计算机图形学

内蒙古大学
计算机学院
魏宏喜

第五章 曲线与曲面

- 在日常生活中，随处可见各种曲线、曲面的例子。如：汽车、飞机、舰船的外形都是用曲面(CAD中)来描述的。
- 曲线与曲面是计算机图形学的重要研究内容。
- 本章介绍一些曲线与曲面中最基本的内容。

第五章 曲线与曲面

- §5.1 参数曲线和曲面
- §5.2 Bezier曲线与曲面

第五章 曲线与曲面

- §5.1 参数曲线和曲面
- §5.2 Bezier曲线与曲面

§5.1 参数曲线和曲面 (内容提要)

- 5.1.1 曲线与曲面的表示
- 5.1.2 曲线的基本概念
- 5.1.3 插值和拟合
- 5.1.4 参数化
- 5.1.5 参数曲线的代数和几何形式
- 5.1.6 连续性
- 5.1.7 参数曲面的基本概念

§5.1 参数曲线和曲面 (内容提要)

- 5.1.1 曲线与曲面的表示
- 5.1.2 曲线的基本概念
- 5.1.3 插值和拟合
- 5.1.4 参数化
- 5.1.5 参数曲线的代数和几何形式
- 5.1.6 连续性
- 5.1.7 参数曲面的基本概念

5.1.1 曲线与曲面的表示 (1/8)

- 曲线与曲面在数学上都有以下三种表示形式:
  - 显式表示
  - 隐式表示
  - 参数表示

7

5.1.1 曲线与曲面的表示 (2/8)

- 显示表示：一个变量能够显式地表示为另一个变量的函数。
  - 对于一条平面曲线，显式表示的一般形式是：$y=f(x)$
  - 例如：一条直线方程 $y=mx+b$，每一个x值只对应一个y值；
  - 缺点：不能表示封闭曲线。

8

5.1.1 曲线与曲面的表示 (3/8)

- 隐式表示
  - 对于一条平面曲线，它的隐式表示的一般形式为：

$$f(x,y)=0$$

  - 对于一条三维空间曲线，它的隐式表示为两个平面的相交线：

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

  - 优点：易于判断函数是否大于、小于或者等于零。
  - 缺点：方程的根很难求。

9

5.1.1 曲线与曲面的表示 (4/8)

- 显式表示或隐式表示都存在以下问题:

(1) 与坐标轴相关;

(2) 当某些系数（如：直线斜率）为无穷大时，不便于计算机编程。

10

5.1.1 曲线与曲面的表示 (5/8)

- 参数表示：曲线上任意一点的坐标均表示成给定参数的函数。
  - 假定用t表示参数，平面曲线上任一点P可表示为:

$$P(t)=[x(t),y(t)]$$

  - 假定用t表示参数，空间曲线上任一点P可表示为:

$$P(t)=[x(t),y(t),z(t)]$$

11

5.1.1 曲线与曲面的表示 (6/8)

- 参数表示的例子:
  - 圆：第一象限内的单位圆弧。

$$x=\cos(\theta)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$y=\sin(\theta)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\theta=\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\Big/\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=(1-t^2)/(1+t^2)$$

12

5.1.1 曲线与曲面的表示 (6/8)

- 参数表示的例子：
  - 圆：第一象限内的单位圆弧。

$$P(t)=\left[\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right] \qquad t\in[0,1]$$

13

5.1.1 曲线与曲面的表示 (7/8)

- 参数表示的优点：

(1) 有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状。

例如，一条二维三次曲线的显式表示为：

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (可用4个系数控制曲线的形状)

而二维三次曲线的参数表示为：

$$P(t)=\begin{cases} a_1t^3+a_2t^2+a_3t+a_4 \\ b_1t^3+b_2t^2+b_3t+b_4 \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

(可用8个系数控制曲线的形状)

(2) 需要对曲线、曲面进行变换时，可直接通过对其参数方程进行几何变换。

14

5.1.1 曲线与曲面的表示 (8/8)

- 参数表示的优点：

(3) 便于处理斜率为无穷大的情形，不会因此而中断计算，易于编程处理。

(4)如果用参数表示，在编程实现时，则只有一个变量，复杂度较低。

……

15

§ 5.1 参数曲线和曲面 (内容提要)

- 5.1.1 曲线与曲面的表示
- 5.1.2 曲线的基本概念
- 5.1.3 插值和拟合
- 5.1.4 参数化
- 5.1.5 参数曲线的代数和几何形式
- 5.1.6 连续性
- 5.1.7 参数曲面的基本概念

16

5.1.2 曲线的基本概念 (1/6)

- 设三维曲线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

17

5.1.2 曲线的基本概念 (2/6)

- 位置矢量：原点到曲线上任意一点的位置矢量为：

$$P(t)=[\,x(t), y(t), z(t)\,]_{1\times 3}$$

  - 其一阶、二阶和k阶导数分别为：

$$P'(t) = dP/dt$$

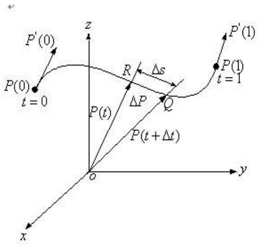
$$P''(t) = d^2P/dt^2$$

$$P^k(t) = d^kP/dt^k$$

18

5.1.2 曲线的基本概念 (3/6)

- 切矢量
  - 如图所示，如果曲线上的两点**R**,**Q**的参数分别是*t*和*t*+⊿*t*，则矢量Δ**P**=**P**(*t*+⊿*t*)-**P**(*t*)的大小可用连接**R**和**Q**的弦长来表示。
  - 如果在**R**点处存在切线，则当⊿*t*→0时，**Q**趋向于**R**，即：矢量Δ**P**的方向趋向于**R**点的切线方向。



5.1.2 曲线的基本概念 (4/6)

- 切矢量
  - 结论：若选择弧长s作为参数，则 $T=\frac{dP}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta s}$ 是单位切矢量。
    - 根据弧长微分公式有：
      $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$
    - 引入参数t，上式可改写成：
      $(ds/dt)^2=(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2=\left|P'(t)\right|^2$
    - 由于矢量的模都是非负的，可得：$\frac{ds}{dt}=\left|P'(t)\right|\geq 0$

5.1.2 曲线的基本概念 (5/6)

- 切矢量
  - 弧长s是*t*的单调递增函数，因此其反函数*t*(s)也存在，且函数与反函数一一对应。

    即：**P**(*t*)=**P**(*t*(s))=**P**(s)
  - 于是有 $\frac{dP}{ds}=\frac{dP}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{P'(t)}{\left|P'(t)\right|}$ ，即*T*为单位矢量。

5.1.2 曲线的基本概念 (6/6)

- 法矢量
  - 令：曲线上任意一点的单位切矢量记为**T**。

    ∵ **[T(s)]² = 1**，对等式两边的s求导，可得：

    2T(s)T'(s)=0

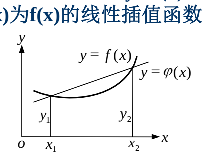
    ∴ **dT/ds**是一个与**T**垂直的矢量。
  - 与**dT/ds**平行的法矢量称为曲线在该点的主法矢量(***N***)。
  - 矢量***B*** = ***T*** × ***N*** 是第三个单位矢量，它垂直于***T***和***N***。
  - 把平行于矢量***B***的法矢称为曲线的副法矢量。

§5.1 参数曲线和曲面 (内容提要)

- 5.1.1 曲线与曲面的表示
- 5.1.2 曲线的基本概念
- 5.1.3 插值和拟合
- 5.1.4 参数化
- 5.1.5 参数曲线的代数和几何形式
- 5.1.6 连续性
- 5.1.7 参数曲面的基本概念

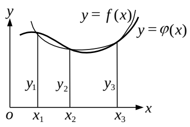
5.1.3 插值和拟合 (1/3)

- 给定一组有序的数据点P_i，**i=0, 1, …, n**，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行插值，所构造的曲线称为插值曲线。
  - 线性插值：假设给定函数**f(x)**在两个不同点**x1**和**x2**的值，用一个线性函数：**y=φ(x)=ax+b**，近似代替**f(x)**，称**φ(x)**为**f(x)**的线性插值函数。



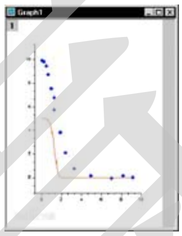
5.1.3 插值和拟合 (2/3)

- 给定一组有序的数据点P_i，i=0, 1, …, n，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行插值，所构造的曲线称为插值曲线。
  - 抛物线插值：已知在三个互异点x_1,x_2,x_3的函数值分别为y_1,y_2,y_3，要求构造一个函数$\phi(x)=ax^2+bx+c$，使抛物线$\phi(x)$在结点$x_i(i=1,2,3)$处与$f(x)$在x_i处的值相等。



5.1.3 插值和拟合 (3/3)

- 拟合：构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点(但未必通过这些点)，所构造的曲线为拟合曲线。



§5.1 参数曲线和曲面 (内容提要)

- 5.1.1 曲线与曲面的表示
- 5.1.2 曲线的基本概念
- 5.1.3 插值和拟合
- 5.1.4 参数化 (不要求)
- 5.1.5 参数曲线的代数和几何形式 (不要求)
- 5.1.6 连续性
- 5.1.7 参数曲面的基本概念

§5.1 参数曲线和曲面 (内容提要)

- 5.1.1 曲线与曲面的表示
- 5.1.2 曲线的基本概念
- 5.1.3 插值和拟合
- 5.1.4 参数化
- 5.1.5 参数曲线的代数和几何形式
- 5.1.6 连续性
- 5.1.7 参数曲面的基本概念

5.1.6 连续性 (1/10)

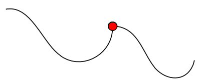
- 在实际中，许多几何造型都是由多条不同曲线（或者曲面）连接而成的，如：(在CAD中)汽车的轮廓图。
- 如何保证各条相连曲线(或者曲面)在连接处是连续性的(平滑)？

5.1.6 连续性 (2/10)

- 曲线间连续性(光滑度)的度量有两种：
  - 参数连续性：使得多个参数曲线段在连接处具有n阶连续可微，这类连续性被称为n阶参数连续性，记为：C^n。
  - 几何连续性：使得多个参数曲线段在连接处满足参数导数成比例即可，这类连续性被称为具有n阶几何连续性，记为：G^n。

5.1.6 连续性 (3/10)

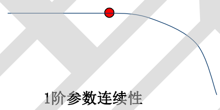
- 假设：前一段参数曲线是**p(t)**，邻接的后一段参数曲线是**q(t)**。
- 参数连续性
  - **0**阶参数连续性**C^0**：如果前一曲线段终点处函数的所有分量与邻接的后一曲线段起点处函数的所有分量相同，即：**p(1)=q(0)**。



0阶参数连续性

5.1.6 连续性 (4/10)

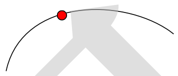
- 假设：前一段参数曲线是**p(t)**，邻接的后一段参数曲线是**q(t)**。
- 参数连续性
  - **1**阶参数连续性**C^1**：如果在连接点(交点)处的导数值相等，即：**p(1)=q(0)**且**p'(1)=q'(0)**。



1阶参数连续性

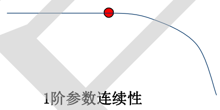
5.1.6 连续性 (5/10)

- 假设：前一段参数曲线是**p(t)**，邻接的后一段参数曲线是**q(t)**。
- 参数连续性
  - **2**阶参数连续性**C^2**：如果在连接点(交点)处的切矢量变化率相等，即：切线从一条曲线段"平滑"过渡到另一个曲线段。



2阶参数连续性

5.1.6 连续性 (6/10)



1阶参数连续性

- 假设：前一段参数曲线是**p(t)**，邻接的后一段参数曲线是**q(t)**。
- 参数连续性 (比较**C^1**和**C^2**)
  - 如果曲线段之间只是**C^1**参数连续，在它们在连接点处曲线的形状可能会发生突变(如图)，若以相同的参数间隔移动"镜头"，会产生移动过程的不连续性；
  - 如果曲线段之间满足**C^2**参数连续，则以相同的参数间隔移动"镜头"，移动过程会比较平稳。

5.1.6 连续性 (7/10)

- 假设：前一段参数曲线是**p(t)**，邻接的后一段参数曲线是**q(t)**。
- 几何连续性
  - 与参数连续性不同的是，几何连续性只需要线段在邻接处的参数导数成比例。
  - **0**阶几何连续性**G^0**：如果前一曲线段终点处函数的所有分量与邻接的后一曲线段起点处函数的所有分量相同，即：**p(1)=q(0)**。**(**与**C^0**的定义相同**)**

5.1.6 连续性 (8/10)

- 假设：前一段参数曲线是**p(t)**，邻接的后一段参数曲线是**q(t)**。
- 几何连续性
  - **1**阶几何连续性**G^1**：一阶导数在邻接点处成比例，即：邻接点处切向量的方向相同，但模长不一定相等。
  - **2**阶几何连续性**G^2**：相邻曲线段在邻接点处其一阶和二阶导数均成比例，即：相邻曲线段在邻接点处的曲率相等。

5.1.6 连续性 (9/10)

- 例：引入几何连续性的必要性。

$$\Phi(t)=\begin{cases} V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}t, & 0\le t\le 1 \\ V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}+(t-1)\dfrac{2(V_1-V_0)}{3}, & 1\le t\le 2 \end{cases}$$

  - $\Phi(t)$在[0,2]上表示一条直线，该直线的两个端点为V_0和V_1。
  - 存在$\Phi'(1^-)=(V_1-V_0)/3$和$\Phi'(1^+)=2(V_1-V_0)/3$，即：$\Phi'(1^-)\neq\Phi'(1^+)$。

5.1.6 连续性 (10/10)

  - $\Phi(t)$是一条直线，但却非C^1连续，因此用参数连续性来描述光滑性是不恰当的。
  - 有必要引入几何连续性。

- 结论：C^1连续能保证G^1连续，C^2连续能保证G^2连续，但反过来不行。即：C^n连续的条件比G^n连续的条件要苛刻。
- 在图形学中，一般只需满足几何连续性即可。

§5.1 参数曲线和曲面 (内容提要)

- 5.1.1 曲线与曲面的表示
- 5.1.2 曲线的基本概念
- 5.1.3 插值和拟合
- 5.1.4 参数化
- 5.1.5 参数曲线的代数和几何形式
- 5.1.6 连续性
- 5.1.7 参数曲面的基本概念（不要求）

§5.1 参数曲线和曲面 (内容提要)

- 5.1.1 曲线与曲面的表示
- 5.1.2 曲线的基本概念
- 5.1.3 插值和拟合
- 5.1.4 参数化
- 5.1.5 参数曲线的代数和几何形式
- 5.1.6 连续性
- 5.1.7 参数曲面的基本概念

第五章 曲线与曲面

- §5.1 参数曲线和曲面
- §5.2 Bezier曲线与曲面

§5.2 Bezier曲线与曲面 (内容提要)

- 5.2.1 Bezier曲线的定义和性质
- 5.2.2 Bezier曲线的递推算法
- 5.2.3 Bezier曲线的拼接
- 5.2.4 Bezier曲线的升阶与降阶
- 5.2.5 Bezier曲面

§ 5.2 Bezier曲线与曲面 (内容提要)

- **5.2.1 Bezier曲线的定义和性质**
- **5.2.2 Bezier曲线的递推算法**
- **5.2.3 Bezier曲线的拼接**
- **5.2.4 Bezier曲线的升阶与降阶**
- **5.2.5 Bezier曲面**

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (1/14)

- 1962年，法国雷诺汽车公司的**P.E.Bézier**构造了一种以逼近为基础的参数曲线和曲面的设计方法。
- **Bezier**曲线是一段n次多项式曲线，它能满足几何造型对曲线和曲面的要求。
- 可以使用**Bezier**曲线和曲面制作三维动画：
  示例1
  示例2

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (2/14)

- **Bezier曲线的定义**：给定空间中n+1个点的位置矢量P_i(i=0,1,2,…,n)，则n次**Bezier**曲线可定义为如下形式：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t),\quad t\in[0,1]$$

- 控制顶点：n+1个顶点$P_0,P_1,\ldots P_n$。
- 控制多边形：由n+1个顶点组成的多边形。控制多边形是对**Bezier**曲线的大致勾画，而**Bezier**曲线是对控制多边形的逼近。

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (3/14)

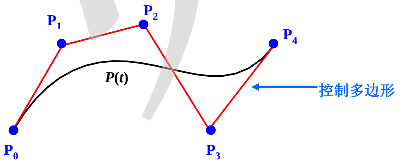
- P_i是构成该Bezier曲线的特征多边形的n+1个顶点，$B_{i,n}(t)$是n次Bernstein基函数(多项式)：

$$B_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$$

$$(i=0,1,\ldots,n)$$

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (4/14)

4次Bezier曲线及控制多边形



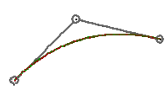
5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (5/14)

1次Bezier曲线

$$P(t)=(1-t)P_0+tP_1$$

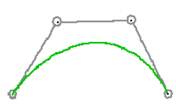
2次Bezier曲线

$$P(t)=(1-t)^2P_0+2(1-t)tP_1+t^2P_2$$



3次Bezier曲线

$$P(t)=(1-t)^3P_0+3(1-t)^2tP_1+3(1-t)t^2P_2+t^3P_3$$

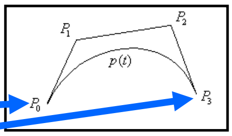


5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (6/14)

- **Bezier曲线的性质**

1、端点性质

(1) 曲线端点位置矢量



- 当t=0时，$P(0)=P_0$；
- 当t=1时，$P(1)=P_n$。
- 由此可见，Bezier曲线的起点、终点与相应的特征多边形的起点、终点重合。

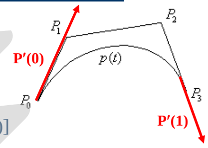
49

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (7/14)

- **Bezier曲线的性质**

1、端点性质

(2) 切矢量



$$P'(t)=n\sum_{i=0}^{n-1}P_i[B_{i-1,n-1}(t)-B_{i,n-1}(t)]$$

- 当t=0时，$P'(0)=n(P_1-P_0)$；
- 当t=1时，$P'(1)=n(P_n-P_{n-1})$；
- 这说明Bezier曲线的起点和终点处的切线方向和特征多边形的第一条边及最后一条边的走向一致。

50

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (8/14)

- **Bezier曲线的性质**

1、端点性质

(3) 二阶导数

- $P''(t)=n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}(P_{i+2}-2P_{i+1}+P_i)B_{i,n-2}(t)$
- 当t=0时，$P''(0)=n(n-1)(P_2-2P_1+P_0)$
- 当t=1时，$P''(1)=n(n-1)(P_n-2P_{n-1}+P_{n-2})$
- 上式表明：2阶导数只与相邻的3个顶点有关，事实上，r阶导数只与(r+1)个相邻点有关，与更远点无关。

51

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (9/14)

- **Bezier曲线的性质**

2、对称性

- 由控制顶点$P^*_i = P_{n-i}$，(i=0,1,…,n)，构造出的新Bezier曲线，与原Bezier曲线形状相同，走向相反。

$$P^*(t)=\sum_{i=0}^{n}P_i^*B_{i,n}(t)=\sum_{i=0}^{n}P_{n-i}B_{i,n}(t)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}P_{n-i}B_{n-i,n}(1-t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(1-t)=P(1-t)$$

- 这个性质说明Bezier曲线在起点处有什么几何性质，在终点处也有相同的性质。

52

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (10/14)

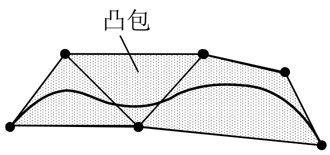
- **Bezier曲线的性质**

3、凸包性

- 由于$\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)\equiv 1$，且$0<=B_{i,n}(t)<=1$，这一结果说明当t在[0，1]区间变化时，对某一个t值，P(*t*)是特征多边形各顶点的加权平均，权因子依次是$B_{i,n}(t)$, i=0,1,…,n。
- 在几何图形上，意味着Bezier曲线*P(t)*在t∈[0,1]中各点是控制点P_i的凸线性组合，即曲线落在P_i构成的凸包之中，如下图所示。

53

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (11/14)



Bezier曲线的凸包性

54

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (12/14)

● **Bezier曲线的性质**

4、几何不变性

- 是指某些几何特性不随坐标变换而变化。
- Bezier曲线的位置、形状与其特征多边形顶点P_i $(i=0,1,\ldots,n)$的位置有关，它不依赖坐标系的选择。

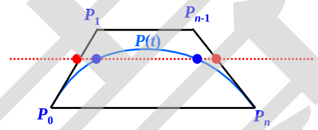
55

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (13/14)

● **Bezier曲线的性质**

5、变差缩减性

- 如果Bezier曲线的特征多边形$P_0P_1\ldots P_n$是一个平面图形，则平面内任意直线与P(t)的交点个数不多于该直线与其特征多边形的交点个数。



56

5.2.1 Bezier曲线的定义和性质 (14/14)

● **Bezier曲线的性质**

5、变差缩减性

- 如果Bezier曲线的特征多边形$P_0P_1\ldots P_n$是一个平面图形，则平面内任意直线与P(t)的交点个数不多于该直线与其特征多边形的交点个数。
- 该性质反映了Bezier曲线比其特征多边形的波动要小，即：Bezier曲线比特征多边形的折线更光顺。

57

§5.2 Bezier曲线与曲面 (内容提要)

- 5.2.1 Bezier曲线的定义和性质
- 5.2.2 Bezier曲线的递推算法
- 5.2.3 Bezier曲线的拼接
- 5.2.4 Bezier曲线的升阶与降阶
- 5.2.5 Bezier曲面

58

5.2.2 Bezier曲线的递推算法 (1/7)

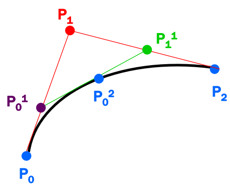
● 如何计算Bezier曲线上的点？

- 使用Bezier曲线方程（计算量较大）
- 使用递推算法

59

5.2.2 Bezier曲线的递推算法 (2/7)

- 设P_0,P_0^2,P_2是一条抛物线上三个不同的点。
- 过点P_0和P_2的两条切线交于P_1点，在P_0^2点的切线分别和P_0P_1、P_2P_1交于点P_0^1和P_1^1，则有如下比例成立：



$$\frac{P_0P_0^1}{P_0^1P_1}=\frac{P_1P_1^1}{P_1^1P_2}=\frac{P_0^1P_0^2}{P_0^2P_1^1}$$

抛物线的三切线定理

60

5.2.2 Bezier曲线的递推算法 (3/7)

- 当P_0和P_2固定时，引入参数t，令上述比值为t : (1-t)，则有：

$$P_0^1 = (1-t)P_0 + tP_1$$
$$P_1^1 = (1-t)P_1 + tP_2$$
$$P_0^2 = (1-t)P_0^1 + tP_1^1$$

  - 当t从0变到1时，第一、二式就分别表示控制二边形的第一条边和第二条边，它们分别是两条一次Bezier曲线。

5.2.2 Bezier曲线的递推算法 (4/7)

- 将第一式和第二式代入第三式，可得：

$$P_0^2 = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

  - 当t从0变到1时，它表示了由三顶点P_0、P_1、P_2三点定义的一条二次Bezier曲线。
  - 这个二次Bezier曲线P_0^2可以定义为分别由前两个顶点(P_0,P_1)和后两个顶点(P_1,P_2)决定的两条一次Bezier曲线的线性组合。

5.2.2 Bezier曲线的递推算法 (5/7)

  - 依此类推，由4个控制点定义的三次Bezier曲线P_0^3可被定义为分别由(P_0,P_1,P_2)和(P_1,P_2,P_3)确定的两条二次Bezier曲线的线性组合。
  - 由(n+1)个控制点P_i(i=0,1,...,n)定义的n次Bezier曲线P_0^n可被定义为分别由前、后n个控制点定义的两条(n-1)次Bezier曲线P_0^{n-1}与P_1^{n-1}的线性组合：

$$P_0^n = (1-t)P_0^{n-1} + tP_1^{n-1} \qquad t \in [0,1]$$

5.2.2 Bezier曲线的递推算法 (6/7)

- 由此得到Bezier曲线的递推计算公式：

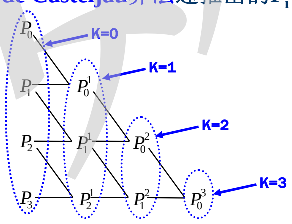
$$P_i^k = \begin{cases} P_i & k = 0 \\ (1-t)P_i^{k-1} + tP_{i+1}^{k-1} & k = 1,2,\dots,n,\ i = 0,1,\dots,n-k \end{cases}$$

—— de Casteljau算法

  - 用这一递推公式，在给定参数下，求Bezier曲线上任一点P(t)非常有效。

5.2.2 Bezier曲线的递推算法 (7/7)

- 当n=3时，de Casteljau算法递推出的P_i^k呈直角三角形。



- 从左向右递推，最右边点P_0^3即为曲线上的点。

§5.2 Bezier曲线与曲面 (内容提要)

- 5.2.1 Bezier曲线的定义和性质
- 5.2.2 Bezier曲线的递推算法
- 5.2.3 Bezier曲线的拼接 (不要求)
- 5.2.4 Bezier曲线的升阶与降阶 (不要求)
- 5.2.5 Bezier曲面

§5.2 Bezier曲线与曲面 (内容提要)

- 5.2.1 Bezier曲线的定义和性质
- 5.2.2 Bezier曲线的递推算法
- 5.2.3 Bezier曲线的拼接
- 5.2.4 Bezier曲线的升阶与降阶
- 5.2.5 Bezier曲面 (了解)

67

5.2.5 Bezier曲面 (1/3)

- Bezier曲面是Bezier曲线的扩展。
- 三次Bezier曲线段由四个控制点确定，三次Bezier曲面片，则由 4 × 4 控制点确定。

$$B=\begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{10} & Q_{20} & Q_{30} \\ Q_{01} & Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{02} & Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{03} & Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

68

5.2.5 Bezier曲面 (2/3)

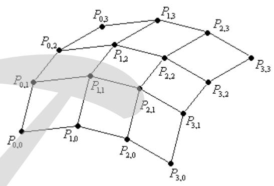
- 设 $P_{ij}(0,1,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,m)$ 为 $(n+1)\times(m+1)$ 个空间点列，则m×n次Bezier曲面定义为：

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \qquad u,v\in[0,1]$$

- 其中 $B_{i,m}(u)=C_m^i u^i(1-u)^{m-i}$ ，$B_{j,n}(v)=C_n^j v^j(1-v)^{n-j}$ 是Bernstein基函数。
- 依次用线段连接点列中相邻两点所形成的空间网格，称之为特征网格。

69

5.2.5 Bezier曲面 (3/3)



- Bezier曲面具有与Bezier曲线类似的性质或者运算。如：对称性、凸包性等等。

70

§5.2 Bezier曲线与曲面 (内容提要)

- 5.2.1 Bezier曲线的定义和性质
- 5.2.2 Bezier曲线的递推算法
- 5.2.3 Bezier曲线的拼接
- 5.2.4 Bezier曲线的升阶与降阶
- 5.2.5 Bezier曲面

71

第五章 曲线与曲面

- §5.1 参数曲线和曲面
- §5.2 Bezier曲线与曲面

72

要求

- 掌握曲线的参数表示方法；
- 掌握**Bezier**曲线的定义，常用低次**Bezier**曲线的矩阵表示方法；
- 理解**Bezier**曲线的性质（包括端点位置、端点切矢量、对称性、凸包性等等）；
- 掌握**Bezier**曲线的递推生成算法。