, n) = 1$ finns en lösning enligt EUA.

13. The mathematics of war!

13.1 notes

(i) By Sean Gourley

Afghanistan and iraq war, sierra lon...

Sean Gourley new zealander physisist. Was watching oxford news and started gathering information.

Stringing together a team of scientists, economists and mathematicians.

Gathering raw data from a bunch of organizations.

Gathering for example the number of people killed by the number of attacks. If you take all the attacks, you get a really good mathematical model which describes everything.

They looked a few more conflicts and even with different economic problems different cultures and the same mathematical pattern appeared. The distribution was always the same. They could create an equation that would predict the number of people $P(x) = Cx^{-\alpha}$ Probabilty P, x number of people killed, and two constants C, and α is organizational structure. Coalescence + Fragmentation. Can we simulate it and it turns out we can, using root dynamics to describe this. Why do these rather complex have all such a similar pattern. How do we end the war? We can change the structure which in turn changes the α value. We should look at the structure of the insurgency if we want to win the war.

Where P is the probability of an attack with x deaths.

13.2 Sammanfattning

In Sean Gourley's TED conference titled "The Mathematics of War" (2009) Gourley talks about his research in creating a mathematical model which can describe the probabilistic nature of attacks.

Stringing together a team of scientists, economists and mathematicians suitable for

14. ngt

14.1 Matematikens grunder

- (i) Gränsvärde
- (ii) Kontinuitet
- (iii) Vadå är en funktion?
- (iv) Hur kan såda defineras?
- (v) Hur kan vi definera reela talen?

Diagonalargumentet

George Cantor formulerade det cirka 1870-talet Flera reella tal än heltal.

Bertrand Russel Paradox:

Låt $G(x)$ betyda $\neg x(x)$

$$\forall x G(x) \iff \neg x(x)$$

Sätt $x=G$:

$$G(G) \iff \neg G(G)$$

Motsägelse.

Mängdlära:

$\{x : x \notin x\} = R$ Gäller att $R \in R$? Det blir en motsägelse.

Principia Mathematica 1900-1920 (Russel & Whitehead)

Kurt Gödel (1930): Ofullständighetssatsen: Om Principia Mathematica är motsägelsefritt, så är det ofullständigt.

Kurt Gödel är den enda personen som har läst hela Principia Mathematica.

Alan Turing 1912-1954 Turingmaskin - Matematisk modell av dator.

15. Markov kedjor

Markovkedja: En glömsk groda hoppar mellan näckrosblad.

$$X_0, X_1, X_2, \dots$$

Där X_t är tillståndet. Låt $X_t \in S$. S innehåller alla olika tillstånd. Nästa steg är helt oberoende på hur man kom till tillståndet, den är endast beroende på vart man är.

Antag att X_0 väljs slumpmässigt så att $\mathbb{P}(X_0 = s) = p_0(s), s \in \{A, B, C\}$

$$p_1(A) = \mathbb{P}(X_1 = A) = 0.3p_0(A) + 0.2p_0(B) + 0.2p_0(C)$$

Kan vi bestämma $p_0(s)$ så att $p_1(s) = p_0(s)$ för $s \in \{A, B, C\}$ Javisst, byt bara ut $p_1(s)$ mot $p_0(s)$ i ekvationssystemet och lös. Man får då

$$p_0(A) \approx 0.222, p_0(B) \approx 0.494, p_0(C) \approx 0.284$$

Om man väljer $p_0(s)$ enligt de siffrorna kommer det att gälla att $p_t(s) = p_0(s)$ för alla t och s (tack vare tidshomogenitet). Om man inte väljer $p_0(s)$ så gäller ändå att $(X_n)_{n \geq 0}$ konvergerar mot dessa tal (dvs 0.222, 0.494 respektive 0.284). Man brukar skriva

$$\pi(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = s)$$

.

Generellt: antag att S innehåller n element och kalla dessa $1, 2, \dots, n$. Skriv

$$p_t = [p_t(1), p_t(2), \dots, p_t(n)].$$

Låt $P = [p_{ij}]$, där

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i).$$

Då gäller

$$P_{t+1} = p_t P.$$

Förutom i speciella fall gäller att det finns en vektor $\pi = [\pi(1), \dots, \pi(n)]$ Sådan att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = s) = \pi(s),$$

för alla s , oavsett hur man startar. Vektorn π ges då av motsvvarigheten till ekvationssystemet ovan:

$$\pi P = \pi \quad (\text{matris multiplikation})$$

Kortblandningar: En kortlek med n kort blandas. S = mängden av alla $n!$ permutationer av de n korten. Uppenbarligen en Markovkedja; ordningen efter nästa steg i blandningen beror bara på av hur korten ligger nu.

Om omordningen som sker av kortleken i ett blandingssteg inte beror av hur korten ligger nu, så får man alltid

$$\pi(s) = \frac{1}{n!}.$$

Primitiv rot i en cyklisk grupp.

En kortlek är välblandad när $\mathbb{P}(x_t = s) \approx \pi(s)$ för (nästan) alla s . Vad betyder det?

Definition Totalvariansavståndet mellan fördelningen för X_t och π ges av

$$d(X_t, \pi) = \max_{U \subset S} | \mathbb{P}(X_t \in U) - \pi(U) | = \frac{1}{2} \sum_{s \in S} | \mathbb{P}(X_t = s) - \pi(s) |.$$

$d(X_t, \pi) < 1$ och $d(X_0, \pi)$ är väldigt nära 1 om X_0 är en fix startordning. Man brukar bestämma ett $\varepsilon > 0$ och vara nöjd när t är så stort att $d(X_t, \pi) < \varepsilon$. Hur stort t som behövs brukar man uttrycka i termer av n , dvs hur många kort som finns i leken. Oftast vill man ha en övre skattning på hur stort t behöver vara.

Lektorn pratar om Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

Koppling: Låt Y_0, Y_1, \dots vara en annan kortlek som blandas på samma sätt som X -leken, med skillnad att den är stationär redan från början: $\mathbb{P}(Y_0 = s) = \frac{1}{n!}$ för alla s . Konstruera ett beroende mellan blandningarna för X -leken och Y -leken. Beroendet måste vara sådant att lekarna var för sig uppfyller

den blandningsteknik som vi vill studera. Vi kräver också att $X_t = y_t \implies X_{t'} = Y_{t'}$ för alla $t' > t$

Låt $\tau = \min\{t : X_t = Y_t\}$. Då gäller

$$\begin{aligned} d(X_t, \pi) &= d(X_t, Y_t) = \max_U | \mathbb{P}(X_t \in U) - \mathbb{P}(Y_t \in U) | \\ &= \max_U | \mathbb{P}(X_t \in U, \tau \leq t) - \mathbb{P}(Y_t \in U, \tau \leq t) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_t \in U, \tau > t) - \mathbb{P}(Y_t \in U, \tau > t) | \\ &\leq \mathbb{P}(\tau > t) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} T_i \approx n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx n \ln n.$$

Man kan visa att för $\delta > 0$ gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}((1 - \delta)n \ln n < \tau < (1 + \delta)n \ln n) = 1.$$

Detta är samma som idolbilsproblemet. Man får köpa $n \ln n$ idolbilder innan man fått alla.

The Riffle Shuffle: Tar en kort lek och delar de i två delar.

16. Google sökmotor - Linjär Algebra

16.1 Idén i korthet

- (i) Uttnyttja den struktur som länkarna mellan sidorna ger.
- (ii) Modellerna detta med en riktad graf.
- (iii) Använd en matris M som svarar mot slumpvandring på denna graf
- (iv) Perron-Frobenius sats: M^t har egenvärdet 1 och dess egenvektor v har bara positiva element.
- (v) Vektorn v ger en rankning av alla sidor.

16.2 Graf

Def: En graf är två mängder —en mängd V med noder och en mängd E med kanter.