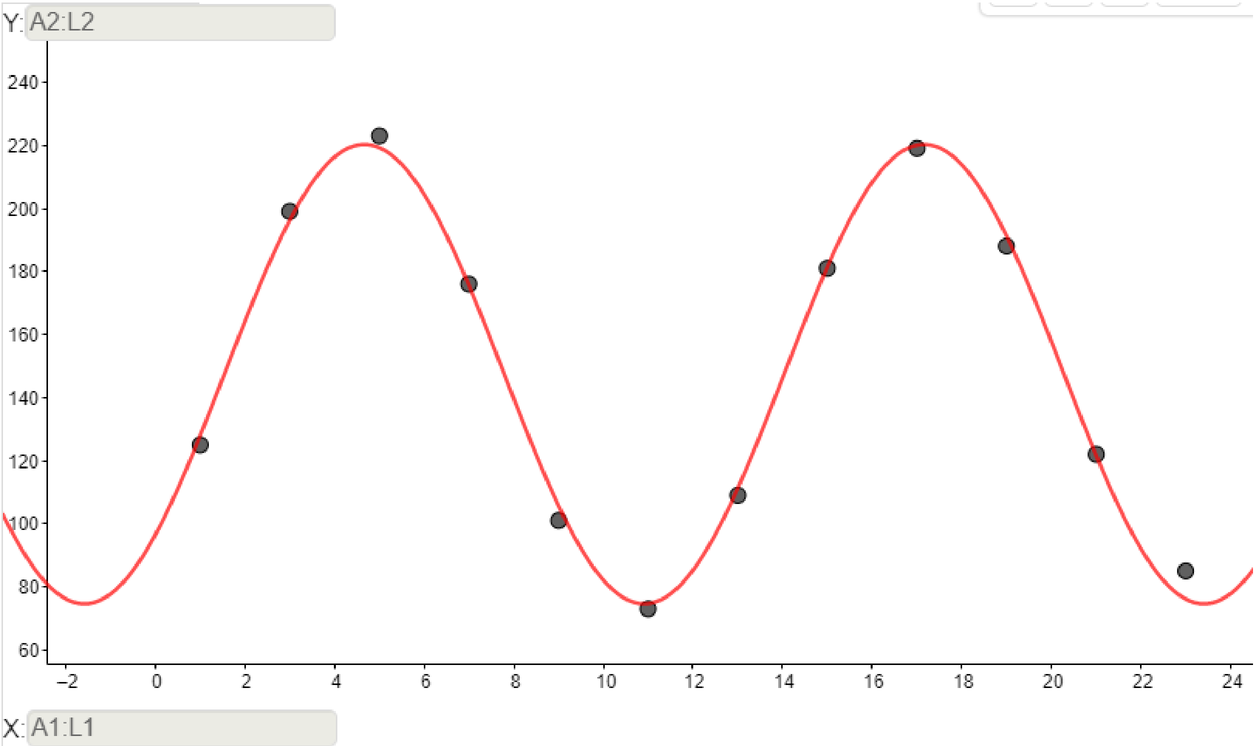
R2 kapittel 4 Modeller

LØSNINGER AV OPPGAVENE I BOKA

4.1

a Vi legger inn tidene i rad 1 og høydene i rad 2 i regnearket i GeoGebra. Vi markerer cellene og velger Regresjonsanalyse. Under Regresjonsmodell velger vi Sin, siden en trigonometrisk modell vil passe best ettersom tidevannet er periodisk.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
2	125	199	223	176	101	73	109	181	219	188	122	85



Regresjonsmodell

$$y = 147.4333 + 72.843\ \sin(0.5028\,x - 0.774)$$

Vi leser ut fra GeoGebra-vinduet ovenfor at en modell for høyden $h(t)$ cm over sjøkartnull t timer etter midnatt er $h(t) = 73\sin(0{,}5t - 0{,}8) + 147$.

b Modellen forteller at den gjennomsnittlige vannstanden er 147 cm over sjøkartnull (fordi likevektslinja er $y = 147$). Amplituden til h er 73, som betyr at det maksimale utslaget fra gjennomsnittshøyden er 73 cm. Det tar omtrent $\frac{2\pi}{0{,}5028} = 12{,}5$ timer mellom hver gang det er høyvann (perioden er 12,5).

c 1 Kl. 14 er høyden 146 cm over sjøkartnull.

Regresjonsmodell

Sin

$y = 147.4333 + 72.843 \sin(0.5028x - 0.774)$

Symbolsk utregning: $x = 14$ $y = 146.1714$

c 2 Vi setter uttrykket for *h* lik 40 og løser likningen i CAS.

1 $h(t) := 147.43 + 72.84 \sin(0.5t - 0.77)$

$\rightarrow h(t) := \frac{1821}{25} \sin\left(\frac{1257}{2500} t - \frac{387}{500}\right) + \frac{14743}{100}$

2 $\{h(t) = 40, t < 24, t > 0\}$

Løs: $\{\}$

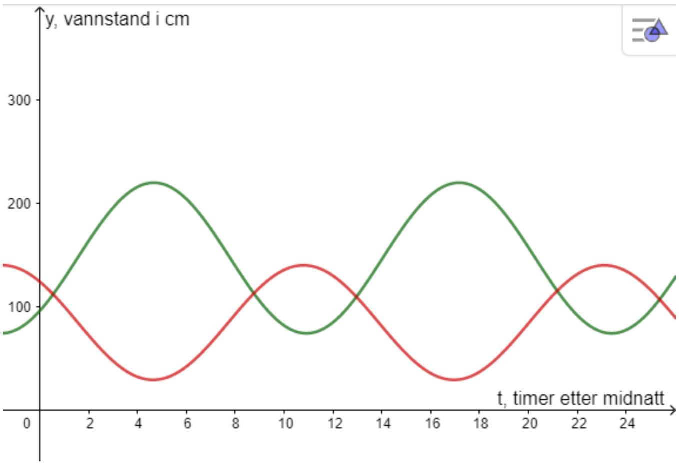
Vi velger $0 < t < 24$ siden vi bare er interessert i dette ene døgnet. Vi får ingen løsning, så høyden på tidevannet er aldri 40 cm.

c 3 Når det er lavvann (fjære), er $h(t)$ på sitt laveste. Vi ser på grafen laget i regresjonsanalysen i oppgave a at det skjer omtrent kl. 11 om formiddagen og halv 12 om kvelden.

d Tidevannet i Sandnessjøen illustreres med grønt, og tidevannet i Bergen med rødt. Det første vi legger merke til er at vannstanden generelt er høyere i Sandnessjøen. Vi ser også at når det er høyvann i Sandnessjøen, er det lavvann i Bergen (og motsatt).

Vannstanden er bare høyest i Bergen noen timer før og etter at det er høyvann der (og derfor lavvann i Sandnessjøen).

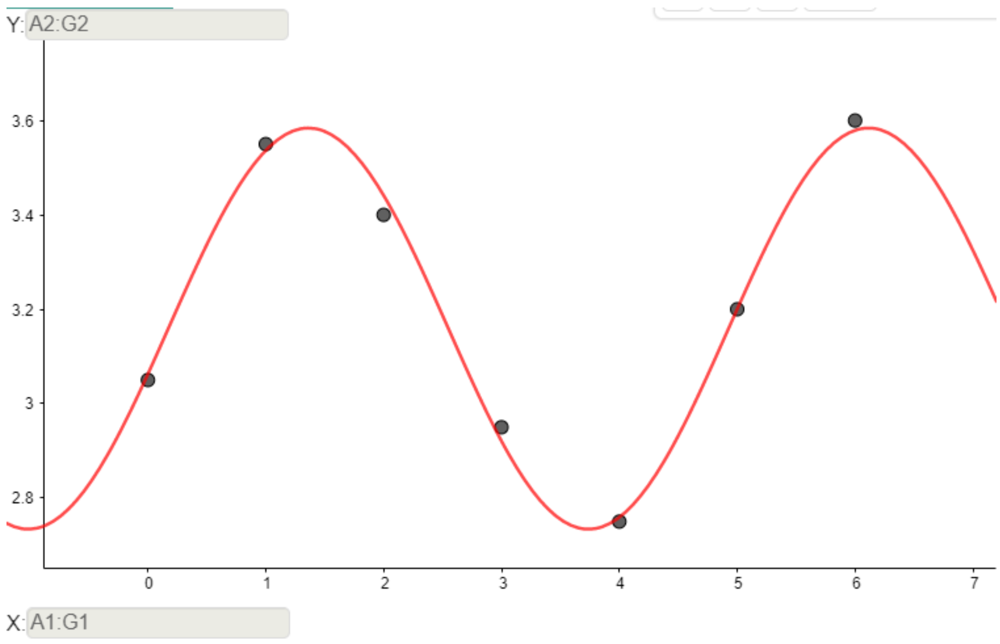
(NB! Tidevannsdataene fra de to byene ikke er fra samme døgn.)



4.2

a Vi skriver inn tidene i rad 1 og luftmengdene i rad 2. Så bruker vi verktøyet Regresjonsanalyse. Under Regresjonsmodell velger vi Sin.

	A	B	C	D	E	F	G
1	0	1	2	3	4	5	6
2	3.05	3.55	3.4	2.95	2.75	3.2	3.6



Regresjonsmodell

$$y = 3.159 + 0.4251\ \sin(1.3217\ x - 0.2283)$$

En modell for luftmengden V etter t sekunder er gitt ved $V(t) = 0{,}43\sin(1{,}32t - 0{,}23) + 3{,}16$.

b Gjennomsnittlig luftmengde tilsvarer likevektslinja til V og er altså 3,16 L.

c Perioden til V er $\dfrac{2\pi}{1{,}32} = 4{,}76$. Altså tar hver syklus av inn- og utpust 4,76 sekunder.

Det betyr at Erika trekker pusten $\dfrac{60}{4{,}76} = 12{,}6$ ganger per minutt.

d Vi definerer V i rad 1 og løser $V(t) = 3$ i rad 2. Fra tredje rad ser vi at løsningen på likningen er $t = 2{,}84 + 4{,}76k \quad \vee \quad t = -0{,}11 + 4{,}76k$. Den praktiske tolkningen av dette svaret er at Erika har 3,00 L luft i lungene sine etter 2,84 sekunder, og så mange ganger framover med 4,76 sekunders mellomrom. Hun har også 3,00 L luft i lungene sine etter 4,76 – 0,11 = 4,65 sekunder, og mange ganger framover med 4,76 sekunder mellomrom.
Årsaken til at vi får de to ulike løsningene, er at Erika først når 3,00 L når hun puster ut. Så puster hun ut litt mer, men når hun puster inn igjen, vil hun igjen passere 3,00 L. Derfor har $V(t) = 3$ to løsninger i løpet av én periode på 4,76 sekunder.

1	$V(t) := 0.43\ \sin(1.32\ t - 0.23) + 3.16$ $\rightarrow\ \dfrac{43}{100} \sin\left(\dfrac{33}{25}\ t - \dfrac{23}{100}\right) + \dfrac{79}{25}$
2	$V(t)\ = 3$ Løs: $\left\{t = \dfrac{50}{33}\ k_1\ \pi - \dfrac{25}{33}\ \sin^{-1}\left(\dfrac{16}{43}\right) + \dfrac{23}{132}, t = \dfrac{50}{33}\ k_1\ \pi + \dfrac{25}{33}\ \pi + \dfrac{25}{33}\ \sin^{-1}\left(\dfrac{16}{43}\right) + \dfrac{23}{132}\right\}$
3	\$2 $\approx\ \{t = 4.76\ k_1 - 0.11, t = 4.76\ k_1 + 2.84\}$

e Siden V er volumet av luft etter t sekunder, vil $V'(t)$ fortelle hvor fort Erika puster inn eller ut på et gitt tidspunkt. Vi ser i CAS at $V'(2) = -0{,}42$. Det betyr at hun etter 2 sekunder puster ut luft med en fart på 0,42 L/s.

1 $V(t) := 0.43\ \sin(1.32\ t - 0.23) + 3.16$

$\rightarrow\ V(t) := \frac{43}{100} \sin\left(\frac{33}{25} t - \frac{23}{100}\right) + \frac{79}{25}$

2 $V'(2)$

$\approx\ -0.42$

4.3

Svingningene mellom flo og fjære er harmoniske, og kan derfor skrives på formen $h(t) = A\sin(ct + \varphi) + d$.

Perioden er omtrent 12 timer, siden det er flo og fjære omtrent to ganger per døgn. Derfor er $c = \frac{2\pi}{12} = 0{,}524$.

Vi setter inn c i uttrykket for h og får $h(t) = A\sin(0{,}524t + \varphi) + d$.

For å bestemme de tre andre konstantene og plotte modellen bruker vi biblioteket `scipy.optimize`.
Vi skriver et program som bruker de samme dataene som ble oppgitt i oppgave 4.1, definerer funksjonen h og bruker kommandoen `curve_fit` for å gjøre en regresjonsanalyse:

```
from pylab import *
from scipy.optimize import curve_fit

# Leser inn dataene for vannstanden i Sandnessjøen
tid = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23]
vannstand = [125, 199, 223, 176, 101, 73, 109, 181, 219, 188, 122, 85]

# Definerer funksjonen h
def h(t, A, phi, d):
  return A*sin(0.524*t + phi) + d

# Bestemmer konstantene A, phi og d
[A, phi, d] = curve_fit(h, tid, vannstand)[0]
print("A =", round(A, 2))
print("phi =", round(phi, 2))
print("d =", round(d, 2))

# Plotter dataene sammen med grafen til h for t mellom 0 og 24
plot(tid, vannstand, "o")
xlabel("Tid (timer)")
ylabel("Vannstand (cm)")
t = linspace(0, 24, 1000)
plot(t, h(t, A, phi, d), "r")
show()
```

Vi kjører programmet og får verdien av parametrene:

```
A = 71.32
phi = -57.55
d = 150.13
```

Når vi setter dem inn i uttrykket for vannstanden, får vi $h(t) = 71\sin(0{,}524t - 57{,}6) + 150$. Vi legger til 18π i argumentet til sinusfunksjonen og får $h(t) = 71\sin(0{,}524t - 0{,}5) + 150$. Dette er i samsvar med modellen vi fant i oppgave 4.1, som var $h(t) = 73\sin(0{,}5t - 0{,}8) + 147$.

4.4

a Grafen stiger først sakte, så raskere og til slutt nærmer den seg en bestemt linje.
En logistisk funksjon vil passe best.

b Grafen svinger periodisk om en likevektslinje. Derfor vil en trigonometrisk funksjon passe best.

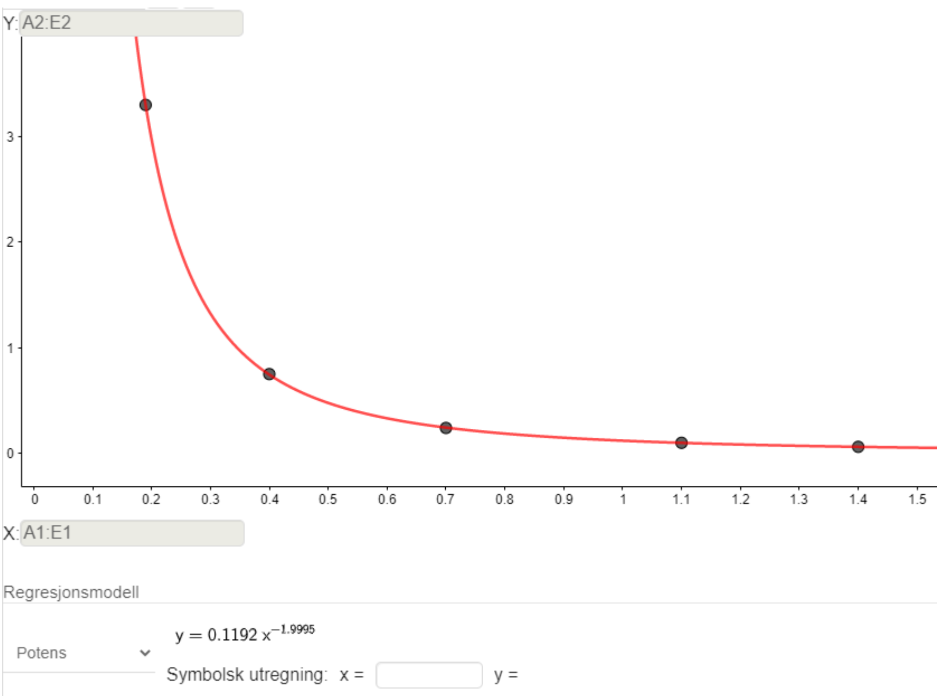
c Grafen stiger stadig raskere etter hvert som x blir større, så en eksponentialfunksjon med $b > 1$ vil passe best.

d Grafen synker stadig saktere for større verdier av x.
Det betyr at en eksponentialfunksjon med $0 < b < 1$ vil passe best.

4.5

a Vi skriver diametrene d inn i første rad og resistansene R inn i andre rad i et regneark i GeoGebra.
Så bruker vi verktøyet Regresjonsanalyse. Vi kommer fram til at en potensmodell vil passe best. Det er fordi punktene ligger høyt oppe og avtar raskt for lave d-verdier, mens R avtar saktere for større d-verdier. Vi velger derfor Potens under Regresjonsmodell.

	A	B	C	D	E
1	0.19	0.4	0.7	1.1	1.4
2	3.3	0.75	0.24	0.099	0.061



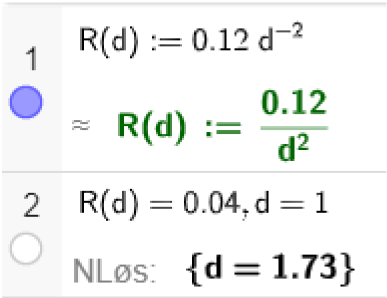
En modell for resistansen R Ω i en leder med diameter d mm er $R(d) = 0{,}12d^{-2} = \dfrac{0{,}12}{d^2}$.

b Vi setter inn $d = 1{,}5$ (merk at GeoGebra bruker x og y, ikke d og R) og finner at $R(1{,}5) = 0{,}053$.

Symbolsk utregning: x = 1.5 y = 0.053

I en leder med diameter 1,5 mm er altså resistansen omtrent 0,053 Ω.

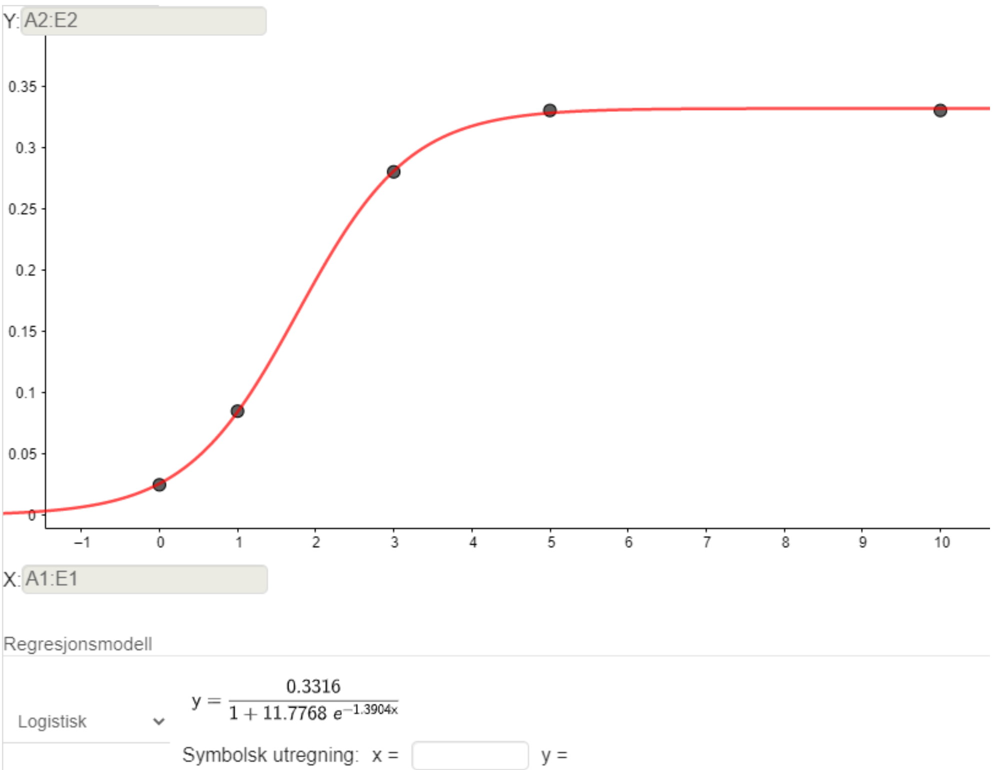
c Vi skriver inn uttrykket for R i CAS. Så løser vi likningen $R(d) = 0{,}04$.
Tykkelsen i en leder med 0,040 Ω er omtrent 1,7 mm.



4.6

a Vi fører dataene inn i et regneark i GeoGebra. I første rad skriver vi inn tidspunktene, og i andre rad skriver vi inn konsentrasjonene. Så velger vi Regresjonsanalyse. Plasseringen av de grå punktene tyder på at en logistisk modell vil passe best. Grafen vokser nemlig først sakte, så fort, og til slutt flater den ut.

	A	B	C	D	E
1	0	1	3	5	10
2	0.025	0.085	0.28	0.33	0.33



En modell for konsentrasjonen K mol/L etter t minutter er $K(t) = \dfrac{0{,}33}{1+11{,}78e^{-1{,}39t}}$.

b Modellen forteller at konsentrasjonen vokser raskt etter hvert som reaksjonen begynner å finne sted, men etter ca. 5 minutter stabiliserer den seg rundt et likevektspunkt på 0,33 mol/L.

4.7

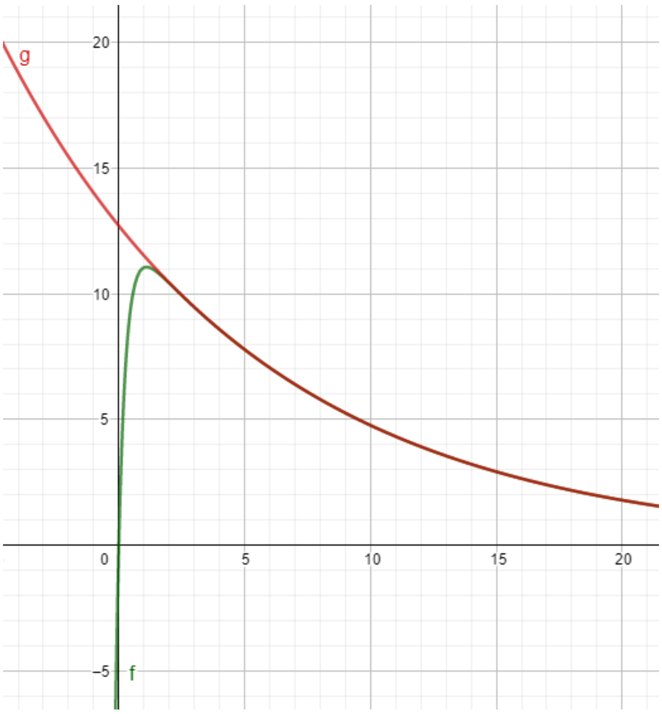
a Vi definerer f i første rad i GeoGebra og setter den deriverte lik null. Det gir t = 1,1. Vi ser av grafen at t = 1,1 gir et toppunkt (og ikke et bunnpunkt). Konsentrasjonen var altså størst etter 1,1 timer. Da var den omtrent 11 mg/L.

1	$f(t) := 12.7\left(e^{-0.098t} - e^{-3.29t}\right)$
	$\rightarrow\ f(t) := \frac{127}{10}\left(e^{\frac{-49}{500}t} - e^{\frac{-329}{100}t}\right)$
2	$f'(t) = 0, t = 1$
	NLøs: $\{t = 1.10078\}$
3	$f(1.10078)$
	$\approx\ 11.06167$

b Vi bruker kommandoen Grenseverdi(<Uttrykk>,<Variabel>,<Verdi>) og ser at $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$. I praksis betyr dette at konsentrasjonen av koffein i blodet etter hvert vil gå mot null.
Virkningen av tabletten forsvinner med tiden.

1	$f(t) := 12.7\left(e^{-0.098t} - e^{-3.29t}\right)$
	$\rightarrow\ f(t) := \frac{127}{10}\left(e^{\frac{-49}{500}t} - e^{\frac{-329}{100}t}\right)$
2	Grenseverdi$(f(t), t, \infty)$
	$\rightarrow\ 0$

c Vi legger merke til at *f* og *g* nærmest er sammenfallende for verdier av *t* som er større enn ca. 1 (det vil si når *f* begynner å minke). Det er fordi $12{,}7e^{-3{,}29t}$, som er differansen mellom *f* og *g*, blir svært liten for store verdier av *t*, og svært stor for små verdier av *t*.



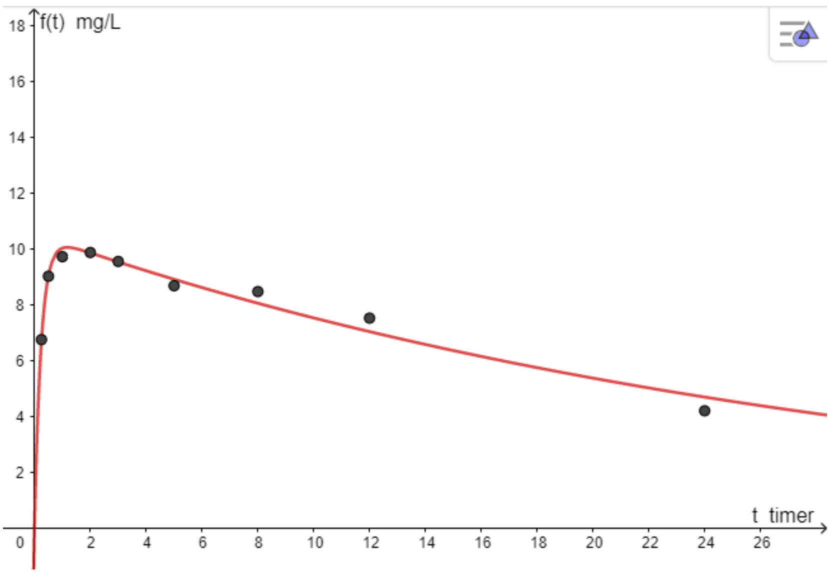
d Vi bruker *g* som en tilnærming for *f* når *t* er stor nok (altså når konsentrasjonen begynner å avta). Så skriver vi om funksjonsuttrykket til formen $12{,}7\cdot a^t$, for da er *a* vekstfarten til konsentrasjonen.
Vi ser av rad 1 nedenfor at *a* = 0,907.
Det betyr at 1 – 0,907 = 0,093 = 9,3 % av koffeinet blir brutt ned per time.

1	Løs$\left(12.7\,e^{-0.098t} = 12.7\,a^t, a\right)$
	$\approx\ \{a = 0.90665\}$

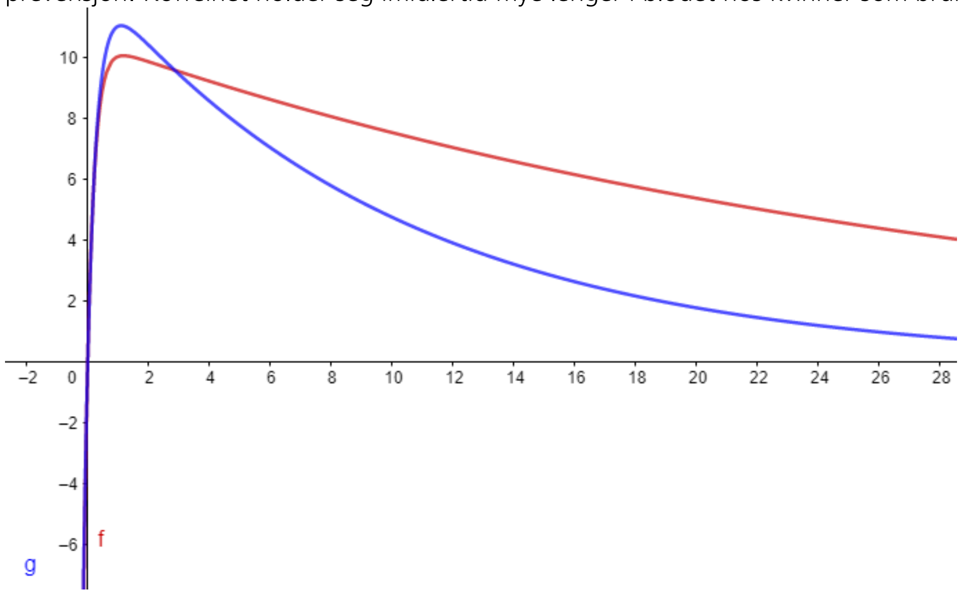
4.8
Vi skriver tidene inn i rad 1 og konsentrasjonene inn i rad 2 i et regneark i GeoGebra. Så markerer vi dataene, høyreklikker, velger Lag og klikker på Liste med punkt. I Algebrafeltet får vi da en liste som heter l1. Denne, og et funksjonsuttrykk på samme form som i eksempel 4, legger vi inn i kommandoen Reg(<Liste med punkt>,<Funksjon>).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	0.25	0.5	1	2	3	5	8	12	24
2	6.77	9.04	9.74	9.89	9.57	8.7	8.49	7.54	4.22

$$f(t) = \mathrm{Reg}\left(l1, a\left(e^{-bt} - e^{-ct}\right)\right)$$
$$\rightarrow\ 10.57\left(e^{-0.03t} - e^{-4.12t}\right)$$



En modell for konsentrasjonen av koffein i blodet hos kvinner som bruker p-piller, er gitt ved
$f(t) = 10{,}6\left(e^{-0{,}03t} - e^{-4{,}12t}\right)$.
Til sammenlikning er en modell for koffeinkonsentrasjonen for kvinner som ikke bruker p-piller, gitt ved
$g(t) = 12{,}7\left(e^{-0{,}098t} - e^{-3{,}29t}\right)$.
Vi tegner disse i samme koordinatsystem for å lettere kunne se forskjellen.
Vi ser at kvinner som ikke bruker prevensjon, har en høyere topp-konsentrasjon enn kvinner som bruker prevensjon. Koffeinet holder seg imidlertid mye lenger i blodet hos kvinner som bruker prevensjon.

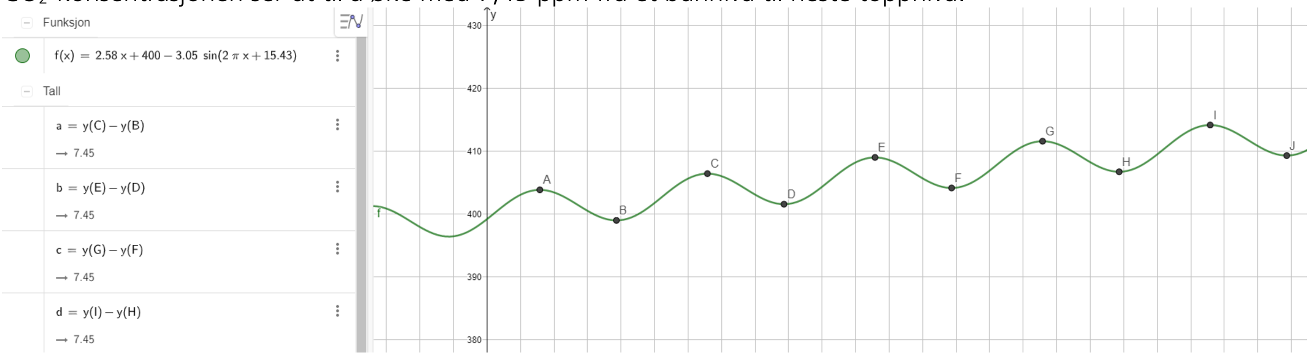


4.9

a Sinusfunksjonen er periodisk, og 400 er konstant, så vi ser på koeffisienten til *t* i det første leddet. Den viser at CO_2-konsentrasjonen økte med 2,58 ppm per år i det aktuelle intervallet.

b Vi leser av grafen tegnet i eksempel 5. Den har et toppunkt ca. én tredel inn i hvert år, så konsentrasjonen er på sitt høyeste rundt april/mai.

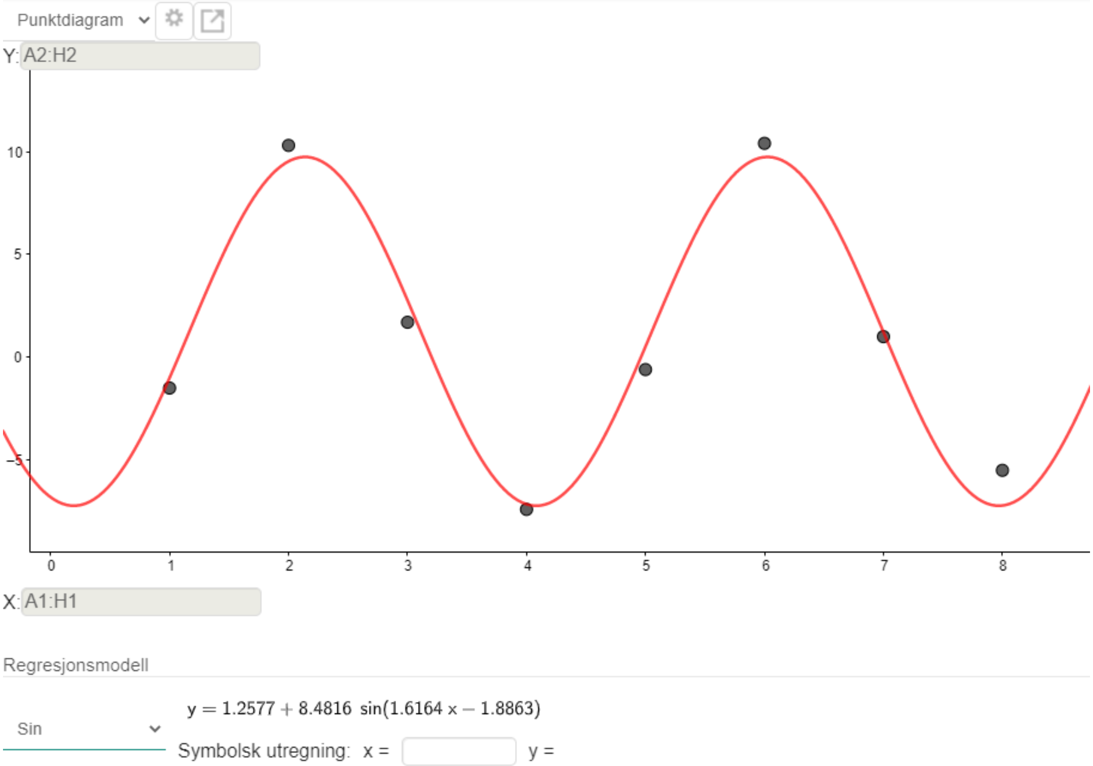
c Vi finner topp- og bunnpunktene på grafen til *f*.
CO_2-konsentrasjonen ser ut til å øke med 7,45 ppm fra et bunnivå til neste toppnivå.



4.10

a Når vi legger inn årstidene i første rad i et regneark i GeoGebra, bruker vi x = 1 som vår 2013, x = 2 som sommer 2013, osv. I andre rad skriver vi inn de målte middeltemperaturene. Så velger vi verktøyet Regresjonsanalyse og ser at en trigonometrisk funksjon vil passe best. Vi velger derfor Sin under Regresjonsmodell.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	-1.5	10.3	1.7	-7.4	-0.6	10.4	1	-5.5



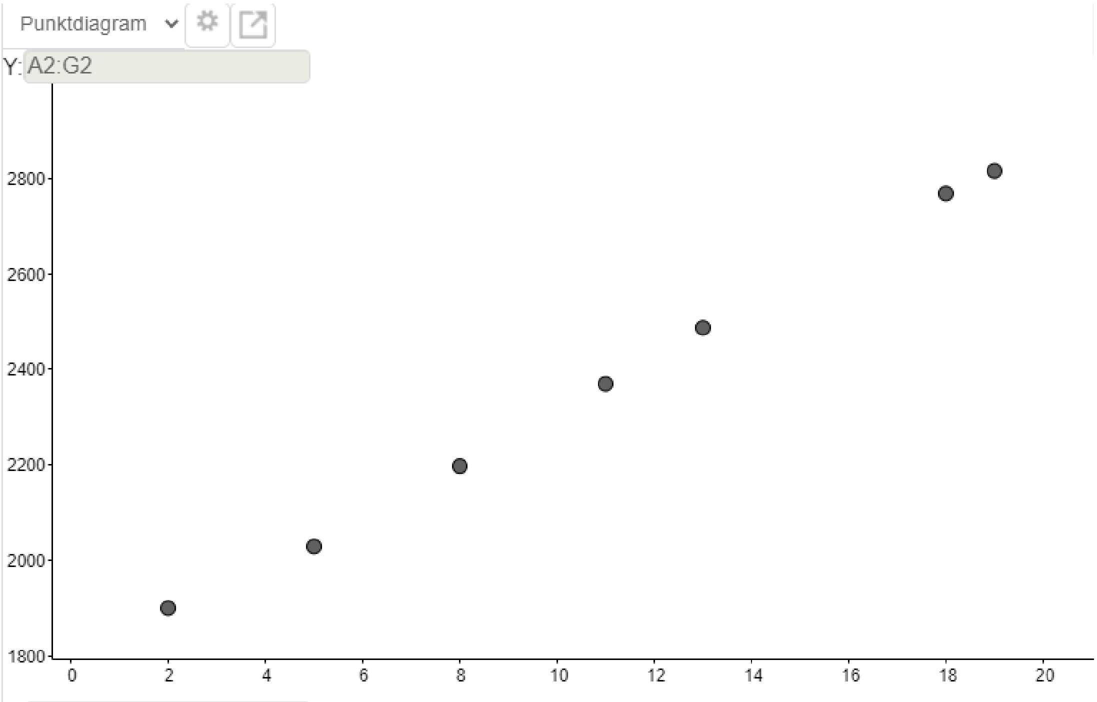
En modell for middeltemperaturen *T* °C i Nord-Norge *x* årstider etter vinteren 2012 er $T(x) = 8{,}5\sin(1{,}6x - 1{,}9) + 1{,}3$.

b Modellen forteller at middeltemperaturen svinger om 1,3 °C, altså likevektslinja. Det er varmest om sommeren ($x = 2$ og $x = 6$), når middeltemperaturen er omtrent 10 °C. Om vinteren, det vil si $x = 4$ og $x = 8$, er det kaldest. Da er middeltemperaturen rundt 7 minusgrader. Middeltemperaturen i de ulike årstidene svinger med opptil 8,5 °C (amplituden) fra gjennomsnittet.

4.11
Vi lar antall år etter 2000 være på førsteaksen (og skriver disse dataene inn i rad 1), og antall tusen personbiler være langs andreaksen. Vi markerer dataene og bruker verktøyet Regresjonsanalyse.

	A	B	C	D	E	F	G
1	2	5	8	11	13	18	19
2	1899.8	2028.9	2197.2	2369.7	2487.4	2768.9	2816

Når vi har valgt Regresjonsanalyse, får vi følgende oversiktsdiagram:



Så lager vi noen ulike modeller ved å velge Lineær, Eksponentiell, Logistisk og Sin under Regresjonsmodell. De fire variantene gir følgende fire modeller:

Regresjonsmodell

Lineær

$$y = 55.1301\,x + 1768.2873$$

Symbolsk utregning: x = y =

Regresjonsmodell

Eksponentiell

$$y = 1816.7117 \cdot 1.0238^x$$

Symbolsk utregning: x = y =

Regresjonsmodell

Sin

$$y = 2403.4734 + 663.881\,\sin(0.0903\,x - 1.0444)$$

Symbolsk utregning: x = y =

Regresjonsmodell

Logistisk

$$y = \frac{5961.9988}{1 + 2.3307\,e^{-0.0389x}}$$

Symbolsk utregning: x = y =

Hvor godt modellene egner seg for ekstrapolasjon, avhenger blant annet av om de vokser for evig (for det gjør ikke bilparken i Norge). Derfor vil den lineære og eksponentielle modellen kanskje gi et godt bilde på kort sikt, men for ekstrapolasjon for eksempel 50 år fram i tid, vil trolig disse gi uriktige resultater.

Den trigonometriske modellen vokser ikke inn i evigheten, men den svinger med årene. Det er ikke nødvendigvis helt urealistisk fordi innovasjon eller konkurranse kan føre til at bilens popularitet synker eller stiger i perioder. Problemet med denne modellen er imidlertid at den har en øvre grense på 3000, men sannsynligvis vil antall personbiler i Norge øke godt forbi 3 millioner etter hvert som befolkningen vokser. Den svinger også helt ned til 1800. Svingningene ser altså ut til å være for store for å være realistiske.

Da gjenstår den logistiske modellen. Den kommer ikke til å vokse forbi ca. 6000. Det er ikke helt urealistisk at bilparken i Norge når 6 millioner. Den kommer i hvert fall trolig ikke til å overstige dette tallet. Basert på dette ser den logistiske modellen ut til å være god. Den tar også hensyn til at antall personbiler kan ha vokst saktere i starten (mens bilen ennå bare var i ferd med å bli populær). Det er fordi den starter å vokse sakte, men vokser stadig raskere opp til et visst punkt. Den ser altså ut til å egne seg best av de fire for ekstrapolasjon.

4.12

a Vi skriver dataene inn i et regneark i GeoGebra. Vi velger så Regresjonsanalyse. Under Regresjonsmodell velger vi Sin. Da får vi funksjonen $f(t) = 6{,}3\sin(0{,}52t + 0{,}97) + 21{,}4$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	28	27	25.5	22	18.5	16	15	16	18	21.5	24	26

Regresjonsmodell

Sin

$$y = 21.4458 + 6.2922\ \sin(0.5247\,x + 0.9672)$$

Symbolsk utregning: x = y =

b Vi bruker sammenhengen $\sin v = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$. Her setter vi altså inn $\cos\left(0{,}52t + 0{,}97 - \frac{\pi}{2}\right)$ for $\sin(0{,}52t + 0{,}97)$, slik at $f(t) = 6{,}3\cos(0{,}52t - 0{,}60) + 21{,}4$.

c At temperaturen er i ferd med å avta med 2 grader per måned, betyr at $f'(t) = -2$. Vi setter opp denne likningen i CAS og begrenser den til $0 \le t \le 12$:

1. $f(t) := 6.3\ \sin(0.52\,t + 0.97) + 21.4$
   $\rightarrow\ \frac{63}{10}\sin\left(\frac{13}{25}t + \frac{97}{100}\right) + \frac{107}{5}$
2. $\{f'(t) = -2, t > 0, t < 12\}$
   Løs: $\left\{t = \frac{25}{26}\pi + \frac{25}{13}\sin^{-1}\left(\frac{500}{819}\right) - \frac{97}{52}, t = \frac{75}{26}\pi - \frac{25}{13}\sin^{-1}\left(\frac{500}{819}\right) - \frac{97}{52}\right\}$
3. $2
   $\approx\ \{t = 2.42, t = 5.93\}$

Løsningen på likningen er $t = 2{,}4 \;\vee\; t = 5{,}9$. Det betyr at temperaturen var i ferd med å avta med 2 grader per måned i slutten av februar og midten av juni.

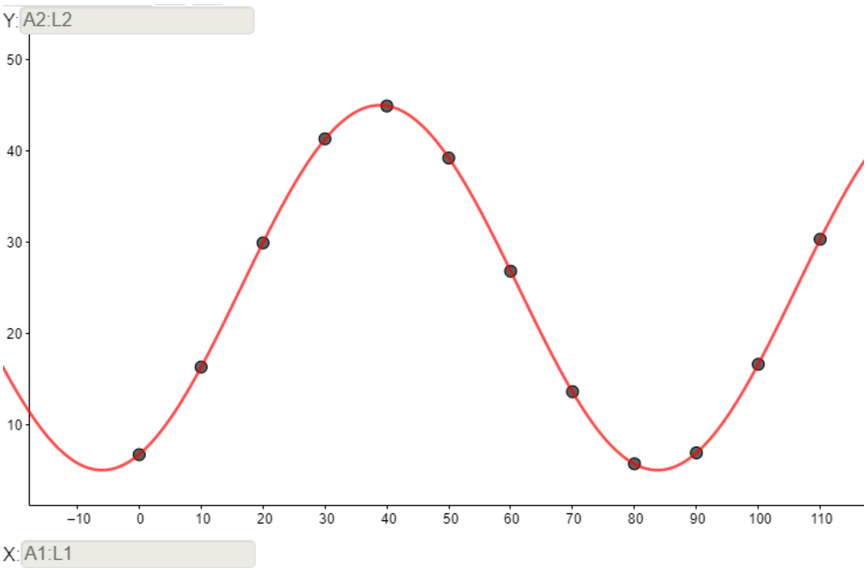
d Vi definerer en ny funksjon v for vekstfarten til f, det vil si $v(t) = f'(t)$. Når vekstfarten er på sitt høyeste, er $v'(t) = 0$. Vi løser denne likningen sammen med betingelsen om at $1 \le t \le 12$.

I rad 4 har vi to løsninger.
Vi sjekker vekstfarten og ser at $t = 10{,}2$ er et maksimalpunkt for f'.
Altså øker temperaturen raskest i midten av oktober.
På dette tidspunktet øker den med omtrent 3,3 °C per måned.

1. $f(t) := 6.3\ \sin(0.52\,t + 0.97) + 21.4$
   $\rightarrow\ \frac{63}{10}\sin\left(\frac{13}{25}t + \frac{97}{100}\right) + \frac{107}{5}$
2. $v(t) := f'(t)$
   $\approx\ 3.28\ \cos(0.52\,t + 0.97)$
3. $\{v'(t) = 0, t > 1, t < 12\}$
   Løs: $\left\{t = \frac{25}{13}\pi - \frac{97}{52}, t = \frac{50}{13}\pi - \frac{97}{52}\right\}$
4. $3
   $\approx\ \{t = 4.18, t = 10.22\}$
5. $v(4.18)$
   $\approx\ -3.28$
6. $v(10.22)$
   $\approx\ 3.28$

4.13
Vi tenker på horisontal avstand som *x*-verdi og vertikal avstand som *f*(*x*), og bruker regresjon til å finne en modell for *f*(*x*). Da skriver vi opp de horisontale avstandene i rad 1 i et regneark i GeoGebra, og de vertikale avstandene i rad 2. Så velger vi Regresjonsanalyse og kommer fram til at en trigonometrisk modell vil passe best. Vi velger derfor Sin under Regresjonsmodell.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
2	6.7	16.3	29.9	41.3	44.9	39.2	26.8	13.6	5.7	6.9	16.6	30.3



Regresjonsmodell

Sin $y = 24.9934 + 19.9898\ \sin(0.07\ x - 1.151)$

Symbolsk utregning: x = y =

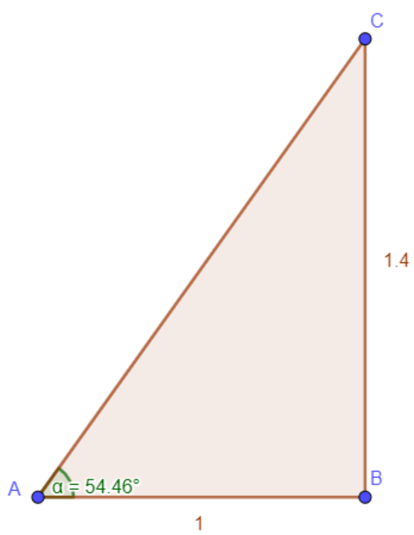
Helningsvinkelen tilsvarer vinkelen mellom bakken (*x*-aksen) og tangenten til berg-og-dal-banen. Denne vinkelen er stor når *f* vokser eller minker raskt. Den er altså størst når $f''(x)$ er null.

Det er tre verdier for *x* slik at $f''(x) = 0$.

Akkurat i punktene på grafen hvor dette er tilfelle, er helningen 1,4 oppover eller nedover.

En horisontal endring på 1 m tilsvarer altså en vertikal endring på 1,4 m. På figuren ser vi at helningen må være

$\arctan\left(\frac{7}{5}\right) = 54{,}5°$.



1 $f(x) := 20\ \sin(0.07\ x - 1.15) + 25$

$\rightarrow\ 20\ \sin\left(\frac{7}{100}\ x - \frac{23}{20}\right) + 25$

2 $\{f''(x) = 0, x \geq 0, x \leq 110\}$

Løs: $\left\{x = \frac{115}{7}, x = \frac{100}{7}\ \pi + \frac{115}{7}, x = \frac{200}{7}\ \pi + \frac{115}{7}\right\}$

3 $2

$\approx\ \{x = 16.43, x = 61.31, x = 106.19\}$

4 $f'(16.43)$

$\approx\ 1.4$

5 $f'(61.31)$

$\approx\ -1.4$

6 $f'(106.19)$

$\approx\ 1.4$

4.14

a Vi bruker algebrafeltet og tegner grafen til V. Så bruker vi kommandoen Ekstremalpunkt(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>) for å finne stasjonære punkter på grafen til V.

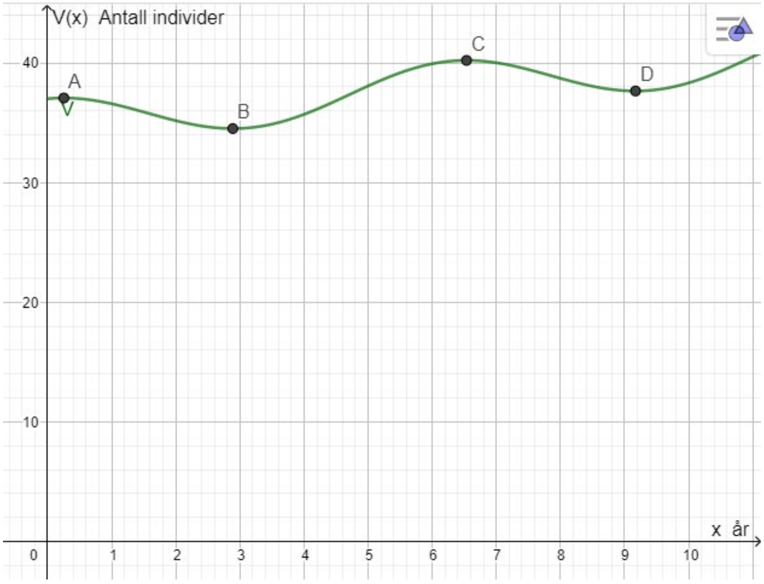
$V(x) = 2\cos(x) + \frac{1}{2}x + 35, \quad (0 < x \wedge 12 > x)$

Ekstremalpunkt(V, 0, 12)
$\rightarrow A = (0.25, 37.06)$

$\rightarrow$
$B = (2.89, 34.51)$

$\rightarrow$
$C = (6.54, 40.2)$

$\rightarrow$
$D = (9.17, 37.65)$



Vi ser at det første og tredje stasjonære punktet er toppunkter, mens det andre og fjerde er bunnpunkter.

Populasjonen er på sitt minste i $x = 2{,}89$ (det første minimalpunktet).

Men ingen av ekstremalpunktene svarer til tidspunktet da populasjonen er størst, for grafen ligger enda høyere etter omtrent 11 år.

b For å bestemme når populasjonen V vokser raskest, setter vi den andrederiverte av V lik null. Det er fordi vekstfarten til V er V', og den er høyest eller lavest når V'' er null (når V-derivert har et topp- eller bunnpunkt).

Vi løser altså likningen $V''(x) = 0$ for $x > 0$ og $x < 12$. Etter å ha løst likningen sjekker vi fortegnet til den deriverte for hver av løsningene. Hvis den deriverte er negativ, har vi funnet et punkt hvor populasjonen *avtar* fort. Tilsvarende finner vi et punkt hvor populasjonen *vokser* fort når den deriverte er positiv. Her ser vi at de to verdiene $x = \frac{3}{2}\pi = 4{,}7$ og $x = \frac{7}{2}\pi = 11{,}0$ begge gir $V'(x) = 2{,}5$.

1 $V(x) := 2\cos(x) + \frac{1}{2}x + 35$
$\rightarrow \; 2\cos(x) + \frac{1}{2}x + 35$

2 $\{V''(x) = 0, x > 0, x < 12\}$
Løs: $\left\{x = \frac{1}{2}\pi, x = \frac{3}{2}\pi, x = \frac{5}{2}\pi, x = \frac{7}{2}\pi\right\}$

3 $V'(\text{HøyreSide}(\$2, 1))$
≈ -1.5

4 $V'(\text{HøyreSide}(\$2, 2))$
≈ 2.5

5 $V'(\text{HøyreSide}(\$2, 3))$
≈ -1.5

6 $V'(\text{HøyreSide}(\$2, 4))$
≈ 2.5

På det meste vokser altså populasjonen med 2,5 individer per år, og det skjer etter omtrent 5 år og 11 år.

4.15

a Vi setter den deriverte lik 0 for å finne ut når på året vi har ekstremalpunkter for CO_2-konsentrasjonen. Så sjekker vi fortegnet til den andrederiverte for de aktuelle *x*-verdiene for å skille toppunkter fra bunnpunkter.

Vi får hele 12 løsninger, men vi trenger ikke sjekke alle. Siden $f''(0{,}77) < 0$, vet vi nemlig at ikke bare $t = 0{,}77$ gir et bunnpunkt, men at også $t = 1{,}77$, $t = 2{,}77$ osv. gjør det siden de ligger med nøyaktig ett års mellomrom. Husk at CO_2-konsentrasjonen er lavest på ett bestemt tidspunkt på året, så den oppfører seg lik i oktober et bestemt år som oktober et annet år.

$t = 0{,}32$, $t = 1{,}32$ osv. gir negativ andrederivert og derfor toppunkter.

Vi ønsker nå å finne ut når på året vi har bunnpunkter. Modellen er laget slik at nøyaktig $t = 0$ gir 1. januar i 2015, mens $t = 1$ gir 1. januar 2016. $t = 0{,}77$ osv. er derfor 77 % «inn i året», det vil si $0{,}77 \cdot 365 = 281$ dager etter 1. januar. CO_2-konsentrasjonen er altså på sitt laveste i oktober hvert år.

1 f(t) := 2.58 t + 400 − 3.05 sin(2 π t + 15.43)

$\rightarrow \frac{-61}{20} \sin\left(2 t \pi + \frac{1543}{100}\right) + \frac{129}{50} t + 400$

2 {f'(t) = 0, 0 ≤ t, t ≤ 6}

Løs: $\left\{t = \frac{600 \pi + 100 \cos^{-1}\left(\frac{129}{305\pi}\right) - 1543}{200 \pi}, t = \frac{800 \pi + 100 \cos^{-1}\left(\frac{129}{305\pi}\right) - 1543}{200 \pi}, t = \frac{1000 \pi + 100 \cos^{-1}\left(\frac{129}{305\pi}\right) - 1543}{200 \pi}, t = \ldots\right.$

3 $2

$\approx \{t = 0.77, t = 1.77, t = 2.77, t = 3.77, t = 4.77, t = 5.77, t = 0.32, t = 1.32, t = 2.32, t = 3.32, t = 4.32, t = 5.32\}$

4 f''(0.77)

≈ 119.02

5 f''(0.32)

≈ -118.84

b For å bestemme når konsentrasjonen øker fortest, setter vi $f''(t) = 0$ og løser for *t*. Så sjekker vi fortegnet til den deriverte for løsningene. Igjen bruker vi argumentet om at perioden til *f* er ett år. Det betyr at $f'(0{,}04)$ har samme fortegn som $f'(1{,}04)$ osv., og at $f'(0{,}54)$ har samme fortegn som $f'(1{,}54)$ osv.

Den deriverte er negativ for $t = 0{,}54$, $t = 1{,}54$ osv., som betyr at konsentrasjonen *minker* fortest for disse verdiene.

Vi ser at den deriverte er positiv for $t = 0{,}04$, $t = 1{,}04$ osv. Det betyr at konsentrasjonen av CO_2 øker raskest i januar hvert år.

1 f(t) := 2.58 t + 400 − 3.05 sin(2 π t + 15.43)

$\rightarrow \frac{-61}{20} \sin\left(2 t \pi + \frac{1543}{100}\right) + \frac{129}{50} t + 400$

2 {f''(t) = 0, 0 ≤ t, t ≤ 6}

Løs: $\left\{t = \frac{500 \pi - 1543}{200 \pi}, t = \frac{600 \pi - 1543}{200 \pi}, t = \frac{700 \pi - 1543}{200 \pi}, t = \frac{800 \pi - 1543}{200 \pi}, t = \frac{900 \pi - 1543}{200 \pi}, t = \frac{1000 \pi - 1543}{200 \pi}, t \ldots\right.$

3 $2

$\approx \{t = 0.04, t = 0.54, t = 1.04, t = 1.54, t = 2.04, t = 2.54, t = 3.04, t = 3.54, t = 4.04, t = 4.54, t = 5.04, t = 5.54\}$

4 f'(0.04)

≈ 21.74

5 f'(0.54)

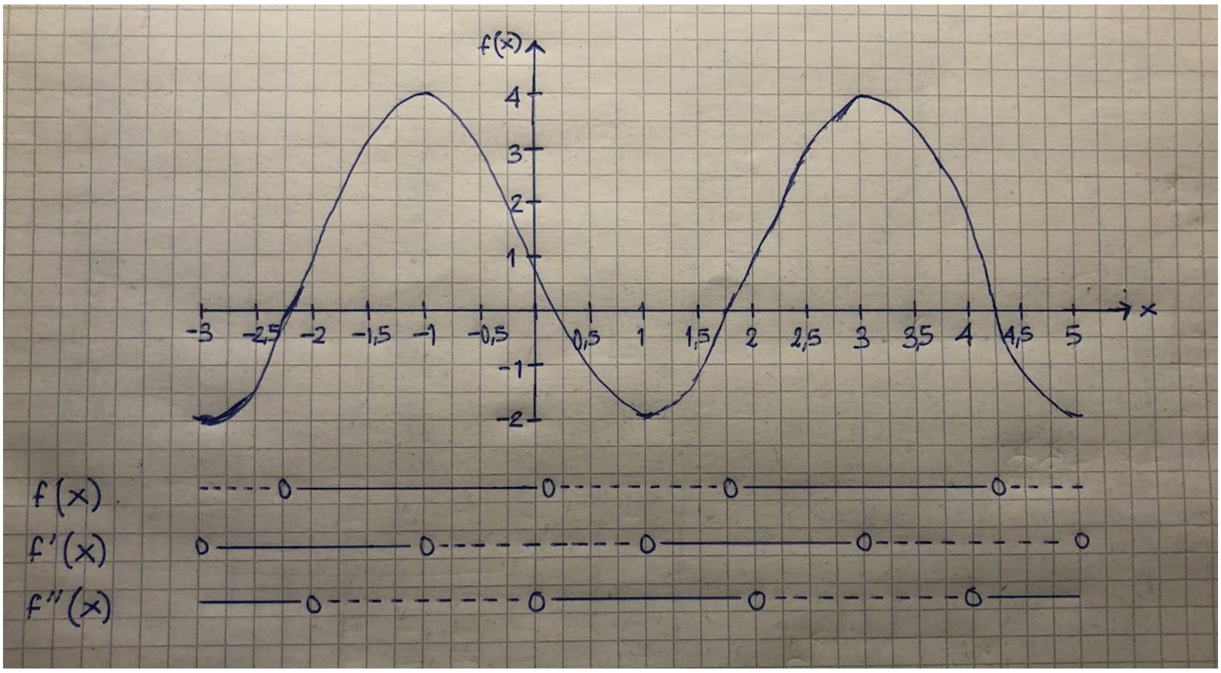
≈ -16.58

4.16
For å tegne fortegnslinja til *f* ser vi rett og slett på fortegnet til *f*(*x*) i de ulike intervallene.

Så ser vi på når grafen til *f* stiger og når den synker. $f'(x)$ er altså null der grafen til *f* flater ut (i ekstremalpunktene til *f*).

Til slutt tegner vi fortegnslinja for $f''(x)$. Infleksjonspunktene til *f* ligger midt mellom ekstremalpunktene, slik at $f''(-2) = f''(0) = f''(2) = f''(4) = 0$. For å finne fortegnet til $f''(x)$ i de ulike intervallene kan vi enten se på om de inneholder maksimalpunkter eller minimalpunkter (maksimalpunkt gir negativ andrederivert, og minimalpunkt gir positiv andrederivert), eller om den hule siden vender opp (når den andrederiverte er positiv) eller ned (når den andrederiverte er negativ).

Det gir følgende fortegnslinjer:



[R2-4_LF_FIG_01]

4.17
a Vi starter med ekstremalpunktene, som vi finner ved å sette $f'(x) = 1 - 2\cos x$ lik null.

$$1 - 2\cos x = 0$$
$$2\cos x = 1$$
$$\cos x = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Siden $0 < x < 2\pi$, er det bare $x = \frac{\pi}{3}$ og $x = \frac{5\pi}{3}$ som er ekstremalpunkter for *f*.

For å bestemme eventuelle infleksjonspunkter setter vi den andrederiverte av *f* lik null og løser for *x*:

$$2\sin x = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$x = k\pi$$

Av de mulige løsningene er det bare $x = \pi$ som ligger i intervallet $\langle 0\,,\, 2\pi \rangle$.

b Vi kan skrive om f til $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$. For å finne eventuelle ekstremalpunkter setter vi den deriverte av f lik null.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 2x &= 0 \\ 2x &= \pm\frac{1}{2}\pi+2k\pi \\ x &= \pm\frac{1}{4}\pi+k\pi \end{aligned}$$

Innenfor intervallet $\langle 0\,,\,2\pi\rangle$ har derfor f ekstremalpunktene $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ og $\frac{7}{4}\pi$.

Eventuelle infleksjonspunkter finner vi ved å sette den andrederiverte av f lik null.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -2\sin 2x &= 0 \\ \sin 2x &= 0 \\ 2x &= k\pi \\ x &= \frac{1}{2}k\pi \end{aligned}$$

Infleksjonspunktene til f innenfor intervallet $\langle 0\,,\,2\pi\rangle$ er $\frac{1}{2}\pi$, π og $\frac{3}{2}\pi$.

c Vi setter $f'(x)=0$ for å finne ekstremalpunktene til f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x-2\sin 2x &= 0 \\ 2\sin 2x &= 4x \\ \sin 2x &= 2x \end{aligned}$$

Denne likningen har bare løsningen $x = 0$. Men siden denne ligger utenfor intervallet i oppgaveteksten, er det ingen ekstremalpunkter som er aktuelle.

Eventuelle infleksjonspunkter finner vi ved å sette $f''(x)=0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 4-4\cos x &= 0 \\ \cos 2x &= 1 \\ 2x &= 2k\pi \\ x &= k\pi \end{aligned}$$

Av alle mulige verdier for x er det bare $x=\pi$ som ligger innenfor $\langle 0\,,\,2\pi\rangle$. Altså er det bare infleksjonspunktet $x=\pi$ som er aktuelt her.

4.18

a Vi definerer fartsfunksjonen i rad 1, og bruker kommandoen TrigKombiner til å skrive akselerasjonen (som er den deriverte av farten) på en lettere måte. Akselerasjonen etter t sekunder er gitt ved

$a(t)=-0{,}23e^{-0{,}2t}\cdot\sin(0{,}75t+0{,}19)$

1	v(t) := 0.3 e$^{-0.2t}$ sin(0.75 t + 1.5)
	$\rightarrow \frac{3}{10}\, e^{\frac{-1}{5}t}\, \sin\left(\frac{3}{4}\, t+\frac{3}{2}\right)$
2	a(t) := TrigKombiner(v'(t), sin(t))
	$\approx -0.23\, e^{-0.2t}\, \sin(0.75\, t+0.19)$

b Vi setter akselerasjonen lik null og løser denne likningen i rad 3 i CAS. Akselerasjonen er null med jevne mellomrom på 4,19 sekunder. Første gang den er null, er etter 3,94 s. Siden akselerasjonen er den deriverte av farten, betyr det at farten har ekstremalpunkter for disse verdiene. Altså er absoluttverdien av farten størst for hvert 4,19 s som går, og første gang etter 3,94 s.

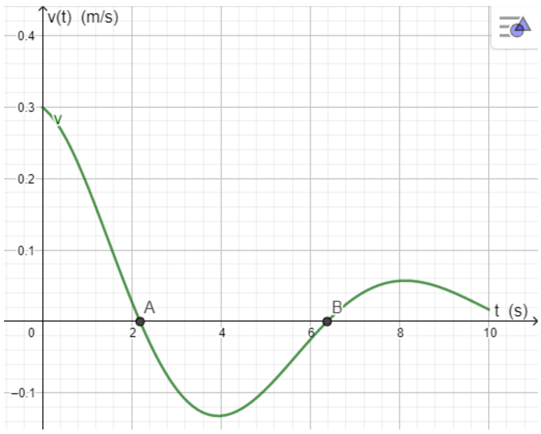
Betydningen av at akselerasjonen er null (at absoluttverdien av farten er størst mulig), er at loddet beveger seg med maksimal fart oppover eller nedover ved disse tidspunktene.

3	$a(t) = 0$
	Løs: $\left\{t = \frac{4}{3} k_1 \pi - \frac{474515162381}{1875000000000}\right\}$
4	$3
	$\approx \{t = 4.19 k_1 - 0.25\}$
5	$\{t = 4.19 \cdot 1 - 0.25\}$
	$\approx \{t = 3.94\}$

c Tilbakelagt strekning tilsvarer integralet av fartsfunksjonen.

Vi starter med å tegne grafen for $0 \leq t \leq 10$ i grafikkfeltet. Så bruker vi kommandoen Nullpunktintervall(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>) for å finne nullpunktene til *f*. De trenger vi når vi skal finne tilbakelagt strekning (det vil si arealet mellom fartsgrafen og *x*-aksen) siden vi må ta hensyn til fortegnet til *f* når vi finner areal ved integrasjon.

Vi finner absoluttverdien av integralene for hvert intervall. Dermed unngår vi problemet med at et integral kan være positivt og et annet negativt. Absoluttverdiene summerer vi, og da ser vi at arealet mellom *x*-aksen og *f* er 0,86. Loddet har altså tilbakelagt en strekning på 0,86 m.



$v(t) = 0.3\, e^{-0.2t} \sin(0.75\, t + 1.5), \quad (0 \leq t \leq 10)$

NullpunktIntervall(v, 0, 10)

$\rightarrow A = (2.19,\ 0)$

$\rightarrow$

$B = (6.38,\ 0)$

$a = |\text{Integral}(v, 0, 2.19)| + |\text{Integral}(v, 2.19, 6.38)| + |\text{Integral}(v, 6.38, 10)|$

$\rightarrow 0.86$

4.19
Vi skriver inn tidene i rad 1 og kreftene i rad 2, markerer dem og bruker verktøyet Regresjonsanalyse. For dette begrensede datasettet ser en trigonometrisk funksjon ut til å passe best, så vi velger Sin under Regresjonsmodell. Det gir funksjonen $F(t) = 10{,}9\sin(0{,}42t - 0{,}54) + 5{,}82$ hvor F er kraften (i Newton) etter t millisekunder.

	A	B	C	D	E	F
1	0	2	4	6	8	10
2	0.1	9.3	15.8	15.7	8.8	0.2

Regresjonsmodell

Sin

$$y = 5.8172 + 10.9002\ \sin(0.4235\,x - 0.5355)$$

Nå som vi har et funksjonsuttrykk for kraften, kan vi bruke formelen som Elin kjenner fra fysikken til å bestemme impulsen I. I CAS bruker vi kommandoen Integral(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>) i rad 2 og ser at I = 103 N · ms = 0,103 Ns.

Impulsen til bordtennisballen i løpet av de ti første sekundene var altså 0,1 Ns.

Merk at enheten på integralet (impulsen) blir produktet av enhetene til aksene, det vil si newton N og millisekunder ms.

1
$$F(t) := 10.9\ \sin(0.42\,t - 0.54) + 5.82$$
$$\rightarrow \frac{109}{10}\sin\left(\frac{21}{50}t - \frac{27}{50}\right) + \frac{291}{50}$$

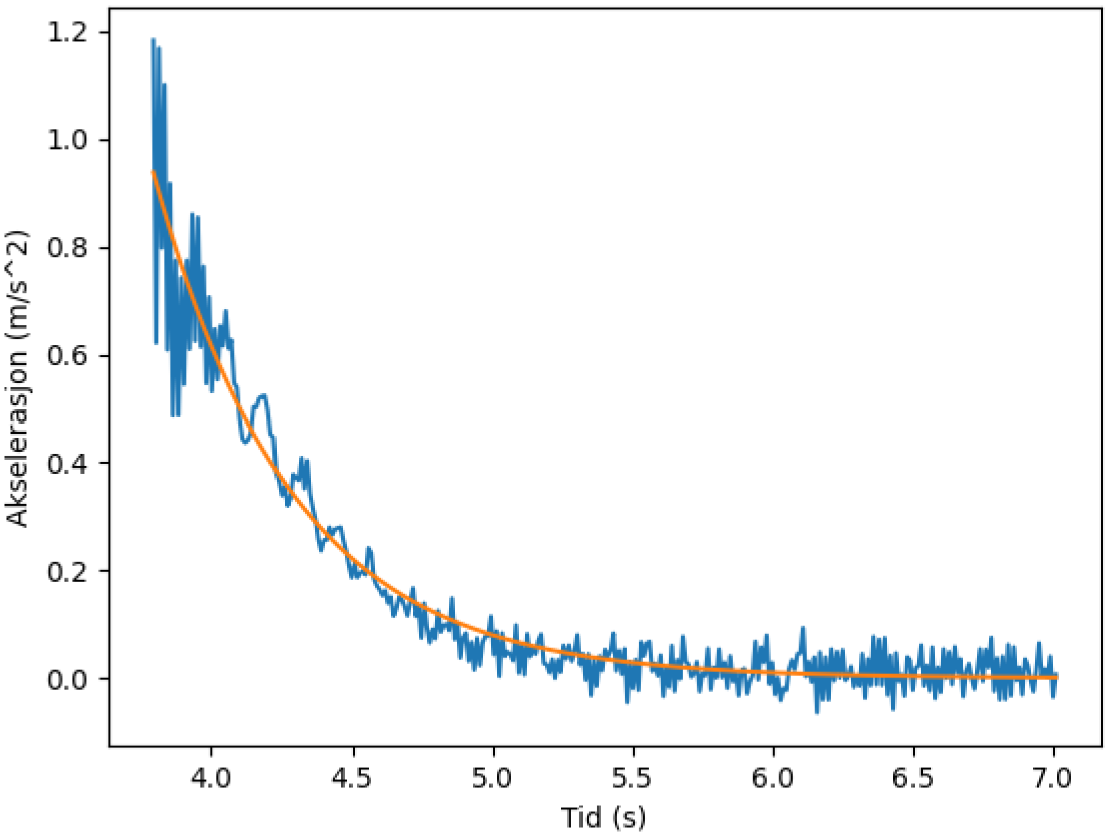
2
$$I = \int_0^{10} F\,dx$$
$$\approx\ I = 103$$

4.20

a Vi skriver et program som leser dataene fra heis.txt-filen. Fra plottet nedenfor ser vi at en potensmodell vil passe godt til datasettet. Vi gjør en regresjonsanalyse og plotter grafen sammen med dataene.

```
from pylab import *
from scipy.optimize import curve_fit

# Definerer akselerasjonen f(t) som en potensfunksjon
def f(t, a, b):
  return a * (b ** t)

# Laster inn dataene fra heis.txt
data = loadtxt("heis.txt")
tid = data[:, 0]
aks = data[:, 1]

# Gjør en regresjonsanalyse for å bestemme f
[a, b] = curve_fit(f, tid, aks)[0]
print("a =", round(a, 2))
print("b =", round(b, 2))

# Plotter dataene sammen med grafen til f
plot(tid, aks)
plot(tid, f(tid, a, b))
xlabel("Tid (s)")
ylabel("Akselerasjon (m/s^2)")
show()
```

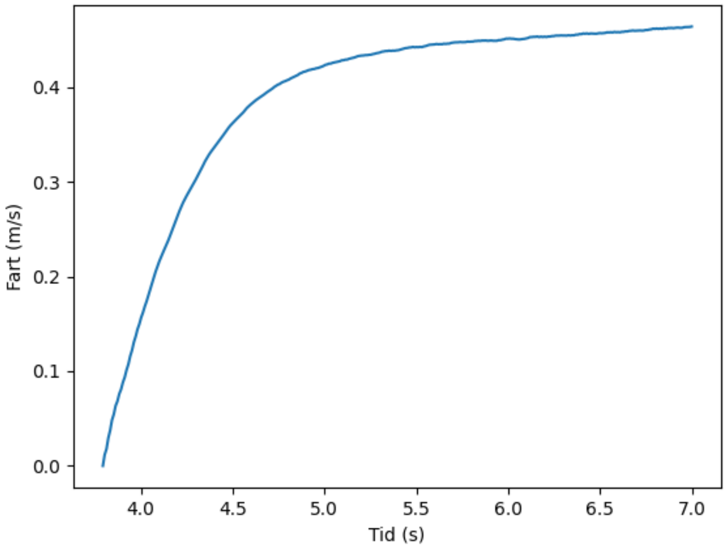
Når vi kjører programmet, får vi a = 2141,95 og b = 0,13. Det betyr at $f(t) = 2141{,}95 \cdot 0{,}13^t$ er en god modell for akselerasjonen f m/s² etter t sekunder. Dessuten tegnes grafen til f sammen med dataene når programmet kjøres.



b Nå som vi har en modell for akselerasjonen, kan vi bruke numerisk integrasjon for å bestemme farten *v* m/s etter *t* sekunder.

```
from pylab import *

# Definerer akselerasjonen f(t)
def f(t):
  return 2141.95 * (0.13 ** t)

# Laster inn dataene fra heis.txt
data = loadtxt("heis.txt")
tid = data[:, 0]
aks = data[:, 1]
n = len(tid)

# Integrerer datasettet numerisk for å finne farten v
dt = tid[1] - tid[0]

v = 0

for i in range(n):
  v = v + aks[i] * dt

print("v =", round(v, 2))

# Finner en liste med farten ved ulike tidspunkt
fart = zeros(n)

for i in range(n - 1):
  fart[i + 1] = fart[i] + aks[i] * dt

# Tegner grafen til farten v
plot(tid, fart)
xlabel("Tid (s)")
ylabel("Fart (m/s)")
show()
```

Når vi kjører programmet, plottes grafen nedenfor.



Dessuten skrives `v = 0.46` i konsollen, som betyr at farten er 0,46 m/s når heisen slutter å akselerere. Vi ser at akselerasjonen er i ferd med å opphøre fordi grafen til *v* flater ut.

c I stedet for numerisk integrasjon i Python bruker vi nå CAS til å beregne integralet av *f*. Vi bruker første og siste *t*-verdi i heis.txt som integrasjonsgrenser, akkurat som i oppgave b.

1. $f(t) := 2141.95 \cdot 0.13^t$
   $\approx \; f(t) := 2141.95 \, e^{-2.04t}$
2. $\int_{3.79}^{7} f \, dx$
   $\approx \; 0.46$

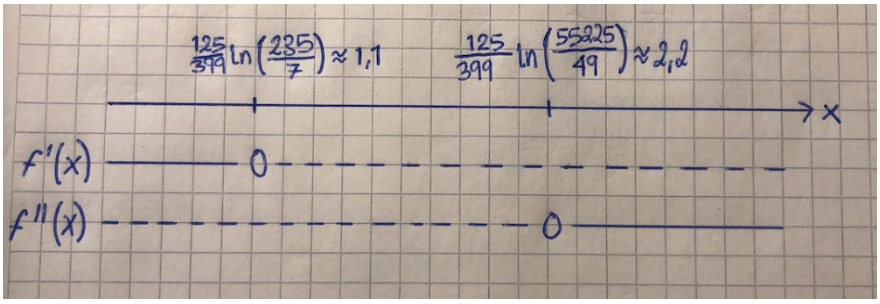
Den numeriske integrasjonen i Python stemmer overens med resultatet i CAS. Når heisen har sluttet å akselerere, er farten 0,46 m/s.

4.21

Vi ser klart på grafen at $f'(t)$ er positiv fram til et visst punkt, der den snur og blir negativ. For å finne dette punktets eksakte verdi løser vi likningen $f'(t) = 0$ i CAS.

Vi kan også se at den andrederiverte er negativ til å begynne med, siden *f* har et maksimalpunkt i 1,1. For å finne infleksjonspunktet løser vi likningen $f''(t) = 0$ i CAS. Etter infleksjonspunktet er $f''(t)$ positiv.

1. $f(t) := 12.7 \left(e^{-0.098t} - e^{-3.29t}\right)$
   $\approx \; -12.7 \, e^{-3.29t} + 12.7 \, e^{-0.098t}$
2. $f'(t) = 0$
   Løs: $\left\{ t = \frac{125}{399} \ln\left(\frac{235}{7}\right) \right\}$
3. $2
   $\approx \; \{t = 1.1008\}$
4. $f''(t) = 0$
   Løs: $\left\{ t = \frac{125}{399} \ln\left(\frac{55225}{49}\right) \right\}$
5. $4
   $\approx \; \{t = 2.2016\}$



[R2-4_LF_FIG_ 02]

4.22

For å finne vendepunktene på grafen til *f* må vi først løse likningen $f''(x) = 0$. Vi deriverer derfor $f'(x)$, som vi fant ovenfor.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (3 - \cos x)' &= 0 \\ \sin x &= 0 \\ x &= k\pi \end{aligned}$$

Definisjonsmengden til *f* er $\langle 0 \, , 3\pi \rangle$, så det er bare $x = \pi$ og $x = 2\pi$ som er infleksjonspunkter. Vendepunktene på grafen til *f* er derfor $(\pi \, , 3\pi)$ og $(2\pi \, , 6\pi)$.

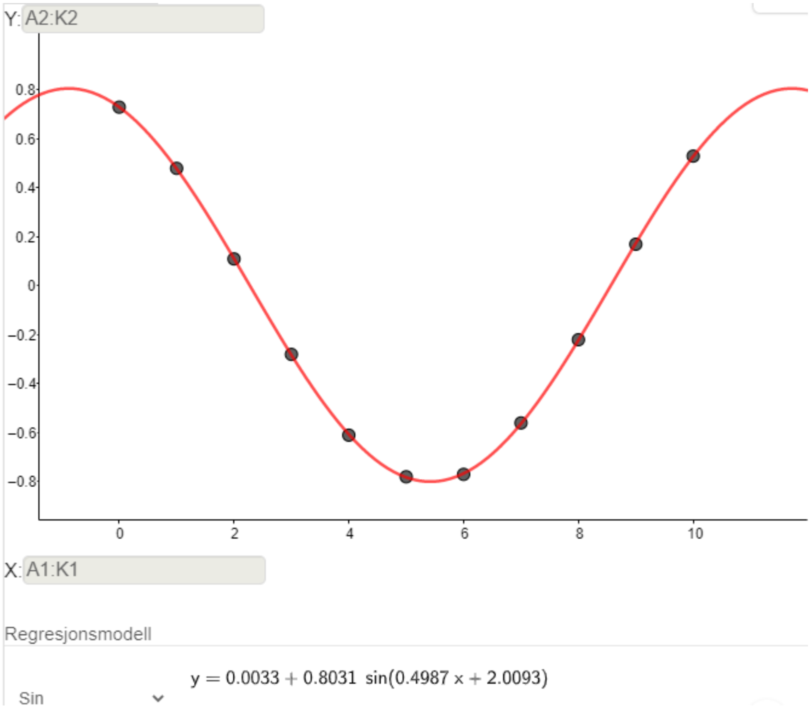
4.23

a Vi skriver inn tidene i første rad og fartene i andre rad i et regneark i GeoGebra. Så velger vi Regresjonsanalyse. Både utfra situasjonen (et lodd som svinger) og hvordan punktene ligger i forhold til hverandre, kommer vi fram til at en trigonometrisk modell vil passe best. Vi velger derfor Sin under Regresjonsmodell.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.73	0.48	0.11	-0.28	-0.61	-0.78	-0.77	-0.56	-0.22	0.17	0.53

Fra GeoGebra-vinduet til høyre ser vi at en modell for farten v m/s til loddet t sekunder etter at målingene startet, er $v(t) = 0{,}8\sin(0{,}5t + 2)$.

Merk at vi tilnærmer litt her. For eksempel har ikke 0,0033 m/s noe å si i praksis i denne sammenhengen, så vi sløyfer rett og slett dette leddet. Her må man vurdere utfra situasjonen hvor mange desimaler som er hensiktsmessig å ha med. Husk også at dette er en modell, så den kommer uansett ikke til å være helt nøyaktig.



b Akselerasjonen er den deriverte av farten. Vi bruker CAS til å derivere fartsfunksjonen. Fra rad 2 til høyre ser vi at akselerasjonen a m/s^2 etter t sekunder er gitt ved $a(t) = 0{,}4\cos(0{,}5t + 2)$.

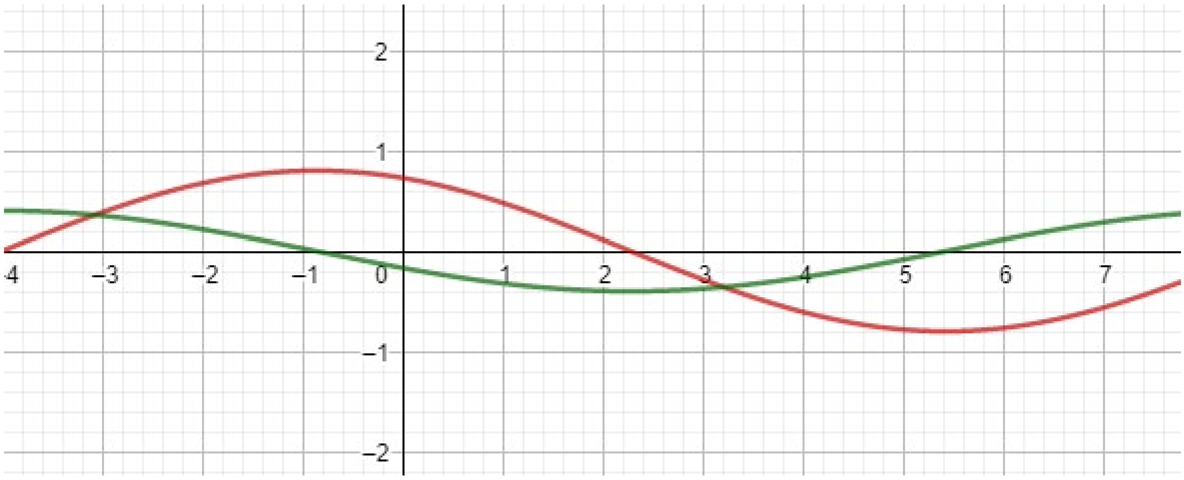
1 $v(t) := 0.8\ \sin(0.5\,t + 2)$

$\rightarrow\ \frac{4}{5}\sin\left(\frac{1}{2}\,t + 2\right)$

2 $a(t) := v'(t)$

$\approx\ 0.4\ \cos(0.5\,t + 2)$

c Vi tegner fartsgrafen med rødt og akselerasjonsgrafen med grønt. Som vi ser nedenfor, vokser den røde grafen (farten) når den grønne (akselerasjonen) er positiv. Motsatt vil v synke når a er negativ. Der hvor akselerasjonen er null (nullpunktene til den grønne grafen), har farten maksimal- eller minimalverdier.



d For å finne et uttrykk for posisjonen vil det være naturlig å integrere fartsfunksjonen. Ved hjelp av CAS ser vi at $s(t) = -1{,}6\cos(0{,}5t + 2) + C$. Det viser at s uansett tidspunkt har en verdi som avhenger av en ukjent konstant C. Derfor har hun ikke nok opplysninger til å lage en entydig posisjonsfunksjon.

Årsaken til at denne opplysningen mangler, er at vi ikke vet hvor loddet ble sluppet fra.

1	$v(t) := 0.8\ \sin(0.5\ t + 2)$
	$\approx\ 0.8\ \sin(0.5\ t + 2)$
2	$s(t) := \int v(t)\,dt$
	$\approx\ -1.6\ \cos(0.5\ t + 2) + c_1$

4.24

a Vi definerer posisjonsfunksjonen i rad 1 og fartsfunksjonen som den deriverte av posisjonsfunksjonen i rad 2. Så setter vi $v(t) = 0$ og løser likningen. Vi kan ut fra rad 4 se at farten er null for første gang når $t = 0{,}46$ (for $k_1 = 0$). For mindre verdier av k_1 blir t negativ.

Når det har gått 0,46 sekunder, er avstanden fra partikkelen til startpunktet omtrent 5 m.

1	$s(t) := 4\ \sin(2\ t) + 3\ \cos(2\ t)$
	$\rightarrow\ 3\ \cos(2\ t) + 4\ \sin(2\ t)$
2	$v(t) := s'(t)$
	$\rightarrow\ 8\ \cos(2\ t) - 6\ \sin(2\ t)$
3	$v(t) = 0$
	Løs: $\left\{t = \frac{1}{2}\ k_2\ \pi + \frac{1}{2}\ \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$
4	$3
	$\approx\ \{t = 1.57\ k_2 + 0.46\}$
5	$s(0.46)$
	$\approx\ 5$

Vi definerer akselerasjonen som den deriverte av farten og finner $a(0{,}46)$.
Første gang farten er null, er akselerasjonen –20 m/s². Det betyr at akselerasjonen har tallverdien 20 m/s² i retning startpunktet.

6	$a(t) := v'(t)$
	$\rightarrow\ -12\ \cos(2\ t) - 16\ \sin(2\ t)$
7	$a(0.46)$
	$\approx\ -20$

b Farten er størst når v har et maksimalpunkt. Derfor finner vi ut når akselerasjonen, det vil si $v'(t)$, er null.

Likningen har uendelig mange løsninger. Men siden annethvert ekstremalpunkt for v er et maksimalpunkt, og annethvert er et minimalpunkt, trenger vi bare sjekke to ekstremalpunkter (som kommer etter hverandre).

Når akselerasjonen er null, er v lik 10 eller –10. Absoluttverdien av begge disse er 10, så den største farten til partikkelen er 10 m/s.

8	$a(t) = 0$
	Løs: $\left\{t = \frac{1}{2} k_2 \pi - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$
9	$8
	$\approx \{t = 1.57 k_2 - 0.32\}$
10	$v(-0.32)$
	≈ 10
11	$v(-0.32 + 1.57)$
	≈ -10

c Partikkelen passerer startpunktet når $s = 0$. Vi setter derfor opp og løser denne likningen i CAS.

I rad 4 viser vi at den minste verdien k_3 kan ha, er 1. Hvis den blir mindre, vil t bli negativ, og dette gir ikke mening i praksis.

I rad 5 viser vi samtidig at k_3 ikke kan bli større enn 38. Hvis vi øker k_3 med én, vil nemlig t bli større enn 60, og da er vi ikke lenger innenfor det første minuttet.

Siden k kan ha alle heltallige verdier mellom fra og med 1 til og med 38, passerer partikkelen startpunktet 38 ganger i løpet av det første minuttet.

1	$s(t) := 4 \sin(2t) + 3 \cos(2t)$
	$\rightarrow 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t)$
2	$s(t) = 0$
	Løs: $\left\{t = \frac{1}{2} k_3 \pi - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$
3	$2
	$\approx \{t = 1.57 k_3 - 0.32\}$
4	$\{t = 1.570796326795 \cdot 1 - 0.3217505543966\}$
	$\approx \{t = 1.25\}$
5	$\{t = 1.570796326795 \cdot 38 - 0.3217505543966\}$
	$\approx \{t = 59.37\}$

4.25
Vi definerer f i CAS.

Videre ser vi at $f'(t) = -abe^{-bt} + ace^{-ct} = a \cdot \left(c \cdot e^{-ct} - b \cdot e^{-bt}\right)$.

Hvis stoffet tas fort opp, men bruker lang tid på å skilles ut, betyr det at f' først er langt over null (slik at f vokser fort), men så ligger litt under null (slik at f avtar sakte).

1	$f(t) := a \cdot \left(e^{-bt} - e^{-ct}\right)$
	$\rightarrow a\left(e^{-bt} - e^{-ct}\right)$
2	$f'(t)$
	$\rightarrow -a\,b\,e^{-bt} + a\,c\,e^{-ct}$
3	$a \cdot \left(c \cdot e^{-ct} - b \cdot e^{-bt}\right) \stackrel{?}{=} \$2$
	$\rightarrow$ true

Når t blir stor, vil etter hvert både ce^{-ct} og be^{-bt} gå mot 0. Hvis c er størst, vil ce^{-ct} nærme seg 0 fortest.

Når t er tilstrekkelig stor, vil derfor ce^{-ct} nærme seg null samtidig som be^{-bt} ennå er relativt stor. Derfor vil $ce^{-ct} - be^{-bt}$ være negativt (for store nok t). Da blir også $f'(t)$ negativ, som betyr at grafen til f synker.

For små t blir effekten motsatt: Da er $ce^{-ct} > be^{-bt}$, slik at grafen til f stiger. Vi oppnår altså de ønskede egenskapene hvis $c > b$.

4.26
For å bestemme *f* gjør vi en regresjonsanalyse i GeoGebra. I et regneark skriver vi de utvalgte høydene i rad 1 og omkretsene i rad 2. Så velger vi verktøyet Regresjonsanalyse, og under Regresjonsmodell velger vi Sin ettersom Olav antar at *f* er trigonometrisk.

	A	B	C	D	E
1	2	4	6	8	10
2	25.1	29.9	33.3	36.8	37.7

Regresjonsmodell

Sin

$$y = 26.4852 + 11.3259\ \sin(0.2013\,x - 0.5204)$$

Fra regresjonsanalysen har vi at $f(h) = 11{,}3\sin(0{,}2h - 0{,}5) + 26{,}5$.

Siden *f* er en funksjon for omkretsen av bollen, kan vi definere en funksjon *r* for radien som $r(h) = \dfrac{f(h)}{2\pi}$.

Dette får vi fra sammenhengen $O = 2\pi r$.

Vi tenker oss nå at vi legger bollen vannrett og ser på *h*-aksen som førsteakse. Da er overflaten til bollen et omdreiningslegeme om *h*-aksen, der avstanden fra *h*-aksen til overflaten er $r(h)$.

For å finne volumet av bollen må vi beregne $\int_a^b r(h)^2\, dh$, der *a* og *b* er høyden i bunnen og toppen av bollen.

Tallet *a* må være slik at *r*(*a*) = 4 siden bollen har en innvendig radius på 4 i bunnen. Vi løser likningen *r*(*a*) = 4 i CAS og ser at en løsning er *a* = 1,89. Ettersom bollen er 10 cm høy, må *b* = 11,89. Vi setter inn disse verdiene for *a* og *b*, og beregner integralet i rad 5 nedenfor.

1 $f(h) := 11.3\ \sin(0.2\ h - 0.5) + 26.5$

$\approx\ \mathbf{11.3\ \sin(0.2\ h - 0.5) + 26.5}$

2 $r(h) := \dfrac{f(h)}{2\ \pi}$

$\approx\ \mathbf{1.8\ \sin(0.2\ h - 0.5) + 4.22}$

3 $r(h)\ = 4$

Løs: $\left\{h = 10\ k_2\ \pi + 5\ \sin^{-1}\left(\dfrac{-217605991935}{1798450856938}\right) + \dfrac{5}{2}, h = 10\ k_2\ \pi + 5\ \pi - 5\ \sin^{-1}\left(\dfrac{-217605991935}{1798450856938}\right) + \dfrac{5}{2}\right\}$

4 \$3

$\approx\ \{h = 31.42\ k_2 + 1.89, h = 31.42\ k_2 + 18.81\}$

5 $\pi \displaystyle\int_{1.89}^{11.89} r^2\, dx$

$\approx\ \mathbf{922.48}$

Det innvendige volumet av bollen er omtrent 922 cm^3 eller 0,92 L.

4.27
Vi lar *N* være folketallet i landet.
Det fødes 0,03*N* og innvandrer 20 000 personer per år. Det dør 0,01*N*, og 120 000 flytter ut per år.
Siden vekstfart er differansen mellom økning og reduksjon, blir
$N' = 0{,}03N + 20\,000 - (0{,}01N + 120\,000) = 0{,}02N - 100\,000$. Vi har nå en differensiallikning som vi løser i CAS for å finne en modell for folketallet. Vi setter «nå» til *t* = 0, slik at punktet (0 , 3 000 000) ligger på grafen.

1	LøsODE(N' = 0.02 N − 100000, N, t, (0, 3000000))
	≈ $N = -2000000\,e^{0.02t} + 5000000$

Innbyggertallet N er altså gitt ved $N(t) = -2\,000\,000e^{0{,}02t} + 5\,000\,000$, der t er antall år fra i dag.

4.28

a Endringen (per time) i medisinmengden i kroppen er de tilsatte 15 mL minus de 5 % (altså 0,05M) som skilles ut. Dermed er $M' = 15 - 0{,}05M$ en differensiallikning som beskriver situasjonen.

b Vi løser differensiallikningen fra oppgave a. Siden personen i utgangspunktet var medisinfri, bruker vi $M(0) = 0$ som initialbetingelse. Derfor ligger punktet (0 , 0) på grafen til M.

1	LøsODE(M' = 15 − 0.05 M, M, t, (0, 0))
	≈ $M = -300\,e^{-0.05t} + 300$

En modell for mengden medisin M mL i kroppen til pasienten etter t timer er $M(t) = -300e^{-0{,}05t} + 300$.

c Mengden medisin i kroppen øker etter hvert som pasienten har hatt behandlingen lenger. Derfor vil den maksimale mengden medisin som pasienten kan ha i kroppen være 300 mL.

1	$M(t) := -300e^{-0.05t} + 300$
	→ $M(t) := -300\,e^{\frac{-1}{20}t} + 300$
2	Grenseverdi(M, Infinity)
	→ 300

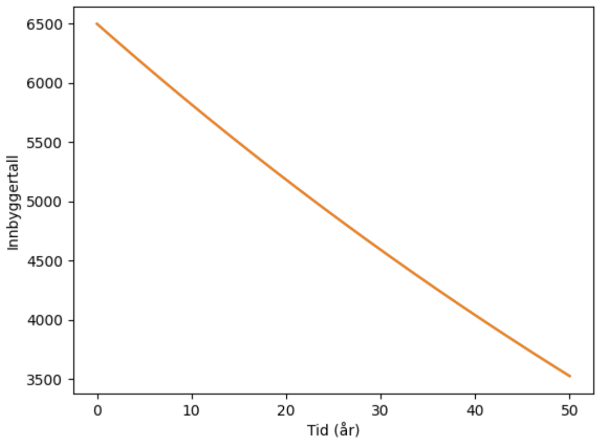
4.29

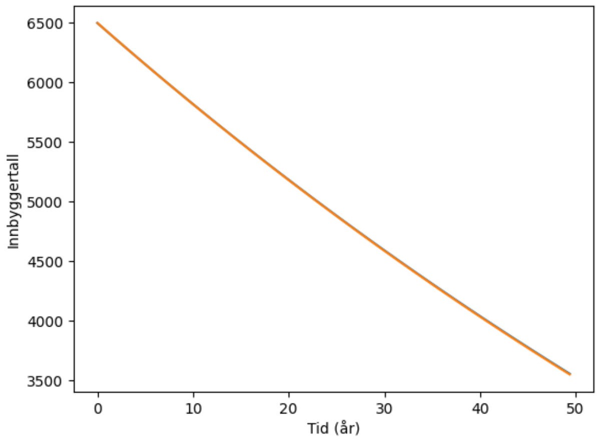
Vi bruker eulermetoden for å tegne den tilnærmede grafen til N akkurat som i eksempel 10. Etterpå tegner vi grafen med det kjente funksjonsuttrykket ved å regne ut funksjonsverdien til N ved ulike t-verdier.

```
from pylab import *

a = 0
b = 50
n = 10000    # antall steg

delta_t = (b - a)/n

# Startverdien for den tilnærmede grafen er N0
N0 = 6500

# Definerer den deriverte
def Nder(N):
  return -0.007*N - 25

# Lager to lister som er fylt opp med n nuller hver.
t = zeros(n)
N = zeros(n)

# Setter det første tallet i lista N til N0, dvs. startverdien
N[0] = N0
```

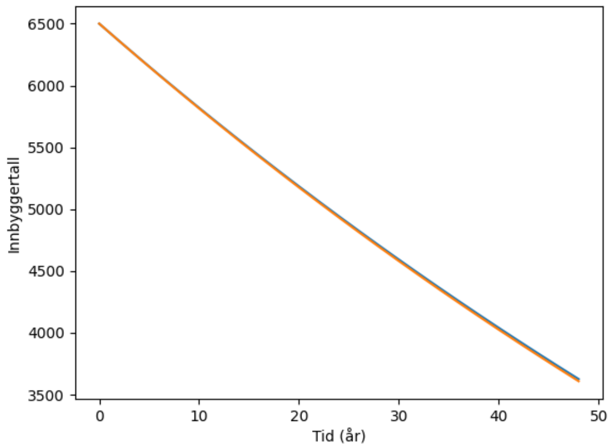
```
# Finner alle de tilnærmede funksjonsverdiene ved hjelp av eulermetoden
for i in range (n - 1):
  N[i + 1] = N[i] + Nder(N[i])*delta_t
  t[i + 1] = t[i] + delta_t

# Plotter den tilnærmede grafen til N og setter navn på aksene
plot(t, N)
xlabel("Tid (år)")
ylabel("Innbyggertall")

# Lager en ny liste, analytisk_N, og fyller den med n nuller
analytisk_N = zeros(n)

# Beregner n ulike funksjonsverdier for analytisk_N
for i in range(n):
  analytisk_N[i] = 10071*exp(-0.007*i*delta_t) - 3571

# Plotter grafen til analytisk_N
plot(t, analytisk_N)

# Bruker show() for å lage et vindu hvor grafene tegnes
show()
```

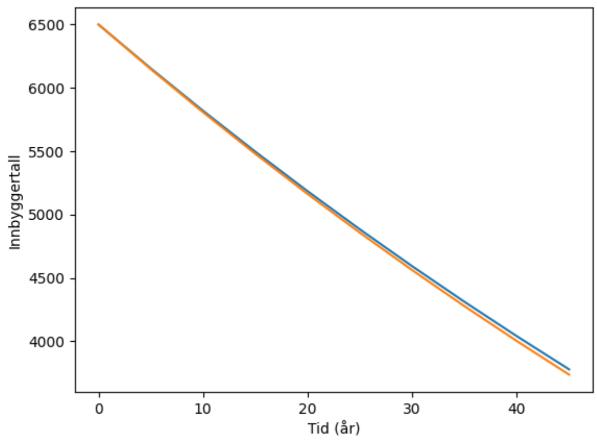
Vi prøver noen ulike verdier for n for å se resultatene.





Både for n = 10 000 og for n = 80 ser Eulers metode ut til å gi en svært god tilnærming.





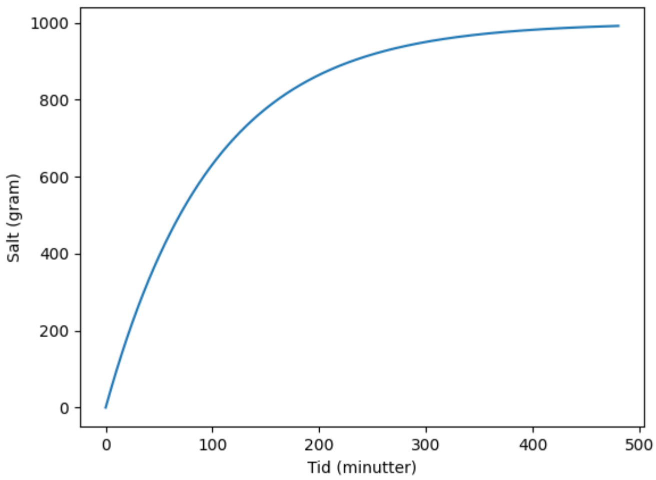
Med n = 25 og spesielt med n = 10 ser vi imidlertid at resultatet blir dårligere. I disse to tilfellene avviker nemlig den blå grafen noe fra den oransje. Det er altså når vi kommer under omtrent 25 steg at vi begynner å se en forskjell på tilnærmingen og den analytiske løsningen.

4.30

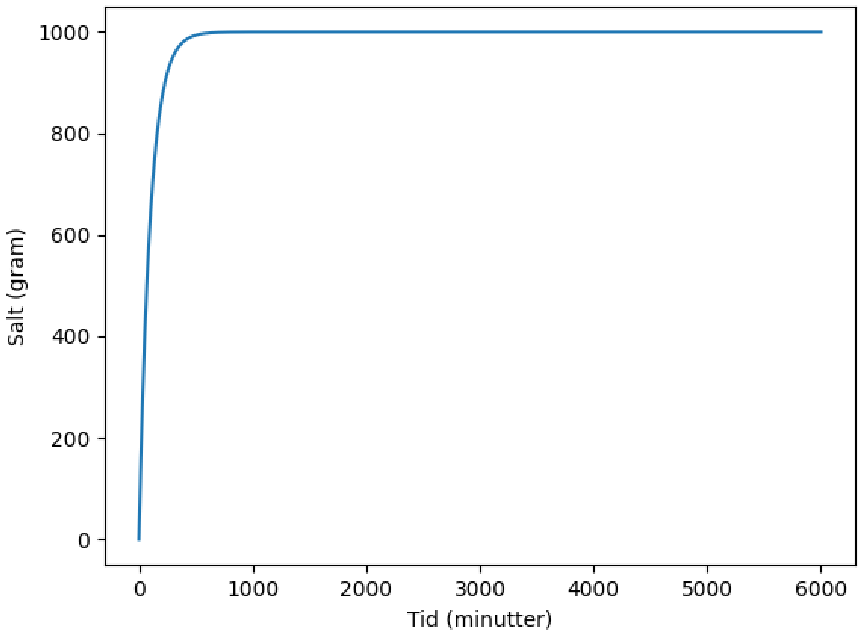
a Vi lager et program etter mønster av eksempel 10.

```
from pylab import *

# a er nedre grense, b er øvre grense (60 minutter/time * 8 timer)
a = 0
b = 60 * 8
n = 10000 # Antall steg

delta_t = (b - a)/n

# Siden vannet er rent, er saltmengden 0 g til å begynne med
y0 = 0

# Vi har oppgitt at y’ = 10 – 0,01y
def yDerivert(y):
  return 10 - 0.01*y

# Lager to lister med n nuller
t = zeros(n)
y = zeros(n)

# Setter y(0) til y0, i dette tilfellet 0 g
y[0] = y0

# Finner funksjonsverdiene til y med eulermetoden
for i in range(n - 1):
  y[i + 1] = y[i] + yDerivert(y[i])*delta_t
  t[i + 1] = t[i] + delta_t

# Tegner grafen til y og setter navn på aksene
plot(t, y)
xlabel("Tid (minutter)")
ylabel("Salt (gram)")
show()
```

Når vi kjører programmet, får vi en graf over de 480 neste minuttene (det vil si de 8 neste timene).



b Siden det hele tiden tilsettes salt, vil saltmengden nærme seg sin øvre grense etter hvert som det har gått veldig lang tid. I stedet for å tegne grafen for de neste 8 timene tegner vi den derfor for de neste 100 timene og ser hvilken verdi den nærmer seg. Da endrer vi altså programmet slik at det i stedet står `b = 60 * 100`. Når vi kjører programmet, får vi da denne grafen:

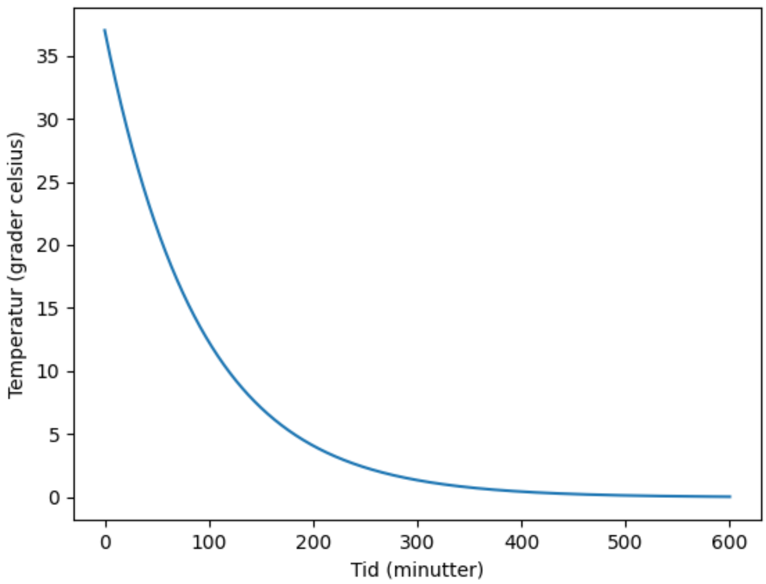


Her kommer det tydelig fram at saltmengden stabiliserer seg på 1000 g.
Det kan altså maksimalt bli 1000 g salt i tanken.

4.31
Vi antar at kroppstemperaturen var 37 °C til å begynne med. Da har vi initialbetingelsen $T(0) = 37$. Så skriver vi et program som bruker eulermetoden for å tegne en graf for de neste 10 timene.

```
from pylab import *

a = 0
b = 60 * 10
n = 10000

delta_t = (b - a)/n

T0 = 37

def TDerivert(T):
  return -0.011*T

t = zeros(n)
T = zeros(n)

T[0] = T0

for i in range(n - 1):
  T[i+1] = T[i] + TDerivert(T[i])*delta_t
  t[i+1] = t[i] + delta_t

plot(t, T)
xlabel("Tid (minutter)")
ylabel("Temperatur (grader celsius)")
show()
```

Vi kjører programmet og får grafen nedenfor. Herfra ser vi at temperaturen avtar raskt til å begynne med, men så bremses nedkjølingen. Temperaturen ser ut til å nærme seg 0 °C etter hvert som tiden går.



4.32
a Siden vekstfarten er 15 % av bakterieantallet, vil differensiallikningen $N' = 0{,}15N$ beskrive situasjonen.

b Vi løser differensiallikningen ovenfor ved hjelp av CAS.
Punktet (0 , 100 000) ligger på grafen til N siden det til å begynne med (for t = 0) var 100 000 bakterier.

1	LøsODE$(N' = 0.15N, N, t, (0, 100000))$
	$\approx$ $\mathbf{N = 100000\, e^{0.15t}}$

En modell for bakterieantallet etter t timer er gitt ved $N(t) = 100\,000e^{0{,}15t}$.

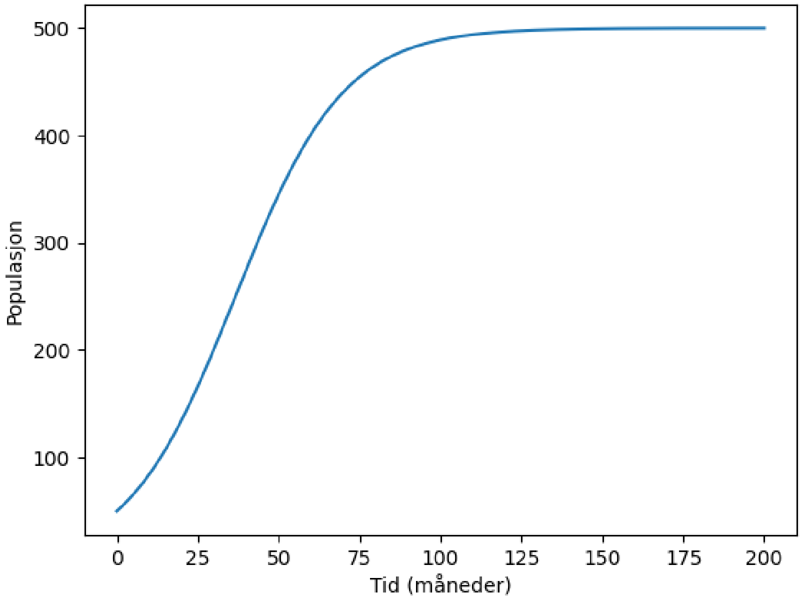
c Vi setter $N(t) = 1\,000\,000$ og løser likningen i CAS.
Det gir t = 15,4, som betyr at det tar 15,4 timer før det er én million bakterier i næringsoppløsningen.

1	$N(t) := 100000\, e^{0.15t}$
	$\approx$ $\mathbf{100000\, e^{0.15t}}$
2	$N(t) = 1000000$
	Løs: $\left\{t = \frac{20}{3} \ln(10)\right\}$
3	\$2
	$\approx$ $\{t = 15.35\}$

4.33
Vi setter k = 0,06 og B = 500 inn i formelen for populasjonsvekst.
Det gir differensiallikningen $N' = 0{,}06 \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{500}\right)$.
Siden populasjonen i dag er 50 individer, bruker vi $N(0) = 50$ som initialbetingelse.
Så skriver vi et program som bruker eulermetoden for å tegne en graf som viser utviklingen i harepopulasjonen de neste 200 månedene.

```
from pylab import *

a = 0
b = 200
n = 10000

delta_t = (b - a)/n

N0 = 50

# Definerer N-derivert
def NDerivert(N):
  return 0.06*N*(1-N/500)

# Lager lister fylt med n nuller
t = zeros(n)
N = zeros(n)

N[0] = N0

# Bruker eulermetoden
for i in range(n - 1):
  N[i+1] = N[i] + NDerivert(N[i])*delta_t
  t[i+1] = t[i] + delta_t

# Plotter grafen til N
plot(t, N)
xlabel("Tid (måneder)")
ylabel("Populasjon")
show()
```

Når vi kjører programmet, tegnes grafen nedenfor. Her ser vi at harepopulasjonen vokser stadig raskere fram til det har gått litt under 50 måneder. Da begynner vekstfarten å avta. Etter i overkant av 100 måneder flater populasjonen ut på 500 individer, det vil si bæreevnen for området.



4.34

a Endringen i drivstoffmengde er $y'(t)$. Siden det tilføres 1000 L/min, mens en firedel (det vil si 0,25*y*) av drivstoffet renner ut, er $y' = 1000 - 0{,}25y$.

b Ettersom drivstofftanken var tom da påfyllingen startet, er $y(0) = 0$ en initialbetingelse. Altså ligger punktet (0 , 0) på grafen til *y*, og dette bruker vi når vi løser differensiallikningen ovenfor i CAS.

1	LøsODE$(y' = 1000 - 0.25y, y, t, (0,0))$
	$\approx$ $\mathbf{y = -4000\,e^{-0.25t} + 4000}$

Drivstoffmengden *y* liter etter *t* minutter er $y(t) = -4000e^{-0{,}25t} + 4000$.

4.35

a $N' = 2 \cdot 10^{-7} \cdot N \cdot \left(1 - \dfrac{N}{500}\right)$

b –

c –

4.36

a Vi lar *y*(*t*) være massen (i gram) av saltet etter *t* minutter. Da er endringen i massen lik $y'(t)$.

Når vi tilsetter 4 L/min av løsning med konsentrasjon 2,5 g/L, tilsettes altså $4 \text{ L/min} \cdot 2{,}5 \text{ g/L} = 10 \text{ g/min}$. Samtidig renner det hvert minutt ut 4 L blandet løsning per minutt. Den blandede løsningen har konsentrasjon $\dfrac{y}{250}$ g/L, det vil si samlet masse dividert med de 250 L løsning som tanken til enhver tid inneholder. Dermed renner det ut $4 \cdot \dfrac{y}{250}$ g salt per minutt.

Siden det renner inn 10 g/min og renner ut $4 \cdot \dfrac{y}{250}$, er *y* gitt ved $y' = 10 - 4 \cdot \dfrac{y}{250}$.

b Vi løser differensiallikningen ovenfor ved hjelp av CAS. Til å begynne med er vannet helt rent, som betyr at saltmengden er null. Dermed er $y(0) = 0$ en initialbetingelse, slik at punktet (0 , 0) ligger på grafen.

1	LøsODE$\left(y' = 10 - 4 \cdot \frac{y}{250}, y, t, (0,0)\right)$
	$\approx \mathbf{y = -625\, e^{-0.02t} + 625}$

Saltmengden y gram etter t minutter er gitt ved $y = -625e^{-0{,}02t} + 625$.

c Vi finner $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$ ved hjelp av kommandoen Grenseverdi(<Uttrykk>,<Variabel>,<Verdi>).
HøyreSide-kommandoen gir uttrykket til høyre for likhetstegnet i første rad.

1	LøsODE$\left(y' = 10 - 4 \cdot \frac{y}{250}, y, t, (0,0)\right)$
	$\approx \mathbf{y = -625\, e^{-0.02t} + 625}$
2	Grenseverdi(HøyreSide($1), t, ∞)
	$\approx \mathbf{625}$

Etter hvert som tiden går, vil saltmengden i tanken nærme seg 625 g.

4.37

a Gjenstanden påvirkes av tyngdekraften G som virker nedover og luftmotstanden L som virker oppover. Vi velger positiv retning nedover, slik at G får positivt og L får negativt fortegn. Da er summen av kreftene som virker på gjenstanden $G - L = mg - kv = 0{,}1 \cdot 9{,}81 - 0{,}01v = 0{,}981 - 0{,}01v$. Av Newtons andre lov er summen av kreftene lik mv'. Det gir differensiallikningen $0{,}981 - 0{,}01v = 0{,}1v'$, eller $v' = 9{,}81 - 0{,}1v$.

b Vi har differensiallikningen $v' = 9{,}8 - 0{,}1v$ og initialbetingelsen $v(0) = 2$. Vi løser den først i CAS.

1	LøsODE$(v' = 9.81 - 0.1\, v, v, t, (0,2))$
	$\approx \mathbf{v = -96.1\, e^{-0.1t} + 98.1}$

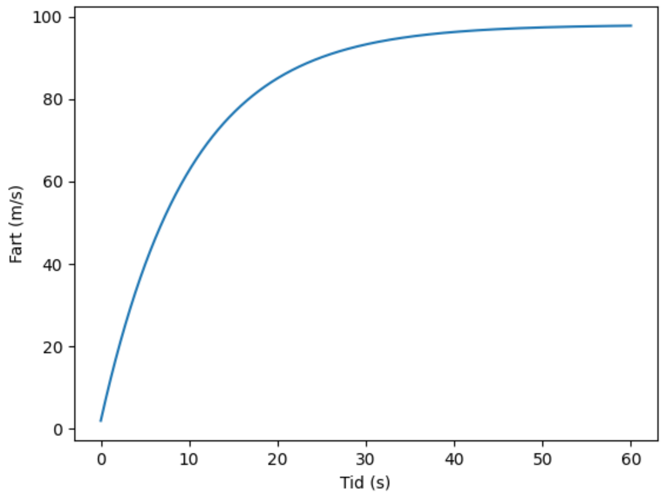
Vi ser at $v(t) = -96e^{-0{,}1t} + 98$.

Så finner vi $v(t)$ ved hjelp av eulermetoden. Da finner vi ikke funksjonsuttrykket for v, men vi kan tegne en graf som for eksempel viser farten for de første 60 sekundene.

```
from pylab import *

a = 0
b = 60
n = 10000 # Antall steg

delta_t = (b - a)/n

# Vi har initialbetingelsen v(0) = 2
v0 = 2

# Definerer v-derivert i henhold til differensiallikningen
def vDerivert(v):
  return 9.81 - 0.1*v
```

```
# Lager to lister og fyller dem med n nuller hver
t = zeros(n)
v = zeros(n)

# Setter det første elementet i lista over farten lik v0
v[0] = v0

# Bruker eulermetoden til å finne resten av elementene
for i in range(n - 1):
  v[i+1] = v[i] + vDerivert(v[i])*delta_t
  t[i+1] = t[i] + delta_t

# Plotter grafen til v
plot(t, v)
xlabel("Tid (s)")
ylabel("Fart (m/s)")
show()
```

Når vi kjører programmet, tegnes grafen som vi ser til høyre. Den viser at farten i teorien hele tiden øker, men at økningen er raskest i starten, og at farten i praksis flater ut etter omtrent ett minutt (når *terminalfarten* er nådd).



c Fra grafen som ble tegnet med eulermetoden, ser farten ut til å nærme seg omtrent 100 m/s. Vi sjekker hva den faktisk nærmer seg ved å finne $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$, altså ved å bruke det funksjonsuttrykket for v som vi fant analytisk. Denne grenseverdien finner vi med CAS.

1	Grenseverdi$\left(-96\,e^{-0.1t}+98,\infty\right)$
	$\approx$ **98**

Vi regner oss fram til at farten nærmer seg 98 m/s. Tilnærmingen til 100 m/s fra eulermetoden viste seg altså å være god.

4.38
Vi bruker følgende kommando:
LøsODE(<Likning>,<Avhengig variabel>,<Uavhengig variabel>,<Punkt på *f*>,<Punkt på f'>).

Punktet (0 , –2) ligger på grafen til *T*, og punktet (0 , 3) ligger på grafen til T'.
Vi løser differensiallikningen i CAS og får $T(x)=0{,}3e^{10x}-2{,}3$.

1	LøsODE$(T'' - 10T' = 0, T, x, (0, -2), (0, 3))$
	$\approx$ $\mathbf{T = 0.3\, e^{10x} - 2.3}$

4.39

a Vi setter $k = 3$ og $m = 0{,}5$ inn i differensiallikningen fra oppgaveteksten.

Da får vi $y'' = -\frac{3}{0{,}5} \cdot y$, dvs. $y'' = -6y$.

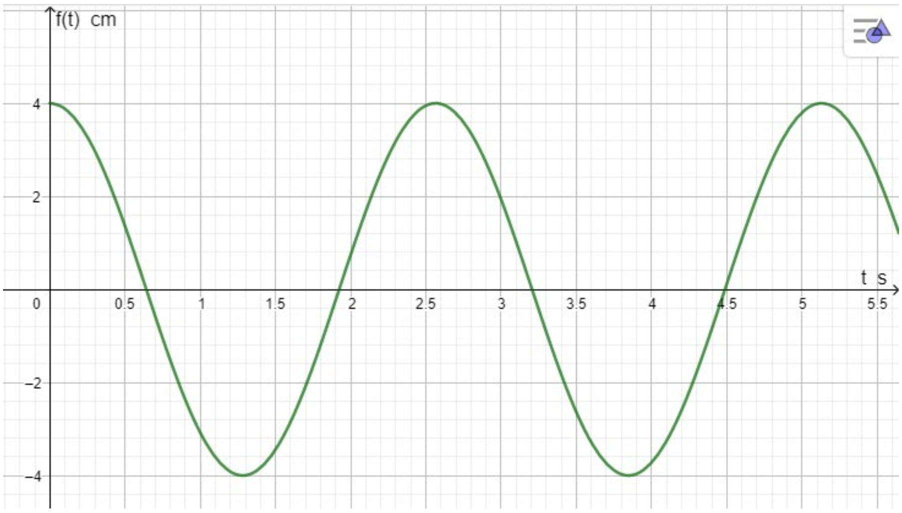
b Med positiv retning nedover har vi $y(0) = 0{,}04$ siden loddet trekkes 4 cm = 0,04 m fra likevektsstillingen før det slippes ($t = 0$). Dessuten er farten til loddet 0 m/s ved $t = 0$, siden det slippes fra ro. Vi har derfor følgende to initialbetingelser: $y(0) = 0{,}04$ og $y'(0) = 0$.

c For å løse differensiallikningen ovenfor med de to initialbetingelsene bruker vi kommandoen LøsODE(<Likning>,<Avhengig variabel>,<Uavhengig variabel>,<Punkt på *f*>,<Punkt på f'>).

1	LøsODE($y'' = -6\,y, y, t, (0, 0.04), (0, 0)$)
	$\approx$ $\mathbf{y = 0.04\ \cos(2.45\ t)}$

Den videre svingebevegelsen beskrives ved $y(t) = 0{,}04\cos(2{,}45t)$ hvor *y* er utslaget (i cm) fra likevektsstillingen og *t* er antall sekunder siden loddet ble sluppet.

d I stedet for *y* bruker vi *f* som navn på funksjonen, siden GeoGebra ikke tillater å bruke *y* som funksjonsnavn. Vi tegner grafen til *f* i Grafikkfeltet i GeoGebra. Som vi ser, avtar ikke utslagene etter hvert som tiden går. Det viser at vi har en harmonisk svingning. Det henger sammen med at vi ser bort fra friksjon (slik at $q = 0$).



4.40

a Fjærkonstanten er $k = 80$ N/m. Friksjonskonstanten er $q = 180$ kg/s. Massen er $m = 100$ kg.
Vi setter disse tallene (uten enheter) inn i den generelle differensiallikningen for fjærbevegelse og får $100y'' + 180y' + 80y = 0$.

b Initialbetingelsene forteller at (0 , 0) ligger på grafen til *y* og at (0 , 100) ligger på grafen til y'.
Vi bruker disse opplysningene og løser differensiallikningen ovenfor med CAS.
Der ser vi at $y(t) = 500e^{-0{,}8t} - 500e^{-t}$.

1	LøsODE($100\,y'' + 180\,y' + 80\,y = 0, y, t, (0, 0), (0, 100)$)
	$\approx$ $\mathbf{y = 500\ e^{-0.8t} - 500\ e^{-t}}$

c Dette våpenet har en svært høy friksjonskonstant. Det betyr at svingebevegelsen dempes fort, og at det tar kort tid fra avfyring til avtrekkermekanismen igjen har nådd likevekt. Svaret er altså ja, det stemmer at våpenet har en avtrekkermekanisme med demping.

4.41

a Vi starter med å få en oversikt over hvilke krefter som virker på klossen. Siden klossen bare beveger seg horisontalt, trenger vi ikke å ta verken tyngde- eller normalkraft i betraktning. Vi trenger heller ikke ta hensyn til friksjonskrefter, siden vi ser bort fra luftmotstand og andre typer friksjon.

En kraft vi imidlertid *må* se på, er fjærkraften. Den virker i motsatt retning av utslaget. Vi velger positiv retning mot høyre på tegningen. Når klossen er *y* cm til høyre for likevektsstillingen, vil derfor fjærkraften være $-ky$.

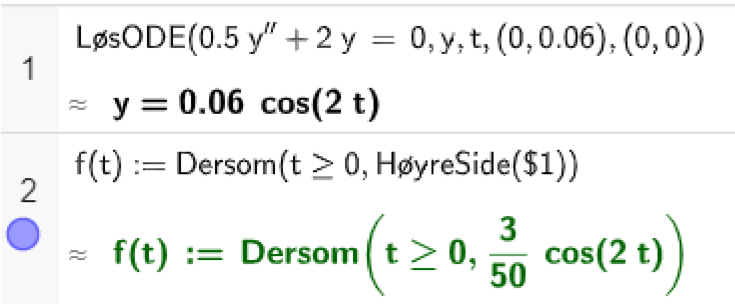
Summen av kreftene som virker på klossen, er altså $\sum F = -ky$. Newtons andre lov gir

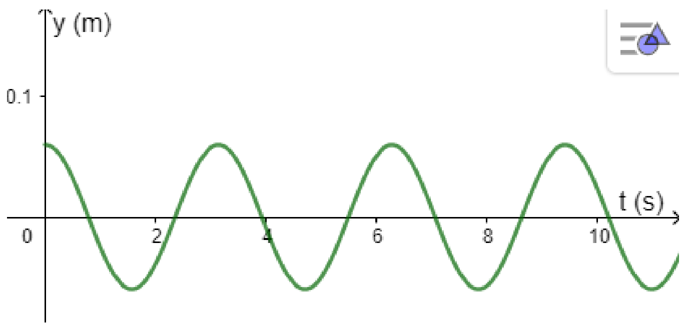
$$-ky = m \cdot a$$
$$-ky = m \cdot y''$$
$$my'' + ky = 0$$

En differensiallikning for utslaget *y* fra likevektsstillingen er dermed $my'' + ky = 0$.

b Vi setter inn tallene for *m* og *k* i differensiallikningen ovenfor og får $0{,}5y'' + 2y = 0$. Ettersom klossen slippes 6 cm = 0,06 m fra likevektsstillingen, kan vi bruke *y*(0) = 0,06 som initialbetingelse. Fordi klossen *slippes*, har den farten 0 m/s, så $y'(0) = 0$ er en annen initialbetingelse.

Vi løser differensiallikningen i CAS med de to initialbetingelsene og ser at $y(t) = 0{,}06\cos 2t$ beskriver bevegelsen til klossen. Vi tegner grafen ved å lage en funksjon *f* som er lik $0{,}06\cos 2t$ for $t \geq 0$ (vi må bruke *f* som funksjonsnavn siden GeoGebra ikke tillater *y* som navn når vi tegner grafer).

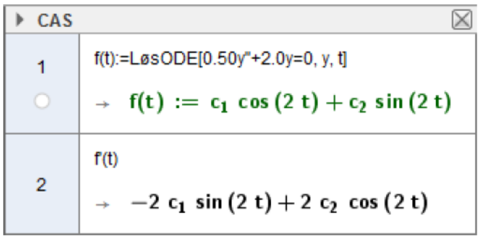




c Koeffisienten foran $\cos 2t$ i funksjonsuttrykket til *f* er 0,06. Det betyr at amplituden er 6,0 cm.

Svingetiden (perioden) til *f* er $\frac{2\pi}{2} = \pi$, eller omtrent 3,1 sekunder.

d Den generelle løsningen av differensiallikningen i oppgave b er $y(t) = c_1 \cos 2,0t + c_2 \sin 2,0t$.
Vi antar at klossen i dette forsøket også ble sluppet i ro.
Altså er $y'(0) = 0$.



$$y'(t) = -2c_1 \sin 2,0t + c_2 \cos 2,0t$$
$$y'(0) = -2c_1 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2 = 0$$
$$c_2 = 0$$

Utslaget som funksjon av tiden er altså gitt ved $y(t) = c_1 \cos 2,0t$.
Farten til klossen er dermed $y'(t) = -2c_1 \sin 2,0t$.
Når klossen passerer likevektsstillingen, er $y(t) = 0$, som betyr at $\cos 2,0t = 0$.

Da er $\sin 2,0t = \pm 1$. Absoluttverdien av farten er dermed $|y'(t)| = 2c_1$.
Klossen har farten 1,4 m/s når den passerer likevektsstillingen.
Dermed er $2c_1 = 1,4$, som gir $c_1 = 0,70$. Utslaget som funksjon av tiden er altså

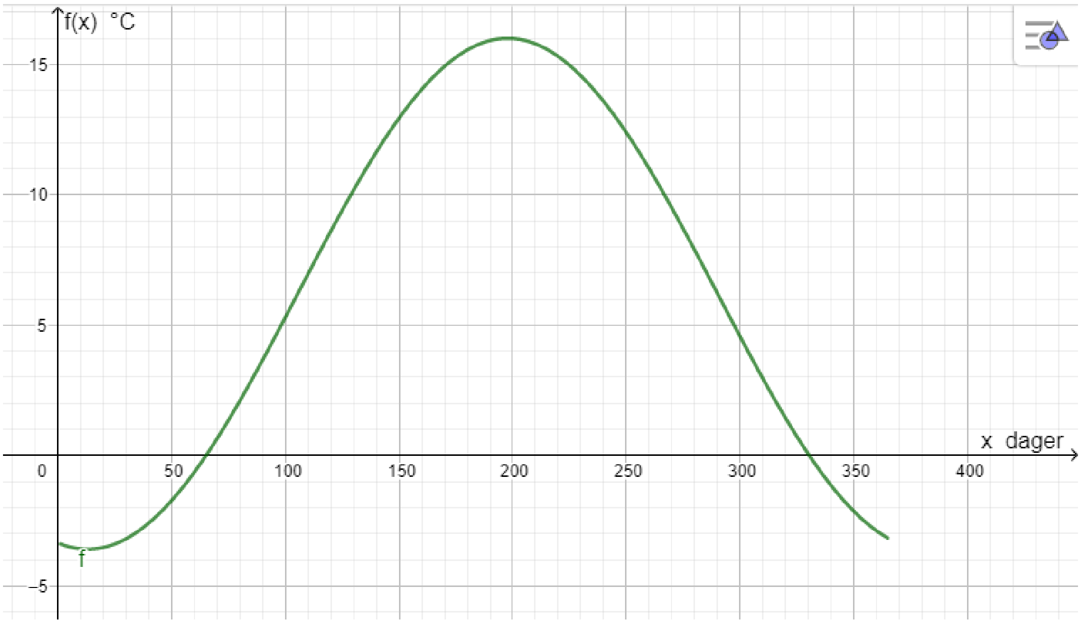
$$y(t) = 0,70 \cos 2,0t$$

Av funksjonsuttrykket ser vi at utslaget i dette forsøket har samme svingetid (3,1 s), men en annen amplitude (0,70 m = 70 cm) sammenliknet med oppgave b og c.

4.42

a Vi skriver funksjonsuttrykket til *f* inn i Algebrafeltet i GeoGebra for å tegne grafen.

$f(x) = 6.2 - 9.8\ \sin(0.017\,x + 1.35), \quad (1 \leq x \leq 365)$



b Vi ser fra funksjonsuttrykket at likevektslinja er $y = 6{,}2$, amplituden er 9,8, og perioden er $\frac{2\pi}{0{,}017} = 370$.

Svarene forteller at gjennomsnittstemperaturen er 6,2 °C, men at den varierer med opptil 9,8 °C i hver retning fra dette nivået.

Legg merke til at perioden er litt over et år. Derfor vil temperaturen etter hvert ikke lenger passe sammen med tiden på året (siden modellen tar utgangspunkt i et 370 dager langt år). Det betyr at den egner seg dårlig for ekstrapolasjon mer enn noen år fram eller tilbake i tid.

c For å finne nullpunktene til *f* bruker vi kommandoen NullpunktIntervall(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>). Normaltemperaturen er ifølge modellen 0 °C både den 65. og 330. dagen i året, det vil si 6. mars og 26. november. Svarene forteller at frost må forventes fra november til mars, mens man kan anta at det er varmegrader resten av året.

NullpunktIntervall(f, 1, 365)

→ A = (65.095, 0)

→

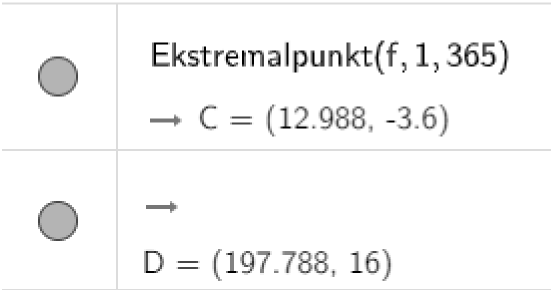
B = (330.48, 0)

d Siden 1. januar er dag 1, vil 31. januar være dag 31. Dermed er 1. februar dag 32, slik at 10. februar (9 dager seinere) er dag nummer 41. Normaltemperaturen 10. februar er dermed $f(41) = -2{,}5\ ^\circ\mathrm{C}$.

a = f(41)

→ -2.51

e Vi bruker kommandoen Ekstremalpunkt(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>) for å finne topp- og bunnpunktene på grafen til *f*. Temperaturen er andrekoordinatene til disse punktene, som betyr at *C* er bunnpunktet til *f*. Den kaldeste dagen er dag nummer 12, det vil si den 12. januar. Denne dagen er temperaturen −3,6 °C.



f Vi ser fra skjermbildet ovenfor at toppunktet på grafen til *f* er *D*. Derfor er dag nummer 198 den varmeste, med en temperatur på 16 °C.

g Vi bruker at $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Det gir følgende uttrykk for *f*:

$$\begin{aligned} f(x) &= 6{,}2 - 9{,}8\sin(0{,}017x + 1{,}35) \\ &= 6{,}2 - 9{,}8\cos\left(0{,}017x + 1{,}35 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 6{,}2 - 9{,}8\cos(0{,}017x - 0{,}22) \end{aligned}$$

Funksjonsuttrykket kan altså skrives på formen $f(x) = 6{,}2 - 9{,}8\cos(0{,}017x - 0{,}22)$.

4.43

Maksimalverdien er omtrent 230, mens minimalverdien er omtrent 10. Likevektslinja ligger midt mellom dem, og er derfor $y = \frac{230 + 10}{2} = 120$. Det betyr at amplituden må være 110, siden avstanden mellom maksimalverdien og likevektslinja er 110.

Grafen er i fase for klokkeslettene 06.30 og 18.30. Det vil si at perioden er omtrent 12 timer, slik at $c = \frac{2\pi}{12} \approx 0{,}5$.
Siden grafen stiger og har *y*-verdi 120 (det vil si likevektsverdien) kl. 08.00, har vi at

$-\frac{\varphi}{c} = 8 \;\Leftrightarrow\; -\frac{\varphi}{0{,}5} = 8 \;\Leftrightarrow\; \varphi = -4$.

Derfor er en modell for tidevannet i Surnadal den 1. august 2015 gitt ved $f(x) = 110\sin(0{,}5x - 4) + 120$.

4.44

a Når den minste vanndybden er 4,0 m og forskjellen på flo og fjære kan være 20 m, er den høyeste vannstanden 24 m. Det betyr at likevektslinja er 14 m, og at amplituden er 10 m. Siden perioden er 12,5 timer, blir $c = \frac{2\pi}{12{,}5} = 0{,}5$. Det gir funksjonsuttrykket $f(t) = 10\sin(0{,}5t + \varphi) + 14$.

For å bestemme φ bruker vi opplysningen om at *f*(0) = 4. Når vi setter inn 0 for *t*, får vi en likning for φ:

$$\begin{aligned} 10\sin(0{,}5 \cdot 0 + \varphi) + 14 &= 4 \\ 10\sin\varphi &= -10 \\ \sin\varphi &= -1 \\ \varphi &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

Det fins uendelig mange verdier for φ. Vi velger $\varphi = -\frac{\pi}{2} = -1{,}6$ og setter verdien inn i uttrykket vi fant for *f* ovenfor. Det gir $f(t) = 10\sin(0{,}5t - 1{,}6) + 14$.

Vi kan så bruke at $\sin v = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$. Da kan vi skrive *f* som en cosinusfunksjon:

$$f(t) = 10\cos\left(0{,}5t - \tfrac{\pi}{2}\right) + 14$$
$$= 10\cos\left(0{,}5t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + 14$$
$$= 10\cos\left(0{,}5t + \pi\right) + 14$$

Da er altså $f(t) = 10\cos(0{,}5t + 3{,}1) + 14$.

b Vi definerer *f* i CAS og løser likningen *f*(*t*) = 8 for å finne tidspunktene hvor vanndybden er akkurat 8 m. De to første gangene det skjer, er etter 1,91 og 10,77 timer.

For å sjekke at dybden faktisk er *over* 8 m (og ikke under), finner vi dybden på et tidspunkt mellom de to ovennevnte. Vi tar 5 som et eksempel. Siden *f*(5) > 8, er dybden over 8 m i tidsrommet fra 1,91 timer til 10,77 timer.

Cruiseskipet kan derfor maksimalt ligge i havnen i omtrent 8 timer og 50 minutter.

1 f(t) := 10 sin(0.5 t − 1.6) + 14
$\rightarrow\ 10\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{8}{5}\right) + 14$

2 f(t) = 8
Løs: $\left\{t = 4k_1\pi - 2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{16}{5},\ t = 4k_1\pi + 2\pi + 2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{16}{5}\right\}$

3 \$2
$\approx\ \{t = 12.57k_1 + 1.91,\ t = 12.57k_1 + 10.77\}$

4 f(5)
$\approx\ 21.83$

5 10.77 − 1.91
$\approx\ 8.86$

4.45

a Vi bruker produktregelen for derivasjon for å derivere funksjonen:
$f'(x) = (\sin x \cdot \cos x)' = \sin x \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
Den deriverte er lik null for ekstremalpunktene til *f*.

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$$
$$\cos^2 x = \sin^2 x$$
$$\cos x = \pm\sin x$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad\vee\quad x = \frac{3\pi}{4} \quad\vee\quad x = \frac{5\pi}{4} \quad\vee\quad x = \frac{7\pi}{4}$$

Likningen har bare fire løsninger (ekstremalpunktene) i definisjonsmengden.

b For å finne infleksjonspunktene til *f* finner vi først f'' , som er den deriverte av f' :

$$f''(x) = (\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x)'$$
$$= \cos x \cdot (-\sin x) + (-\sin x) \cdot \cos x - (\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x)$$
$$= -2 \cdot \sin x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$
$$= -4 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

Den andrederiverte er lik null når enten $\sin x = 0$ eller når $\cos x = 0$.

Infleksjonspunktene til *f* er derfor $\frac{\pi}{2}$, π og $\frac{3\pi}{2}$.

c Vi kunne ha skrevet om funksjonsuttrykket til $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Da vet vi at ekstremalpunktene er slik at $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$.

Ved å velge *k*-verdiene 0, 1, 2 og 3 får vi samme svar som i oppgave a.

Videre er infleksjonspunktene slik at $2x = k\pi \iff x = \frac{\pi}{2}k$

Ved å velge *k*-verdiene 0, 1 og 2 får vi samme svar som i oppgave b.

4.46

a Vi skriver prisene i rad 1 og antall solgte enheter i rad 2 i et regneark i GeoGebra. Så bruker vi verktøyet Regresjonsanalyse. Vi kommer fram til at en eksponentiell modell passer best og velger Eksponentiell 2 under Regresjonsmodell. Vi velger Eksponentiell 2 i stedet for Eksponentiell for å få e som grunntall. Sammenhengen mellom antall solgte enheter f og prisen x er da gitt ved modellen $f(x) = 876{,}26 \cdot e^{-0{,}0183x}$.

	A	B	C	D
1	30	45	60	80
2	500	387	300	200

Regresjonsmodell

Eksponentiell 2 $y = 876.2602\, e^{-0.0183x}$

b En pris på 150 kr er relativt langt utenfor det området modellen er tiltenkt for. Likevel er det ikke utenkelig at modellen kan stemme for $x = 150$.

Symbolsk utregning: $x =$ 150 $y =$ 56.5731

Ifølge modellen vil det selges 57 enheter når prisen er 150 kr per enhet. Det høres ikke urimelig ut med tanke på at tallet har riktig fortegn og er mindre enn antallet solgte enheter for lavere priser. Altså ser modellen ut til å være gyldig for 150 kr.

c Vi definerer inntekten ved $I(x) = x \cdot f(x)$. I har et maksimalpunkt når $I'(x) = 0$ og $I''(x) < 0$. I CAS ser vi altså at vi får den største verdien av I for $x = 54{,}64$.

Ifølge modellen bør altså bedriften sette prisen til 55 kr per enhet for å få høyest mulig inntekt.

1 $f(x) := 876.26\, e^{-0.02x}$
$\rightarrow \frac{43813}{50} e^{\frac{-183}{10000}x}$

2 $I(x) := x\, f(x)$
$\rightarrow \frac{43813}{50} x\, e^{\frac{-183}{10000}x}$

3 $I'(x) = 0, x = 1$
NLøs: $\{x = 54.64\}$

4 $I''(56.64) < 0$
$\rightarrow$ **true**

4.47

a At y' (vekstfarten til y) er proporsjonal med y, betyr at $y' = ky$. Siden proporsjonalitetskonstanten er 0,25, får vi differensiallikningen $y' = 0{,}25y$.

b y vokser med 15 % per tidsenhet. Det betyr at $y' = 0{,}15y$.

c Vekstfarten til y betyr y' . Kvadratet av størrelsen selv er y^2 , og siden vekstfarten er dobbelt så stor som kvadratet av størrelsen selv, er $y' = 2y^2$.

d Endringen til størrelsen y er $-0{,}05y$ siden størrelsen minker med 5 % av seg selv. Det gir likningen $y' = -0{,}05y$.

e Vekstfarten til y er y' . Denne er proporsjonal med tiden t. Siden proporsjonalitetskonstanten er 0,25, får vi $y' = -0{,}25t$.

4.48

a Populasjonen er på sin maksimale størrelse når $N' = 0$. Vi definerer en funksjon *V* gitt ved $V(t) = N'(t) = (0{,}8 - 0{,}2t)\cdot N$ i CAS. For å finne ut når populasjonen når sin maksimale størrelse, setter vi *V*(*t*) = 0 og løser for *t*. Vi ser i rad 2 at populasjonen når sitt maksimum etter 4 år.

1	$V(t) := (0.8 - 0.2\,t)\,N$ $\rightarrow\ \mathbf{N\left(\frac{-1}{5}\,t + \frac{4}{5}\right)}$
2	$\text{Løs}(V(t) = 0, t)$ $\rightarrow\ \mathbf{\{t = 4\}}$

b Vi skriver differensiallikningen inn i CAS og løser den ved hjelp av LøsODE-kommandoen. Initialbetingelsen *N*(0) = 1000 viser at punktet (0 , 1000) ligger på grafen.

1	$\text{LøsODE}(N' = (0.8 - 0.2\,t)\,N, N, t, (0, 1000))$ $\approx\ \mathbf{N = 1000\,e^{-0.1t^2+0.8t}}$

Et uttrykk for populasjonstallet *N* etter *t* år er $N(t) = 1000e^{-0{,}1t^2+0{,}8t}$.

c I oppgave a så vi at populasjonen når sin topp når *t* = 4. Vi setter derfor *t* = 4 inn i uttrykket for populasjonen. På sitt største er populasjonen i underkant av 5000 individer.

2	$\text{ByttUt}(\$1, t = 4)$ $\approx\ \mathbf{N = 4953.03}$

4.49

a Fallskjermhopperen påvirkes av to krefter: tyngdekraften *G* = *mg* = 9,81*m* og luftmotstanden *L* = *kv*. Vi velger positiv retning nedover, slik at *G* får positivt og *L* får negativt fortegn. Newtons andre lov gir nå $9{,}81m - kv = ma$, der akselerasjonen *a* er positiv siden positiv retning er nedover. Akselerasjonen er den deriverte av farten, så denne likningen kan vi omskrive til $mv' + kv - 9{,}81m = 0$. Vi setter inn tallene for massen og proporsjonalitetskonstanten, og får differensiallikningen $100v' + 13v - 981 = 0$.

Fallskjermhopperen har sin største fart når $v' = 0$. Vi setter null inn for v' og løser likningen i CAS.

1	$100 \cdot 0 + 13v - 981 = 0$ NLøs: $\mathbf{\{v = 75.46\}}$

Den største farten hun får er 75,5 m/s.

b Fallskjermhopperen påvirkes av to krefter: tyngdekraften *G* = *mg* = 9,81*m* og luftmotstanden $L = kv^2$. Vi velger positiv retning nedover, slik at *G* får positivt og *L* får negativt fortegn. Newtons andre lov gir nå $9{,}81m - kv^2 = ma$, der akselerasjonen *a* er positiv siden positiv retning er nedover. Akselerasjonen er den deriverte av farten, så denne likningen kan vi omskrive til $mv' + kv^2 - 9{,}81m = 0$. Vi setter inn tallene for massen og proporsjonalitetskonstanten, og får differensiallikningen $100v' + 0{,}25v^2 - 981 = 0$.

Fallskjermhopperen har sin største fart når $v' = 0$. Vi setter null inn for v' og løser likningen i CAS.

1	$100 \cdot 0 + 0.25v^2 - 981 = 0$
	NLøs: $\{v = -62.64, v = 62.64\}$

Den største farten hun får, er 62,6 m/s.

4.50

a Vi har fått oppgitt differensiallikningen $m' = -k \cdot m$ og initialbetingelsen $m(0) = m_0$.
Vi løser differensiallikningen i CAS og skriver at punktet $(0\,,\ m_0)$ ligger på grafen til m.

1	$\text{LøsODE}(m' = -k \cdot m, m, t, (0, m_0))$
	$\rightarrow\ m = m_0\, e^{-kt}$

Den gjenværende massen m ved tidspunktet t er gitt ved $m(t) = m_0 e^{-kt}$.

b Vi definerer $m(t)$ i rad 1 i CAS. Siden T er halveringstiden til stoffet, må halvparten av den opprinnelige stoffmengden m_0 gjenstå ved tidspunktet T. Det gir likningen $m(T) = \frac{1}{2}m_0$. Den løser vi med hensyn på T i rad 2, og det gir $T = \frac{\ln 2}{k}$.

1	$m(t) := m_0\, e^{-kt}$
	$\rightarrow\ m_0\, e^{-kt}$
2	$\text{Løs}\left(m(T) = \frac{1}{2} m_0, T\right)$
	$\rightarrow\ \left\{T = \frac{\ln(2)}{k}\right\}$

c Med opplysningen om at halveringstiden til stoffet er 30 år, kan vi finne k. Etter 30 år må nemlig halvparten av massen gjenstå, og det gir likningen $m(30) = \frac{1}{2}m_0$. Vi ser i rad 3 at $k = 0{,}0231$.

Dermed er $m(t) = m_0 e^{-0{,}0231t}$.
Når startmassen er redusert med 80 %, gjenstår $0{,}2m_0$.
Vi setter derfor det nye uttrykket vårt for m lik $0{,}2m_0$ og løser likningen for t.

Det går 70 år før startmassen er redusert med 80 %.

1	$m(t) := m_0\, e^{-kt}$
	$\rightarrow\ m_0\, e^{-kt}$
2	$m(30) = \frac{1}{2} m_0$
	Løs: $\left\{k = \frac{1}{30} \ln(2)\right\}$
3	$\$2$
	$\approx\ \{k = 0.0231\}$
4	$\text{Løs}(m_0 \cdot e^{-0.0231 \cdot t} = 0.2 m_0, t)$
	$\approx\ \{t = 69.6726\}$

4.51

a Newtons avkjølingslov forteller at endringen i en gjenstands temperatur er proporsjonal med differansen mellom omgivelsenes temperatur og gjenstandens egen temperatur. Det betyr at gjenstandens temperatur endres raskere når temperaturforskjellen mellom den selv og omgivelsene er stor.

b Vi setter inn $T_0 = 10$ i differensiallikningen til Newtons avkjølingslov: $T' = -k(T - 10)$, $T(0) = 18{,}3$.

c Vi starter med å løse differensiallikningen uten initialbetingelsen. Da ser vi at $T(t) = c_1 e^{-kt} + 10$.

1	LøsODE$(T' = -k \cdot (T - 10), T, t)$
	$\rightarrow\ \mathbf{T = c_1\, e^{-kt} + 10}$

Vi har nå to ukjente konstanter i funksjonsuttrykket for T. Vi definerer derfor T i rad 1 i et nytt CAS-vindu, og setter opp to de to likningene $T(0) = 18{,}3$ og $T(1) = 17{,}3$, som vi henter ut fra oppgaveteksten.

1	$T(t) := c_1 \cdot e^{-k\,t} + 10$
	$\rightarrow\ \mathbf{c_1\, e^{-kt} + 10}$
2	$T(0) = 18.3$
	$\rightarrow\ \mathbf{c_1 + 10 = \frac{183}{10}}$
3	$T(1) = 17.3$
	$\rightarrow\ \mathbf{c_1\, e^{-k} + 10 = \frac{173}{10}}$
4	$\{\$2, \$3\}$
	NLøs: $\mathbf{\{c_1 = 8.3, k = 0.128\}}$

Vi setter verdiene for c_1 og k inn funksjonsuttrykket for T. Så løser vi likningen $T(t) = 37$ for å finne tidspunktet da temperaturen var 37 °C. Det gir $t = -9{,}215$.

1	$T(t) := 8.3\, e^{-0.128t} + 10$
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{83}{10}\, e^{\frac{-16}{125}t} + 10}$
2	$T(t) = 37$
	NLøs: $\mathbf{\{t = -9.215\}}$

At $t = -9{,}215$, betyr at drapet skjedde 9 timer og $0{,}215 \cdot 60 \approx 13$ minutter før kl. 14.00. Drapet skal altså ha skjedd omtrent kl. 04.47.

4.52

Siden startkonsentrasjonen er 0,050 mol/L, er $c(0) = 0{,}05$ en initialbetingelse for differensiallikningen.

Vi bruker dette og løser differensiallikningen, som gir $c(t) = \dfrac{1}{kt + 20}$.

1	LøsODE$\left(c' = -k\,c^2, c, t, (0, 0.05)\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{c = \dfrac{1}{k\,t + 20}}$

Vi definerer $c(t)$ i et nytt CAS-vindu. Når 45 % av utgangsstoffene er spaltet, gjenstår 55 % av den opprinnelige konsentrasjonen. Etter 100 sekunder er derfor $c(t) = 0{,}55 \cdot 0{,}050$. I denne likningen er k ukjent.

Vi løser den og får $k = \dfrac{9}{55} = 0{,}16$.

1	$c(t) := \dfrac{1}{k\,t + 20}$ $\rightarrow\ \mathbf{\dfrac{1}{k\,t + 20}}$
2	$c(100) = 0.55 \cdot 0.05$ Løs: $\left\{\mathbf{k = \dfrac{9}{55}}\right\}$

4.53

a Endringen i vannstanden er h'. Ifølge Torricellis lov er da $h' = -k \cdot \sqrt{h}$.

b En initialbetingelse for differensiallikningen er $h(0) = 4$.

Med den løser vi differensiallikningen i CAS og får $h(t) = \dfrac{1}{4}k^2t^2 + 2kt + 4$.

1	LøsODE$\left(h' = -k \cdot \sqrt{h}, h, t, (0, 4)\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{h = \dfrac{1}{4}\,k^2\,t^2 + 2\,k\,t + 4}$

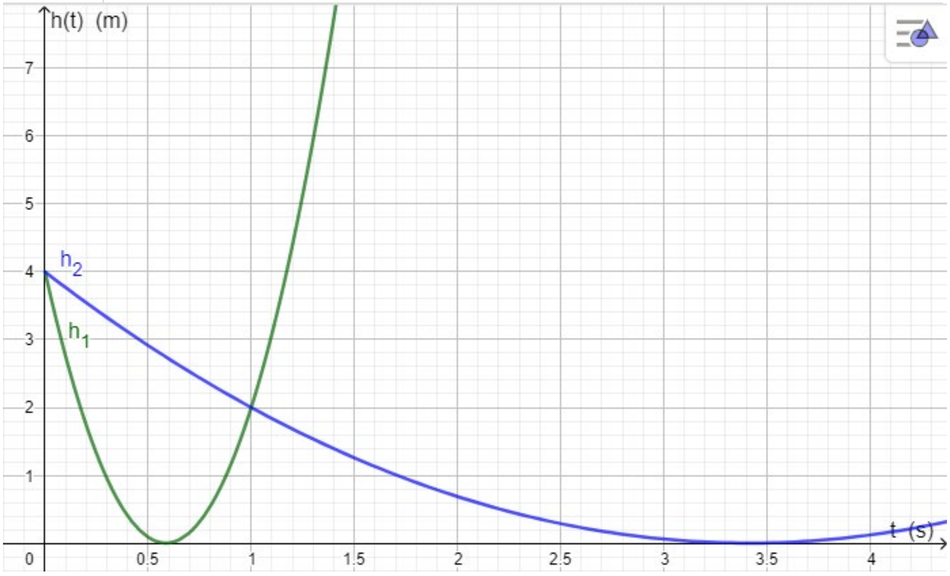
Vi definerer h i et nytt CAS-vindu. Siden halvparten av vannet har rent ut etter en time, er $h(1) = 2$. Her er k eneste ukjente, og vi løser likningen i CAS.

1	$h(t) := \dfrac{1}{4}\,k^2\,t^2 + 2\,k\,t + 4$ $\rightarrow\ \mathbf{\dfrac{1}{4}\,k^2\,t^2 + 2\,k\,t + 4}$
2	$h(1) = 2$ Løs: $\left\{\mathbf{k = -2\sqrt{2} - 4, k = 2\sqrt{2} - 4}\right\}$

Vi får to mulige verdier for k. For å avgjøre hvilken av dem som er riktig, tegner vi de to mulige grafene til h. Vi definerer funksjonene i algebrafeltet.

$$h_1(t) = \frac{1}{4}\left(-2\sqrt{2}-4\right)^2 t^2 + 2\left(-2\sqrt{2}-4\right)t + 4, \quad (t > 0)$$

$$h_2(t) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}-4\right)^2 t^2 + 2\left(2\sqrt{2}-4\right)t + 4, \quad (t > 0)$$



Her ser vi at bare den andre løsningen gir mening, for tanken skal ikke være tom allerede etter ca. en halvtime (den er jo ennå halvfull etter en time). Det er altså bare $k = 2\sqrt{2}-4$ som gir mening, slik at funksjonsuttrykket til h er $h(t) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}-4\right)^2 t^2 + 2\left(2\sqrt{2}-4\right)t + 4 = 0{,}34t^2 - 2{,}34t + 4$.

c Tanken er tom når $h(t) = 0$. Vi løser denne likningen i CAS.

1	$h(t) := 0.34\,t^2 - 2.34\,t + 4$
	$\rightarrow \ \frac{17}{50}t^2 - \frac{117}{50}t + 4$
2	$h(t)$
	NLøs: $\{t = 3.16, t = 3.72\}$

Det er bare den første av de to løsningene som er aktuell. Det tar altså 3,2 timer før tanken er tom.

4.54

a Når motoren stopper, er det bare friksjonskraften R som virker på båten. Utfra oppgaveteksten ser vi at den er $kv = 400v$ (vi setter inn 400 for proporsjonalitetskonstanten k). Vi bruker enheten kg og setter inn $m = 2000$. Newtons andre lov gir da

$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ -400v &= 2000a \\ a &= -\frac{400v}{2000} \\ v' &= -\frac{v}{5} \end{aligned}$$

b Siden farten er den deriverte av posisjonen, kan vi skifte ut *v* ovenfor med s'. Det betyr også at vi kan skifte ut v' med s''. Når vi setter dem inn i likningen, får vi da $s'' = -\frac{s'}{5}$.

c Vi regner først om til mer kjente enheter: 1 knop er én nautisk mil per time, altså $\frac{1852 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 0{,}514 \text{ m/s}$.

Dermed er 10 knop (som er startfarten) omtrent 5,14 m/s.

For å finne posisjonsfunksjonen løser vi differensiallikningen i oppgave b. Vi har to initialbetingelser. Siden vi måler strekning fra det punktet motoren stopper (ved $t = 0$), er $s(0) = 0$. Startfarten er $s'(0) = 5{,}14$. Vi løser så differensiallikningen i oppgave b med disse initialbetingelsene i CAS.

1 LøsODE$\left(s'' = -\frac{s'}{5}, s, t, (0,0), (0,5.14)\right)$

≈ $\mathbf{s = -25.7\,e^{-0.2t} + 25.7}$

Vi bruker uttrykket for *s*, og finner $s(3)$ og $s'(3)$ ved hjelp av CAS.

1 $s(t) := -25.7e^{-0.2t} + 25.7$

≈ $\mathbf{-25.7\,e^{-0.2t} + 25.7}$

2 $s(3)$

≈ **11.6**

3 $s'(3)$

≈ **2.82**

Etter 3 s er farten 2,8 m/s, og på denne tiden har båten flyttet seg omtrent 12 m.

d *s* vokser stadig saktere for større verdier av *t*. Altså vil båten stoppe når $t \to \infty$.
Siden $\lim\limits_{t\to\infty} s(t) = 25{,}7$, vil båten ha kommet omtrent 26 m unna startpunktet.

4 Grenseverdi(s, t, Infinity)

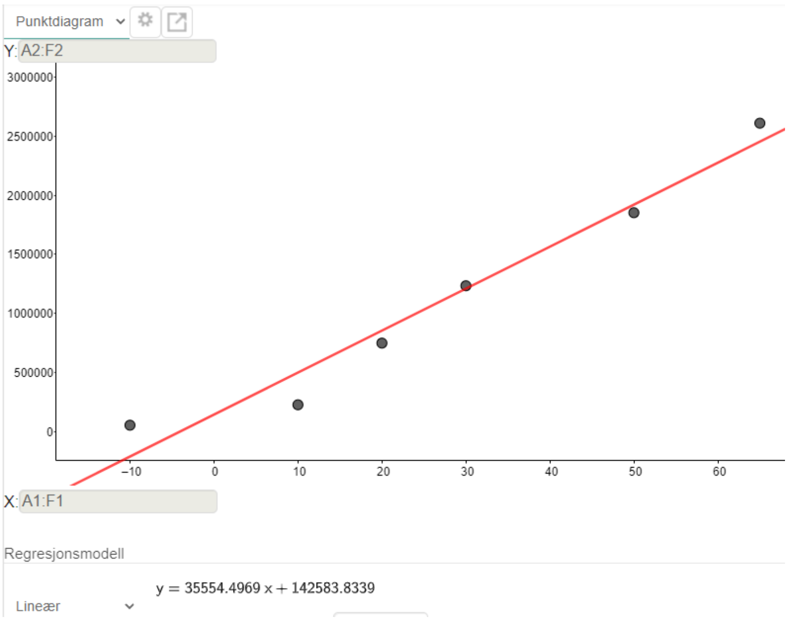
≈ **25.7**

4.55
Vi søker etter «Personbiler i Norge» på internett og ser hvilke resultater som kommer opp. På nettsiden [snl.no/personbiler_i_Norge] finner vi en tabell med antall personbiler i utvalgte år.

Den er ufullstendig, men vi kan bruke GeoGebra til å gjøre en regresjonsanalyse for å lage en modell som passer til utviklingen. I GeoGebra lager vi et regneark med år etter 1950 i første rad, og antall biler i andre rad. Så velger vi Regresjonsanalyse.

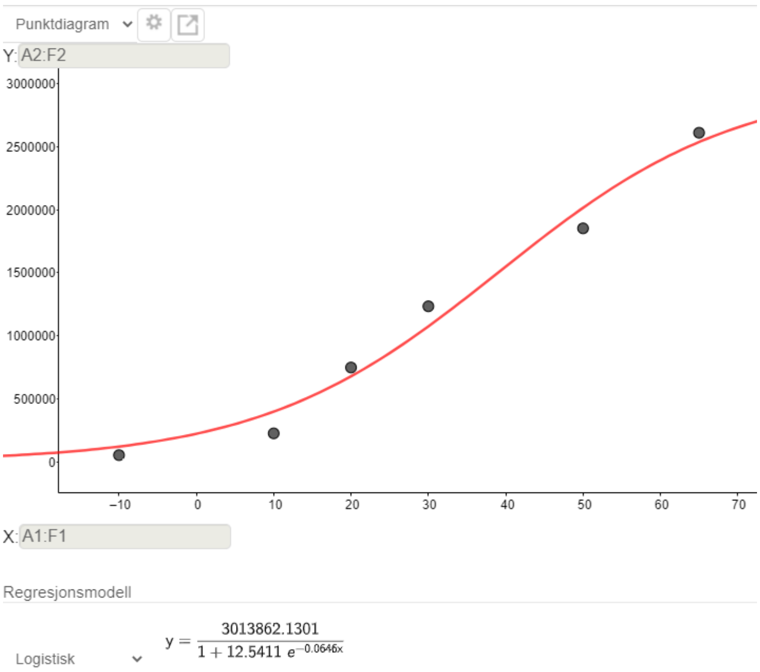
	A	B	C	D	E	F
1	-10	10	20	30	50	65
2	52718	225500	747996	1233500	1851929	2610352

Punktene ser ut til å ligge på en tilnærmet rett linje, så under Regresjonsmodell velger vi Lineær.



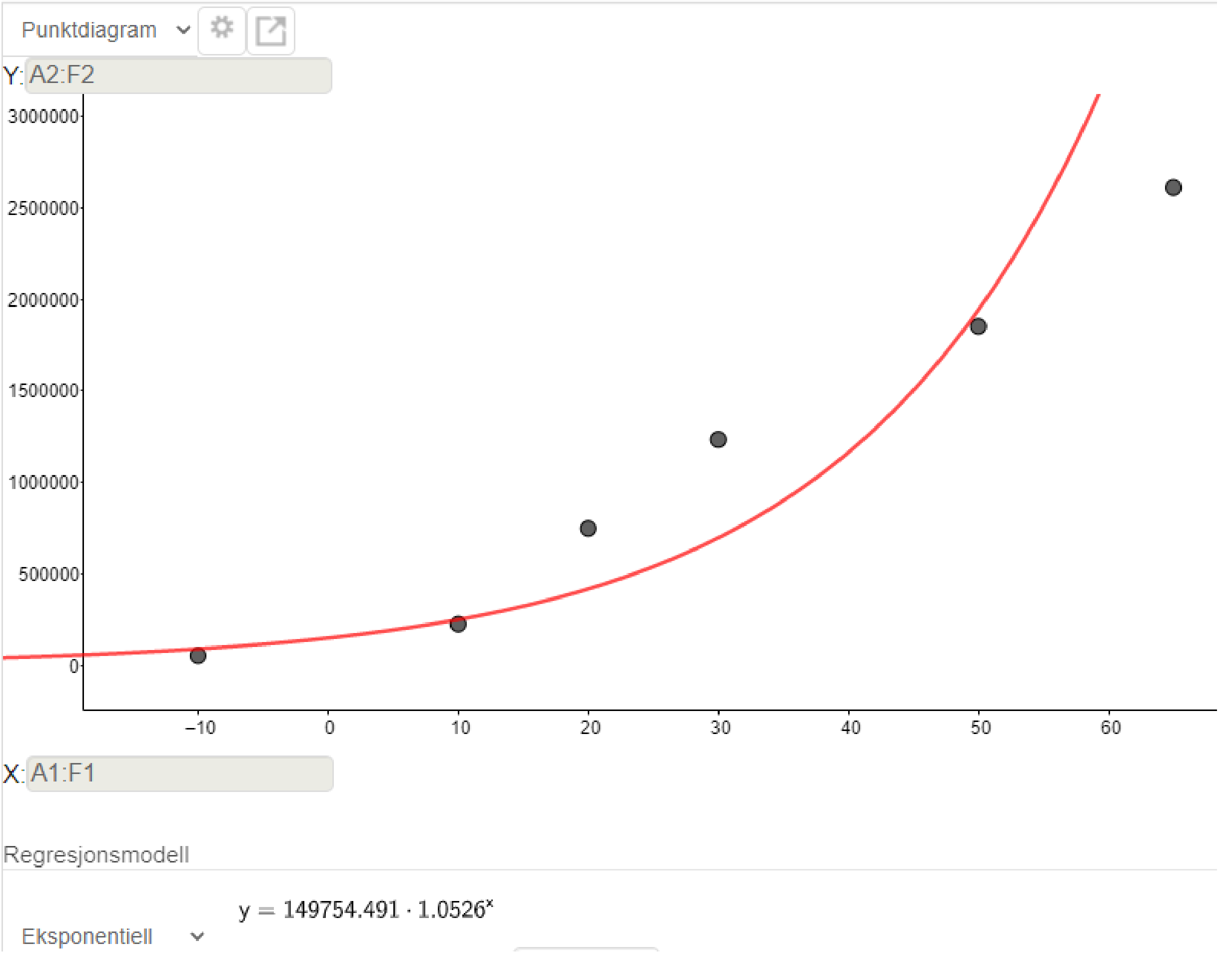
Bilparken i Norge ser ut til å ha vokst med et konstant antall biler per år. Koeffisienten foran x i funksjonsuttrykket i vinduet ovenfor viser at bilparken har vokst med ca. 35 500 biler per år. I 1950, som i modellen vår tilsvarer $x = 0$, var det omtrent 142 600 biler i Norge.

Punktene ser også ut til å passe relativt godt med en logistisk modell.



Ifølge denne modellen vil bilparken etter hvert nærme seg en størrelse på omtrent 3 000 000 biler. Det kan godt stemme for de nærmeste årene, men lenger fram i tid kan det hende befolkningen har økt så mye at anslaget blir for lite. Motsatt gir den for høye verdier når vi går for langt bak i tid, men i tiden fra 1950 til i dag ser den ut til å gi gode resultater. Fra modellen kan vi se at bilparken vokste svært raskt i perioden 1980–2000. Det kan vi sette i sammenheng med økningen i Norges velstand i den samme perioden. Antakelsen ovenfor om at bilparken har vokst lineært, ser derfor ut til å være noe upresis.

Til slutt kan vi se på en eksponentiell modell. Modellen passer svært dårlig til ekstrapolasjon fram i tid, men den kan gi gode resultater bakover i tid. Bilparken ser ut fra denne modellen ut til å ha vokst med omtrent 5 % årlig i 1940- og 50-årene. Etter det viker den stort fra de observerte dataene. Vi kan derfor slå fast at bilparken ikke har vokst eksponentielt de siste tiårene.



4.56

a Tilførselen av vann er $10+9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$. Men samtidig som det tilføres vann, tappes det ut $\frac{1}{6}y$, noe som bidrar til reduksjon av mengden vann. Vekstfarten y' er økning per tid minus reduksjon per tid, slik at $y' = 10+9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-\frac{1}{6}y = -\frac{1}{6}y+10+9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

b For å finne en modell for vannmengden i reservoaret må vi løse differensiallikningen ovenfor.
Det gjør vi med CAS. Punktet (0 , 0) ligger på grafen siden initialbetingelsen $y(0) = 0$ er gitt.

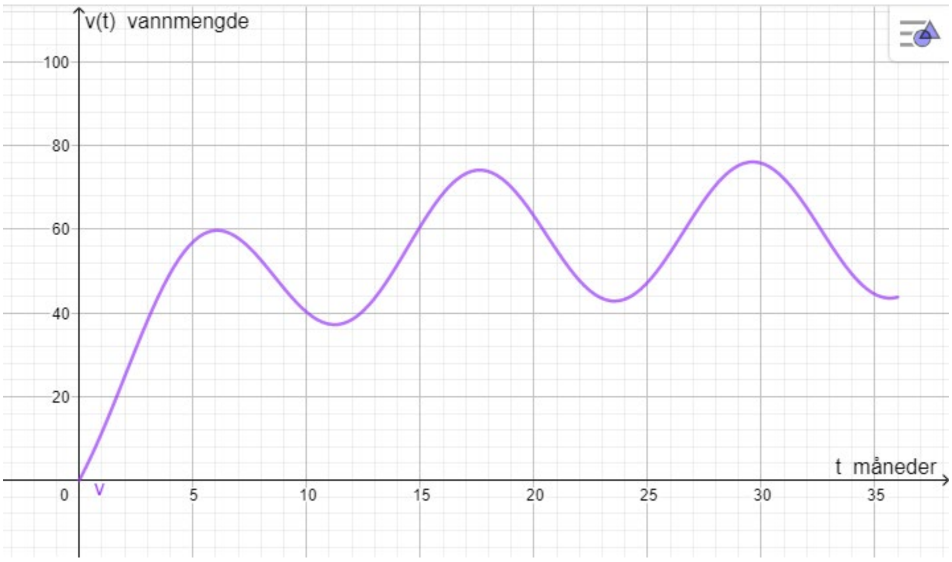
1 $\text{LøsODE}\left(y' = -\frac{1}{6}y + 10 + 9\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right), y, t, (0,0)\right)$

$\approx\ \mathbf{y = -15.61\ \cos(0.52\ t) - 44.39\ e^{-0.17t} + 4.97\ \sin(0.52\ t) + 60}$

En modell for vannmengden y millioner kubikkmeter i reservoaret etter t måneder er
$y(t) = -15{,}61\cos(0{,}52t) - 44{,}39e^{-0{,}17t} + 4{,}97\sin(0{,}52t) + 60$.

Vi tegner grafen til denne funksjonen for $0 \le t \le 36$ (de tre første årene).
Merk at vi bruker v i stedet for y siden GeoGebra ikke godtar y som navn på funksjoner.

$v(t) = -15.61\ \cos(0.52\ t) - 44.39\ e^{-0.17t} + 4.97\ \sin(0.52\ t) + 60, \quad (t \ge 0 \land t \le 36)$



Det er flere hensyn å ta når kommunen skal bestemme hvor stort reservoaret bør være. Ifølge modellen vil det aldri inneholde mer enn i underkant av 80 millioner kubikkmeter vann. Samtidig kan ekstremvær eller lavere forbruk i perioder føre til at reservoaret fylles fortere opp. Kostnader legger imidlertid en demper på hvor stort reservoaret i praksis kan bygges. Størrelsen på reservoaret bør nok derfor være omtrent 85 millioner kubikkmeter.

KAPITTELTEST

Oppgave 1

a Vi skriver tidspunktene i første rad og temperaturene i andre rad i et regneark i GeoGebra. Så markerer vi dataene og velger verktøyet Regresjonsanalyse. Vi vurderer at en trigonometrisk modell vil passe best, så under Regresjonsmodell velger vi Sin. Det gir modellen $f(x) = 5{,}7\sin(0{,}26x - 2{,}4) + 20$.

	A	B	C	D	E	F
1	0	6	10	12	16	24
2	16	16	21.5	24	25.5	16

Regresjonsmodell

Sin

$y = 20.0121 + 5.6724\ \sin(0.2618\,x - 2.3557)$

Symbolsk utregning: x = y =

b f har likevektslinja $y = 20$. Det betyr at gjennomsnittstemperaturen ifølge modellen var 20 °C. Amplituden er 5,7, så temperaturen var 25,7 °C på det varmeste og 14,3 °C på det kaldeste. Perioden er $\dfrac{2\pi}{0{,}2618} = 24{,}0$, så temperaturene vil oppføre seg omtrent likt neste døgn.

Oppgave 2

Vi starter med å definere f og T i CAS.

1. $f(x) := -3\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\ x\right) - 3\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\ x\right)$

   $\rightarrow\ -3\ \cos\left(\frac{1}{12}\ \pi\ x\right) - 3\ \sin\left(\frac{1}{12}\ \pi\ x\right)$

2. $T(x) := 15 + f(x)$

   $\rightarrow\ -3\ \cos\left(\frac{1}{12}\ \pi\ x\right) - 3\ \sin\left(\frac{1}{12}\ \pi\ x\right) + 15$

a 1 Temperaturen er på sitt høyeste (det vil si at T har et maksimalpunkt) når $T'(x) = 0$ og $T''(x) < 0$. Vi løser likningen i CAS og sjekker fortegnet til den andrederiverte for hver av de to løsningene.

Siden $T''(x)$ er negativ for $x = 15$, var temperaturen på sitt høyeste 15 timer etter midnatt, det vil si kl. 15.00.

3. $\{T'(x) = 0, x \geq 0, x < 24\}$

   Løs: $\{x = 3, x = 15\}$

4. $T''(3)$

   $\approx\ 0.29$

5. $T''(15)$

   $\approx\ -0.29$

a 2 Temperaturen øker fortest der T' har et maksimalpunkt, det vil si der T'' har et nullpunkt. Vi ser at T'' har nullpunktene $x = 9$ og $x = 21$. Det er bare $x = 9$ som gir en positiv vekstfart, så temperaturen økte raskest 9 timer etter midnatt. På det tidspunktet var den i ferd med å øke 1,1 °C per time.

3 $\{T''(x) = 0, x \geq 0, x < 24\}$
Løs: $\{x = 9, x = 21\}$
4 $T'(9)$
≈ 1.11
5 $T'(21)$
≈ -1.11

b Vi bruker kommandoen Integral(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>).
Da finner vi at $\frac{1}{24}\int_0^{24} T(x)\,dx = 15$.

3 $\frac{1}{24} \cdot \text{Integral}(T, 0, 24)$
$\rightarrow 15$

c Resultatet i oppgave b forteller oss at gjennomsnittstemperaturen dette døgnet var 15 °C. Når integralet gir oss arealet under grafen til T og vi dividerer dette med 24, vil vi nemlig få gjennomsnittlig høyde fra x-aksen til grafen til T. Denne høyden er temperaturen x timer etter midnatt.

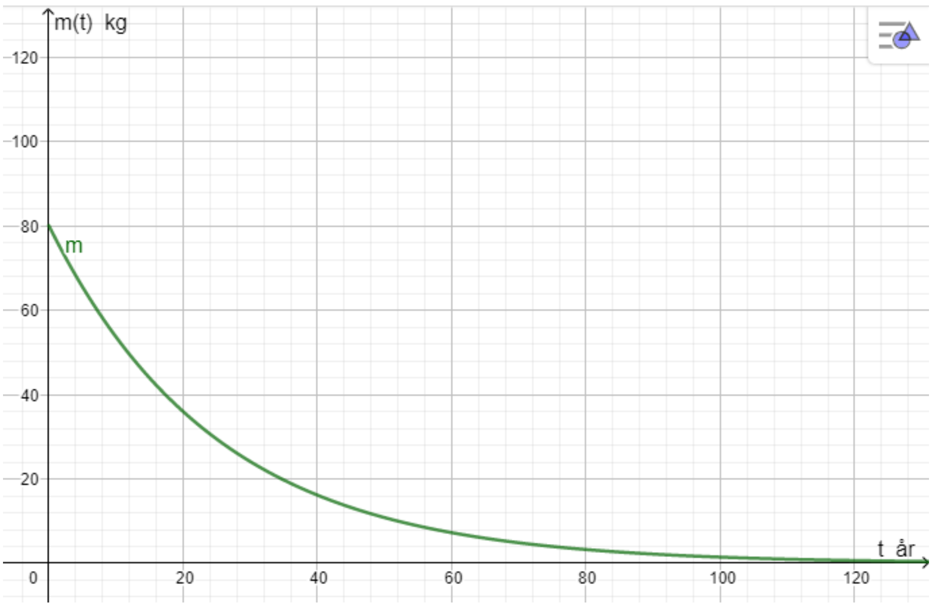
Oppgave 3

a Den deriverte av m beskriver endringen i den gjenværende massen (m). Denne er proporsjonal med m, så vi kan skrive $m' = km$. Her må k være et negativt tall, ettersom massen brytes ned. Nedbrytingen fører nemlig til at massen *minker*, så den deriverte av m må være negativ. Fra oppgaveteksten vet vi også at absoluttverdien av k er 0,04, som sammen med forutsetningen $k < 0$ gir $k = -0{,}04$.
Det gir $m' = -0{,}04m$, $m(0) = 80$.

b Vi løser først differensiallikningen i oppgave a ved hjelp av CAS.

1 LøsODE$(m' = -0.04m, m, t, (0, 80))$
$\approx m = 80\,e^{-0.04t}$

Den gjenværende massen m kg t år etter starttidspunktet er gitt ved $m(t) = 80e^{-0{,}04t}$.
Vi åpner et nytt GeoGebra-vindu og tegner denne funksjonen i Grafikkfeltet for $t \geq 0$.



c Vi definerer m i rad 1 i et CAS-vindu. Når 75 % av den opprinnelige mengden på 80 kg har blitt nedbrutt, gjenstår $0{,}25 \cdot 80\text{ kg} = 20\text{ kg}$. Vi setter derfor $m(t) = 20$ og løser likningen. Løsningen er $t = 34{,}66$. Det betyr at det tar omtrent 35 år før den opprinnelige mengden har avtatt med 75 %.

1	$m(t) := 80\,e^{-0.04t}$
	$\rightarrow\ 80\,e^{\frac{-1}{25}t}$
2	$m(t) = 20$
	Løs: $\{t = 25\ \ln(4)\}$
3	$2
	$\approx\ \{t = 34.66\}$

d Det dannes fortløpende $M(t) = 0{,}0033 \cdot (80 - m(t))$ kg/år av gassen. De 10 første årene er det derfor totalt blitt dannet $\int_0^{10} M(t)\,dt$ kg. Vi bruker CAS til å beregne integralet.

1	$m(t) := 80e^{-0.04t}$
	$\approx\ 80\,e^{-0.04t}$
2	$M(t) := 0.0033 \cdot (80 - m(t))$
	$\approx\ -0.26\,e^{-0.04t} + 0.26$
3	Integral(M, 0, 10)
	$\approx\ 0.46$

I løpet av de 10 første årene dannes det totalt 0,46 kg av gassen.

Merk: Hvis det er vanskelig å se at vi må integrere M, kan vi se på enhetene. Når vi tegner M, vil førsteaksen ha enheten år, mens andreaksen har enheten kg/år. Når vi integrerer, blir enheten produktet av enhetene langs de to aksene. I dette tilfellet blir altså enheten til integralet av M år · kg/år = kg, og dette stemmer jo med at vi vil finne hvor mye av gassen som dannes.

e Vi tegner grafen til M for å se hvordan den utvikler seg i det lange løp. Da vi tegnet grafen til m i oppgave a så vi at det nærmest er tomt for miljøgiften etter 120 år. Men ifølge modellen for M, dannes det gass også lenge etter dette tidspunktet. Det er lite realistisk, for reaksjonen hvor denne gassen dannes, vil etter hvert stoppe opp når det ikke er mer miljøgift å bryte ned. Altså er ikke M noen god modell i det lange løp.