R2 kapittel 2 Integrasjon

LØSNINGER AV OPPGAVENE I BOKA

2.1

a $N_1 = \frac{5}{1} \cdot f(0) = 5 \cdot (2 \cdot 0 + 1) = 5$

$N_5 = \frac{5}{5} \cdot 1 + \frac{5}{5} \cdot 3 + \frac{5}{5} \cdot 5 + \frac{5}{5} \cdot 7 + \frac{5}{5} \cdot 9 = 25$

b

```
def f(x):
  return 2*x+1

def arealsum(n):
  areal = 0
  bredde = (5 - 0)/n

  for i in range(n):
    hoyde = f(i*bredde)
    areal = areal + hoyde*bredde
  return areal

print("Med fem rektangler blir trappesummen: ",arealsum(5))
print("Med femti rektangler blir trappesummen: ",arealsum(50))
```

c $\lim_{n \to \infty} N_n = \lim_{n \to \infty} \frac{30n - 25}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{30 - \frac{25}{n}}{1} = \frac{30 - 0}{1} = 30$

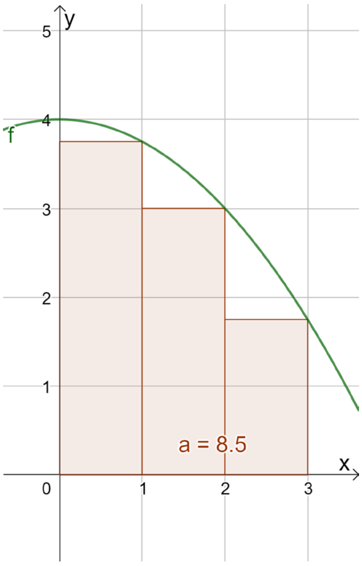
Dette er arealet av området som er avgrenset av koordinataksene, grafen til f og linja $x = 5$.

2.2

a $f(1) \cdot 1 + f(2).1 + f(3) \cdot 1 = \left(-\frac{1}{4} \cdot 1^2 + 4\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 4\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{4} \cdot 3^2 + 4\right) \cdot 1 = \frac{17}{2}$

Dette tilsvarer arealet av de tre rektanglene på figuren.

b



Funksjon

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

Tall

a = SumUnder(f, 0, 3, 3)
→ 8.5

Vi ser at vi får det samme svaret som i oppgave a.

c

a = SumUnder(f, 0, 3, 6)
→ 9.156

Arealet av de seks rektanglene under grafen er 9,16.

d

a = SumUnder(f, 0, 3, 30)
→ 9.636

Arealet av de 30 rektanglene under grafen er 9,64.

e

a = SumOver(f, 0, 3, 3)
→ 10.75

b = SumOver(f, 0, 3, 6)
→ 10.281

c = SumOver(f, 0, 3, 30)
→ 9.861

Arealene av tre, seks og 30 rektangler blir henholdsvis 10,75, 10,28 og 9,86.

f Vi ser at både SumOver og SumUnder gir oss verdier som nærmer seg rundt 9,75 når vi deler opp i flere og flere rektangler. Denne grenseverdien forteller oss størrelsen til arealet av området som er avgrenset av *x*-

aksen, *y*-aksen, grafen til *f* og linja $x = 3$.

2.3

a
$$N_4 = \frac{4}{4}\cdot f(2) + \frac{4}{4}\cdot f(3) + \frac{4}{4}\cdot f(4) + \frac{4}{4}\cdot f(5)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

b
$$Ø_4 = \frac{4}{4}\cdot f(2) + \frac{4}{4}\cdot f(3) + \frac{4}{4}\cdot f(4) + \frac{4}{4}\cdot f(5)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

c Svarene blir like fordi rektanglet i intervallet [1 , 2] i den nedre trappesummen har samme høyde og bredde som rektanglet i intervallet [2 , 6] i den øvre trappesummen. Tilsvarende vil de resterende rektanglene i den nedre trappesummen ha samme høyde og bredde som de resterende rektanglene i den øvre trappesummen.

d

```python
rektangler = 4  # antall rektangler

def f(x):
    return 1 / x

def ovrearealsum(n):
    areal = 0
    bredde = (5 - 1) / n

    for i in range(n):
        hoyde = f(1 + i * bredde)
        areal = areal + hoyde * bredde
    return areal


def nedrearealsum(n):
    areal = 0
    bredde = (5 - 1) / n
    for i in range(n):
        hoyde = f(1 + (i + 1) * bredde)
        areal = areal + hoyde * bredde
    return areal


print("Ø4: ", ovrearealsum(rektangler))
print("N4: ", nedrearealsum(rektangler))
```

2.4

a

$$N_1 = \frac{6}{1} \cdot f(-3) = 6 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{6}{3} \cdot f(-3) + \frac{6}{3} \cdot f(-1) + \frac{6}{3} \cdot f(3) \\ &= 2 \cdot 0 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 0 = 16 \end{aligned}$$

$$Ø_1 = \frac{6}{1} \cdot f(0) = 6 \cdot 9 = 54$$

$$\begin{aligned} Ø_3 &= \frac{6}{3} \cdot f(-1) + \frac{6}{3} \cdot f(0) + \frac{6}{3} \cdot f(1) \\ &= 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 50 \end{aligned}$$

b Vi bruker CAS til å finne grenseverdiene.

1	$f(x) := 9 - x^2$
	$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := -x^2 + 9}$
2	$\text{SumUnder}(f, -3, 3, 10)$
	$\rightarrow$ **30.24**
3	$\text{SumUnder}(f, -3, 3, 100)$
	$\rightarrow$ **35.456**
4	$\text{SumUnder}(f, -3, 3, 1000)$
	$\rightarrow$ **35.946**
5	$\text{SumUnder}(f, -3, 3, 10000)$
	$\rightarrow$ **35.995**

Vi ser her at grenseverdien for den nedre trappesummen ser ut til å være 36.

Vi gjør så det samme med den øvre trappesummen.

1	$f(x) := 9 - x^2$
	$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := -x^2 + 9}$
2	$\text{SumOver}(f, -3, 3, 10)$
	$\rightarrow$ **41.04**
3	$\text{SumOver}(f, -3, 3, 100)$
	$\rightarrow$ **36.536**
4	$\text{SumOver}(f, -3, 3, 1000)$
	$\rightarrow$ **36.054**
5	$\text{SumOver}(f, -3, 3, 10000)$
	$\rightarrow$ **36.005**

Vi ser at denne grenseverdien også ser ut til å være 36.

2.5

a Vi finner arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 3$. Dette området har form som et trapes. Arealformelen for trapes gir

$$\frac{(3+2) \cdot 2}{2} = 5 .$$

Altså er $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$.

b Vi finner arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 7$. Dette området har form som en trekant. Arealformelen for trekant gir

$$\frac{6 \cdot 3}{2} = 9 .$$

Altså er $\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$.

c Vi finner arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = -1$ og $x = 1$. Dette området har form som et trapes. Arealformelen for trapes gir

$$\frac{(4+3)\cdot 2}{2} = 7 .$$

Altså er $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$.

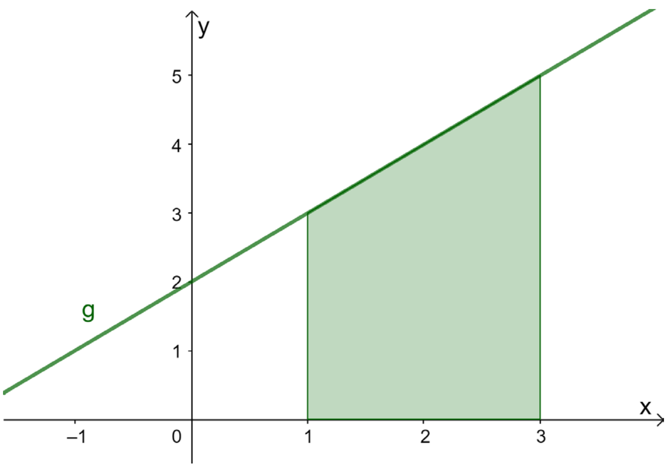
d Vi finner arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 7$. Dette området har form som en trekant. Arealformelen for trekant gir

$$\frac{7 \cdot 3{,}5}{2} = 12{,}25 .$$

Altså er $\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 12{,}25$.

2.6

a



b Området er det grønne trapeset i figuren.

c $\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (x+2)\,\mathrm{d}x$

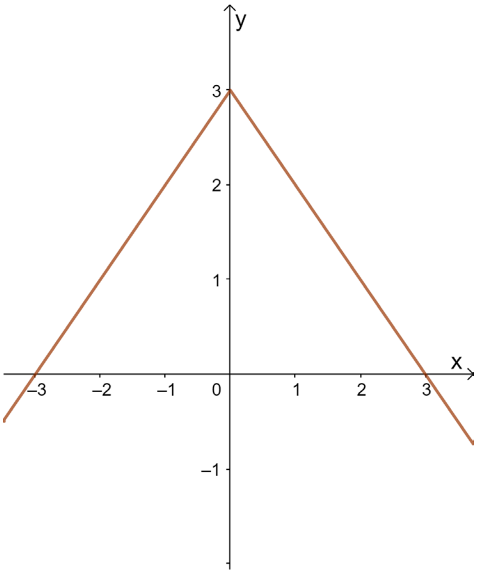
2.7

a Det bestemte integralet er det samme som arealet avgrenset av grafen og x-aksen. Dette er arealet av halvsirkelen. Siden radien til sirkelen er 3, så er arealet gitt ved $\frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$

b Dette integralet gir oss arealet av en kvart sirkel. Altså er verdien halvparten av svaret i oppgave a.

$$\int_4^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{9\pi}{2}}{2} = \frac{9\pi}{4}$$

2.8
Vi starter med å tegne grafen til *f*.



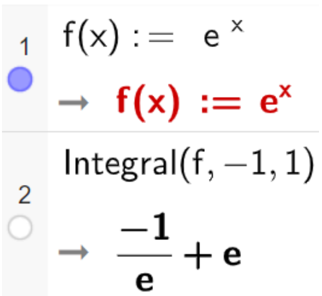
Vi ser at området som er avgrenset av grafen til *f*, *x*-aksen og linjene $x = -3$ og $x = 3$, er en trekant. Arealet av denne trekanten er gitt ved

$$\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

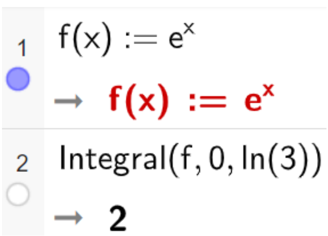
Dermed er $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 9$.

2.9

a Vi finner $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ ved å bruke CAS.



b Vi finner $\int_{0}^{\ln 3} f(x)\,dx$ ved å bruke CAS.



c Vi finner $\int_1^{l3} f(x)\,\mathrm{d}x$ ved å bruke CAS.

1 $f(x) := e^x$
→ $f(x) := e^x$

2 Integral(f, 1, 2)
→ $-e + e^2$

3 \$2
≈ **4.671**

Grafen til *f*, *x*-aksen, og de to vertikale linjene $x = 1$ og $x = 2$ avgrenser et område med areal 4,671.

2.10

a

1 $I := \text{Integral}\left(\sqrt{1 - x^2}, -1, 1\right)$
→ $I := \frac{\pi}{2}$

b Hvis vi tegner grafen til integranden, vil vi få den øvre halvdelen av enhetssirkelen. Integralet gir oss arealet mellom *x*-aksen og grafen. Dette vil være arealet av den øvre halvdelen av enhetssirkelen. Siden radien til enhetssirkelen er 1, så er arealet lik $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Arealet av halvsirkelen, og dermed også verdien av integralet, er halvparten av dette.

2.11

a Vi bruker CAS til å finne trappesummen.

1 $f(x) := \frac{1}{x^2}$
→ $f(x) := \frac{1}{x^2}$

2 SumUnder(f, 1, 4, 3)
→ **0.4236**

Arealet av de tre rektanglene er 0,424.

b Når rektanglene blir smalere, vil de dekke mer og mer av arealet avgrenset av grafen til *f*, *x*-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 4$. Grenseverdien av følgen svarer til det bestemte integralet $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, som vi finner med CAS.

3 $\int_1^4 f\,\mathrm{d}x$
→ $\frac{3}{4}$

Grenseverdien er $\frac{3}{4}$.

2.12

a Vi finner $\int_3^9 g(x)\,\mathrm{d}x$ ved å bruke CAS.

1 $g(x) := x^2 + k\,x - 1$

$\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := x^2 + k\,x - 1}$

2 Integral(g, 3, 9)

$\rightarrow$ $\mathbf{36\,k + 228}$

b Vi finner k ved å løse likningen i CAS.

3 $\$2 = 0$

Løs: $\left\{\mathbf{k = \frac{-19}{3}}\right\}$

4 $\$3$

$\approx$ $\mathbf{\{k = -6.33333\}}$

2.13

1 $h(x) := \ln(x) + 3\,x$

$\rightarrow$ $\mathbf{h(x) := \ln(x) + 3\,x}$

2 $\int_1^b h\,dx$

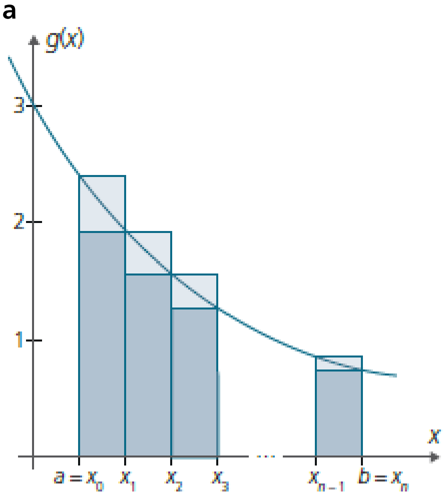
$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{3\,b^2 + 2\,b\,\ln(b) - 2\,b - 1}{2}}$

3 $\$2 = 2$

NLøs: $\mathbf{\{b = 1.5034\}}$

2.14

a



b Bredden av rektanglene på figuren er alle $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

For øvre trappesum er høyden i rektanglene $g(x_0), g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{n-1})$.

Øvre trappesum er derfor

$$Ø_n = g(x_0)\cdot\Delta x + g(x_1)\cdot\Delta x + g(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + g(x_{n-1})\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\cdot\Delta x$$

For nedre trappesum er høyden i rektanglene $g(x_1), g(x_2), g(x_3), \dots, g(x_i)$.

Nedre trappesum er derfor

$$N_n = g(x_1)\cdot\Delta x + g(x_2)\cdot\Delta x + g(x_3)\cdot\Delta x + \cdots + g(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\cdot\Delta x$$

c Siden Δx er gitt ved $\dfrac{b-a}{n}$, blir bredden av rektanglene mindre og mindre når antall rektangler øker, $\Delta x \to 0$ når $n \to \infty$.

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\cdot\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\cdot\Delta x \quad , \quad \text{der } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

2.15

a Vi finner arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 3$. Dette området har form som en trekant. Arealformelen for trekant gir

$$\frac{3\cdot 3}{2} = 4{,}5$$

Altså er $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4{,}5$.

b Vi finner arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 2$ og $x = 3$. Dette området har form som en trekant. Arealformelen for trekant gir

$$\frac{1\cdot 1}{2} = 0{,}5$$

Altså er $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$.

c Vi finner arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 2$. Dette området har form som et trapes. Arealformelen for trapes gir

$$\frac{(2+1)\cdot 1}{2} = 1{,}5$$

Altså er $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}5$.

2.16

a Vi finner $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ved å bruke CAS.

1	$f(x) := e^x$ $\rightarrow\ \mathbf{f(x) := e^x}$
2	Integral(f, 0, 2) $\rightarrow\ \mathbf{e^2 - 1}$

b Vi finner $\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ ved å bruke CAS.

1	$g(x) := \frac{5}{x}$ $\rightarrow\ \mathbf{g(x) := \frac{5}{x}}$
2	Integral(g, 1, 3) $\rightarrow\ \mathbf{5\ \ln(3)}$

2.17

For $f(x) = e^x$ finner vi en tilnærmet verdi ved å bruke tusen rektangler.

```python
from pylab import *

a = 0
b = 2    # integrasjongrensene

n = 1000    # antall rektangler

def f(x):
    return exp(x)

def rektangelsum(n):
    areal = 0
    bredde = (b - a) / n

    for i in range(n):
        hoyde = f(a + i * bredde)
        areal = areal + hoyde * bredde
    return areal


print("Rektangelsummen er", rektangelsum(n))
```

For $g(x) = \frac{5}{x}$ finner vi en tilnærmet verdi ved å bruke tusen rektangler.

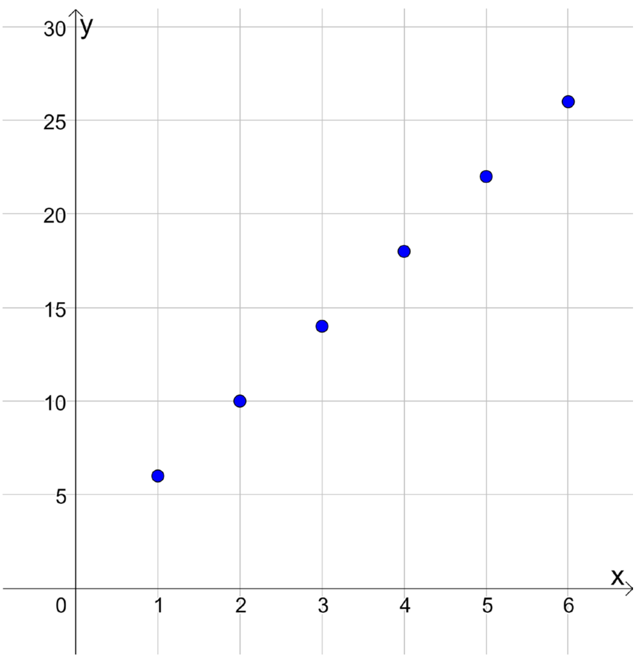
```
a = 1
b = 3    # integrasjongrensene

n = 1000    # antall rektangler

def g(x):
    return 5 / x

def rektangelsum(n):
    areal = 0
    bredde = (b - a) / n

    for i in range(n):
        hoyde = g(a + i * bredde)
        areal = areal + hoyde * bredde
    return areal


print("Rektangelsummen er", rektangelsum(n))
```

2.18

a Vi regner først ut y-koordinatene:

$a_1 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$
$a_2 = 4 \cdot 2 + 2 = 10$
$a_3 = 4 \cdot 3 + 2 = 14$
$a_4 = 4 \cdot 4 + 2 = 18$
$a_5 = 4 \cdot 5 + 2 = 22$
$a_6 = 4 \cdot 6 + 2 = 26$

Dermed har vi koordinatene til alle punktene og kan markere dem i et koordinatsystem.



b

1	$a(n) := 4n + 2$
	$\rightarrow$ $a(n) := 4\,n + 2$
2	$\text{sum}(a(i), i, 1, 6)$
	$\rightarrow$ 96
3	$\text{Integral}(a, 1, 6)$
	$\rightarrow$ 80

c Integralet gir oss arealet av området som er avgrenset av x-aksen, grafen til a og linjene $x = 1$ og $x = 6$. Summen gir oss den øvre trappesummen for området avgrenset av koordinataksene, grafen til a og linja $x = 6$.

2.19

Her setter vi arealet lik det bestemte integralet. Vi bruker CAS til å løse likningen.

1	$f(x) := \frac{3}{2} x^2$
	$\rightarrow$ $f(x) := \frac{3}{2} x^2$
2	$\int_1^k f \, dx$
	$\rightarrow$ $\frac{k^3 - 1}{2}$
3	$\$2 = \frac{7}{2}$
	Løs: $\{k = 2\}$

Her har vi antatt at k er større enn 1. Vi kan også finne løsningen for k mindre enn 1:

4	$\int_k^1 f \, dx$
	$\rightarrow$ $\frac{-k^3 + 1}{2}$
5	$\$4 = \frac{7}{2}$
	Løs: $\left\{k = -\sqrt[3]{6}\right\}$

2.20

Her setter vi arealet lik det bestemte integralet. Vi bruker CAS til å løse likningen.

1 $f(x) := e^{kx}$

$\rightarrow \ f(x) := e^{kx}$

2 $\int_0^1 f \, dx$

$\rightarrow \ \dfrac{e^k - 1}{k}$

3 $\$2 = \pi$

NLøs: $\{k = 1.9745\}$

Verdien av *k* er 1,975.

2.21

a Her må vi endre de tre første linjene.

```
1 a = 1   # nedre grense i intervallet
2 b = 5   # øvre grense i intervallet
3 n = 100   # antall rektangler
```

Når vi kjører programmet, får vi 25,01.

b Her må vi endre de to første linjene fra oppgave a.

```
1 a = -3   # nedre grense i intervallet
2 b = 1   # øvre grense i intervallet
3 n = 100   # antall rektangler
```

Når vi kjører programmet, får vi 25,56.

c Her skal vi gjøre en høyretilnærming i stedet for venstretilnærming. I tillegg til at vi setter n = 100 i programmet, kan vi gjøre en av følgende endringer:

Alternativ 1:
Vi endrer løkken i linje 11:

```
11 for i in range(1, n+1):
```

Alternativ 2:
Vi endrer i linje 12:

```
12     summen = summen + f(a + (i + 1)*delta_x) * delta_x
```

Når vi kjører programmet, får vi 25,56.

d Med CAS kan vi finne verdien av integralet eksakt:

1 $\text{Integral}\left(x^2 - 2x + 2, 1, 5\right)$

$\rightarrow \dfrac{76}{3}$

2 $\$1$

≈ 25.333

Nå kan vi ta utgangspunkt i programmet i oppgave a eller c og øke antallet rektangler manuelt til vi kommer nærme nok. Hvis vi setter antallet rektangler til 1000, n = 1000, får vi 25,3.

Alternativt, hvis vi vil gjøre det litt mer elegant, kan vi lage et program som bruker både høyre- og venstretilnærming og øke antallet rektangler gradvis til differansen mellom de to er tilstrekkelig liten. Vi lar så svaret være gjennomsnittet av de to verdiene.

```
from pylab import *
a = 1                     # nedre grense i intervallet
b = 5                     # øvre grense i intervallet
n = 100                    # antall rektangler
noyaktighet = 0.05        #angir hvor nøyaktig svaret skal være

hoyresum = 0
venstresum = 10

def f(x):
  return x**2 - 2*x + 2

while abs(hoyresum - venstresum) > noyaktighet:
  n = n + 1           # øker antall rektangler
  delta_x = (b - a)/n   # rektangelbredden
  hoyresum = 0
  for i in range(1, n+1):     # i fra og med 1 til og med n
    hoyresum = hoyresum + f(a + i*delta_x) * delta_x
  venstresum = 0
  for i in range(n):     # i fra og med 0 til og med n-1
    venstresum = venstresum + f(a + i*delta_x) * delta_x
print(round((hoyresum + venstresum)/2, 1))
```

Når vi kjører programmet, får vi 25,3.

2.22

a Vi justerer eksemplet slik at vi får rett funksjon, rett intervall, og at det blir en høyretilnærming.

```
from pylab import *
a = -2                      # nedre grense i intervallet
b = 2                     # øvre grense i intervallet
n = 10                    # antall rektangler

def f(x):
  return sqrt(4 - x**2)

summen = 0
delta_x = (b - a)/n    # rektangelbredden

for i in range(1 , n+1):     # i fra og med 0 til og med n-1
  summen = summen + f(a + i*delta_x) * delta_x

print(summen)
```

Programmet skriver ut

```
6.074097657767103
```

Tilnærmingsverdien for integralet $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ er 6,074.

Vi bruker det samme programmet, men endrer a til a = 0.
Programmet skriver ut

```
2.9045183262483176
```

Tilnærmingsverdien for integralet $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ er 2,905.

b Vi justerer programmet i oppgave a slik at det blir venstrejustert.

```
from pylab import *
a = -2                  # nedre grense i intervallet
b = 2                  # øvre grense i intervallet
n = 10                 # antall rektangler

def f(x):
  return sqrt(4 - x**2)

summen = 0
delta_x = (b - a)/n    # rektangelbredden

for i in range(n):     # i fra og med 0 til og med n-1
  summen = summen + f(a + i*delta_x) * delta_x

print(summen)
```

Programmet skriver ut

```
6.074097657767103
```

Tilnærmingsverdien for integralet er 6,074.

Vi endrer a til a = 0.
Programmet skriver ut

```
3.304518326248318
```

c Vi får samme svar i oppgave a og b når vi ser på intervallet [–2 , 2]. Dette skyldes at funksjonen er symmetrisk i intervallet. Dersom vi tegner grafen med rektanglene, så blir figurene speilbilder av hverandre med høyretilnærming og venstretilnærming.
Ser vi derimot på intervallet [0, 2] får vi en større forskjell. Dette er fordi alle rektanglene blir liggende under grafen i det ene tilfellet (nedre trappesum), mens de ligger over i det andre tilfellet (øvre trappesum).

d Arealet av halvsirkelen er eksakt $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 = 2\pi$. Da er også $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \approx 6{,}28$.

Vi kan da ta utgangspunkt i programmet fra oppgave a eller b og justere antallet rektangler manuelt til vi finner integralet med tilstrekkelig nøyaktighet. Alternativt kan vi lage et program som bruker både høyre- og venstretilnærming og øke antall rektangler gradvis til differansen mellom de to er tilstrekkelig liten. Vi lar så svaret være gjennomsnittet av de to verdiene. Men som vi så i oppgave c, så vil de to verdiene alltid bli like dersom vi bruker hele intervallet. Vi regner derfor ut riemannsummen for bare halve intervallet. Fra –2 til 0 er funksjonen voksende. Derfor vil tilnærmingene gi forskjellige verdier.

```python
from pylab import *
a = -2                   # nedre grense i intervallet
b = 2                   # øvre grense i intervallet
n = 100                  # antall rektangler
noyaktighet = 0.05      #angir hvor nøyaktig svaret skal være

hoyresum = 0
venstresum = 10

def f(x):
    return sqrt(4 - x**2)

while abs(hoyresum - venstresum) > noyaktighet:
    n = n + 1            # øker antall rektangler
    delta_x = (b - a)/n    # rektangelbredden
    hoyresum = 0
    for i in range(1, n+1):     # i fra og med 1 til og med n
        hoyresum = hoyresum + f(a + i*delta_x) * delta_x
    venstresum = 0
    for i in range(n):     # i fra og med 0 til og med n-1
        venstresum = venstresum + f(a + i*delta_x) * delta_x
print(round((hoyresum + venstresum)/2, 1))
```

Når vi kjører programmet, får vi 6,3.

2.23

a

1 $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

$\approx$ **1.148**

b

```python
a = 0   # nedre grense i intervallet
b = 1   # øvre grense i intervallet
n = 10   # antall rektangler

def f(x):
    return (1 + x**2)**0.5

summen = 0
delta_x = (b-a)/n

for i in range(n):   # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + i * delta_x) * delta_x

print(round(summen, 2))
```

```
1.128
>>>
```

c Vi øker n til de to første desimalene blir riktige, det vil si at svaret skal bli 1,15.

Med venstretilnærming varierer vi n og ser at med n lik 73 blir svaret 1,14, mens med n lik 74 blir svaret 1,15. Intervallet må altså deles opp i minst 74 deler for at svaret skal bli riktig med to desimalers nøyaktighet.

2.24

Alternativ 1:

Vi endrer på linje 9 i programmet. I stedet for range(n -1) bruker vi range(1, n).

```
1  # lister med x-verdier og funksjonsverdier
2  #x = [0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4]
3  #f = [13.1, 16.3, 0, 8.2, 19.7, 24.8, 28.1, 27.3, 21.0]
4
5  from pylab import *
6  data = loadtxt("verditabell.txt")
7  x=data[:,0]
8  f=data[:,1]
9
10 delta_x = x[1] - x[0]     # rektangelbredde
11 n = len(x)                # antall x-verdier i lista
12 summen = 0
13
14 for i in range(1, n):
15   summen = summen + f[i] * delta_x
16
17 print(round(summen, 1))
```

Alternativ 2:

Vi endrer på linje 10 i programmet. I stedet for *f*(*i*) bruker vi *f*(*i*+1).

```
1  # lister med x-verdier og funksjonsverdier
2  x = [0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4]
3  f = [13.1, 16.3, 0, 8.2, 19.7, 24.8, 28.1, 27.3, 21.0]
4
5  delta_x = x[1] - x[0]    # rektangelbredde
6  n = len(x)         # antall x-verdier i lista
7  summen = 0
8
9  for i in range(n-1):
10     summen = summen + f[i+1] * delta_x
11
12 print(round(summen, 1))
```

```
72.7
>>>
```

Tilnærmingsverdien med høyretilnærming er 72,7.

2.25

a

```
a = 1 # nedre grense i intervallet
b = 5 # øvre grense i intervallet
n = 20 # antall rektangler

def f(x):
    return x**(2*x)

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # rektangelbredden

for i in range(n): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + (i+1/2)*delta_x) * delta_x

print(round(summen,2))
```

```
1819162.15
>>>
```

Midtpunktstilnærming gir en verdi på 1 819 162.

b Vi endrer programmet slik at det gir oss en venstretilnærming.

```
a = 1 # nedre grense i intervallet
b = 5 # øvre grense i intervallet
n = 20 # antall rektangler

def f(x):
    return x**(2*x)

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # rektangelbredden

for i in range(n): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + i*delta_x) * delta_x

print(round(summen,2))
```

```
1091567.0
>>>
```

Venstretilnærming gir en verdi på 1 091 567.

Vi endrer så programmet slik at det gir oss en høyretilnærming.

```
a = 1 # nedre grense i intervallet
b = 5 # øvre grense i intervallet
n = 20 # antall rektangler

def f(x):
    return x**(2*x)

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # rektangelbredden

for i in range(n): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + (i+1)*delta_x) * delta_x

print(round(summen,2))
```

```
3044691.8
>>>
```

Høyretilnærming gir en verdi på 3 044 692.

Vi ser at det blir veldig forskjellige svar. Det er derfor ikke nok med bare 20 rektangler. Midtpunktstilnærmingen gir oss en verdi mellom de to andre metodene.

2.26

a

```python
a = -2 # nedre grense i intervallet
b = 2 # øvre grense i intervallet
n = 10 # antall rektangler

def f(x):
    return (4-x**2)**0.5

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # rektangelbredden

for i in range(n): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + (i+1/2)*delta_x) * delta_x

print(round(summen,2))
```

```
6.34
>>>
```

Midtpunktstilnærming gir verdien 6,34.

Midtpunktstilnærmingen gir oss en verdi som er større enn de to andre metodene (6,07).

b

```python
a = 0  # nedre grense i intervallet
b = 1  # øvre grense i intervallet
n = 4  # antall rektangler

def f(x):
    return (1 + x**2)**0.5

summen = 0
delta_x = (b-a)/n

for i in range(n):  # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + (i+1/2) * delta_x) * delta_x

print(round(summen, 2))
```

```
1.15
>>>
```

Midtpunktstilnærming gir verdien 1,15.

Denne metoden ga oss en tilnærming som ble riktig med to desimaler selv med bare fire rektangler.

2.27

$$\int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(0)+f(8)+2\cdot\sum_{i=1}^{7} f(x_i)\right)$$
$$=\frac{1}{2}(27+43+2\cdot(12+0+16+39+51+57+54))$$
$$=264$$

2.28

a

```
a = 1                   # nedre grense i intervallet
b = 2                   # øvre grense i intervallet
n = 5                   # antallet trapeser

def f(x):
  return 1/(x+x**2)

def trapesmetoden(a, b, n):
  summen = 0
  dx = (b - a)/n          # trapesbredden

  for i in range(1, n):         # i fra 1 til og med n - 1
    summen = summen + f(a + i*dx)
  trapessummen = dx/2*(2*summen+f(a)+f(b))
  return trapessummen

print(round(trapesmetoden(a, b, n), 4))
```

Vi kjører programmet og får verdien 0,2897.

```
0.2897
>>>
```

b

```
a = 1                   # nedre grense i intervallet
b = 2                   # øvre grense i intervallet
n = 5                   # antallet retangler

def f(x):
  return 1/(x+x**2)

summen = 0
dx = (b - a)/n      #rektangelbredden

for i in range(n):
    summen = summen + f(a + (i+1/2)*dx)*dx

print(round(summen, 4))

```

Vi kjører programmet og får verdien 0,2867.

```
0.2867
>>>
```

c

1 Integral$\left(\frac{1}{x+x^2}, 1, 2\right)$

$\rightarrow \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

2 \$1

$\approx$ **0.2877**

Vi ser at trapesmetoden ligger nærmest verdien vi finner i CAS.

2.29

a

1 Integral$\left(\frac{1}{x}, 1, e\right)$

$\rightarrow$ **1**

b Vi bruker trapesmetoden for å bestemme integralene med 100 trapeser.

```
1  a = 1
2  b = 2.7
3  n = 100
4
5  def f(x):
6    return 1/x
7
8  def trapesmetoden(a, b, n):
9    summen = 0
10   dx = (b - a)/n
11
12   for i in range(1,n):
13     summen = summen + f(a + i*dx)
14     trapessummen = dx/2*(2*summen+f(a)+f(b))
15   return trapessummen
16
17 print(round(trapesmetoden(a, b, n),4))
```

Resultatet blir:

0.9933

Dette integralet er mindre enn 1, så e må være større enn 2,7.

Så endrer vi den øvre grensen i linje 2 i programmet til 2,8.

```
1  a = 1
2  b = 2.8
3  n = 100
```

Resultatet blir

1.0296

Dette viser at e må være mindre enn 2,8.

2.30

a

1 Integral$\left(\sqrt{x}, 0, 1\right)$

$\rightarrow \frac{2}{3}$

b **1**

```
1  a = 0 # nedre grense i intervallet
2  b = 1 # øvre grense i intervallet
3  n = 100 # antall rektangler
4
5  def f(x):
6      return x**0.5
7
8  summen = 0
9  delta_x = (b - a)/n # rektangelbredden
10
11 for i in range(n): # i fra 0 til og med n-1
12     summen = summen + f(a + i*delta_x) * delta_x
13
14 print(round(summen,3))
```

```
0.661
>>>
```

Venstretilnærming gir verdien 0,661.

2 Vi endrer til høyretilnærming ved å endre på linje 12.

```
11 for i in range(n): # i fra 0 til og med n-1
12     summen = summen + f(a + (i+1)*delta_x) * delta_x
```

```
0.671
>>>
```

Høyretilnærming gir verdien 0,671.

2.31

a

```
# lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50]
f = [3.43, 2.17, 0.38, 1.87, 2.65, 2.31, 1.97]

delta_x = x[1] - x[0]    # rektangelbredde
n = len(x)          # antall x-verdier i lista
summen = 0

for i in range(n-1):
    summen = summen + f[i] * delta_x

print(round(summen, 2))
```

```
3.2
>>>
```

Med venstretilnærming får vi verdien 3,2.

For å bytte til en høyretilnærming endrer vi på linje 10 i programmet.

```
9  for i in range(n-1):
10     summen = summen + f[i+1] * delta_x
```

```
2.84
>>>
```

Med høyretilnærming får vi verdien 2,84.

b Vi finner funksjonsverdiene ved å lese av grafen.

Vi bruker så både høyre- og venstretilnærming og lar svaret være gjennomsnittet av de to svarene.

(Dette er i realiteten trapesmetoden.)

```
# lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12]
f = [0, 7, 9.5, 6.5, 3.3, 4.3, 10]

delta_x = x[1] - x[0]   # rektangelbredde
n = len(x)              # antall x-verdier i lista
summenV = 0
summenH = 0

for i in range(n-1):
    summenV = summenV + f[i] * delta_x
    summenH = summenH +f[i+1] * delta_x

summen =(summenV + summenH) / 2

print(round(summen, 2))
```

```
71.2
>>>
```

Verdien av integralet er omtrent 71.

2.32

```
while i < n:
    summen = summen + f(a + i * delta_x) * delta_x
    i = i + 1
```

2.33

```python
a = 0
b = 1
n = 10000

def f(x):
  return 4/(1 + x**2)

def trapesmetoden(a, b, n):
  summen = 0
  dx = (b - a)/n

  for i in range(1,n):
    summen = summen + f(a + i*dx)
    trapessummen = dx/2*(2*summen+f(a)+f(b))
  return trapessummen

print(round(trapesmetoden(a, b, n),4))
```

Når vi kjører programmet, får vi svaret 3,1416, så det er riktig med tre desimalers nøyaktighet.

2.34

```python
from pylab import *

b = 0
delta_x = 0.1 #rektangelbredde

def f(x):
    return 100 / (1 + 2 * exp(-0.05*x))

summen = 0

while summen < 9999:
    summen = summen + f(b) * delta_x
    b = b + delta_x

print(round(b,2))
```

Dette programmet gir svaret 122,0.

Vi kontrollerer svaret med CAS.

1 $\int_0^b \frac{100}{1+2\,e^{-0.05x}}\,dx$

$\rightarrow\ -2000\ \ln(3)+2000\ \ln\left(e^{\frac{1}{20}b}+2\right)$

2 $\$2 = 9999$

Løs: $\left\{b = 20\ \ln\left(3\ e^{\frac{9999}{2000}}-2\right)\right\}$

3 $\$3$

$\approx\ \{b = 121.8722\}$

2.35

a Vi bruker CAS til å bestemme integralet.

1 $v(t) := 9.8t$

$\rightarrow\ v(t) := \frac{49}{5}t$

2 Integral(v, 0, 1)

$\rightarrow\ \frac{49}{10}$

3 \$2

$\approx\ 4.9$

Svaret forteller oss at Nanna har falt 4,9 meter i løpet av det første sekundet.

b Vi bruker CAS for å løse likningen.

4 $\int_0^x v\,dx = 10$

Løs: $\left\{x = \frac{-10}{7}, x = \frac{10}{7}\right\}$

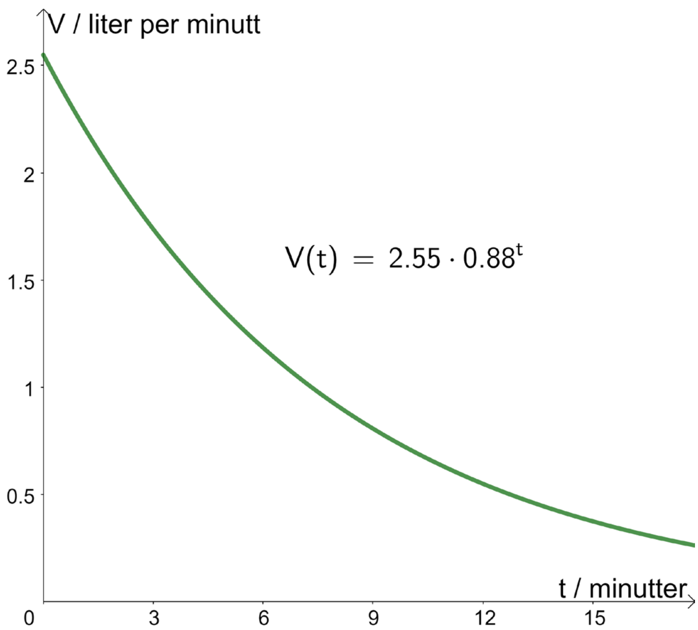
5 \$4

$\approx\ \{x = -1.429, x = 1.429\}$

Siden x er større enn null, er løsningen x = 1,4. Det forteller oss at Nanna treffer vannet etter 1,4 sekunder.

2.36

a



b Enheten til arealet er produktet av enhetene på aksene: minutter·(liter per minutt) = liter.

c Vi bruker CAS.

1	V(t) $\rightarrow \frac{51}{20}\left(\frac{22}{25}\right)^{t}$
2	$\int_0^{10} V \, dx$ $\approx$ **14.392**

Det renner ut omtrent 14,4 liter de første 10 minuttene.

d Vi antar at etter uendelig lang tid har alt vannet rennet ut.

3	$\int_0^{\infty} V \, dx$ $\approx$ **19.948**

Det var omtrent 19,9 liter vann i tanken.

2.37

a Strekningen som regndråpen faller det første sekundet, er gitt ved $s(t)=\int_0^1 v(t)\,dt$. Dette integralet bestemmer vi i CAS.

1	$v(t) := 9.5(1 - e^{-1.6t})$ $\rightarrow v(t) := \frac{19}{2}\left(-e^{\frac{-8}{5}t}+1\right)$
2	Integral(v, 0, 1) $\rightarrow \frac{95 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{e^8}} + 57}{16}$
3	\$2 $\approx$ **4.761**

Regndråpen faller 4,8 meter i løpet av det første sekundet.

b Strekningen som regndråpen faller det første sekundet, er gitt ved $s(t)=\int_2^3 v(t)\,dt$. Dette integralet bestemmer vi i CAS.

4	Integral(v, 2, 3) $\rightarrow \frac{95\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e^8}}\right)^3 - 95\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e^8}}\right)^2 + 152}{16}$
5	\$4 $\approx$ **9.307**

Regndråpen faller 9,3 meter i løpet av det tredje sekundet.

c Strekningen som regndråpen faller det første sekundet, er gitt ved $s(t)=\int_4^5 v(t)\,\mathrm{d}t$. Dette integralet bestemmer vi i CAS.

6 $\int_4^5 \mathrm{v}\,\mathrm{dx}$

$\rightarrow \dfrac{152\,\sqrt[5]{e^8}^{5} - 95\,\sqrt[5]{e^8} + 95}{16\,\sqrt[5]{e^8}^{5}}$

7 $6

$\approx$ **9.492**

Regndråpen faller 9,5 meter i løpet av det femte sekundet.

d Farten øker over tid, men vil nærme seg og stabilisere seg på 9,5 m/s.

2.38

Vi finner farten ved forskjellige tidspunkter ved å lese av grafen. Deretter bruker vi trapestilnærming for å finne den tilbakelagte strekningen.

```
# lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
f = [12, 14, 17, 21, 23, 20, 14, 11, 11, 14, 16]

delta_x = x[1] - x[0]    # trapesbredde
n = len(x)          # antall x-verdier i lista
summenV  = 0
summenH  = 0

for i in range(n-1):
    summenV = summenV + f[i] * delta_x
    summenH = summenH +f[i+1] * delta_x

summen = delta_x / 2 * (f[0] + f[n-1])

for i in range(1,n-1,1):
    summen = summen + f[i] * delta_x
```

```
159.0
>>>
```

Ubåten tilbakelegger en strekning på omtrent 160 km i løpet av de 10 timene.

2.39

a I intervallet 0 til 1 er funksjonen positiv, så arealet er gitt ved $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Mellom 1 og 2 er funksjonen negativ. Her er derfor arealet av området avgrenset av grafen til f og x-aksen gitt ved $-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Til sammen er arealet av det markerte området gitt ved $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, det vil si alternativ nummer 3.

b I intervallet 0 til 1 er funksjonen negativ, så arealet er gitt ved $-\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Mellom 1 og 2 er funksjonen positiv. Her er derfor arealet av området avgrenset av grafen til g og x-aksen gitt ved $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Til sammen er arealet av det markerte området gitt ved $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2.40

a Funksjonsuttrykket kan faktoriseres til $f(x) = x(x-2)$. Vi ser da at nullpunktene er 0 og 2. Siden andregradsleddet er positivt, så vil grafen til f ha et bunnpunkt. Grafen ligger derfor under x-aksen i hele intervallet $\langle 0\,,2\rangle$, og da blir integralet negativt.

b Vi vet at grafen krysser førsteaksen for $x = 2$. Området er altså delt i to deler, der den ene delen har arealet $-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ og den andre har arealet $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Vi finner det samlede arealet ved å bruke CAS.

1 $f(x) := x^2 - 2x$

→ $\mathbf{f(x) := x^2 - 2x}$

2 $\int_2^4 f\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f\,\mathrm{d}x$

→ $\mathbf{8}$

2.41

Vi bruker CAS til å finne nullpunktene til funksjonen. Deretter finner vi integralet mellom nullpunktene.

1 $f(x) := x^2 - 6x + 8$

→ $\mathbf{f(x) := x^2 - 6x + 8}$

2 Nullpunkt(f)

→ $\mathbf{\{x = 2, x = 4\}}$

3 Integral(f, 2, 4)

→ $\mathbf{\frac{-4}{3}}$

4 |$3|

→ $\mathbf{\frac{4}{3}}$

Siden integralet ble negativt, er arealet lik absoluttverdien av integralet.

Arealet av flatestykket er $\frac{4}{3}$.

2.42

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 = 4{,}8 - 0{,}8 + 2 = 6$$

2.43

a

1	$f(x) := x^3 - x^2 - 6x$
	$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := x^3 - x^2 - 6\,x}$
2	$g(x) := \lvert f(x)\rvert$
	$\rightarrow\ \mathbf{g(x) := \lvert x^3 - x^2 - 6\,x\rvert}$
3	Integral(f, −2, 3)
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{-125}{12}}$
4	Integral(g, −2, 3)
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{253}{12}}$

b Vi må først finne nullpunktene, og så finne de bestemte integralene mellom integrasjonsgrensene og nullpunktene innenfor intervallet.

5	$f(x) = 0$
	Løs: $\mathbf{\{x = -2, x = 0, x = 3\}}$
6	Integral(f, −2, 0)
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{16}{3}}$
7	Integral(f, 0, 3)
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{-63}{4}}$
8	\$6 − \$7
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{253}{12}}$

Her ser vi at det ene integralet ble negativt. Vi må derfor trekke fra denne verdien for å få arealet.

Arealet av området er $\frac{253}{12}$.

c Vi ser at svaret i oppgave b ble det samme som integralet av *g*, og ikke integralet av *f*. Dette er fordi *f* er negativ i deler av intervallet. Den raske måten å finne arealet i oppgave b hadde derfor vært å regne ut

$$\int_{-2}^{3} \lvert f(x)\rvert\,dx.$$

2.44

a Området mellom grafen, førsteaksen og linja x = 11 har form som en trekant med *tilnærmet* areal
$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$.

b I intervallet [5 , 10] avgrenser grafen og førsteaksen et område med form som en trekant med areal
$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$. Grafen ligger under førsteaksen, og integralet er derfor negativt med absoluttverdi lik arealet av området. Dermed er $\int_5^{10} f(x)\,dx = -5$.

I intervallet [0 , 5] avgrenser grafen og koordinataksene et område med form som en trekant med areal
$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$. Grafen ligger over førsteaksen, og integralet er derfor likt arealet av området.

Området over førsteaksen har altså like stort areal som området under førsteaksen i intervallet [0 , 10]. Da blir integralet $\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{5} f(x)\,dx - \int_5^{10} f(x)\,dx = 5 - 5 = 0$.

c Hvis integralet skal bli null, må det være et like stort areal over som under førsteaksen. Dette vil skje hvis b er lik 6. Da får vi to kongruente trekanter på hver sin side av førsteaksen.

d Hvis integralet skal bli størst mulig, må vi ha mest mulig areal over førsteaksen, og minst mulig under. Dersom b er lik 5, så får vi med hele området over førsteaksen samtidig som vi ikke tar med noe under førstaksen.

2.45

a $F(2) = \int_0^{2} f(x)\,dx = 2 \cdot (-2) = -4$

b $F(9) = \int_0^{9} f(x)\,dx = \frac{(5+7) \cdot (-2)}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = -10$

c Fram til x = 7 synker verdien av integral, deretter øker verdien. F har derfor en minimalverdi for x = 7.

$F(7) = \frac{(7+5) \cdot (-2)}{2} = -12$

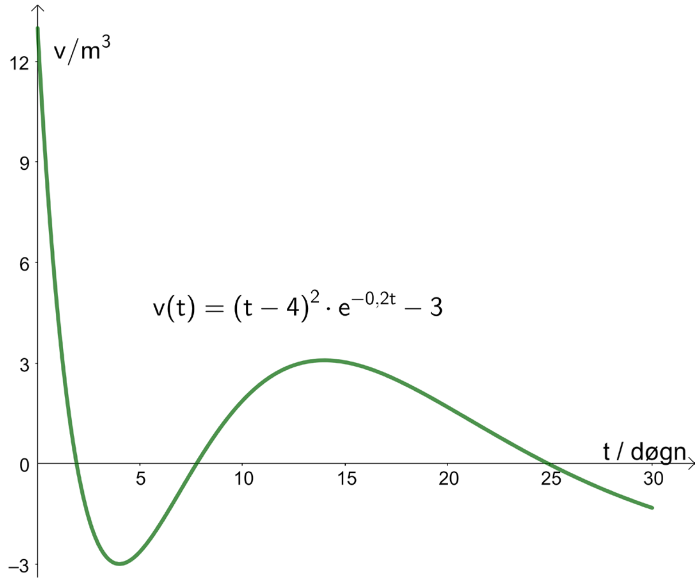
Bunnpunktet til F er (7 , –12).

d F har et bunnpunkt når arealet under x-aksen er lik arealet over x-aksen. Vi ser at x = 14 er et nullpunkt.

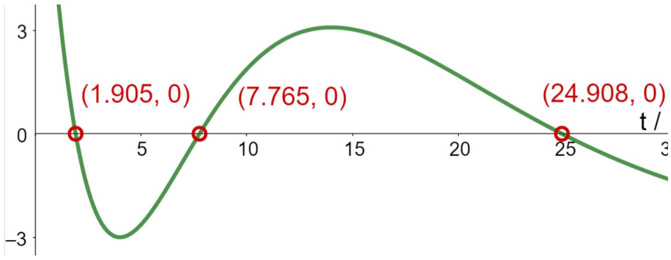
$F(14) = \int_0^{14} f(x)\,dx = \int_0^{7} f(x)\,dx + \int_7^{14} f(x)\,dx = -12 + \frac{(7+5) \cdot 2}{2} = 0$

2.46

a



b Vi bruker kommandoen nullpunkt i grafikkfeltet i GeoGebra. Vi får da opp de tre punktene i figuren under.



Her ser vi at netto vanntilsig var lik null etter 1,91 døgn, 7,77 døgn og 24,9 døgn.

c **1** Vi finner først hvor mye som vannmengden i magasinet endres mellom hvert av tidspunktene i oppgave b.

2 $\int_{0}^{1.91} \mathrm{v}\,dx$

$\approx$ **10.061**

3 $\int_{1.91}^{7.77} \mathrm{v}\,dx$

$\approx$ **−11.093**

4 $\int_{7.77}^{24.91} \mathrm{v}\,dx$

$\approx$ **32.417**

Her ser vi at det totale vanntilsiget blir størst etter 24,91 døgn.

2

5 Integral(v, 0, 24.91)

$\approx$ **31.385**

Det var 31,4 m^3 mer vann i magasinet enn ved tiden t = 0.

d **1** Vi finner hvor mye vann som renner ut den siste perioden.

6 Integral(v, 24.91, 30)
$\approx\ -3.605$

Dette er langt mindre enn det som netto renner inn mellom t = 7,77 og t = 24,91. Det må derfor være minst vann i magasinet ved t = 7,77.

2

7 Integral(v, 0, 7.77)
$\approx\ -1.032$

Det var 1,0 m^3 mindre vann i magasinet enn ved tiden t = 0.

2.47

Vi undersøker først om grafene skjærer hverandre i intervallet. Siden x-koordinatene til skjæringspunktene ligger utenfor intervallet, kan vi finne bruke integralet for å bestemme arealet.

1 f(x) := 6 x − x²
$\rightarrow\ f(x) := -x^2 + 6x$

2 g(x) := 8 − x
$\rightarrow\ g(x) := -x + 8$

3 f(x) = g(x)
Løs: $\left\{x = \frac{-\sqrt{17}+7}{2}, x = \frac{\sqrt{17}+7}{2}\right\}$

4 \$3
$\approx\ \{x = 1.43845, x = 5.56155\}$

5 IntegralMellom(f, g, 2, 5)
$\rightarrow\ \frac{21}{2}$

6 \$5
$\approx\ 10.5$

Arealet av området som er avgrenset av grafene til f og g, og linjene x = 2 og x = 5, er 10,5.

2.48

a Vi bruker CAS til å finne skjæringspunktene.

1	$f(x) := x^2 - 4x + 5$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := x^2 - 4x + 5}$
2	$g(x) := -x^2 + 4x - 1$ $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := -x^2 + 4x - 1}$
3	$f = g$ Løs: $\{x = 1, x = 3\}$
4	$f(1)$ $\rightarrow$ $\mathbf{2}$
5	$f(3)$ $\rightarrow$ $\mathbf{2}$

Skjæringspunktene mellom grafene til f og g er (1 , 2) og (3 , 2).

b

6	IntegralMellom(f, g, 1, 3) $\rightarrow$ $\mathbf{\frac{-8}{3}}$
7	|\$6| $\rightarrow$ $\mathbf{\frac{8}{3}}$
8	\$7 $\approx$ **2.667**

Arealet av området er 8/3.

c Vi ser at integranden er det samme som $f(x) - g(x)$. I tillegg vet vi at grafene skjærer hverandre for $x = 1$. Integralet er derfor arealet av området avgrenset av grafene til f og g og y-aksen.

2.49

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 = 4 - 4 = 0$$

$$\int_0^4 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 - (-A_3) = 4 - 4 + 8 = 8$$

2.50

1	$p(t) := 0.02\,t^2 + 10\,t + 100$
	$\rightarrow\ p(t) := \frac{1}{50}t^2 + 10\,t + 100$
2	$\frac{1}{10}\int_0^{10} p\,dt$
	$\approx\ 150.667$

I gjennomsnitt var det 151 dyr i de ti årene.

2.51

Integralet $\int_0^T K(t)\,dt$ er arealet under grafen. T skal være en hel arbeidsdag, så det er 8 timer.

Området under grafen kan deles i tre. Fra 0 til 2 timer er det et trapes. Fra 2 til 4timer er det et trapes. Fra 4 til 8 timer er det et rektangel. Det totale arealet blir da $\frac{(200+300)\cdot 2}{2}+\frac{(300+100)\cdot 2}{2}+100\cdot 4=1300$.

Gjennomsnittet for dagen var $\frac{1300}{8}=162{,}5\ \text{mg/m}^3$.

Siden gjennomsnittet var større enn 140 mg/m^3, var ikke kravet i arbeidsmiljøloven oppfylt.

2.52

a Området er en trekant. Arealet og integralet er da gitt ved $\frac{30\cdot 10}{2}=150$. Det forteller oss at Gunnar syklet 150 meter i løpet av de første 30 sekundene.

b Området er et trapes. Arealet og integralet er da gitt ved $\frac{(80+35)\cdot 10}{2}=575$. Det forteller oss at Gunnar syklet 575 meter i løpet av turen.

2.53

a

1	$f(x) := x^3$
	$\rightarrow\ f(x) := x^3$
2	Nullpunkt(f)
	$\rightarrow\ \{x = 0\}$
3	Integral(f, −2, 0)
	$\rightarrow\ -4$
4	Integral(f, 0, 2)
	$\rightarrow\ 4$
5	|\$3| + \$4
	$\rightarrow\ 8$

Arealet er 8.

b

6	Integral(f, −2, 2)
	→ $\mathbf{0}$

Integralet blir null fordi arealet over *x*-aksen er like stort som arealet under *x*-aksen.

2.54

a Vi bruker CAS til å finne nullpunktene til *h* og regne ut integralet mellom nullpunktene.

1	$h(x) := -x^2 + 2x$
	→ $\mathbf{h(x) := -x^2 + 2x}$
2	Nullpunkt(h)
	→ $\{x = 0, x = 2\}$
3	Integral(h, 0, 2)
	→ $\frac{4}{3}$

b Vi bruker CAS til å finne *x*-koordinatene til skjæringspunktene mellom grafene.

1	$h(x) := -x^2 + 2x$
	→ $\mathbf{h(x) := -x^2 + 2x}$
2	$g(x) := x^3 - x$
	→ $\mathbf{g(x) := x^3 - x}$
3	g = h
	Løs: $\left\{x = \frac{-\sqrt{13}-1}{2}, x = 0, x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right\}$
4	\$3
	≈ $\{x = -2.303, x = 0, x = 1.303\}$

Grafene krysser altså ikke hverandre i intervallet [–2 , –1]. Arealet er da gitt ved det bestemte integralet.

5	IntegralMellom(g, h, −2, −1)
	→ $\frac{37}{12}$
6	\$5
	≈ $\mathbf{3.083}$

Arealet av området mellom grafene til *g* og *h*, og linjene $x = -2$ og $x = -1$, er 3,08.

2.55

a For at integralet skal bli null, må grafen ligge delvis over og delvis under *x*-aksen i intervallet [–3 , *k*], og arealet på oversiden og undersiden av *x*-aksen må være like stort. Dette ser vi er tilfelle når $k = 1$.

b For at integralet skal bli null, må grafen ligge delvis over og delvis under *x*-aksen i intervallet [*k* , 0], og arealet på oversiden og undersiden av *x*-aksen må være like stort. Dette ser vi er tilfelle når $k = -2$.

c For at integralet skal bli $\frac{5}{4}$, må grafen ligge delvis over og delvis under *x*-aksen i intervallet [–3 , *k*], og arealet på oversiden må være $\frac{5}{4}$ større enn arealet på undersiden av *x*-aksen. Arealet på undersiden er $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.
Arealet på oversiden må være 1 + $\frac{5}{4}$ = 2,25. Hvis vi setter *k* lik 2, så blir arealet på oversiden av *x*-aksen $\frac{3 \cdot 1{,}5}{2} = 2{,}25$, og dermed er integralet $\frac{5}{4}$.

2.56

a Fram til t = 2,6 er farten positiv. Etter dette tidspunktet er farten negativ. Det vil si at raketten faller nedover. Altså var raketten på sitt høyeste etter 2,6 sekunder.

b Området under grafen fram til t = 2,6 er omtrent en trekant med areal $\frac{2{,}6 \cdot 200}{2} = 260$.

Området mellom t = 2,7 og t = 3 er en trekant med areal $\frac{1{,}4 \cdot 100}{2} = 70$.

Området mellom t = 3 og t = 5 er et trapes med areal $\frac{(100+50)\cdot 2}{2} = 150$.

Overslaget gir at raketten til sammen tilbakelegger en strekning på 260 + 70 + 150 = 480 meter. Dette overslaget er imidlertid veldig grovt. Spesielt ser vi at det at grafen krummer fra 0 til 2 sekunder gjør at arealet av det første området er en god del mindre enn trekanten vi tok utgangspunkt i. 400 m er derfor antakelig et bedre overslag.

c Vi finner den tilbakelagte strekningen ved å lage et program som integrerer numerisk og finner det samlede arealet av de to områdene avgrenset av fartsgrafen og *x*-aksen. Vi bruker absoluttverdi i rad 9, for å unngå at arealet av området under *x*-aksen blir negativt.

```
1  from pylab import *
2  
3  data = loadtxt("rakett.txt")
4  tid = data[:, 0]
5  fart = data[:, 1]
6  n = len(tid)
7  
8  dt = tid[2]-tid[1]
9  s = 0
10 
11 for i in range(n):
12   s = s + abs(fart[i])*dt
13 
14 print(round(s,3))
15 
```

2.57

a $\int 5 \, dx = 5x + C$

b $\int 5 \, dt = 5t + C$

c $\int 6x \, dx = 3x^2 + C$

d $\int 1 \, dx = x + C$

2.58

a $\int -2\,\mathrm{d}x = -2x + C$

b $\int 0\,\mathrm{d}x = C$

c $\int 2\pi\,\mathrm{d}x = 2\pi x + C$

d $\int 2\pi r\,\mathrm{d}r = \pi r^2 + C$

2.59

a $(x^3 + 6x)' = 3 \cdot x^{3-1} + 6 = 3x^2 + 6$

b **1** $\int \left(3x^2 + 6\right) \mathrm{d}x = x^3 + 6x + C$ **2** $\int \left(3t^2 + 6\right) \mathrm{d}t = t^3 + 6t + C$

3 $\int \left(tx^2 + 6\right) \mathrm{d}x = t \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 6x + C = \frac{1}{3} tx^3 + 6x + C$

2.60

a $f'(x) = \mathrm{e}^{3x} \cdot (3x)' = 3\mathrm{e}^{3x}$

b Vi bruker sammenhengen mellom $f(x)$ og $f'(x)$ til å lete etter sammenhengen mellom $f(x)$ og $K(x)$.
$K(x) = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x} + C$

2.61

a $s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$

b $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$

c **1** $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int 9{,}81\,\mathrm{d}t = 9{,}81t + C$

2 Integrasjonskonstanten vil være farten ved t lik null.

2.62

a $\int\left(x^6+6x^2\right)\,\mathrm{d}x=\int x^6\,\mathrm{d}x+\int 6x^2\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{6+1}x^{6+1}+6\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1}+C$$

$$=\frac{1}{7}x^7+2x^3+C$$

b $\int\left(4x^3+9x^2-8x+1\right)\,\mathrm{d}x=\int 4x^3\,\mathrm{d}x+\int 9x^2\,\mathrm{d}x-\int 8x\,\mathrm{d}x+\int 1\,\mathrm{d}x$

$$=4\cdot\frac{1}{3+1}x^{3+1}+9\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1}-8\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1}+1x+C$$

$$=x^4+3x^3-4x^2+x+C$$

c $\int\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int 2\cdot x^{-2}\,\mathrm{d}x$

$$=2\cdot\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$$

$$=\frac{2}{-1}x^{-1}+C$$

$$=-\frac{2}{x}+C$$

d $\int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x=\int 2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$=2\ln|x|+C$$

e $\int\frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\ln|x|+C$$

f $\int\left(4+6\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x=\int 4\,\mathrm{d}x+\int 6\cdot x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$

$$=4x+6\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=4x+6\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=4x+2\sqrt{x^3}+C$$

2.63

I det første integralet er x variabelen og a en konstant. I det andre integralet er det motsatt.

1 $\text{integral}\left(\dfrac{1}{a \cdot x}\right)$

$\rightarrow \dfrac{\ln|x|}{a} + c_1$

2 $\text{Integral}\left(\dfrac{1}{a \cdot x}, a\right)$

$\rightarrow \dfrac{\ln|a|}{x} + c_2$

2.64

a $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{2}{x} = x + \dfrac{2}{x}$

b
$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int x + \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot\ln|x| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \ln x^2 + C\end{aligned}$$

c

1 $\text{Integral}\left(\dfrac{x^2+2}{x}\right)$

$\rightarrow \ln\left(x^2\right) + \dfrac{1}{2}x^2 + c_1$

2.65

a $\displaystyle\int \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x} + C$

b
$$\begin{aligned}\int\left(6\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x &= 6\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{-1}\cdot\mathrm{e}^{-x} + C \\ &= 3\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x} + C\end{aligned}$$

c $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + C$

d $\displaystyle\int \frac{3^x}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$

2.66

a $\int\left(e^{\frac{1}{2}x}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx=\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx+\int e^{\frac{1}{3}x}\,dx$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{1}{3}x}+C$

$=2e^{\frac{1}{2}x}+3e^{\frac{1}{3}x}+C$

b $\int e^{2t}\,dt=\frac{1}{2}e^{2t}+C$

c $\int\frac{e^{2t}}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int e^{2t}\,dt$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2t}+C$

$=\frac{1}{4}e^{2t}+C$

d $\int\left(1-4e^{-t}\right)dt=\int 1\,dt-4\int e^{-t}\,dt$

$=t-4\cdot\frac{1}{(-1)}\cdot e^{-t}+C$

$=t+4e^{-t}+C$

2.67

a $f'(x)=e^{x^3}\cdot\left(x^3\right)'=e^{x^3}\cdot 3x^2$

b $\int x^2e^{x^3}\,dx=\int\frac{1}{3}\cdot 3x^2e^{x^3}\,dx$

$=\frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot 3x^2\,dx$

$=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$

2.68

a $F'(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)'=e^{-x^2}$

b $G'(x)=\left(\int_1^x te^{-t}\,dt\right)'=xe^{-x}$

c $H'(x)=\left(\int_{-1}^x(4-t^2)\,dt\right)'=4-x^2$

2.69

a $F'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2xe^{-x^2}$

b $G'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

c $H'(x) = \left(4 - x^2\right)' = -2x$

2.70

a $\int_{-1}^{1} 3x^2 \, dx = [x^3]_{-1}^{1} = (1^3) - \left((-1)^3\right) = 1 + 1 = 2$

b
$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(x^3 - 2x + 3\right) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x\right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^2 + 3 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 0^2 + 3 \cdot 0\right) \\ &= 6\end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(t^3 - 2t + 3\right) dt &= \left[\frac{1}{4}t^4 - t^2 + 3t\right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^2 + 3 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 0^2 + 3 \cdot 0\right) \\ &= 6\end{aligned}$$

d $\int_7^7 x^8 \, dx = \left[\frac{1}{9}x^9\right]_7^7 = \frac{1}{9}7^9 - \frac{1}{9}7^9 = 0$

2.71

a
$$\begin{aligned}\int_0^1 3e^x \, dx &= \left[3e^x\right]_0^1 \\ &= \left(3e^1\right) - \left(3e^0\right) \\ &= 3e - 3\end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} e^{4x} \, dx &= \left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^{\ln 2} \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot \ln 2}\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot 0}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{\ln 2^4} - \frac{1}{4} \cdot 1 \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

c $\int_1^2 \frac{2}{x} \, dx = [2\ln|x|]_1^2 = (2\ln 2) - (2\ln 1) = 2\ln 2$

d $\int_1^e \frac{3}{x}\,dx = [3\ln|x|]_1^e$

$= (3\ln e) - (3\ln 1)$

$= 3$

2.72

a $f(x) = 0$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$

Nullpunktene er 0 og 3.

b $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(x^2 - 3x\right) dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$

$= \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 - \frac{3}{2}\cdot 0^2\right) = -\frac{9}{2}$

Arealet er $\frac{9}{2}$.

c Mellom 2 og 3 ligger arealet under x-aksen og mellom 3 og 6 ligger arealet over x-aksen. Vi må derfor dele opp integralet i to og passe på fortegnet.

$A = -\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx$

$= -\int_2^3 (x^2 - 3x)\,dx + \int_3^6 (x^2 - 3x)\,dx$

$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_2^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_3^6$

$= -\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{3}\cdot 6^3 - \frac{3}{2}\cdot 6^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right)\right)$

$= \frac{71}{3}$

Arealet er $\frac{71}{3}$.

d $\int_4^{10} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_4^{10}$

$= \left(\frac{1}{3}\cdot 10^3 - \frac{3}{2}\cdot 10^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2\right)$

$= \left(\frac{550}{3}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)$

$= 186$

2.73

$$\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(1) = 3 - (-2) = 5$$

2.74

a $\int 12x^3\,\mathrm{d}x = 12\int x^3\,\mathrm{d}x = 12 \cdot \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} + C = 3x^4 + C$

b $\int 7\,\mathrm{d}t = 7t + C$

c $\int 6\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = 6\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x} + C = 2\mathrm{e}^{3x} + C$

d
$$\begin{aligned}\int\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t &= \int 1\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= t + \ln|t| + \frac{1}{-2+1} \cdot t^{-2+1} + \frac{1}{-3+1} \cdot t^{-3+1} + C \\ &= t + \ln|t| - \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + C\end{aligned}$$

2.75

a
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\left(x^2+4x+5\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3+2\cdot 2^2+5\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)^3+2\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)\right) \\ &= 24\end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\left(\mathrm{e}^x+3x^2+1\right)\mathrm{d}x &= \left[\mathrm{e}^x+x^3+x\right]_0^1 \\ &= \left(\mathrm{e}^1+1^3+1\right)-\left(\mathrm{e}^0+0^3+0\right) \\ &= \mathrm{e}+1\end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-2\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

d
$$\begin{aligned}\int_0^1 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x &= \left[-\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 \\ &= \left(-\mathrm{e}^{-2\cdot 1}\right)-\left(-\mathrm{e}^{-2\cdot 0}\right) \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}^2}+1 = \frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2}\end{aligned}$$

2.76

a $\int (8x-3)\,\mathrm{d}x = 8\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1} - 3x = 4x^2 - 3x + C$

b
$$\begin{aligned} G(3) &= 30 \\ 4\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + C &= 30 \\ 36 - 9 + C &= 30 \\ C &= 3 \\ G(x) &= 4x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned} H(-1) &= 3 \\ 4\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) + C &= 3 \\ 4 + 3 + C &= 3 \\ C &= -4 \\ H(x) &= 4x^2 - 3x - 4 \end{aligned}$$

2.77

a
$$\begin{aligned} \int \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{(-1)}\cdot \mathrm{e}^{-x} + C \\ &= 4\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} + \mathrm{e}^{-x} + C \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x &= 2\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot \mathrm{e}^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} + C \end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{4x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{4x} + \frac{2}{4x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\ln|x| + C \end{aligned}$$

d $$\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int 2\cdot\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x-2\int x^{-3}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}-2\cdot\frac{1}{(-3)+1}\cdot x^{-3+1}+C$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{-2}+C$$
$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+C$$

2.78

$$f(x)=\int(2x+5)\,\mathrm{d}x=x^2+5x+C$$
$$f(2)=14$$
$$2^2+5\cdot 2+C=14$$
$$C=0$$

Funksjonsutrykket må da være $f(x)=x^2+5x$.

2.79

$$g(t)=\int g'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\int 225\mathrm{e}^{-0{,}125t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{225}{(-0{,}125)}\mathrm{e}^{-0{,}125t}+C$$
$$=-1800\mathrm{e}^{-0{,}125t}+C$$

Siden tanken er tom ved start, kan vi bruke dette til å bestemme C.

$$g(0)=0$$
$$-1800\mathrm{e}^{-0{,}125\cdot 0}+C=0$$
$$C=1800$$

Funksjonsuttrykket er dermed $g(t)=-1800\mathrm{e}^{-0{,}125t}+1800=1800\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}125t}\right)$.

2.80

a $$f'(x)=\left(\int_2^x\frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right)'=\frac{x}{x^2+1}$$
$$f''(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)''=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

b $$g'(x)=\left(\int_0^x\sqrt{t+4}\,\mathrm{d}t\right)'=\sqrt{x+4}$$
$$g''(x)=\left(\sqrt{x+4}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

c $h'(x) = \left(\int_1^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t \right)' = \sqrt{x^2+1}$

$$h''(x) = \left(\sqrt{x^2+1} \right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2.81

a $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(-2) = 0 - (-2) = 2$

b $\int_{-2}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

$$F(k) - F(-2) = 0$$
$$F(k) = F(-2)$$
$$F(k) = -2$$

Vi ser av grafen at utenom den opplagte løsningen, $k = -2$, er det bare én løsning, $k = 3$.

2.82

a
$$\begin{aligned}\int 4x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x &= 2x^2 \cdot \ln x - \int 2x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x^2 \cdot \ln x - \int 2x\,\mathrm{d}x \\ &= 2x^2 \cdot \ln x - x^2 + C \\ &= x^2(2\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

1 $\int 4\,x\,\ln(x)\,\mathrm{d}x$

$\rightarrow\ \mathbf{4\left(\frac{1}{2}\,x^2\,\ln(x) - \frac{1}{4}\,x^2\right) + c_1}$

2 $1

Faktoriser: $\mathbf{2\,x^2\,\ln(x) - x^2 + c_1}$

b
$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \cdot x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cdot x - \int \mathrm{e}^x \cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x \cdot x - \mathrm{e}^x + C \\ &= \mathrm{e}^x \cdot (x-1) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^x \cdot x\,\mathrm{d}x &= \left[\mathrm{e}^x \cdot (x-1)\right]_0^1 \\ &= \mathrm{e}^1 \cdot 0 - \mathrm{e}^0 \cdot (-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

1 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,x\,\mathrm{d}x$

$\rightarrow\ \mathbf{1}$

c $\int 3x^2 \cdot \ln x \, dx = x^3 \cdot \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$$= x^3 \cdot \ln x - \int x^2 \, dx$$

$$= x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3(3\ln x - 1) + C$$

1 $\int 3\,x^2 \ \ln(x)\,dx$

$\rightarrow \ 3\left(\frac{1}{3}\,x^3\ \ln(x) - \frac{1}{9}\,x^3\right) + c_1$

2 $1

RegnUt: $c_1 + x^3\ \ln(x) - \frac{1}{3}\,x^3$

2.83

a $\int e^{2x} \cdot 4x \, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 4x - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 4 \, dx$

$$= 2x \cdot e^{2x} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

$$= (2x - 1)e^{2x} + C$$

1 Integral($e^{2x} \cdot 4x$)

$\rightarrow \ e^{2x}\,(2\,x - 1) + c_1$

b $\int \frac{1}{x^2} \cdot \ln x \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$= -\frac{\ln x + 1}{x} + C$$

1 $\int \frac{1}{x^2}\ \ln(x)\,dx$

$\rightarrow \ c_1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$

c $\int (2x-1)\cdot \ln x \, dx = \left(x^2 - x\right)\cdot \ln x - \int \left(x^2 - x\right)\cdot \frac{1}{x}\,dx$

$$= \left(x^2 - x\right)\cdot \ln x - \int x - 1\,dx$$

$$= \left(x^2 - x\right)\cdot \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$\int_1^e (2x-1)\cdot \ln x \, dx = \left[\left(x^2 - x\right)\cdot \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^e$$

$$= \left(\left(e^2 - e\right)\cdot \ln e - \frac{1}{2}e^2 + e\right) - \left((1^2 - 1)\cdot \ln 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1\right)$$

$$= e^2 - e - \frac{1}{2}e^2 + e + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{e^2 - 1}{2}$$

1

$$\int_1^e (2\,x - 1)\ \ln(x)\,dx$$

$$\rightarrow\ \frac{\mathbf{e^2 - 1}}{\mathbf{2}}$$

2.84

a $\left(x\ln x - x + C\right)' = \left(x\ln x\right)' - \left(x\right)' + (C)'$

$$= 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} - 1 + 0$$

$$= \ln x + 1 - 1$$

$$= \ln x$$

b $\int \ln x \, dx = \int 1\cdot \ln x \, dx$

$$= x\cdot \ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\cdot \ln x - \int 1\,dx$$

$$= x\cdot \ln x - x + C$$

2.85

a $\int 4x\cdot e^x \, dx = 4x\cdot e^x - \int 4\cdot e^x \, dx$

$$= 4x\cdot e^x - 4\cdot e^x + C$$

$$= 4e^x(x-1) + C$$

b $\int \ln x \cdot 6x^2 \, \mathrm{d}x = \ln x \cdot 2x^3 - \int \frac{1}{x} \cdot 2x^3 \, \mathrm{d}x$

$$= 2x^3 \cdot \ln x - \int 2x^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= 2x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3}x^3 + C$$
$$= \frac{2}{3}x^3(3\ln x - 1) + C$$

c $\int (2x-1) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = (2x-1) \cdot \mathrm{e}^x - \int 2 \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

$$= (2x-1) \cdot \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C$$
$$= \mathrm{e}^x(2x-3) + C$$

2.86

a $\int \mathrm{e}^x \cdot 2x^2 \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cdot 2x^2 - \int \mathrm{e}^x \cdot 4x \, \mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e}^x \cdot 2x^2 - \mathrm{e}^x \cdot 4x + \int \mathrm{e}^x \cdot 4 \, \mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^x \cdot 2x^2 - \mathrm{e}^x \cdot 4x + 4\mathrm{e}^x + C$$
$$= 2(x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + C$$

b $\int \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 1) \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 1) - \int \mathrm{e}^x \cdot 2x \, \mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 1) - \mathrm{e}^x \cdot 2x + \int \mathrm{e}^x \cdot 2 \, \mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 1) - \mathrm{e}^x \cdot 2x + 2\mathrm{e}^x + C$$
$$= (x^2 - 1)^2 \cdot \mathrm{e}^x + C$$

c $\int x(\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x + \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot (\ln x) + \frac{1}{4}x^2 + C$$
$$= \frac{1}{4}x^2\left(2(\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right) + C$$

2.87

a Vi velger $u = x^3$ som kjerne.

Det gir $u' = 3x^2$, og dermed $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{3x^2}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^3}\ \mathrm{d}x &= \int 3x^2 \cdot \mathrm{e}^u\ \frac{\mathrm{d}u}{3x^2}\\ &= \int \frac{3x^2}{3x^2} \cdot \mathrm{e}^u\ \mathrm{d}u\\ &= \int \mathrm{e}^u\ \mathrm{d}u\\ &= \mathrm{e}^u + C\\ &= \mathrm{e}^{x^3} + C\end{aligned}$$

b Vi velger $u = \ln x$ som kjerne.

Det gir $u' = \frac{1}{x}$, og dermed $\mathrm{d}x = x\ \mathrm{d}u$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int \frac{8}{x} \cdot (\ln x)^3\ \mathrm{d}x &= \int \frac{8}{x} \cdot u^3 \cdot x\ \mathrm{d}u\\ &= \int \frac{8x}{x} \cdot u^3\ \mathrm{d}u\\ &= \int 8u^3\ \mathrm{d}u\\ &= 2u^4 + C\\ &= 2(\ln x)^4 + C\end{aligned}$$

c Vi velger $u = x^2 + 4$ som kjerne.

Det gir $u' = 2x$, og dermed $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+4}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{x}{u}\ \frac{\mathrm{d}u}{2x}\\ &= \int \frac{x}{2x} \cdot \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C\end{aligned}$$

d Vi velger $u = 1 + x^2$ som kjerne.

Det gir $u' = 2x$, og dermed $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int 2x\cdot\sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2x}\\ &= \int \frac{2x}{2x}\cdot u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\\ &= \int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3+C\end{aligned}$$

2.88

a Vi velger $u=3x+5$ som kjerne.

Det gir $u'=3$, og dermed $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{3}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int 3\mathrm{e}^{3x+5}\,\mathrm{d}x &= \int 3\mathrm{e}^{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{3}\\ &= \int \frac{3}{3}\cdot\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{e}^{u}+C\\ &= \mathrm{e}^{3x+5}+C\end{aligned}$$

1 $\text{Integral}\left(3\ \mathrm{e}^{3x+5}\right)$

$\rightarrow\ \mathbf{e^{3x+5}+c_1}$

b Vi velger $u=3x+5$ som kjerne.

Det gir $u'=3$, og dermed $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{3}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int \frac{6}{3x+5}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{3}\\ &= \int \frac{6}{3}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\ln|u|+C\\ &= 2\ln|3x+5|+C\end{aligned}$$

1 $\text{integral}\left(\dfrac{6}{3x+5}\right)$

$\rightarrow\ \mathbf{2\ \ln|3\ x+5|+c_1}$

c Vi velger $u=x^3+1$ som kjerne.

Det gir $u' = 3x^2$, og dermed $dx = \frac{du}{3x^2}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx &= \int \frac{x^2}{u}\,\frac{du}{3x^2} \\ &= \int \frac{x^2}{3x^2}\cdot\frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{3}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C\end{aligned}$$

1 $\text{Integral}\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)$

$\rightarrow \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c_1$

d Vi velger $u = x^4$ som kjerne.

Det gir $u' = 4x^3$, og dermed $dx = \frac{du}{4x^3}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int 6x^3\cdot e^{x^4}\,dx &= \int 6x^3\cdot e^u\,\frac{du}{4x^3} \\ &= \int \frac{6x^3}{4x^3}\cdot e^u\,du \\ &= \frac{3}{2}\int e^u\,du \\ &= \frac{3}{2}e^u + C \\ &= \frac{3}{2}e^{x^4} + C\end{aligned}$$

1 $\text{Integral}\left(6x^3\cdot e^{x^4}\right)$

$\rightarrow \frac{3}{2}e^{(x^4)} + c_1$

2.89

a Vi velger $u = \ln x$ som kjerne.

Det gir $u' = \frac{1}{x}$, og dermed $dx = x\,du$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u}{x}\cdot x\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{x}{x}\cdot u\,\mathrm{d}u \\ &= \int u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}u^2 + C \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C\end{aligned}$$

b I oppgave a fant vi det ubestemte integralet, så vi kan finne det bestemte integralet direkte.

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \left(\frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2\right) - \left(\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right) \\ &= \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.90

a Vi velger $u = \mathrm{e}^x - 1$ som kjerne.

Det gir $u' = \mathrm{e}^x$, og dermed $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^x}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^x} \\ &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\mathrm{e}^x - 1| + C\end{aligned}$$

1 Integral$\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$

$\rightarrow$ $\ln|\mathrm{e}^x - 1| + c_1$

b Vi velger $u = 2t + 3$ som kjerne.

Det gir $u' = 2$, og dermed $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$.

Vi setter inn og får

$$\int 3\sqrt{2t+3}\,\mathrm{d}x = \int 3\sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2}$$
$$= \int \frac{3}{2}\cdot u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{3}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \left(\sqrt{2t+3}\right)^3 + C$$

1 Integral$\left(3\sqrt{2t+3}\right)$

$\rightarrow \sqrt{2\,t+3}\,(2\,t+3)+c_1$

c Vi velger $u = -x^2$ som kjerne.

Det gir $u' = -2x$, og dermed $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{(-2x)}$.

Vi setter inn og får

$$\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \int xe^{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{(-2x)}$$
$$= \int \frac{x}{(-2x)}\cdot e^{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{2}\int e^{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot e^{u} + C$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

1 Integral$\left(x\cdot e^{-x^2}\right)$

$\rightarrow \dfrac{-1}{2}\,e^{-x^2}+c_1$

d Vi velger $u = x^3 - 1$ som kjerne.

Det gir $u' = 3x^2$, og dermed $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{3x^2}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int x^2(x^3-1)^4\ \mathrm{d}x &= \int x^2u^4\ \frac{\mathrm{d}u}{3x^2}\\ &= \int \frac{x^2}{3x^2}\cdot u^4\ \mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}\int u^4\ \mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}u^5+C\\ &= \frac{1}{15}(x^3-1)^5+C\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir da

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} x^2(x^3-1)^4\ \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{15}(x^3-1)^5\right]_{-1}^{0}\\ &= \left(\frac{1}{15}(0^3-1)^5\right)-\left(\frac{1}{15}((-1)^3-1)^5\right)\\ &= -\frac{1}{15}+\frac{32}{15}\\ &= \frac{31}{15}\end{aligned}$$

1 $\mathrm{Integral}\left(x^2\cdot(x^3-1)^4,-1,0\right)$

$\rightarrow\ \mathbf{\dfrac{31}{15}}$

e Vi velger $u=2x^2+3x+1$ som kjerne.

Det gir $u'=4x+3$, og dermed $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{4x+3}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int\frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{4x+3}{u}\ \frac{\mathrm{d}u}{4x+3}\\ &= \int\frac{4x+3}{4x+3}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \ln|u|+C\\ &= \ln|2x^2+3x+1|+C\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir da

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x &= \left[\ln|2x^2+3x+1|\right]_0^1\\ &= \ln(2\cdot1^2+3\cdot1+1)-\ln(2\cdot0^2+3\cdot0+1)\\ &= \ln 6\end{aligned}$$

1 Integral$\left(\frac{4x+3}{2x^2+3x+1}, 0, 1\right)$

$\rightarrow \ln(6)$

f Vi velger $u = \ln(x^2+3)$ som kjerne.

Det gir $u' = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x$, og dermed $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\frac{2x}{x^2+3}}$.

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2+3}\cdot \ln(x^2+3)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x}{x^2+3}\cdot u\,\frac{\mathrm{d}u}{\frac{2x}{x^2+3}}\\ &= \int u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}u^2 + C\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+3)\right)^2 + C\end{aligned}$$

1 $\int \frac{2x}{x^2+3}\ln(x^2+3)\,\mathrm{d}x$

$\rightarrow \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+3)\right)^2 + c_1$

2.91

a $\int \frac{1}{5x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|5x+2| + C$

b
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4-x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{(-1)}\ln|4-x| + C\\ &= -\ln|4-x| + C\end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-4}\right)\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{1}\ln|x+4| - \frac{1}{1}\ln|x-4| + C\\ &= \ln|x+4| - \ln|x-4| + C\\ &= \ln\left|\frac{x+4}{x-4}\right| + C\end{aligned}$$

d
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{3x-4}-\frac{2}{4x+1}\right)\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{3x-4}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{4x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x| + 3\cdot\frac{1}{3}\ln|3x-4| - 2\cdot\frac{1}{4}\ln|4x+1| + C\\ &= \ln|x| + \ln|3x-4| - \frac{1}{2}\ln|4x+1| + C\\ &= \ln|3x^2-4x| - \frac{1}{2}\ln|4x+1| + C\end{aligned}$$

2.92

Bhanu har valgt å bruke variabelskifte ved sette $u = \ln x$. Siden hun regner med et bestemt integral, må hun også endre integrasjonsgrensene. De opprinnelige grensene er $x = 1$ og $x = \mathrm{e}$. De nye grensene blir $u(1) = \ln 1 = 0$ og $u(\mathrm{e}) = \ln \mathrm{e} = 1$.

2.93

Serian har brukt variabelskifte ved å sette $u = x^2$. Da har hun fortsatt faktoren x^2 igjen i integralet, men hun bruker da at dette er det samme som u. Hun har derfor fått integralet $\int u \cdot \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u$. Dette integralet bestemmer hun ved hjelp av delvis integrasjon.

2.94

a $$\begin{aligned}(x-2)\cdot(x-1) &= x^2 - x - 2x + 2\\ &= x^2 - 3x + 2\end{aligned}$$

b $$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-2)(x-1)}$$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{A(x-1)}{(x-2)(x-1)} + \frac{B(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$x = A(x-1) + B(x-2)$$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn 2 for x:

$$\begin{aligned}2 &= A(2-1) + B(2-2)\\ 2 &= A\\ A &= 2\end{aligned}$$

For å finne B setter vi inn 1 for x:

$$\begin{aligned}1 &= A(1-1) + B(1-2)\\ 1 &= -B\\ B &= -1\end{aligned}$$

Dette viser at $\dfrac{x}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$.

c $$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| + C\end{aligned}$$

d $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \left[2\ln|x-2| - \ln|x-1|\right]_3^4$

$$\begin{aligned}
&= \left(2\ln|4-2| - \ln|4-1|\right) - \left(2\ln|3-2| - \ln|3-1|\right)\\
&= 2\ln 2 - \ln 3 + \ln 2\\
&= 3\ln 2 - \ln 3\\
&= \ln 2^3 - \ln 3\\
&= \ln\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

2.95

a Nevneren kan vi skrive som et produkt av to førstegradsfaktorer:

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{B(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$1 = A(x-2) + B(x+2)$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn -2 for x:

$$\begin{aligned}
1 &= A(-2-2) + B(-2+2)\\
1 &= -4A\\
A &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

For å finne B setter vi inn 2 for x:

$$\begin{aligned}
1 &= A(2-2) + B(2+2)\\
1 &= 4B\\
B &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Dette viser at $\displaystyle\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C\\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C
\end{aligned}$$

b Nevneren kan vi skrive som et produkt av to førstegradsfaktorer:

$x^2 + x = x(x+1)$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A(x+1)}{x(x+1)}+\frac{Bx}{(x+1)x}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$1=A(x+1)+Bx$$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn 0 for x:

$$\begin{aligned}1&=A(0+1)+B\cdot 0\\1&=A\\A&=1\end{aligned}$$

For å finne B setter vi inn -1 for x:

$$\begin{aligned}1&=A((-1)+1)+B\cdot(-1)\\1&=-B\\B&=-1\end{aligned}$$

Dette viser at $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\ln|x|-\ln|x+1|+C\\&=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C\end{aligned}$$

c Nevneren kan vi skrive som et produkt av to førstegradsfaktorer:

$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{2x+3}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x-1}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{2x+3}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{A(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} + \frac{B(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$2x+3 = A(2x-1) + B(2x+1)$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn $-1/2$ for x:

$$\begin{aligned} 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3 &= A(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1)+B(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1) \\ 2 &= -2A \\ A &= -1 \end{aligned}$$

For å finne B setter vi inn $1/2$ for x:

$$\begin{aligned} 2\cdot\frac{1}{2}+3 &= A(2\cdot\frac{1}{2}-1)+B(2\cdot\frac{1}{2}+1) \\ 4 &= 2B \\ B &= 2 \end{aligned}$$

Dette viser at $\frac{2x+3}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{-1}{2x+1} + \frac{2}{2x-1}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{4x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{-1}{2x+1} + \frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{2}{2}\ln|2x-1| + C \\ &= \ln|2x-1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C \end{aligned}$$

d Nevneren kan vi skrive som et produkt av to førstegradsfaktorer:

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$2x = A(x-1) + B(x+1)$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn -1 for x:

$$2\cdot(-1) = A\big((-1)-1\big)+B\big((-1)+1\big)$$
$$-2 = -2A$$
$$A = 1$$

For å finne B setter vi inn 1 for x:

$$2\cdot 1 = A(1-1)+B(1+1)$$
$$2 = 2B$$
$$B = 1$$

Dette viser at $\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+1|+\ln|x-1|+C\\ &= \ln|x^2-1|+C\end{aligned}$$

Så finner vi det bestemte integralet.

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \left[\ln|x^2-1|\right]_2^5\\ &= \ln|5^2-1|-\ln|2^2-1|\\ &= \ln 24-\ln 3\\ &= \ln\frac{24}{3}\\ &= \ln 8\\ &= 3\ln 2\end{aligned}$$

2.96

a Nevneren er et polynom av grad 3 mens telleren er en konstant. Det er derfor mulig å skrive om brøken som en sum av tre delbrøker. Faktorene i nevneren er x, $x-2$ og $x+2$. Dette må da være nevnerne i delbrøkene.

b

$$\frac{4}{x^3-4x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$
$$\frac{4}{x^3-4x} = \frac{A(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}+\frac{Bx(x+2)}{x-2}+\frac{Cx(x-2)}{x+2}$$
$$4 = A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

For å finne A setter vi inn 0 for x:

$$4 = A(0-2)(0+2)+B\cdot 0\cdot(0+2)+C\cdot 0\cdot(0-2)$$
$$4 = -4A$$
$$A = -1$$

For å finne B setter vi inn 2 for x:

$$4 = A(2-2)(2+2)+B\cdot 2\cdot(2+2)+C\cdot 2\cdot(2-2)$$
$$4 = 8B$$
$$B = \frac{1}{2}$$

For å finne C setter vi inn -2 for x:

$$4 = A\big((-2)-2\big)\big((-2)+2\big) + B\cdot(-2)\cdot\big((-2)+2\big) + C\cdot(-2)\cdot\big((-2)-2\big)$$

$$4 = 8C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

c

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\left(\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\big(\ln|x-2| + \ln|x+2|\big) + C \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C\end{aligned}$$

2.97

a Vi bruker restdivisjon til å skrive om integranden.

$$\begin{array}{l} (3x^2-6x):(x+1) = 3x-9+\dfrac{9}{x+1} \\ \underline{-(3x^2+3x)} \\ \quad -9x \\ \quad \underline{-(-9x-9)} \\ \qquad 9 \end{array}$$

$$\frac{3x^2-6x}{x+1} = 3x-9+\frac{9}{x+1}$$

Altså får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-6x}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(3x-9+\frac{9}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 9x + 9\ln|x+1| + C\end{aligned}$$

b Vi bruker restdivisjon til å skrive om integranden.

$$\begin{array}{l} (x^2+3x+1):(x^2+x) = 1+\dfrac{2x+1}{x^2+x} \\ \underline{-(x^2+\ x)} \\ \quad 2x+1 \end{array}$$

$$\frac{x^2+3x+1}{x^2+x} = 1+\frac{2x+1}{x^2+x}$$

Altså får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x &= \int\left(1+\frac{2x+1}{x^2+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= x+\int\frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x\\ &= x+\int\frac{2x+1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2x+1}\\ &= x+\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= x+\ln|u|+C\\ &= x+\ln|x^2+x|+C\end{aligned}$$

c Vi bruker restdivisjon til å skrive om integranden.

$$\begin{array}{l}(x^2+5x-1):(x^2+2x)=1+\dfrac{3x-1}{x^2+2x}\\ \underline{-(x^2+2x)}\\ \qquad 3x-1\end{array}$$

$$\frac{x^2+5x-1}{x^2+2x}=1+\frac{3x-1}{x^2+2x}$$

Altså får vi

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+5x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x &= \int\left(1+\frac{3x-1}{x^2+2x}\right)\mathrm{d}x\\ &= x+\int\frac{3x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x\\ &= x+\int\frac{3x-1}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{3x-1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{3x-1}{x(x+2)}=\frac{A(x+2)}{x(x+2)}+\frac{Bx}{(x+2)x}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$3x-1=A(x+2)+Bx$$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn 0 for x:

$$\begin{aligned}3\cdot 0-1&=A(0+2)+B\cdot 0\\ -1&=2A\\ A&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

For å finne B setter vi inn -2 for x:

$$3\cdot(-2)-1=A\big((-2)+2\big)+B\cdot(-2)$$
$$-7=-2B$$
$$B=\frac{7}{2}$$

Dette viser at $\dfrac{3x-1}{x(x+2)}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{x}+\dfrac{\frac{7}{2}}{x+2}$.

Vi bruker dette for å finne integralet.

$$x+\int\frac{3x-1}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x=x+\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{7}{2}}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=x-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{7}{2}\ln|x+2|+C$$

d Vi bruker restdivisjon til å skrive om integranden.

$$(x^3-3x^2-5x+16):(x^2-2x-8)=x-1+\frac{x+8}{x^2-2x-8}$$
$$\begin{array}{l}-\underline{(x^3-2x^2-8x)}\\ \quad -x^2+\ 3x+16\\ \quad -\underline{(-x^2+\ 2x+\ 8)}\\ \qquad\qquad x+\ 8\end{array}$$

$$\frac{x^3-3x^2-5x+16}{x^2-2x-8}=x-1+\frac{x+8}{x^2-2x-8}$$

Altså får vi

$$\int\frac{x^3-3x^2-5x+16}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x=\int\left(x-1+\frac{x+8}{x^2-2x-8}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x+\int\frac{x+8}{(x-4)(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{x+8}{(x-4)(x+2)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{x+8}{(x-4)(x+2)}=\frac{A(x+2)}{(x-4)(x+2)}+\frac{B(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$x+8=A(x+2)+B(x-4)$$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn 4 for x:

$$4+8=A(4+2)+B(4-4)$$
$$12=6A$$
$$A=2$$

For å finne B setter vi inn -2 for x:

$$(-2)+8 = A\big((-2)+2\big)+B\big((-2)-4\big)$$

$$6 = -6B$$

$$B = -1$$

Dette viser at $\dfrac{x+8}{(x-4)(x+2)} = \dfrac{2}{x-4} - \dfrac{1}{x+2}$.

Vi bruker dette for å finne integralet.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{x+8}{(x-4)(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2 - x + \int\left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x-4| - \ln|x+2| + C\end{aligned}$$

2.98

a

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-4}{x}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{x^2}{x} - \frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int x\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 4\ln|x| + C\end{aligned}$$

b Vi bruker variabelskifte med $u = x^2 + 1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2x} \\ &= \int \frac{x}{2x}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\end{aligned}$$

c Vi bruker delbrøkoppspalting.

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{(x+1)(x-1)}\mathrm{d}x$$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$2 = A(x-1) + B(x+1)$$

Denne likningen skal gjelde for alle x.

For å finne A setter vi inn -1 for x:

$$2 = A\big((-1)-1\big)+B\big((-1)+1\big)$$
$$2 = -2A$$
$$A = -1$$

For å finne B setter vi inn 1 for x:

$$2 = A(1-1)+B(1+1)$$
$$2 = 2B$$
$$B = 1$$

Dette viser at $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\ln|x+1|+\ln|x-1|+C\\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\end{aligned}$$

d Vi finner først det ubestemte integralet. Da bruker vi variabelskifte med $u = x^2+1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2x}\\ &= \int \frac{2x}{2x}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \ln|u|+C\\ &= \ln|x^2-1|+C\end{aligned}$$

Vi finner så det bestemte integralet

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln|x^2-1|\Big]_3^5\\ &= \big(\ln(5^2-1)\big)-\big(\ln(3^2-1)\big)\\ &= \ln\frac{24}{8}\\ &= \ln 3\end{aligned}$$

2.99

a Vi bruker variabelskifte med $u = \ln x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u}{x}\cdot x\,\mathrm{d}u\\ &= \int \frac{x}{x}\cdot u\,\mathrm{d}u\\ &= \int u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}u^2+C\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2+C\end{aligned}$$

b Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2+C\\ &= \frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)+C\end{aligned}$$

c Vi bruker variabelskifte med $u=\ln x$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{xu}\frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{x}}\\ &= \int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \ln|u|+C\\ &= \ln\left|\ln|x|\right|+C\end{aligned}$$

d Vi finner først det ubestemte integralet ved å bruke delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C\end{aligned}$$

Så finner vi det bestemte integralet.

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2\ln x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3\right]_1^3\\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot3^3\ln3-\frac{1}{9}\cdot3^3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot1^3\ln1-\frac{1}{9}\cdot1^3\right)\\ &= 9\ln3-3+\frac{1}{9}\\ &= 9\ln3-\frac{26}{9}\end{aligned}$$

2.100

a Vi finner først det ubestemte integralet ved å bruke delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= 2x\mathrm{e}^x-\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= 2x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+C\end{aligned}$$

Så finner vi det bestemte integralet.

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \left[2x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x\right]_0^1\\ &= \left(2\cdot1\cdot\mathrm{e}^1-2\cdot\mathrm{e}^1\right)-\left(2\cdot0\cdot\mathrm{e}^0-2\cdot\mathrm{e}^0\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

b Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int xe^{4x}\,dx &= x\cdot\frac{1}{4}e^{4x}-\int 1\cdot\frac{1}{4}e^{4x}\,dx\\ &= \frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}+C\\ &= \frac{1}{16}(4x-1)e^{4x}+C\end{aligned}$$

c Vi bruker variabelskifte med $u=x^2$.

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \int xe^{u}\,\frac{du}{2x}\\ &= \int\frac{x}{2x}\cdot e^{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\int e^{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}e^{u}+C\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2}+C\end{aligned}$$

d Vi bruker variabelskifte med $u=2x+4$.

$$\begin{aligned}\int\sqrt{2x+4}\,dx &= \int\sqrt{u}\,\frac{du}{2}\\ &= \int\frac{1}{2}\cdot u^{\frac{1}{2}}\,du\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{1}{3}\left(\sqrt{u}\right)^3+C\\ &= \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+4}\right)^3+C\end{aligned}$$

2.101

Det ser ut som Eirik har brukt delvis integrasjon.

Siden det ikke kommer en ny faktor med 3 i det gjenværende integralet, kan det ikke være e^{3x} som blir derivert. Det må da være faktoren $6x$ som deriveres. Faktoren $\frac{1}{3}e^{3x}$ må ha blitt integrert allerede fra e^{3x}. Det opprinnelige integralet må være $\int 6x\cdot e^{3x}\,dx$.

2.102

a Vi bruker variabelskifte med $u=x^2-\pi^2$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{x^2-\pi^2}\,dx &= \int\frac{x}{u}\,\frac{du}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-\pi^2\right|+C\end{aligned}$$

b Vi bruker variabelskifte med $u = t^2 + 12t - 3$.

$$\begin{aligned}\int \frac{t+6}{t^2+12t-3}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{t+6}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2t+12}\\ &= \int \frac{t+6}{2t+12}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+12t-3\right| + C\end{aligned}$$

c Vi bruker først polynomdivisjon til å omforme brøken.

$$(2x^2):(x^2-1) = 2 + \frac{2}{x^2-1}$$
$$\frac{-\underline{(2x^2-2)}}{\quad 2}$$

Vi bruker delbrøkoppspalting.

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$
$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$2 = A(x-1) + B(x+1)$$

For å finne A setter vi inn -1 for x:

$$2 = A\big((-1)-1\big) + B\big((-1)+1\big)$$
$$2 = -2A$$
$$A = -1$$

For å finne B setter vi inn 1 for x:

$$2 = A(1-1) + B(1+1)$$
$$2 = 2B$$
$$B = 1$$

Dette viser at $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$.

Nå kan vi finne det bestemte integralet.

$$\int_3^5 \frac{2x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_3^5\left(2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$$
$$\big[2x - \ln|x+1| + \ln|x-1|\big]_3^5$$
$$= \big(2\cdot 5 - \ln(5+1) + \ln(5-1)\big) - \big(2\cdot 3 - \ln(3+1) + \ln(3-1)\big)$$
$$= \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4$$

d $\displaystyle\int \frac{8}{x^3-4x}\,dx = \int \frac{8}{x(x+2)(x-2)}\,dx$

Vi bruker delbrøkoppspalting.

$$\frac{8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{8}{x^3-4x} = \frac{A(x+2)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} + \frac{Bx(x-2)}{(x+2)x(x-2)} + \frac{Cx(x+2)}{(x-2)x(x+2)}$$

$$8 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2)$$

For å finne A setter vi inn 0 for x:

$$8 = A(0+2)(0-2) + B\cdot 0\cdot(0-2) + C\cdot 0\cdot(0+2)$$
$$8 = -4A$$
$$A = -2$$

For å finne B setter vi inn -2 for x:

$$8 = A\big((-2)+2\big)\big((-2)-2\big) + B\big(-2\big)\big((-2)-2\big) + C\big(-2\big)\big((-2)+2\big)$$
$$8 = 8B$$
$$B = 1$$

For å finne C setter vi inn 2 for x:

$$8 = A(2+2)(2-2) + B\cdot 2(2-2) + C\cdot 2(2+2)$$
$$8 = 8C$$
$$C = 1$$

Dette viser at $\displaystyle\frac{8}{x^3-4x} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{8}{x^3-4x}\,dx &= \int\left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right)dx\\ &= -2\ln|x| + \ln|x+2| + \ln|x-2| + C\\ &= \ln\left|\frac{x^2-4}{x^2}\right| + C\end{aligned}$$

2.103

a Vi omformer og bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int \ln\sqrt{x}\,dx &= \int \ln x^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\ln x\,dx\\ &= \frac{1}{2}x\cdot\ln x - \int \frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x\cdot\ln x - \frac{1}{2}x + C\\ &= \frac{1}{2}x(\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

b Her må vi først bruke variabelskifte.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx &= \int \frac{e^x}{\left(e^x\right)^2-1}\,dx \\ &= \int \frac{e^x}{u^2-1}\,\frac{du}{e^x} \\ &= \int \frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{1}{u^2-1}\,du \\ &= \int \frac{1}{u^2-1}\,du \\ &= \int \frac{1}{(u+1)(u-1)}\,du\end{aligned}$$

Nå bruker vi delbrøkoppspalting.

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1}+\frac{B}{u-1}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A(u-1)}{(u+1)(u-1)}+\frac{B(u+1)}{(u-1)(u+1)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$1 = A(u-1)+B(u+1)$$

Denne likningen skal gjelde for alle u.

For å finne A setter vi inn -1 for u:

$$1 = A\big((-1)-1\big)+B\big((-1)+1\big)$$

$$1 = -2A$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

For å finne B setter vi inn 1 for x:

$$1 = A(1-1)+B(1+1)$$

$$1 = 2B$$

$$B = \frac{1}{2}$$

Dette viser at $\dfrac{1}{(u+1)(u-1)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$.

Så kan vi fortsette på variabelskiftet.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx &= \int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{u+1}+\frac{\frac{1}{2}}{u-1}\right)du \\ &= -\frac{1}{2}\ln|u+1|+\frac{1}{2}\ln|u-1|+C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C\end{aligned}$$

c Vi bruker variabelskifte med $u = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}\ dx &= \int e^u\ \frac{du}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\\ &= \int 2\sqrt{x}\cdot e^u\ du\\ &= 2\int u\cdot e^u\ du\\ &= 2u\cdot e^u - \int 2e^u\ du\\ &= 2u\cdot e^u - 2e^u + C\\ &= 2(u-1)e^u + C\\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

d $$\begin{aligned}\int \frac{e^{2t}+e^{-t}}{2e^t}\ dt &= \int\left(\frac{e^{2t}}{2e^t}+\frac{e^{-t}}{2e^t}\right)dt\\ &= \int\left(\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{4}\cdot e^{-2t} + C\end{aligned}$$

2.104

a Vi bruker variabelskifte med $u = 2 + x$.

$$\begin{aligned}\int x\cdot\sqrt{2+x}\ dx &= \int x\cdot\sqrt{u}\ \frac{du}{1}\\ &= \int (u-2)\cdot\sqrt{u}\ du\\ &= \int u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\ du\\ &= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - 2\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C\\ &= \frac{2}{15}u^{\frac{3}{2}}(3u-10) + C\\ &= \frac{2}{15}\left(\sqrt{2+x}\right)^3(3x-4) + C\end{aligned}$$

b Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int x^3e^x\ dx &= x^3e^x - \int 3x^2e^x\ dx\\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + \int 6xe^x\ dx\\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - \int 6e^x\ dx\\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C\\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C\end{aligned}$$

c Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\cdot \ln x \,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot \ln x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot \ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot \ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C\\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C\end{aligned}$$

d Vi bruker variabelskifte med $u = 1+\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\\ &= \int \frac{1}{u}\cdot 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int \frac{\sqrt{x}}{u}\,du\\ &= 2\int \frac{u-1}{u}\,du\\ &= 2\int \left(1-\frac{1}{u}\right)du\\ &= 2(u - \ln|u|) + C_1\\ &= 2\left(1+\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right) + C_1\\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + (C_1+2)\\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C\end{aligned}$$

2.105

a Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x &= \int 1\cdot(\ln x)^2\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot(\ln x)^2 - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot(\ln x)^2 - \int 2\ln x\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + \int 2x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x + C\\ &= x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) + C\end{aligned}$$

b Vi bruker variabelskifte med $u = \ln x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u^2}{x}\,\frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{x}}\\ &= \int u^2\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}u^3 + C\\ &= \frac{1}{3}\cdot(\ln x)^3 + C\end{aligned}$$

c Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \int x^{-2}\cdot \ln x\,dx\\ &= -\frac{1}{x}\cdot \ln x - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C\\ &= -\frac{\ln x + 1}{x} + C\end{aligned}$$

d Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx &= \int x^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln x\,dx\\ &= 2\sqrt{x}\cdot \ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= 2\sqrt{x}\cdot \ln x - 4\sqrt{x} + C\\ &= 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C\end{aligned}$$

2.106

a Vi løser med CAS.

1 $f(x) := 3x$

→ $f(x) := 3\,x$

2 $\pi \int_1^2 f^2\,dx$

→ $21\,\pi$

Volumet av romfiguren er 21π.

b Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \sqrt{2\,x + 3}$

→ $f(x) := \sqrt{2\,x + 3}$

2 $\pi \int_1^4 f^2\,dx$

→ $24\,\pi$

Volumet av romfiguren er 24π.

c Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$

2 $\pi \int_3^7 f^2 \, dx$

$\rightarrow$ $\mathbf{4}$

Volumet av romfiguren er 4.

d Vi løser med CAS.

1 $f(x) := e^x$

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := e^x}$

2 $\pi \int_0^{\ln(3)} f^2 \, dx$

$\rightarrow$ $\mathbf{4\pi}$

Volumet av romfiguren er 4π.

2.107

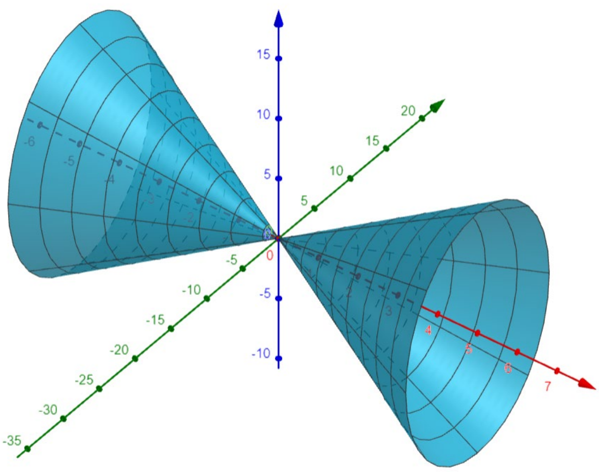
1 $f(x) := 2x$

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := 2x}$

2 $\pi \int_{-5}^{5} f^2 \, dx$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{1000}{3}\pi}$

Volumet av dobbeltkjegla er $\frac{1000\pi}{3}$.



2.108

a Grafen til g er en halvsirkel med sentrum i origo og radius lik 5. Når denne grafen dreies om x-aksen, får vi derfor en kule.

b Volumet av en kule med radius $r = 5$ er gitt ved

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}$$

Vi kan også finne volumet med CAS.

1	$g(x) := \sqrt{25 - x^2}$
	$\rightarrow \ g(x) := \sqrt{-x^2 + 25}$
2	$\pi \int_{-5}^{5} g^2 \, dx$
	$\rightarrow \ \frac{500}{3} \pi$

2.109

a Vi løser med CAS.

1	$g(y) := 2\,y$
	$\rightarrow \ g(y) := 2\,y$
2	$\pi \int_{2}^{5} g^2 \, dx$
	$\rightarrow \ 156\,\pi$

Volumet av romfiguren er 156π.

b Vi løser med CAS.

1	$g(y) := \sqrt{y + 1}$
	$\rightarrow \ g(y) := \sqrt{y + 1}$
2	$\pi \int_{-1}^{2} g^2 \, dx$
	$\rightarrow \ \frac{9}{2} \pi$

Volumet av romfiguren er $\frac{9\pi}{2}$.

c Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \ln(x)$

$\rightarrow \; f(x) := \ln(x)$

2 $\pi \int_{f(1)}^{f(e)} \text{Invers}(f)^2 \, dx$

$\rightarrow \; \frac{1}{2} \pi \left(e^2 - 1\right)$

Volumet av romfiguren er $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$.

d Vi løser med CAS.

1 $f(x) := e^x$

$\rightarrow \; f(x) := e^x$

2 $\pi \int_{f(0)}^{f(\ln(3))} \text{Invers}(f)^2 \, dx$

$\rightarrow \; \pi \left(-6 \ln(3) + 3 (\ln(3))^2 + 4\right)$

Volumet av romfiguren er $(3(\ln 3)^2 - 6\ln 3 + 4)\pi$.

2.110

a Vi kan skrive om funksjonsuttrykket til en likning.

$$
\begin{aligned}
y &= 2 - \sqrt{4 - x^2} \\
\sqrt{4 - x^2} &= 2 - y \\
4 - x^2 &= (2 - y)^2 \\
4 &= (2 - y)^2 + x^2 \\
2^2 &= (y - 2)^2 + (x - 0)^2
\end{aligned}
$$

Vi ser at vi får likningen for sirkelen med sentrum i (0 , 2) og radius lik 2.

Grafen til funksjonen er den delen av sirkelen som ligger under linja $y = 2$. Når denne grafen dreies om y-aksen, får vi en halvkule.

b Volumet av en halvkule med radius lik 2 er $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = \frac{16\pi}{3}$.

Vi kan også bestemme volumet med CAS.

1	$f(x) := 2 - \sqrt{4 - x^2}$
	$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := -\sqrt{-x^2 + 4} + 2}$
2	$\pi \int_0^2 \text{Invers}(f)^2 \, dx$
	$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{16}{3} \pi}$

2.111

a Vi løser med CAS.

1	$f(x) := \sqrt{x}$
	$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := \sqrt{x}}$
2	$V := \pi \, \text{Integral}(f^2, 0, q)$
	$\rightarrow$ $\mathbf{V := \frac{1}{2} q^2 \pi}$

b Vi løser med CAS.

3	$W := \pi \int_0^q (f(q))^2 \, dx$
	$\rightarrow$ $\mathbf{W := q^2 \pi}$

c

4	$\frac{V}{W}$
	$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$

Vi ser at forholdet er uavhengig av q og vil derfor være lik for alle verdier av q.

2.112

a For å få en kuleflate ved omdreining må vi starte med en halvsirkel. Siden kurven skal dreies om x-aksen, må sentrum av kula ligge på x-aksen. Kurven må altså være en halvsirkel med sentrum på x-aksen og radius lik r.

b For en sirkel med sentrum i origo er likningen gitt ved

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Vi trenger bare halve sirkelen, så vi velger bare den delen som ligger over x-aksen.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ der $r \in [-r\,, r]$

c $$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[r^2 \cdot x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^{r}$$

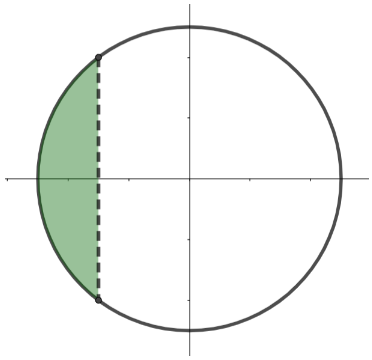
$$= \pi \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 \right) - \pi \left((-r)^3 - \frac{1}{3}(-r)^3 \right)$$

$$= \frac{4\pi r^3}{3}$$

2.113

Vi tenker oss at akvariet er omdreiningslegemet vi får nå vi dreier en sirkel med sentrum i origo og radius *r*.

Så snur vi kula på siden slik at bunnen er på venstre side. Det som fylles opp av vann, er det markerte området på figuren. Bunnen i kula er ved $x = -r$, og vannoverflaten blir ved $x = -r + h$.



1	$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$
	$\rightarrow$ $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$
2	$\pi \int_{-r}^{-r+h} f^2 \, dx$
	$\rightarrow$ $\frac{-1}{3} h^3 \pi + h^2 r \pi$
3	$2
	Faktoriser: $h^2 (3r - h) \frac{\pi}{3}$

Volumet av vannet i akvariet er $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$.

2.114

a Vi løser med CAS.

1	$f(x) := x^2$
	$\rightarrow$ $f(x) := x^2$
2	$g(x) := 4 - 3x^2$
	$\rightarrow$ $g(x) := -3x^2 + 4$
3	$f = g$
	Løs: $\{x = -1, x = 1\}$
4	f(Høyreside($3, 1))
	$\rightarrow$ 1
5	f(Høyreside($3, 2))
	$\rightarrow$ 1

Skjæringspunktene har koordinater (–1 , 1) og (1 , 1).

b Vi løser med CAS.

6	$\pi \int_{-1}^{1} g^2\,dx$
	$\rightarrow \frac{98}{5}\pi$
7	$\pi \int_{-1}^{1} f^2\,dx$
	$\rightarrow \frac{2}{5}\pi$
8	$\$6 - \$7$
	$\rightarrow \frac{96}{5}\pi$

Volumet av «ringen» er $\frac{96\pi}{5}$.

2.115

1	$f(x) := 2 + \sqrt{1 - x^2}$
	$\rightarrow f(x) := \sqrt{-x^2 + 1} + 2$
2	$g(x) := 2 - \sqrt{1 - x^2}$
	$\rightarrow g(x) := -\sqrt{-x^2 + 1} + 2$
3	$f = g$
	Løs: $\{x = -1, x = 1\}$
4	$\pi \int_{-1}^{1} g^2\,dx$
	$\rightarrow -2\pi^2 + \frac{28}{3}\pi$
5	$\pi \int_{-1}^{1} f^2\,dx$
	$\rightarrow 2\pi^2 + \frac{28}{3}\pi$
6	$\$7 - \$6$
	$\rightarrow 4\pi^2$

Volumet av smultringen er $4\pi^2$.

2.116

a Vi finner først skjæringspunktene mellom grafene.

1 $y = x^2$

$\rightarrow$ $\mathbf{y = x^2}$

2 $x = y^2$

$\rightarrow$ $\mathbf{x = y^2}$

3 $\{\$1, \$2\}$

Løs: $\{\{\mathbf{x = 0, y = 0}\}, \{\mathbf{x = 1, y = 1}\}\}$

Deretter finner vi volumet av omdreiningslegemet.

4 $\pi \int_0^1 \text{Invers}(x^2)^2 \, dx$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{1}{2}\pi}$

5 $\pi \int_0^1 (x^2)^2 \, dx$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{1}{5}\pi}$

6 $\$4 - \$5$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{3}{10}\pi}$

Volumet er $\frac{3\pi}{10}$.

b Vi har allerede skjæringspunktene fra oppgave a.
Vi finner volumet av omdreiningslegemet med CAS.

7 $\pi \int_0^1 (y^2)^2 \, dy$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{1}{5}\pi}$

8 $\pi \int_0^1 \text{Invers}(y^2)^2 \, dy$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{1}{2}\pi}$

9 $\$8 - \$7$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{3}{10}\pi}$

Volumet er $\frac{3\pi}{10}$.

2.117

a Vi løser med CAS.

1 $f(x) := x + 1$

→ $f(x) := x + 1$

2 $2\pi \cdot \text{Integral}\left(f \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}, 2, 5\right)$

→ $27\sqrt{2}\,\pi$

Arealet av flaten er $27\pi\sqrt{2}$.

b Vi løser med CAS.

1 $f(x) := x^3$

→ $f(x) := x^3$

2 $2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} f \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

→ $\frac{4625}{46656}\pi$

3 $2

≈ 0.311

Arealet av flaten er 0,311.

c Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$

→ $f(x) := \frac{2x^6 + 1}{8x^2}$

2 $2\pi \int_{1}^{2} f \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

→ $\frac{16911}{1024}\pi$

3 $2

≈ 51.882

Arealet av flaten er 51,9.

d Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \sqrt{x}$

$\rightarrow$ $f(x) := \sqrt{x}$

2 $2\pi \int_1^2 f \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

$\approx$ **8.283**

Arealet av flaten er 8,28.

2.118

a Vi løser med CAS.

1 $g(y) := \frac{y^3}{3}$

$\rightarrow$ $g(y) := \frac{1}{3} y^3$

2 $2\pi \cdot \text{Integral}\left(g \cdot \sqrt{1 + (g'(y))^2}, y, 0, 1\right)$

$\rightarrow$ $\frac{1}{9}\pi \left(2\sqrt{2} - 1\right)$

Arealet av flaten er $\frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{9}$.

b Vi løser med CAS.

1 $f(x) := x^2 - 1$

$\rightarrow$ $f(x) := x^2 - 1$

2 $g(y) := \text{Invers}(f(y))$

$\rightarrow$ $g(y) := \sqrt{y+1}$

3 $2\pi \int_{f(\sqrt{2})}^{f(\sqrt{6})} g \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$

$\rightarrow$ $\frac{49}{3}\pi$

Arealet av flaten er $\frac{49\pi}{3}$.

2.119

Funksjonsuttrykket for en halvsirkel med sentrum i origo er $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Overflaten av omdreiningslegemet er gitt ved

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{(r^2 - x^2) + \frac{(r^2 - x^2)x^2}{r^2 - x^2}}\ \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2}\ \mathrm{d}x$$

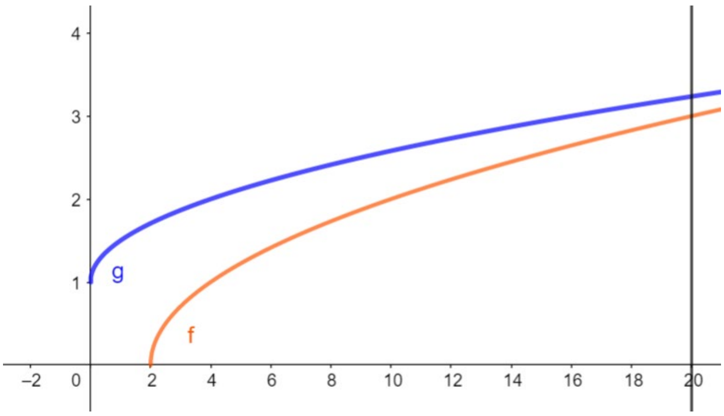
$$= 2\pi \int_{-r}^{r} r\ \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \left[r \cdot x\right]_{-r}^{r}$$

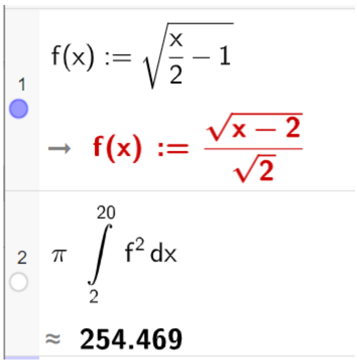
$$= 4\pi r^2$$

2.120

a Vi lager først en skisse av grafene og linja $x = 20$.



Vi ser at det indre av vasen er definert av grafen til f. Vi finner derfor volumet av omdreiningslegemet vi får når grafen til f dreies om x-aksen.



Vasen rommer 254 cm^3.

b Vi bruker g for å finne volumet av hele vasen. Så trekker vi fra det indre volumet vi fant i oppgave a.

4 $g(x) := \frac{\sqrt{x}}{2} + 1$

$\rightarrow\ g(x) := \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$

5 $\pi \int_0^{20} g^2\,dx$

$\rightarrow\ \frac{1}{3}\pi\left(80\sqrt{5} + 210\right)$

6 \$5

$\approx\ 407.24$

7 \$6 − \$3

$\approx\ 152.771$

Vasen består av 153 cm³ glass.

c Vi bruker *g* for å finne overflaten av vasen.

8 $2\pi \int_0^{20} g\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx$

$\approx\ 315.439$

Den ytre overflaten av vasen er 315 cm².

2.121

a Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \frac{1}{x}$

$\rightarrow\ f(x) := \frac{1}{x}$

2 $V(a) := \pi \cdot \text{Integral}(f^2, 1, a)$

$\rightarrow\ V(a) := \pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)$

b Vi løser med CAS.

3 $A(a) := 2\pi \cdot \text{Integral}\left(f \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}, 1, a\right)$

$\rightarrow\ A(a) := 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \frac{\sqrt{2}\,a^2 - a^2 \ln\left(-a^2 + \sqrt{a^4+1}\right) + a^2 \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) - \sqrt{a^4+1}}{a^2}$

c Vi finner grenseverdiene med CAS.

4 Grenseverdi(V(a), a, inf)

$\rightarrow\ \pi$

5 Grenseverdi(A(a), a, inf)

$\rightarrow\ \infty$

Volumet er endelig mens overflaten er uendelig.

2.122

a Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \sqrt{2-x}$

$\rightarrow$ $f(x) := \sqrt{-x+2}$

2 $f(x) = 0$

Løs: $\{x = 2\}$

3 Integral(f, 0, 2)

$\rightarrow \frac{4}{3}\sqrt{2}$

Arealet av flatestykket er $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

b **1** Vi løser med CAS.

4 $\pi \int_0^2 f^2 \, dx$

$\rightarrow 2\pi$

Volumet av flatestykket er 2π .

2 Vi løser med CAS.

5 $\pi \int_{f(2)}^{f(0)} \text{Invers}(f(x))^2 \, dx$

$\rightarrow \frac{32}{15}\sqrt{2}\,\pi$

Volumet av flatestykket er $\frac{32\pi}{15}\sqrt{2}$.

c Vi løser med CAS.

6 $2\pi \cdot \text{Integral}\left(f \cdot \sqrt{1+f'(x)^2}, 0, 2\right)$

$\rightarrow \frac{13}{3}\pi$

Arealet av omdreiningsflaten er $\frac{13\pi}{3}$.

2.123

a Vi løser med CAS.

1	$f(x) := 8 - x^2$
	$\rightarrow$ $f(x) := -x^2 + 8$
2	$g(x) := x^2$
	$\rightarrow$ $g(x) := x^2$
3	$f = g$
	Løs: $\{x = -2, x = 2\}$
4	$\pi \int_{-2}^{2} f^2 \, dx$
	$\rightarrow$ $\frac{2752}{15}\pi$
5	$\pi \int_{-2}^{2} g^2 \, dx$
	$\rightarrow$ $\frac{64}{5}\pi$
6	$\$4 - \$5$
	$\rightarrow$ $\frac{512}{3}\pi$

Volumet av omdreiningslegemet er $\frac{512\pi}{3}$.

b Vi legger merke til at romlegemet vi får ved å dreie dette flatestykket 180° om *y*-aksen, er det samme legemet som vi får ved å dreie halve flatestykket 360° om y-aksen. Vi tenker oss at vi dreier den halvparten som ligger i første kvadrant, og løser med CAS.

7	$\pi \int_{f(2)}^{f(0)} \text{Invers}(f)^2 \, dx$
	$\rightarrow$ 8π
8	$\pi \int_{g(0)}^{g(2)} \text{Invers}(g)^2 \, dx$
	$\rightarrow$ 8π
9	$\$7 + \$8$
	$\rightarrow$ 16π

Volumet blir 16π.

2.124

a Tverrsnittet av paraboloiden blir en sirkel med radius lik y.

Arealet av tverrsnittet er derfor gitt ved $A(x) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot x$.

b $V = \int_0^{20} A(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right]_0^{20} = \left(\frac{1}{2}\pi \cdot 20^2\right) - \left(\frac{1}{2}\pi \cdot 0^2\right) = 200\pi$

2.125

Volumet av omdreiningslegemet er gitt ved $\pi \cdot \int_0^c 2^2 - (\ln(x+1))^2 \, dx$, der c er x-koordinaten til skjæringspunktet mellom grafen til f og linja $y = 2$.

```
from pylab import *

a = 0 # nedre grense i intervallet
b = 2 # øvre grense for funksjonsverdien
delta_x = 0.001

def f(x):
    return (log(x+1))

c = f(a)
summen = 0

while c < b:
    summen = summen +(2**2 - f(a)**2)* delta_x
    a = a + delta_x
    c = f(a)

print(round(pi*summen,1))
```

```
40.1
>>>
```

Volumet av omdreiningslegemet er 40,1.

2.126

Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \sqrt{36 - 6x}$

$\rightarrow$ $f(x) := \sqrt{6}\sqrt{-x+6}$

2 $V(t) := \pi \int_t^{t+2} f^2 \, dx$

$\rightarrow$ $V(t) := \pi(-12t + 60)$

3 $V(t) = 30\pi$

Løs: $\left\{t = \frac{5}{2}\right\}$

2.127

Vi setter kjegla og sylinderen inn i et koordinatsystem med sentrum av bunnen til kjegla i origo og *y*-aksen opp gjennom toppen av kjegla. Sidekanten på kjegla krysser da *y*-aksen ved $y = 20$ og *x*-aksen ved $x = 10$. Denne linja er gitt ved likningen $y = 20 - 2x$. Toppen av sylinderen må treffe denne linja. Høyden og radien til sylinderen er derfor $h = y = 20 - 2x$ og $r = x$. Volumet av sylinderen er da $V(x) = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot x^2 \cdot (20 - 2x) = \pi(20x^2 - 2x^3)$.

Vi bruker CAS til å bestemme det største volumet.

1	$V(x) := \pi\ (20\ x^2 - 2\ x^3)$
	$\rightarrow\ \mathbf{V(x) := \pi\ (-2\ x^3 + 20\ x^2)}$
2	$V'(x) = 0$
	Løs: $\left\{ \mathbf{x = 0, x = \frac{20}{3}} \right\}$
3	$V''(\text{Høyreside}(\$2, 1))$
	$\rightarrow\ \mathbf{40\ \pi}$
4	$V''(\text{Høyreside}(\$2, 2))$
	$\rightarrow\ \mathbf{-40\ \pi}$
5	$V(\text{Høyreside}(\$2, 2))$
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{8000}{27}\ \pi}$
6	$\$5$
	$\approx\ \mathbf{930.842}$

Det største volumet sylinderen kan ha, er 931 cm^3.

2.128

a $\int 7t \text{ dt} = 7 \cdot \frac{1}{1+1} t^{1+1} + C$

$= \frac{7}{2} t^2 + C$

b $\int \frac{t}{7} \text{ dt} = \frac{1}{7} \int t \text{ dt}$

$= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} t^2 + C$

$= \frac{t^2}{14} + C$

c $\int \frac{7}{t} \text{ dt} = 7 \int \frac{1}{t} \text{ dt}$

$= 7 \ln |t| + C$

d $\int e^{3x} \text{ dx} = \frac{1}{3} e^{3x} + C$

e $\int_1^3 2x \, dx = \left[x^2\right]_1^3$

$= 3^2 - 1^2$

$= 8$

f $\int_2^3 4x \, dx = \left[2x^2\right]_2^3$

$= (2 \cdot 3^2) - (2 \cdot 2^2)$

$= 10$

g $\int_1^7 5 \, dx = [5x]_1^7$

$= 5 \cdot 7 - 5 \cdot 1$

$= 30$

h $\int_0^3 (2x - 5) \, dx = \left[x^2 - 5x\right]_0^3$

$= (3^2 - 5 \cdot 3) - (0^2 - 5 \cdot 0)$

$= -6$

i $\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = [\ln|x|]_1^2$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

j $\int_1^e \frac{4}{5x} \, dx = \frac{4}{5} \int_1^e \frac{1}{x} \, dx$

$= \frac{4}{5} [\ln|x|]_1^e$

$= \frac{4}{5} (\ln e - \ln 1)$

$= \frac{4}{5}$

2.129

a $\int_0^1 g(x) \, dx = f(1) - f(0) = 0 - 3 = -3$

b $\int_{-2}^1 h(x) \, dx = g(1) - g(-2) = (-1) - 8 = -9$

2.130

a **1** $\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -A_2 = -4{,}5$

2 $\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 = 12$

3 $\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -A_2 + A_1 = -4{,}5 + 12 = 7{,}5$

b $\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -A_2 + A_1 = A_1 - A_2$

2.131

a Kostnaden må være en antiderivert av $K'(x)$.

$$K(x) = \int 0{,}8x + 70\,\mathrm{d}x = 0{,}4x^2 + 70x + C$$

b
$$\begin{aligned} K(0) &= 12\,000 \\ 0{,}4 \cdot 0^2 + 70 \cdot 0 + C &= 12\,000 \\ C &= 12\,000 \end{aligned}$$

2.132

a Vi løser med CAS.

1 $f(t) := 150t \cdot e^{-0.3t}$

$\rightarrow$ $f(t) := 150\,t\,e^{\frac{-3}{10}t}$

2 Integral(f, 0, 8)

$\rightarrow$ $\dfrac{-17000 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{e^{12}}} + 5000}{3}$

3 $2

$\approx$ **1152.598**

Maskinen produserer omtrent 1153 smådeler i løpet av en arbeidsdag.

b $\dfrac{1153}{8} = 144$

Maskinen produserer i gjennomsnitt 144 smådeler i timen.

2.133

a Vi løser med CAS.

1 $n(t) := 300 \cdot e^{-0.12t} - 300\, e^{-0.20t}$

$\rightarrow$ $\mathbf{n(t) := -300\, e^{\frac{-1}{5}t} + 300\, e^{\frac{-3}{25}t}}$

2 Integral(n, 0, 5)

$\rightarrow$ $\mathbf{-300 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{25\, e\, \frac{1}{\sqrt[5]{e^3}} - 15}{e} - \frac{10}{3}\right)}$

3 \$2

$\approx$ **179.79**

Omtrent 180 personer ble smittet de fem første dagene ifølge modellen.

b

4 Integral(n(t), t, 0, 14)

$\approx$ **625.28**

Omtrent 625 personer ble smittet i løpet av de to første ukene ifølge modellen.

c

5 $\frac{\$4}{14}$

$\approx$ **44.663**

I gjennomsnitt ble omtrent 45 personer smittet daglig de første to ukene.

d

10 Integral(n, 0, t) = 800, t = 1

NLøs: $\mathbf{\{t = 19.969\}}$

Det tok 20 dager før 800 personer ble smittet.

2.134

a $$\int 10x \, dx = 10 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$= 5x^2 + C$$

b $$\int 4e^x \, dx = 4e^x + C$$

c $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$$

d $$\int 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \, dx = x + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 4 \cdot \frac{1}{4}x^4 + 5 \cdot \frac{1}{5}x^5 + C$$
$$= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + C$$

2.135

a $\int 2ax - 3b \, dx = 2a \cdot \frac{1}{2}x^2 - 3bx + C$

$= ax^2 - 3bx + C$

b $\int ax^2 - bx \, dx = a \cdot \frac{1}{3}x^3 - b \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$

$= \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}bx^2 + C$

c $\int ae^{bx} \, dx = a \cdot \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$

$= \frac{a}{b}e^{bx} + C$

d $\int \frac{a}{bx} \, dx = \int \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$= \frac{a}{b}\ln|x| + C$

2.136

a Vi bruker delvis integrasjon.

$\int 6xe^x \, dx = 6xe^x - \int 6e^x \, dx$

$= 6xe^x - 6e^x + C$

$= 6e^x(x-1) + C$

b Vi bruker delvis integrasjon.

$\int e^x \cdot (4x+1) \, dx = e^x \cdot (4x+1) - \int e^x \cdot 4 \, dx$

$= e^x \cdot (4x+1) - 4e^x + C$

$= e^x(4x-3) + C$

c Vi bruker variabelskifte $u = x^4$.

$\int x^3 e^{x^4} \, dx = \int x^3 e^u \, \frac{du}{4x^3}$

$= \int \frac{x^3}{4x^3} \cdot e^u \, du$

$= \frac{1}{4}\int e^u \, du$

$= \frac{1}{4}e^u + C$

$= \frac{1}{4}e^{x^4} + C$

d Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int 8x \cdot \ln x \, dx &= 4x^2 \cdot \ln x - \int 4x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= 4x^2 \cdot \ln x - \int 4x \, dx \\ &= 4x^2 \cdot \ln x - 2x^2 + C \\ &= 2x^2(2\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

e Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int 12x^3 \cdot \ln x \, dx &= 3x^4 \cdot \ln x - \int 3x^4 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= 3x^4 \cdot \ln x - \int 3x^3 \, dx \\ &= 3x^4 \cdot \ln x - \frac{3}{4}x^4 + C \\ &= \frac{3}{4}x^4(4\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

f Vi bruker variabelskifte med $u = \ln x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x)^2}{3x} \, dx &= \int \frac{u^2}{3x} \frac{du}{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{3}\int u^2 \, du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}u^3 + C \\ &= \frac{(\ln x)^3}{9} + C\end{aligned}$$

g
$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x} \, dx &= \int \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int 1 + \frac{1}{x} \, dx \\ &= x + \ln|x| + C\end{aligned}$$

h
$$\int \frac{4}{x+2} \, dx = 4\ln|x+2| + C$$

2.137

a Vi bruker delbrøkoppspalting.

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx = \int \frac{6}{(x+3)(x-3)}\,dx$$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{6}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{6}{(x+3)(x-3)} = \frac{A(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{B(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$6 = A(x-3) + B(x+3)$$

Denne likningen skal gjelde for alle u.

For å finne A setter vi inn -3 for u:

$$6 = A\big((-3)-3\big) + B\big((-3)+3\big)$$

$$6 = -6A$$

$$A = -1$$

For å finne B setter vi inn 3 for x:

$$6 = A(3-3) + B(3+3)$$

$$6 = 6B$$

$$B = 1$$

Dette viser at $\frac{6}{(x+3)(x-3)} = \frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x-3}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{6}{x^2-9}\,dx &= \int \left(\frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x-3}\right)dx \\ &= -\ln|x+3| + \ln|x-3| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C\end{aligned}$$

b Vi bruker variabelskifte med $u = x^2 - 9$.

$$\begin{aligned}\int \frac{6x}{x^2-9}\,dx &= \int \frac{6x}{u}\,\frac{du}{2x} \\ &= \int \frac{6x}{2x}\cdot\frac{1}{u}\,du \\ &= 3\ln|u| + C \\ &= 3\ln|x^2-9| + C\end{aligned}$$

c Vi bruker variabelskifte med $u = x + 2$.

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4}{u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{1}\\ &= 4\int u^{-2}\,\mathrm{d}u\\ &= -4u^{-1} + C\\ &= -\frac{4}{u} + C\\ &= -\frac{4}{x+2} + C\end{aligned}$$

d Vi bruker variabelskifte med $u = \mathrm{e}^x + 1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3\mathrm{e}^x}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^x}\\ &= \int 3\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= 3\ln|u| + C\\ &= 3\ln(\mathrm{e}^x + 1) + C\end{aligned}$$

e Vi bruker først polynomdivisjon til å omskrive brøken.

$$(5x^2 - 20x + 3) : (x - 4) = 5x + \frac{3}{x-4}$$
$$\underline{-(5x^2 - 20x)}$$
$$3$$

Så bestemmer vi integralet.

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2 - 20x + 3}{x - 4}\,\mathrm{d}x &= \int \left(5x + \frac{3}{x-4}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{5}{2}x^2 + 3\ln|x - 4| + C\end{aligned}$$

f Vi finner først det ubestemte integralet med delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}\int (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= (x+1)\mathrm{e}^x - \int 1\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= (x+1)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\\ &= x\mathrm{e}^x + C\end{aligned}$$

Så finner vi det bestemte integralet.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1\\ &= 1\cdot\mathrm{e}^1 - 0\cdot\mathrm{e}^0\\ &= \mathrm{e}\end{aligned}$$

g $$\int_{-1}^{2} \frac{6}{3x+4}\,dx = \left[\frac{6}{3}\ln|3x+4|\right]_{-1}^{2}$$
$$= \big(2\ln(3\cdot 2+4)\big) - \big(2\ln(3\cdot(-1)+4)\big)$$
$$= 2\ln 10 - 2\ln 1$$
$$= 2\ln 10$$

h Vi finner først det ubestemte integralet med delbrøkoppspalting.

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2}{(x+1)(x-1)}\,dx$$

Vi må bestemme to konstanter A og B, slik at

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Vi utvider brøkene på høyre side slik at de får samme nevner som på venstre side. Det gir

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

Vi setter tellerne lik hverandre og får

$$2 = A(x-1) + B(x+1)$$

Denne likningen skal gjelde for alle u.

For å finne A setter vi inn -1 for u:

$$2 = A\big((-1)-1\big) + B\big((-1)+1\big)$$
$$2 = -2A$$
$$A = -1$$

For å finne B setter vi inn 1 for x:

$$2 = A(1-1) + B(1+1)$$
$$2 = 2B$$
$$B = 1$$

Dette viser at $\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$= -\ln|x+1| + \ln|x-1| + C$$
$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Vi bruker så det ubestemte integralet til å finne det bestemte integralet.

$$\int_3^5 \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_3^5$$
$$= \ln\frac{5-1}{5+1} - \ln\frac{3-1}{3+1}$$
$$= \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}$$
$$= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2$$
$$= 2\ln 2 - \ln 3$$
$$= \ln\frac{4}{3}$$

2.138

a Arealet er gitt ved

$$A = \int_0^2 6 - f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 (6-3x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[6x - \frac{3}{2}x^2\right]_0^2$$
$$= 6\cdot 2 - \frac{3}{2}\cdot 2^2$$
$$= 6$$

b **1** Volumet er gitt ved

$$V = \pi\int_0^2 6^2 - f(x)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi\int_0^2 \left(36-(3x)^2\right)\mathrm{d}x$$
$$= \pi\int_0^2 \left(36-9x^2\right)\mathrm{d}x$$
$$= \pi\left[36x - 3x^3\right]_0^2$$
$$= 72\pi - 24\pi$$
$$= 48\pi$$

2 Volumet er gitt ved

$$V = \pi\int_0^6 \left(f^{-1}(y)\right)^2\,\mathrm{d}y$$
$$= \pi\int_0^6 \left(\frac{1}{3}y\right)^2\,\mathrm{d}y$$
$$= \pi\left[\frac{1}{27}y^3\right]_0^6$$
$$= 8\pi$$

c **1** Arealet er gitt ved

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^2 f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ \mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^2 3x\sqrt{1+3^2}\ \mathrm{d}x \\ &= 2\pi\sqrt{10}\int_0^2 3x\ \mathrm{d}x \\ &= 2\pi\sqrt{10}\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^2 \\ &= 2\pi\sqrt{10}\cdot\frac{3}{2}2^2 \\ &= 12\pi\sqrt{10} \end{aligned}$$

2 Arealet er gitt ved

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^6 f^{-1}(y)\sqrt{1+\left(f^{-1\prime}(x)\right)^2}\ \mathrm{d}y \\ &= 2\pi\int_0^6 \frac{1}{3}y\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\ \mathrm{d}y \\ &= 2\pi\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}\int_0^6\frac{1}{3}y\ \mathrm{d}y \\ &= 2\pi\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}\left[\frac{1}{6}y^2\right]_0^6 \\ &= 2\pi\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6^2 \\ &= 4\pi\sqrt{10} \end{aligned}$$

2.139

a Vi får en kjegle med spissen i origo og grunnflate ved $x = 4$.

b $V = \dfrac{G\cdot h}{3} = \dfrac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3} = \dfrac{\pi\cdot 4^2\cdot 4}{3} = \dfrac{64\pi}{3}$

c $\pi\cdot\displaystyle\int_0^4 x^2\ \mathrm{d}x = \pi\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \pi\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right) = \frac{64\pi}{3}$

2.140

Denne funksjonen har ingen nullpunkter.

Arealet er derfor gitt ved det bestemte integralet:

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-4}^{1} 6e^{2x+8}\,dx\\ &= \left[\frac{6}{2}e^{2x+8}\right]_{-4}^{1}\\ &= \left(3e^{2\cdot 1+8}\right)-\left(3e^{2\cdot(-4)+8}\right)\\ &= 3e^{10}-3e^{0}\\ &= 3e^{10}-3\end{aligned}$$

2.141

a Vi bruker CAS til å bestemme *f*.

1 $f(x) := \int \frac{2}{\sqrt{x+5}}\,dx$

$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := 4\sqrt{x+5}+c_1}$

2 $f(4) = 3$

Løs: $\{\mathbf{c_1 = -9}\}$

Dermed har vi at funksjonen er gitt ved $f(x) = 4\sqrt{x+5}-9$.

b Vi bruker CAS til å bestemme *f*.

1 $g(x) := \int (2x+1)^5\,dx$

$\rightarrow\ \mathbf{g(x) := \frac{1}{12}(2x+1)^6+c_1}$

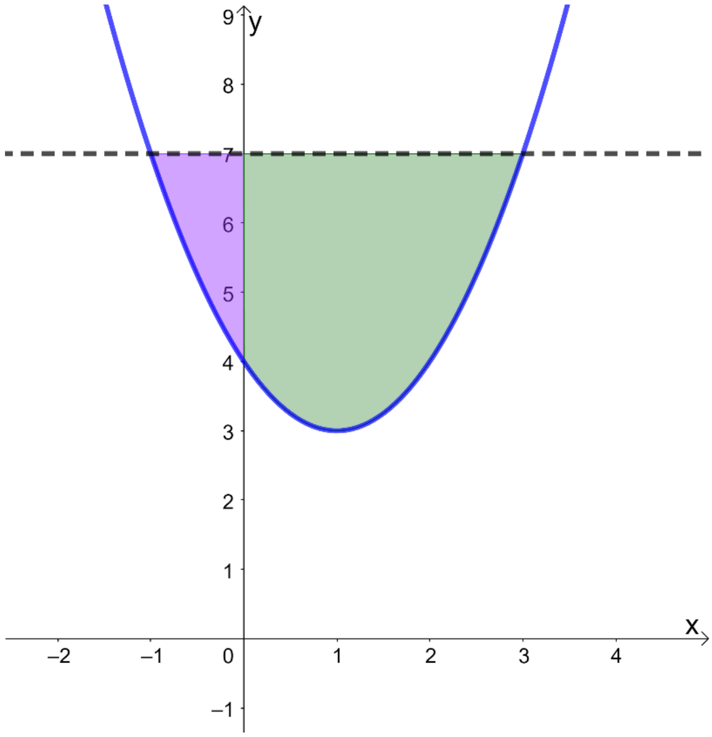
2 $g(0) = 2$

Løs: $\left\{\mathbf{c_1 = \frac{23}{12}}\right\}$

Dermed har vi at funksjonen er gitt ved $g(x) = \frac{1}{12}(2x+1)^6+\frac{23}{12}$.

2.142

Vi tegner grafen til *f* og linja *y* = 7 inn i et koordinatsystem.



Vi skal finne forholdet mellom det grønne og det fiolette området.

Vi bruker CAS for å regne ut arealene.

1 $f(x) := x^2 - 2x + 4$

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := x^2 - 2x + 4}$

2 $g(x) := 7$

$\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := 7}$

3 $f = g$

Løs: $\mathbf{\{x = -1, x = 3\}}$

4 Lille := IntegralMellom(f, g, −1, 0)

$\rightarrow$ $\mathbf{Lille := \frac{-5}{3}}$

5 Store := IntegralMellom(f, g, 0, 3)

$\rightarrow$ $\mathbf{Store := -9}$

6 $\frac{\text{Store}}{\text{Lille}}$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{27}{5}}$

Forholdet mellom arealene er $\frac{27}{5}$.

2.143

a Arealet er gitt ved

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2} x\mathrm{e}^x\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2} x\mathrm{e}^x\right]_0^2 - \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 \\
&= \frac{\mathrm{e}^2+1}{2}
\end{aligned}
$$

b Volumet er gitt ved

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\cdot\int_0^2 f(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\cdot\int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x^2\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\cdot\left[\frac{1}{8}x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}\right]_0^2 - \pi\cdot\int_0^2 \frac{1}{4}\cdot x\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\cdot\left[\frac{1}{8}x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}\right]_0^2 - \pi\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot x\cdot\mathrm{e}^{2x}\right]_0^2 + \pi\cdot\int_0^2 \frac{1}{8}\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\cdot\left[\frac{1}{8}x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}\right]_0^2 - \pi\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot x\cdot\mathrm{e}^{2x}\right]_0^2 + \pi\cdot\left[\frac{1}{16}\cdot\mathrm{e}^{2x}\right]_0^2 \\
&= \pi\cdot\left(\frac{1}{8}2^2\cdot\mathrm{e}^{2\cdot 2} - \frac{1}{8}0^2\cdot\mathrm{e}^{2\cdot 0}\right) - \pi\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot 2\cdot\mathrm{e}^{2\cdot 2} - \frac{1}{8}\cdot 0\cdot\mathrm{e}^{2\cdot 0}\right) + \pi\cdot\left(\frac{1}{16}\cdot\mathrm{e}^{2\cdot 2} - \frac{1}{16}\cdot\mathrm{e}^{2\cdot 0}\right) \\
&= \frac{5\pi}{16}\cdot\mathrm{e}^4 - \frac{\pi}{16} \\
&= \frac{\pi}{16}(5\mathrm{e}^4 - 1)
\end{aligned}
$$

2.144

a Vi løser med CAS.

1. $f(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   $\rightarrow \mathbf{f(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$

2. $f(x) = 0$

   Løs: $\{x = 0\}$

3. $\text{Integral}(f, 0, 1)$

   $\rightarrow \sqrt{2} - 1$

Arealet av området er $\sqrt{2}-1$.

b Vi løser med CAS.

4. $\pi \int_0^1 f^2 \, dx$

   $\rightarrow \frac{-1}{4} \pi^2 + \pi$

Volumet av omdreiningslegemet er $\pi - \frac{\pi^2}{4}$.

c Vi løser med CAS.

5. $2\pi \int_0^1 f \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$

   ≈ 3.066

Arealet av omdreiningsflaten er 3,07.

2.145

$$V = \pi \cdot \int_1^e \left(\sqrt{\ln x}\right)^2 \, dx$$
$$= \pi \cdot \int_1^e \ln x \, dx$$
$$= \pi \cdot \int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx$$
$$= \pi \cdot [x \cdot \ln x]_1^e - \pi \cdot \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \pi \cdot [x \cdot \ln x]_1^e - \pi \cdot [x]_1^e$$
$$= \pi(e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1) - \pi \cdot (e - 1)$$
$$= \pi$$

2.146

a Vi finner først x-koordinatene til skjæringspunktene.

$$f(x) = g(x)$$
$$x = x^2$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 1$$

Vi regner så ut volumet av omdreiningslegemet.

$$V = \pi \cdot \int_0^1 x^2 - (x^2)^2 \, dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^1 x^2 - x^4 \, dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= \pi\left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{5} \cdot 1^5\right)$$
$$= \frac{2\pi}{15}$$

b Vi finner først de omvendte funksjonene.

$$y = x$$
$$x = y$$
$$f^{-1}(y) = y$$
$$y = x^2$$
$$x = \sqrt{y}$$
$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Vi regner så ut volumet av omdreiningslegemet.

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 - (x)^2 \, dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^1 x - x^2 \, dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \pi\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right)$$
$$= \frac{\pi}{6}$$

2.147

a Vi løser med CAS.

1	$f(x) := x^2 + m\,x + n$
	$\rightarrow\ \mathbf{f(x)\ :=\ x^2 + m\,x + n}$
2	$T_P(x) := \text{Tangent}(2, f)$
	$\rightarrow\ \mathbf{T_P(x)\ :=\ m\,x + n + 4\,x - 4}$
3	$T_Q(x) := \text{Tangent}(6, f)$
	$\rightarrow\ \mathbf{T_Q(x)\ :=\ m\,x + n + 12\,x - 36}$
4	$T_P = T_Q$
	Løs: $\mathbf{\{x = 4\}}$

b Vi løser med CAS.

6	$\text{IntegralMellom}(f, T_Q, 4, 6)$
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{8}{3}}$
7	$\text{IntegralMellom}(f, T_P, 2, 4)$
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{8}{3}}$

Vi ser at begge områdene har areal $\frac{8}{3}$ uavhengig av verdiene til m og n.

2.148

Vi løser med CAS.

1 $f(x) := 3\,e^{-x} + x\,e^{-x}$

$\rightarrow\ f(x) := 3\,e^{-x} + x\,e^{-x}$

2 $\pi \displaystyle\int_0^5 (f-3)^2\,dx$

$\rightarrow\ \pi \dfrac{216\,e^5 + 109\,(e^5)^2 - 145}{4\,(e^5)^2}$

3 $\$2$

$\approx\ 86.746$

Volumet av romfiguren er 86,7.

2.149

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_1^2 \left(\sqrt{\frac{2x}{x^2+3}}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_1^2 \frac{2x}{x^2+3}\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_4^7 \frac{2x}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2x} \\
&= \pi \cdot \left[\ln|x|\right]_4^7 \\
&= \pi\left(\ln 7 - \ln 4\right) \\
&= \pi \ln\frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

2.150

a Vi bruker CAS. Vi definerer først funksjonen *f* og linja. Deretter finner vi nullpunktet til *f* og *x*-koordinaten til skjæringspunktet mellom grafen til *f* og den rette linja.

1 $f(x) := \ln(x)$
$\rightarrow$ $f(x) := \ln(x)$

2 $g(x) := 1$
$\rightarrow$ $g(x) := 1$

3 $f(x) = 0$
Løs: $\{x = 1\}$

4 $f = g$
Løs: $\{x = e\}$

5 Integral(g, 0, e)
$\rightarrow$ e

6 Integral(f, 1, e)
$\rightarrow$ 1

7 $\$5 - \$6$
$\rightarrow$ $e - 1$

Arealet av området er e – 1.

b **1** Vi løser med CAS.

8 $\pi \int_0^e 1^2 \, dx - \pi \int_1^e f^2 \, dx$
$\rightarrow$ 2π

Volumet av omdreiningslegemet er 2π .

2 Vi løser med CAS.

9 $\pi \int_0^1 \text{Invers}(f)^2 \, dx$
$\rightarrow$ $\frac{1}{2} \pi (e^2 - 1)$

Volumet av omdreiningslegemet er $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$.

2.151

a Funksjonsuttrykket til den øvre halvdelen av sirkelen er gitt ved $g(x)=\sqrt{5-x^2}$. Vi skal bestemme arealet av området mellom grafene til f og g.

1	$f(x) := 2x$
	$\rightarrow\ f(x) := 2x$
2	$g(x) := \sqrt{5-x^2}$
	$\rightarrow\ g(x) := \sqrt{-x^2+5}$
3	$f = g$
	Løs: $\{x = 1\}$
4	IntegralMellom(g, f, 0, 1)
	$\rightarrow\ \frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
5	\$4
	$\approx\ 1.159$

Arealet av området er 1,16.

b Vi løser med CAS.

6	$\pi\int_0^{f(1)} \text{Invers}(f)^2\,dx$
	$\rightarrow\ \frac{2}{3}\pi$
7	$\pi\int_{g(1)}^{g(0)} \text{Invers}(g)^2\,dx$
	$\rightarrow\ \frac{1}{3}\pi\left(10\sqrt{5}-22\right)$
8	\$6 + \$7
	$\rightarrow\ \frac{1}{3}\pi\left(10\sqrt{5}-20\right)$
9	\$8
	$\approx\ 2.472$

Volumet av omdreiningslegemet er 2,47.

2.152

Her må vi finne lengden av profilen, det vil si lengden av grafen. Deretter må vi gange med lengden av undergangen for å få veggarealet.

1 $f(x) := 2 - x^2$

$\rightarrow$ $f(x) := -x^2 + 2$

2 $\int_{-1.5}^{1.5} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

$\rightarrow$ $\dfrac{6\sqrt{10} + \ln\left(6\sqrt{10} + 19\right)}{4}$

3 $2

$\approx$ 5.653

4 $3 · 6

$\approx$ 33.916

Arealet av veggene er 34 m^2.

2.153

a Vi bruker CAS.

1 $f(x) := x\, e^{-x}$

$\rightarrow$ $f(x) := x\, e^{-x}$

2 $f(x) = 0$

Løs: $\{x = 0\}$

3 Integral(f, −1, 0)

$\rightarrow$ -1

Arealet av området er 1.

b Vi bruker CAS.

1 $f(x) := x\, e^{-x}$

$\rightarrow$ $f(x) := x\, e^{-x}$

2 $\pi \int_{-1}^{0} f^2\, dx$

$\rightarrow$ $\frac{1}{4}\pi\left(e^2 - 1\right)$

Volumet av omdreiningslegemet er $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

c Vi bruker CAS.

4 $l(x) := \frac{x}{e}$

$\rightarrow$ $l(x) := \frac{x}{e}$

5 $f = l$

Løs: $\{x = 0, x = 1\}$

6 $f(0)$

$\rightarrow$ $\mathbf{0}$

7 $f(1)$

$\rightarrow$ $\frac{1}{e}$

Skjæringspunktene er (0 , 0) og $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

d Vi bruker CAS.

8 IntegralMellom(f, l, 0, 1)

$\rightarrow$ $\frac{e - \frac{5}{2}}{e}$

9 $8

$\approx$ **0.08**

Arealet av området er $\frac{e - \frac{5}{2}}{e} = \frac{2e - 5}{2e}$.

2.154

Dette smykket er et omdreiningslegeme. Vi lar alle mål være i cm. Da er den ytre overflaten av smykket gitt ved at grafen til funksjonen $f(x)=\sqrt{0{,}5^2-x^2}$ dreies om x-aksen. Den indre overflaten er gitt ved at linja $f(x)=0{,}05$ dreies om x-aksen.

Vi bruker CAS til å bestemme volumet.

1	$f(x) := \sqrt{0.5^2 - x^2}$
	$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := \frac{1}{2}\sqrt{-4x^2+1}}$
2	$g(x) := 0.05$
	$\rightarrow\ \mathbf{g(x) := \frac{1}{20}}$
3	$f(x) = g(x)$
	Løs: $\left\{\mathbf{x = -3\cdot\frac{\sqrt{11}}{20}, x = 3\cdot\frac{\sqrt{11}}{20}}\right\}$
4	$\pi \int_{\text{HøyreSide(\$3,1)}}^{\text{HøyreSide(\$3,2)}} f^2 - g^2\,dx$
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{99}{2000}\sqrt{11}\,\pi}$
5	$\frac{99}{2000}\sqrt{11}\,\pi$
	$\approx\ \mathbf{0.516}$

Volumet av smykket er altså 0,516 cm^3.

Massen til smykket er $0{,}516\cdot 19{,}3 = 9{,}96$.

Gullsmeden trenger 9,96 gram gull.

2.155

a De to halvsirklene er grafene til funksjonen $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ og $g(x)=\sqrt{r^2-x^2}$.

Vi løser med CAS.

1	$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$
	$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}}$
2	$g(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$
	$\rightarrow\ \mathbf{g(x) := \sqrt{r^2 - x^2}}$

3 $\pi \int_{-R}^{R} f^2 \, dx$

$\rightarrow \frac{4}{3} R^3 \pi$

4 $\pi \int_{-r}^{r} g^2 \, dx$

$\rightarrow \frac{4}{3} r^3 \pi$

5 $\$3 - \$4$

$\rightarrow \frac{4}{3} R^3 \pi - \frac{4}{3} r^3 \pi$

6 $\$5 \stackrel{?}{=} \frac{4}{3} \pi \left(R^3 - r^3\right)$

$\rightarrow$ **true**

b Her er den indre radien 3,0 cm, og den ytre radien blir 3,2 cm.
Vi setter dette inn i uttrykket fra oppgave a for å bestemme volumet.

7 ByttUt($5, {r = 3, R = 3.2})

$\rightarrow \frac{2884}{375} \pi$

8 $7

$\approx$ **24.161**

Julie trenger 24,16 cm^3 gull.

9 $\$8 \cdot 19.3 \cdot 315$

$\rightarrow \frac{29377289257681239}{200000000000}$

10 $9

$\approx$ **146886.446**

Det vil koste omtrent 147 000 kr å forgylle kula.

2.156

Vi har at $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$. Det bestemte integralet blir derfor $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$.

For å bestemme ln 2 numerisk kan vi for eksempel bruke det følgende programmet:

```
a = 1 # nedre grense i intervallet
b = 2 # øvre grense i intervallet
n = 100000 # antall rektangler

def f(x):
    return 1/x

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # rektangelbredden

for i in range(n): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + (i+1)*delta_x) * delta_x

print(round(summen,8))
```

Setter vi antall rektangler stort nok, kan vi få så stor nøyaktighet som vi vil. Med 100 000 rektangler får vi

```
0.69314468
>>>
```

Here er de fem første desimalene riktige.

2.157

a Vi løser med CAS.

1	Integral(e^x, 0, 1)
	$\rightarrow$ $\mathbf{e - 1}$

b

```
from pylab import *

a = 0 # nedre grense i intervallet
b = 1 # øvre grense i intervallet
n =200 # antall rektangler

def f(x):
    return exp(x)

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # rektangelbredden

for i in range(n): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + (i+1)*delta_x) * delta_x

print(round(summen,2))
```

```
1.72
>>>
```

Integralet er omtrent 1,72.

c $$\int_0^1 e^x \, dx \approx \int_0^1 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \, dx$$
$$= \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \right]_0^1$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$$
$$= \frac{41}{24}$$

2.158

Vi bruker først polynomdivisjon.

$$(2x^2 + 3x - 26) : (x^2 + 2x - 8) = 2 - \frac{x+10}{x^2 + 2x - 8}$$
$$\underline{-(2x^2 + 4x - 16)}$$
$$-x - 10$$

Deretter bruker vi delbrøkoppspalting.

$$\frac{x+10}{x^2+2x-8} = \frac{x+10}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$$
$$x + 10 = A(x-2) + B(x+4)$$

Vi setter x lik -4 for å bestemme A.

$$(-4) + 10 = A\big((-4) - 2\big) + B\big((-4) + 4\big)$$
$$6 = -6A$$
$$A = -1$$

Vi setter x lik 2 for å bestemme B.

$$2 + 10 = A(2-2) + B(2+4)$$
$$12 = 6B$$
$$B = 2$$

Da har vi vist at $\dfrac{x+10}{x^2+2x-8} = -\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{2}{x-2}$.

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 26}{x^2 + 2x - 8} \, dx = \int \left(2 + \frac{1}{x+4} - \frac{2}{x-2} \right) dx$$
$$= 2x + \ln|x+4| - 2\ln|x-2| + C$$

$$\int_3^5 \frac{2x^2 + 3x - 26}{x^2 + 2x - 8} \, dx = \left[2x + \ln|x+4| - 2\ln|x-2| \right]_3^5$$
$$= (2 \cdot 5 + \ln 9 - 2\ln 3) - (2 \cdot 3 + \ln 7 - 2\ln 1)$$
$$= 4 - \ln 7$$

Arealet av området er $4 - \ln 7$.

2.159

a $$A = \int_0^q f(x) \, dx = \int_0^q x^n \, dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^q = \frac{q^{n+1}}{n+1}$$

b $$B = q \cdot f(q) = q \cdot q^n = q^{n+1}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{q^{n+1}}{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{1}{n+1}$$

c

$$\begin{aligned}V&=\pi\cdot\int_0^q\left(x^n\right)^2\,\mathrm{d}x\\&=\pi\cdot\int_0^q x^{2n}\,\mathrm{d}x\\&=\pi\cdot\left[\frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n+1}\right]_0^q\\&=\frac{\pi\cdot q^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W&=\pi\cdot\int_0^q f(q)^2\,\mathrm{d}x\\&=\pi\cdot\int_0^q q^{2n}\,\mathrm{d}x\\&=\pi\cdot\left[q^{2n}\cdot x\right]_0^q\\&=\pi\cdot q^{2n+1}\end{aligned}$$

$$\frac{V}{W}=\frac{\frac{\pi q^{2n+1}}{2n+1}}{\pi q^{2n+1}}=\frac{1}{2n+1}$$

2.160

a

$$\int_0^1\left(1+t^4\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\approx\ 1.338$$

```
a = 0 # nedre grense i intervallet
b = 1 # øvre grense i intervallet
n = 1000 # antall trapeser

def f(x):
    return (1+x**4)**(3/2)

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # trapesbredden

summen = delta_x / 2 * (f(a) + f(b))

for i in range(n-1): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + i*delta_x) * delta_x

print(round(summen,2))
```

```
1.34
>>>
```

b

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

$\approx$ **1.494**

```
from pylab import *

a = -1 # nedre grense i intervallet
b = 1 # øvre grense i intervallet
n = 100 # antall trapeser

def f(x):
    return exp(-x**2)

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # trapesbredden

summen = delta_x / 2 * (f(a) + f(b))

for i in range(n-1): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + i*delta_x) * delta_x

print(round(summen,2))
```

```
1.49
>>>
```

2.161

a **1**

```
# lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
f = [0, 2, 6, 12, 19, 24, 28, 29, 30]

delta_x = x[1] - x[0]    # rektangelbredde
n = len(x)           # antall x-verdier i lista
summen = 0

for i in range(n-1):
    summen = summen + f[i] * delta_x

print(round(summen, 2))
```

```
120
>>>
```

Venstretilnærming gir verdien 120 meter.

2

```
# lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
f = [0, 2, 6, 12, 19, 24, 28, 29, 30]

delta_x = x[1] - x[0]    # rektangelbredde
n = len(x)          # antall x-verdier i lista
summen = 0

for i in range(n-1):
    summen = summen + f[i+1] * delta_x

print(round(summen, 2))
```

```
150
>>>
```

Høyretilnærming gir verdien 150 meter.

b En bedre tilnærming vil være gjennomsnittet av de to: $\frac{120+150}{2} = 135$ m.

2.162

Vi finner først et uttrykk for fluksen.

$$\varepsilon = -\phi'(t)$$

$$\int_0^t \varepsilon \, \mathrm{d}t = -\phi(t)$$

$$\phi(t) = -\int_0^t \varepsilon \, \mathrm{d}t$$

Fra dette ser vi at den største fluksen er ved tidspunktet der spenningsgrafen krysser tidsaksen. Dette er ved tidspunktet 0,15 s. Vi bruker så grafen til å lese av sammenhengene verdier mellom tid og spenning.

Tid / s	0,00	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15
Spenning / V	0	–0,03	–0,13	–0,48	–1,28	0,0

Vi bruker så numerisk integrasjon for å finne en tilnærmingsverdi for fluksen.

```
# lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [0.00, 0.03, 0.06, 0.09, 0.12, 0.15]
f = [0, -0.03, -0.13, -0.48, -1.28, 0]

n = len(x)        # antall x-verdier i lista
summen = 0

for i in range(n-1): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + (f[i] +f[i+1]) * (x[i+1]-x[i]) / 2
    # trapesarealer

print(round(summen, 2))
```

```
-0.06
>>>
```

Den magnetiske fluksen er omtrent 0,06 Vs.

KAPITTELTEST

Oppgave 1

a $\int_0^{\ln 5} 4e^{2x}\,dx = \left[2e^{2x}\right]_0^{\ln 5}$

$= 2e^{2\cdot\ln 5} - 2e^0$

$= 2e^{\ln 5^2} - 2$

$= 2\cdot 25 - 2$

$= 48$

b $\int x\cdot e^{3x}\,dx = x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}\,dx$

$= \frac{1}{3}x\cdot e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

$= \frac{1}{9}(3x-1)e^{3x} + C$

c $\int\frac{2x+32}{x^2-16}\,dx = \int\frac{2x+32}{(x+4)(x-4)}\,dx$

Vi bruker delbrøkoppspalting.

$\frac{2x+32}{(x+4)(x-4)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4}$

$\frac{2x+32}{(x+4)(x-4)} = \frac{A(x-4)}{x+4} + \frac{B(x+4)}{x-4}$

$2x+32 = A(x-4) + B(x+4)$

Vi setter inn –4 for x for å bestemme A.

$2\cdot(-4)+32 = A\big((-4)-4\big) + B\big((-4)+4\big)$

$24 = -8A$

$A = -3$

Vi setter inn 4 for x for å bestemme B.

$2\cdot 4 + 32 = A(4-4) + B(4+4)$

$40 = 8B$

$B = 5$

Dermed kan vi regne ut integralet.

$\int\frac{2x+32}{(x+4)(x-4)}\,dx = \int\left(\frac{-3}{x+4} + \frac{5}{x-4}\right)dx$

$= -3\ln|x+4| + 5\ln|x-4| + C$

d
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{2x+1}{u}\,\frac{du}{2x+1}$$
$$= \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + C$$
$$= \ln|x^2+x| + C$$

$$\int_2^5 \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \Big[\ln|x^2+x|\Big]_2^5$$
$$= \ln(5^2+5) - \ln(2^2+2)$$
$$= \ln 30 - \ln 6$$
$$= \ln\frac{30}{6}$$
$$= \ln 5$$

Oppgave 2

a Vi regner ut arealet av de to områdene mellom grafen til f og x-aksen.

Over x-aksen: $\frac{(4{,}5+1)\cdot 2}{2} = 5{,}5$

Under x-aksen: $\frac{1{,}5\cdot 2}{2} = 1{,}5$

Dette gir oss verdien av integralet: $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 5{,}5 - 1{,}5 = 4$

b Vi vet at området under x-aksen har areal lik 1,5. Hvis integralet skal bli lik null, må vi ha et like stort areal over x-aksen. Vi antar at x er mellom 0 og 1. Da har vi et trapes som skal ha areal lik 1,5.

$$\frac{\big((1{,}5-x)+(1-x)\big)\cdot 2}{2} = 1{,}5$$
$$2{,}5 - 2x = 1{,}5$$
$$-2x = -1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Oppgave 3

a Vi løser med CAS.

1 $v(t) := 98 \cdot (1. - e^{-0.13t})$

$\rightarrow$ $v(t) := -98\, e^{\frac{-13}{100}t} + 98$

2 Integral(v, 0, 5)

$\rightarrow$ $\dfrac{9800 \cdot \frac{1}{\sqrt[20]{e^{13}}} - 3430}{13}$

3 $2

$\approx$ 129.696

Hopperen faller 130 meter de første 5 sekundene.

b

4 $\frac{\$3}{5}$

$\approx$ **25.939**

Gjennomsnittsfarten til hopperen er 26 m/s.

Oppgave 4

a Vi løser med CAS.

1 $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}}$

2 Integral(f, 1, 9)

$\rightarrow$ **4**

Arealet av flatestykket er 4.

b **1** Vi løser med CAS.

3 $\pi \int_{1}^{9} f^2 \, dx$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{\pi \ln(9)}$

Volumet av omdreiningslegemet er $\pi \cdot \ln 9 = 2\pi \cdot \ln 3$.

2 Vi løser med CAS.

4 $\pi \int_{f(9)}^{f(1)} \text{Invers}(f)^2 \, dx$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{26}{3} \pi}$

Volumet av omdreiningslegemet er $\frac{26}{3}\pi$.

c Vi løser med CAS.

5 $g(x) := 48\, f(x)$

$\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := \frac{48}{\sqrt{x}}}$

6 $h(x) :=$ Tangent(4, g)

$\rightarrow$ $\mathbf{h(x) := -3\,x + 36}$

7 IntegralMellom(g, h, 1, 4)

$\rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{21}{2}}$

Arealet av området er $\frac{21}{2}$.

Oppgave 5

a Vi bruker CAS til å finne skjæringspunktene mellom grafene og bestemme integralet.

1	$f(x) := 2 - 5x^2$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := -5x^2 + 2}$
2	$g(x) := x^3 - 5x^2 - kx + 2$ $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := x^3 - 5x^2 - kx + 2}$
3	$f = g$ Løs: $\left\{x = -\sqrt{k}, x = 0, x = \sqrt{k}\right\}$
4	IntegralMellom(f, g, Høyreside($3, 1), Høyreside($3, 3)) $\rightarrow$ $\mathbf{0}$

Siden integralet blir null, så må arealet av området der *f* er størst, være like stort som arealet av området der *g* er størst.

b Vi bruker CAS. Vi vet at områdene er like store. Arealet av det første området er derfor 9.

5	IntegralMellom(g, f, HøyreSide($3, 1), 0) $\rightarrow$ $\frac{1}{4}k^2$
6	$5 = 9 Løs: $\{k = -6, k = 6\}$

Siden k er større enn null, er det bare én løsning, $k = 6$.

Oppgave 6

a Vi løser med CAS.

1	$r(x) := 0.0087x^3 - 0.13x^2 + 0.49x + 2.64$ $\rightarrow$ $r(x) := \frac{87}{10000}x^3 - \frac{13}{100}x^2 + \frac{49}{100}x + \frac{66}{25}$
2	$\pi \int_0^{10} r^2 \, dx$ $\rightarrow$ $\frac{452959}{5250}\pi$
3	$2 $\approx$ **271.05**

Glasset rommer 271 cm^3 eller 2,7 dL.

b Vi løser med CAS.

$$\pi \int_0^x r^2 \, dx = 200$$

Løs: $\{x = 7.194\}$

Vannet vil stå til 7,2 cm over bunnen.

c Vi løser i GeoGebra.

Først definerer vi den ytre radien som *R*(*x*).

$$R(x) = r(x) + 0.1$$
$$\rightarrow 0.009\,x^3 - 0.13\,x^2 + 0.49\,x + 2.64 + 0.1$$

Deretter bestemmer vi arealet av bunnen.

$$\text{bunn} = \pi\,(R(0))^2$$
$$\rightarrow 23.586$$

Så finner vi arealet av siden av glasset.

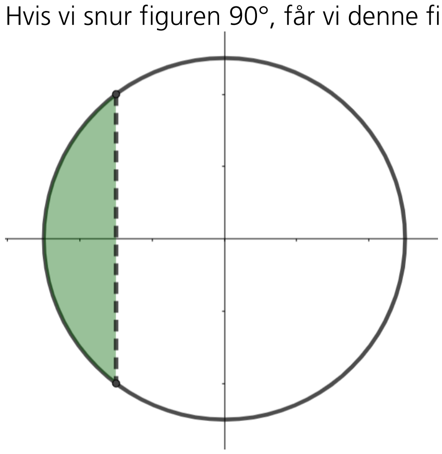
$$s(x) = 2\,\pi\,R(x)\,\sqrt{1 + (R'(x))^2}$$
$$\rightarrow 2\,\pi\,(0.009\,x^3 - 0.13\,x^2 + 0.49\,x + 2.64 + 0.1)\,\sqrt{1 + (0.026\,x^2 - 0.26\,x + 0.49)^2}$$

$$\text{siden} = \text{Integral}(s, 0, 10)$$
$$\rightarrow 194.329$$

Den ytre overflaten av glasset er 23,6 + 194,3 = 218 cm^3.

Oppgave 7

Hvis vi snur figuren 90°, får vi denne figuren:



Her er det grønne området den delen av isen som er over vann.

Vi finner et uttrykk for denne delen.

1	$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$
	$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}}$
2	$\pi \int_{-r}^{-r+h} f^2 \, dx$
	$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{-1}{3} h^3 \pi + h^2 r \pi}$
3	\$2
	Faktoriser: $\mathbf{h^2 (3r - h) \frac{\pi}{3}}$

Volumet av delen over vann er $h^2(3r-h)\frac{\pi}{3}$.

Volumet av hele isklumpen er $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Siden 10 % av hele isklumpen er over vann, får vi likningen $0{,}10 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = h^2(3r-h)\frac{\pi}{3}$ som vi løser med CAS.

For å gjøre det enklere velger vi å sette alle lengder i forhold til radius, slik at $r = 1$. Vi får da lengden av h i forhold til radius.

1	$\frac{4}{3}\pi \, 1^3 \cdot 0.1 = h^2(3 \cdot 1 - h) \frac{\pi}{3}$
	Løs: $\mathbf{\{h = -0.346, h = 0.392, h = 2.954\}}$

Siden h verken kan være negativ eller større enn diameteren, får vi bare én gyldig løsning, $h = 0{,}392$.

Diameteren er summen av h og H.

$$h + H = 2r$$
$$H = 2r - h$$
$$H = 2 - 0{,}392$$
$$H = 1{,}608$$

Forholdet mellom høydene er $\frac{0{,}392}{1{,}608} = 0{,}244$.

Oppgave 8

```
from pylab import *

a = 1 # nedre grense i intervallet
b = 2 # øvre grense i intervallet
n = 1000 # antall trapeser

def f(x):
    return (exp(x**2))**2

summen = 0
delta_x = (b - a)/n # trapesbredden

summen = delta_x / 2 * (f(a) + f(b))

for i in range(n-1): # i fra 0 til og med n-1
    summen = summen + f(a + i*delta_x) * delta_x

print(round(pi*summen,2))
```