# R2 kapittel 6 Oppgavesamling

## LØSNINGER AV OPPGAVENE I BOKA

**6.1**

**a** $11-7=15-11=483-479=4$

Vi ser at rekka er endelig og aritmetisk med $d = 4$ og $a_1 = 7$.

Vi undersøker antall ledd i den endelige rekka.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ 483 &= 7 + (n-1)\cdot 4 \\ 483 &= 7 + 4n - 4 \\ 4n &= 480 \\ n &= 120 \end{aligned}$$

Rekka har 120 ledd.

Vi finner neste ledd ved den rekursive formelen $a_{n+1} = a_n + 4$.

Vi finner det $n$-te leddet eksplisitt ved $a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1)\cdot 4 = 4n+3$.

Vi finner summen av $n$ ledd ved formelen $s_n = \frac{7+4n+3}{2}\cdot n = \frac{4n+10}{2}\cdot n = 2n^2 + 5n$.

Summen av alle ledd i rekka blir $s_{120} = 2\cdot 120^2 + 5\cdot 120 = 29\,400$.

**b** Vi undersøker om rekka er geometrisk.

$$\begin{aligned} a_6 &= a_3 \cdot k^3 \\ \frac{1}{27} &= 1\cdot k^3 \\ k &= \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \\ k &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vi undersøker om dette stemmer med $a_9$:

$$a_6 \cdot k^3 = \frac{1}{27}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{729} = a_9$$

Det stemmer, og vi kan fastslå at rekka er geometrisk.

Vi finner $a_1$:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot k^2 &= a_3 \\ a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= 1 \\ a_1 &= \frac{1}{\frac{1}{9}} \\ a_1 &= 9 \end{aligned}$$

Vi finner det neste leddet i rekka ved den rekursive formelen $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3}$.

Vi finner det $n$-te leddet eksplisitt ved formelen $a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{9}{3^{n-1}} = \frac{3^2}{3^{n-1}} = 3^{2-(n-1)} = 3^{3-n}$.

Siden $k = \frac{1}{3}$, ser vi også at rekka er konvergent.

Vi finner summen av den konvergente rekka.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$$

**6.2**

**a** Vi lager et program i Python med en for-løkke (til venstre) eller med en while-løkke (til høyre).

```python
a1 = 1
an = a1

for n in range(1, 51):
    print(an)
    an = an + n
```

```python
a1 = 1
an = a1
n = 1

while n < 51:
    print(an)
    an = an + n
    n = n + 1
```

**b** Vi endrer i programmet med for-løkka (til venstre) eller med while-løkka (til høyre).

```python
a1 = 1
an = a1

for n in range(1,50):
    am = an + n
    print(am -an)
    an = am
```

```python
a1 = 1
an = a1
n = 1

while n < 50:
    am = an + n
    print(am -an)
    n = n + 1
    an = am
```

Vi ser at programmet skriver ut de 49 første naturlige tallene. Det stemmer overens med at $a_{n+1} - a_n = n$.

**c** Vi endrer i programmet med for-løkka (til venstre) eller med while-løkka (til høyre).

```python
a1 = 1
an = a1
sum = 0

for n in range(1,51):
    sum = sum + an
    an = an + n
print(sum)
```

```python
a1 = 1
an = a1
n = 1
sum = 0

while n < 51:
    sum = sum + an
    an = an + n
    n = n + 1
print(sum)
```

Summen blir 20 875.

**6.3**

**a** Vi ser at vi får tall nummer $n$ i følgen ved å gange det foregående tallet med $n$. Dette gir oss formelen $a_n = n \cdot a_{n-1}$ og $a_1 = 1$.

**b** Vi lager et program i Python.

```
a1 = 1
an = a1
sum = 0

for n in range(1,21):
    sum = sum + an
    n = n + 1
    an = an * n
print(sum)
```

```
a1 = 1
an = a1
n = 1
sum = 0

while n < 21:
    sum = sum + an
    n = n + 1
    an = an * n
print(sum)
```

**6.4**

**a** Vi ser at

$f_1 = 1$

$f_2 = f_1 + 4 = f_1 + 3 \cdot 1 + 1$

$f_3 = f_2 + 7 = f_2 + 3 \cdot 2 + 1$

$f_4 = f_3 + 10 = f_3 + 3 \cdot 3 + 1$

Følgen $\{f_n\}$ er gitt ved $f_{n+1} = f_n + 3n + 1$.

**b** Vi lager et program i Python med en for-løkke (til venstre) eller med en while-løkke (til høyre).

```
a1 = 1
an = a1

for n in range(1, 100):
        an = an + 3*n + 1

print(an)
```

```
a1 = 1
an = a1
n = 1

while n < 100:
        an = an + 3*n + 1
        n = n + 1

print(an)
```

**c** Vi ser av figuren at femkanttall $f_n$ er bygd opp av ett trekanttall $t_n$ og to trekanttall $t_{n-1}$. Altså finner vi femkanttall nummer $n$ ved å addere trekanttall $n$ med 2 av det foregående trekanttallet $n - 1$.

**d** En formel for trekanttall $t_n$ er gitt ved $t_n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$. Vi finner en eksplisitt formel for følgen $\{f_n\}$.

$$
\begin{aligned}
f_n &= t_n + 2 \cdot t_{n-1} \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-1+1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2 \cdot (n-1) \cdot n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n + 2n^2 - 2n}{2} \\
&= \frac{3n^2 - n}{2} \\
&= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n
\end{aligned}
$$

## 6.5

**a** Den geometriske rekka har kvotient $k(x) = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\ln x}{2}$.

Dersom rekka skal konvergere, må absoluttverdien av kvotienten være mindre enn 1.

$$
\begin{aligned}
|k(x)| &< 1 \\
-1 < k(x) &< 1 \\
-1 < k(x) \quad &\wedge \quad k(x) < 1 \\
-1 < \frac{\ln x}{2} \quad &\wedge \quad \frac{\ln x}{2} < 1 \\
-2 < \ln x \quad &\wedge \quad \ln x < 2 \\
e^{-2} < x \quad &\wedge \quad x < e^2
\end{aligned}
$$

Konvergensområdet er $\left\langle e^{-2}, e^2 \right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{e^2}, e^2 \right\rangle$.

Med hjelpemidler tilgjengelig kan vi alternativt finne konvergensområdet med CAS:

1 $k(x) := \dfrac{\ln(x)}{2}$

$\rightarrow$ $\mathbf{k(x) := \frac{1}{2} \ln(x)}$

2 $|k(x)| < 1$

Løs: $\left\{ \dfrac{1}{e^2} < x < e^2 \right\}$

**b** Vi ser at e ligger i konvergensområdet til $S(x)$. Summen er derfor gitt ved

$$S(e) = \frac{a_1}{1 - k(e)} = \frac{2}{1 - \left(\frac{\ln e}{2}\right)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

**c** For at konvergensområdet skal være $\langle 2, 4 \rangle$, må ulikheten $|k(x)| < 1$, der $k(x)$ er kvotienten i rekka, ha løsningen $x \in \langle 2, 4 \rangle$. Vi har

$$
\begin{aligned}
x > 2 \quad &\wedge \quad x < 4 \\
0 > 2 - x \quad &\wedge \quad x - 4 < 0 \\
1 > 3 - x \quad &\wedge \quad x - 3 < 1
\end{aligned}
$$

Dette svarer til $|x - 3| < 1$. Vi ser altså at hvis vi lar kvotienten $k(x)$ være lik $x - 3$, vil konvergensområdet være $\langle 2, 4 \rangle$.

Rekka vil da konvergere uansett hva $a_1$ er. Rekka kan derfor for eksempel være

$1 + (x - 3) + (x - 3)^2 + \cdots$

## 6.6

Vi ser at rekka er geometrisk med $a_1 = 1$ og $k(x) = -2x$.

Summen av den konvergente rekka er gitt ved $s(x) = \dfrac{a_1}{1 - k(x)} = \dfrac{1}{1 + 2x}$.

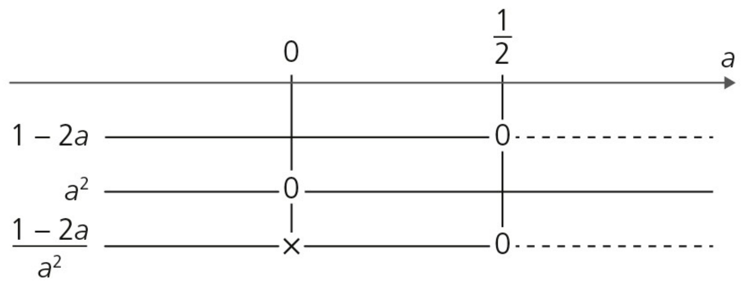
Vi ser nå på likningen $s(x) = a$ og finner først $k(x)$ uttrykt ved $a$.

$$a = \frac{1}{1-k(x)}$$
$$1-k(x) = \frac{1}{a}$$
$$k(x) = 1-\frac{1}{a}$$
$$k(x) = \frac{a-1}{a}$$

Rekka konvergerer når $\left(k(x)\right)^2 < 1$. Dermed må

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 < 1$$
$$\frac{(a-1)^2}{r^2} < 1$$
$$\frac{a^2-2a+1}{a^2} - 1 < 0$$
$$\frac{1-2a}{a^2} < 0$$

Vi lager fortegnsskjema for ulikheten:




Likningen $s(x) = a$ har løsninger når $a > \frac{1}{2}$.

Alternativt kan vi med hjelpemidler tilgjengelig løse ulikheten vi får ovenfor, med CAS:

1
$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 < 1$$
Løs: $\left\{a > \frac{1}{2}\right\}$

**6.7**

**a**
$$s_2 + a_3 = s_3$$
$$a_3 = s_3 - s_2$$
$$a_3 = 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3 - \left(3\cdot 2^2 + 4\cdot 2\right)$$
$$a_3 = 27 + 12 - 12 - 8$$
$$a_3 = 19$$

**b** Vi lager et program i Python.

```
def s(n):
  return(3*n**2 + 4*n)

def a(n):
  return(s(n)-s(n-1))

print(a(12))

```

Programmet finner at det tolvte leddet er 73.

**6.8**

Vi setter opp to likninger.

Den første likningen blir

$$s = \frac{a_1}{1-k}$$

$$6 = \frac{a_1}{1-k}$$

Den andre likningen blir

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{38}{9}$$

$$a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 = \frac{38}{9}$$

$$a_1 \cdot \left(1 + k + k^2\right) = \frac{38}{9}$$

Vi løser likningssystemet i CAS.

| | |
|---|---|
| 1 | $6 = \frac{a_1}{1-k}$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{6 = -\frac{a_1}{k-1}}$ |
| 2 | $a_1 \cdot (1 + k + k^2) = \frac{38}{9}$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{a_1\,(k^2 + k + 1) = \frac{38}{9}}$ |
| 3 | $\{\$1, \$2\}$ <br> Løs: $\mathbf{\left\{\left\{a_1 = 2, k = \frac{2}{3}\right\}\right\}}$ |

Vi finner $a_4$.

$$a_4 = a_1 \cdot k^3$$

$$a_4 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2 \cdot \frac{8}{27} = \frac{16}{27}$$

**6.9**

**a** Vi ser at $k(x) = \frac{3}{2}\cos x$.

Det gir

$$k\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{16}} > 1 \quad \text{og} \quad k\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Altså konvergerer rekka for $x = \frac{\pi}{3}$, men ikke for $x = \frac{\pi}{6}$.

**b** Vi finner summen for $x = \frac{\pi}{3}$.

$$s(x) = \frac{a_1}{1-k(x)}$$

$$s\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

**c** Den konvergente rekka har summen

$s = \frac{a_1}{1-k(x)}$, som gir $r = \frac{1}{1-k(x)}$.

Vi finner $k(x)$ uttrykt ved $r$.

$$r = \frac{1}{1-k(x)}$$

$$1-k(x) = \frac{1}{r}$$

$$k(x) = 1-\frac{1}{r}$$

$$k(x) = \frac{r-1}{r}$$

Rekka konvergerer når $\left(k(x)\right)^2 < 1$. Dermed må

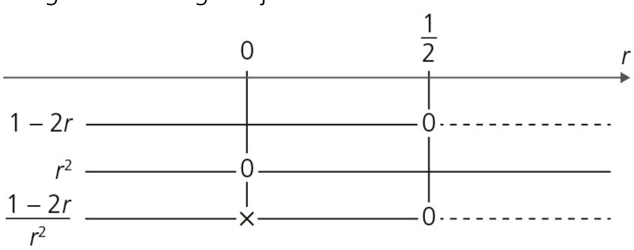
$$\left(\frac{r-1}{r}\right)^2 < 1$$

$$\frac{(r-1)^2}{r^2} < 1$$

$$\frac{r^2-2r+1}{r^2} - 1 < 0$$

$$\frac{1-2r}{r^2} < 0$$

Vi tegner en fortegnslinje.




Vi ser at rekka konvergerer når $r > \frac{1}{2}$.

**6.10**

Programmet tar for seg rekka der $a_1 = 2$ og $a_n = (a_{n-1})^2 - 1$. Programmet summerer leddene i rekka helt til summen har oversteget 50. Da skrives den siste summen under 50 ut.

**6.11**

**a** Vi undersøker først konvergensområdene.

For $S$ blir konvergensområdet $-1 < k < 1$.

For $T$ får vi $-1 < 2k < 1$, som igjen gir oss konvergensområdet $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$.

Her vil det «strengeste» konvergensområdet overstyre det andre.

Vi setter opp to likninger:

Den første for $S$:

$$S = \frac{a}{1-k}$$

$$6 = \frac{a}{1-k}$$

Den andre for $T$:

$$T = \frac{a}{1-2k}$$

$$12 = \frac{a}{1-2k}$$

Vi får et likningssystem som vi løser med CAS.

| | |
|---|---|
| 1 | $6 = \frac{a}{1-k}$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{6 = -\frac{a}{k-1}}$ |
| 2 | $12 = \frac{a}{1-2k}$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{12 = -\frac{a}{2k-1}}$ |
| 3 | $\{\$1, \$2\}$ <br> Løs: $\left\{\left\{\mathbf{a = 4, k = \frac{1}{3}}\right\}\right\}$ |

Vi får altså $a = 4$ og $k = \frac{1}{3}$.

**b** Vi setter $S = -2T$ , og substituerer $S$ og $T$ med summen for rekkene. Vi løser likningen i CAS med hensyn på $k$:

| | |
|---|---|
| 1 | $S := \frac{a}{1-k}$ <br> $\rightarrow$ $\mathbf{S := -\frac{a}{k-1}}$ |
| 2 | $T := \frac{a}{1-2k}$ <br> $\rightarrow$ $\mathbf{T := -\frac{a}{2k-1}}$ |
| 3 | Løs$(S = -2T, k)$ <br> $\rightarrow$ $\left\{\mathbf{k = \frac{3}{4}}\right\}$ |

Vi ser at $k$ ligger utenfor konvergensområdet vi fant i oppgave a. Dermed er det ikke mulig å finne en slik verdi for $k$.

**6.12**

I telleren får vi summen av de $n$ første oddetallene $S_n$. I nevneren tar vi med dobbelt så mange oddetall, $2n$ stykker, og vi kaller summen av dem for $S_{2n}$. Men vi vil da i nevneren også få med de $n$ første oddetallene. Det ønsker vi ikke, så dermed trekker vi dem fra.

Vi merker oss at rekkene $S_n$ og $S_{2n}$ er aritmetiske. Summen av rekkene generelt er

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

I rekka $S_n$ er $a_1 = 1$ og $d = 2$, og vi har $n$ ledd. Dermed får vi

$$S_n = \frac{1+1+(n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = \frac{2+2n-2}{2} \cdot n = n^2$$

I rekka $S_{2n}$ er $a_1 = 1$ og $d = 2$, men vi har $2n$ ledd. Dette gir

$$S_{2n} = \frac{1+1+(2n-1) \cdot 2}{2} \cdot 2n = \frac{2+4n-2}{2} \cdot 2n = 4n^2$$

Vi regner ut verdien av brøken $B_n$:

$$B_n = \frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{n^2}{4n^2 - n^2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

**6.13**

$$P(n):\quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\ ,\quad n \in \mathbb{N}$$

Vi tester først $P(1)$.

$$\sum_{i=1}^{1} (2i-1)^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} = 1$$

Altså stemmer $P(1)$.

For å vise induksjonssteget antar vi at $P(k)$ er sann for en $k \in \mathbb{N}$, det vil si

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Så må vi vise at $P(k+1)$ er sann, det vil si

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3} = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2(k+1)-1)^2 \qquad \text{ved å bruke antakelsen} \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + \frac{3(2k+2-1)^2}{3} \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)^2}{3} \\
&= \frac{(2k+1)\left(k(2k-1)+3(2k+1)\right)}{3} \\
&= \frac{(2k+1)\left(2k^2-k+6k+3\right)}{3} \\
&= \frac{(2k+1)\left(2k^2+5k+3\right)}{3} \qquad \text{faktoriserer } 2k^2+5k+3 \text{ med nullpunktmetoden} \\
&= \frac{(2k+1)\cdot 2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+1)}{3} \\
&= \frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3}
\end{aligned}$$

Dette fullfører beviset, så $P(n)$ må være sann for alle naturlige tall $n$.

**6.14**

Vi sjekker om uttrykket stemmer for $n = 1$:

$$a_1 = \frac{1^2+1+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Dette stemmer med opplysningen i oppgaven.

Vi antar at uttrykket stemmer for $n = k$:

$$a_k = \frac{k^2+k+2}{2}$$

Vi skal vise at uttrykket stemmer for $n = k+1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + (k+1) \\ &= \frac{k^2+k+2}{2} + (k+1) \quad \text{bruker antakelsen} \\ &= \frac{k^2+k+2+(2k+2)}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+4}{2} \\ &= \frac{(k^2+2k+1)+(k+1)+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} \end{aligned}$$

Med dette har vi brukt induksjon til å vise at uttrykket stemmer for alle $n \in \mathbb{N}$.

**6.15**

**a** Vi undersøker om påstanden stemmer for $n = 1$.

$2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 = 0$

0 er delelig på 6, og påstanden stemmer for $n = 1$.

Vi antar nå at uttrykket stemmer for $n = k$. Det vil si

$2k^3 - 2k$ er delelig med 6.

Vi skal nå vise at uttrykket også stemmer for $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 2(k+1)^3 - 2(k+1) &= 2k^3 + 6k^2 + 4k \\ &= \left(2k^3 - 2k\right) + 6k + 6k^2 \\ &= \left(2k^3 - 2k\right) + 6 \cdot \left(k + k^2\right) \end{aligned}$$

Vi ser at begge ledd er delelig på 6, og da vil også summen være delelig på 6. Vi får at hvis antakelsen for $n = \underline{k}$ stemmer, vil uttrykket også være delelig på 6 for $n = k + 1$.

Dermed er det bevist ved induksjon.

**b** Vi undersøker om påstanden stemmer for $n = 1$.

Vi tar med en faktor på venstre side: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Formelen på høyre side gir oss $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Formelen stemmer for $n = 1$.

Vi antar nå at uttrykket stemmer for $n = k$. Det vil si

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot \dots \cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$$

Vi skal nå vise at uttrykket også stemmer for $n = k + 1$:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1+1}\right)=\frac{1}{k+1+1}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{k+2}$$

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{k+2}$$

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)\cdot\left(\frac{k+2-1}{k+2}\right)=\frac{1}{k+2}$$

$$\frac{k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{1}{k+2}$$

$$\frac{1}{k+2}=\frac{1}{k+2}$$

Vi ser at hvis antakelsen for $n = \underline{k}$ stemmer, vil den også stemme for $n = k + 1$.
Dermed er det bevist ved induksjon.

**6.16**

**a** $1+x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$ , når $x\in\langle -1,1\rangle$

$\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{x^3}{x^2}=x$ , $\quad\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{x^2}{x}=x$ , $\quad\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{x}{1}=x$

Vi ser at forholdet $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ er konstant, og rekka er dermed geometrisk.

$a_1=1$ og $k=x$

Med $k=x$ blir $k\in\langle -1,1\rangle$ siden $x\in\langle -1,1\rangle$, og rekka er dermed konvergent.
Høyresiden forklares med sumformelen for en konvergent geometrisk rekke:

$$S=\frac{a_1}{1-k}=\frac{1}{1-x}$$

**b** Vi utfører derivasjonene. Derivasjonene på venstre side krever ikke nærmere forklaring, og på høyre side får vi

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left((1-x)^{-1}\right)'=-(1-x)^{-1-1}\cdot(1-x)'=-(1-x)^{-2}\cdot(-1)=(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

Dermed får vi at

$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ , når $x\in\langle -1,1\rangle$

**c** Når vi setter $x=\dfrac{1}{2}$ inn i formelen fra oppgave b, får vi

$\mathrm{VS}=1+2\cdot\dfrac{1}{2}+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots=1+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots$ og

$\mathrm{HS}=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}}=4$ som gir

$$1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots=4$$

**d** $P(n)$: $1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}\quad ,\quad n\in\mathbb{N}$

Vi tar først for oss $P(1)$:

$$\text{VS}=1 \qquad \text{HS}=4-\frac{1+2}{2^{1-1}}=4-\frac{3}{2^0}=4-\frac{3}{1}=4-3=1 \qquad \text{VS}=\text{HS}$$

Vi ønsker så å vise at antakelsen om at $P(t)$ er sann, leder til at $P(t+1)$ også må være sann.

$$P(t):\quad 1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{t}{2^{t-1}}=4-\frac{t+2}{2^{t-1}}$$

$$P(t+1):\quad 1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{t}{2^{t-1}}+\frac{t+1}{2^{(t+1)-1}}=4-\frac{(t+1)+2}{2^{(t+1)-1}}$$

Vi ser nærmere på $P(t+1)$. Den røde fargen viser hvordan vi benytter oss av antakelsen om at $P(t)$ er sann.

$$\text{VS}=1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{t}{2^{t-1}}+\frac{t+1}{2^{(t+1)-1}}=4-\frac{t+2}{2^{t-1}}+\frac{t+1}{2^{(t+1)-1}}=4-\left(\frac{t+2}{2^{t-1}}-\frac{t+1}{2^t}\right)$$

$$=4-\left(\frac{1}{2^{-1}}\cdot\frac{t+2}{2^t}-\frac{t+1}{2^t}\right)=4-\left(2\cdot\frac{t+2}{2^t}-\frac{t+1}{2^t}\right)=4-\frac{2(t+2)-(t+1)}{2^t}$$

$$=4-\frac{2t+4-t-1}{2^t}=4-\frac{t+3}{2^t}=4-\frac{(t+1)+2}{2^{(t+1)-1}}=\text{HS}$$

Vi ser at antakelsen om at $P(t)$ er sann, leder til at $P(t+1)$ også må være sann.

Vi har nå vist at $P(1)$ er sann, og vi har vist at antakelsen om at $P(t)$ er sann, leder til at $P(t+1)$ også må være sann. Da må $P(n)$ være sann for alle $n\in\mathbb{N}$.

**e** Når $n$ går mot uendelig, går venstre side i uttrykket i oppgave d mot venstre side i oppgave c som er lik 4. Dette kan skrives

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}\right)=1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots=4$$

Bytter vi ut med høyresiden i oppgave d, får vi

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{n+2}{2^{n-1}}\right)=4$, og da må vi ha $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2^{n-1}}=0$

**f** Vi definerer uttrykket som en funksjon i Python og lar n øke med en faktor 10 for hver runde i while-løkka.

```python
def f(n):
  return (n + 2) / 2**(n-1)

delta_n = 10
print("n", "\t", "\t", "f(n)")
for i in range(4):
  n = delta_n**i
  y = round(f(n), 4)
  print(n, "\t", "\t", y)
```

```
Powered by trinket
n          f(n)
1          3.0
10         0.0234
100        0.0
1000       0.0
```

Vi ser at grenseverdien går mot 0 når $n$ vokser.

**6.17**

Vi skriver ut de første leddene i $f(x)$. Dette gir oss

$$f(x)=(-1)^0\cdot\frac{x^{2\cdot0+1}}{2\cdot0+1}+(-1)^1\cdot\frac{x^{2\cdot1+1}}{2\cdot1+1}+(-1)^2\cdot\frac{x^{2\cdot2+1}}{2\cdot2+1}+(-1)^3\cdot\frac{x^{2\cdot3+1}}{2\cdot3+1}+\cdots$$

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

Vi finner $f'(x)$.

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Vi ser at dette er en uendelig, geometrisk rekke med $k = -x^2$. Siden rekka er konvergent, får vi at $f'(x)$ er lik summen av den uendelige rekka.

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

**6.18**

**a** Dette blir en geometrisk, konvergent rekke med $k = 0{,}7$.

$$s = \frac{a_1}{1-k}$$
$$s = \frac{100}{1-0{,}7} = \frac{100}{0{,}3} = \frac{1000}{3} \approx 333{,}3$$

Det vil være 333,3 mg etter lang tids bruk.

**b** Vi har nå en endelig, geometrisk rekke med sum 320.

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$
$$320 = 100 \cdot \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7}$$

Vi løser likningen i CAS.

1 $320 = 100 \cdot \dfrac{1-0.7^n}{1-0.7}$

NLøs: $\{n = 9.02\}$

Det vil ta rett i overkant av 9 dager.

**c** Vi antar at pasienten har nådd faregrensen på 320 mg og tar et opphold i medisineringen. Kroppen bryter ned 30 % per dag, og vi skal ikke under 110 mg. Vi setter opp en likning og løser i CAS:

1 $320 \cdot 0.7^{n-1} = 110$

NLøs: $\{n = 3.994\}$

Vi ser at det tar nesten 4 dager før mengden medikament i kroppen har sunket til 110 mg.
Oppholdet i medisineringen bør være på 3 dager.

**d** Vi ønsker at mengden skal stabilisere seg på 210 mg. Vi ønsker altså at summen av den konvergente rekka skal være 210.

$$210 = \frac{a_1}{1-0{,}7}$$
$$a_1 = 210 \cdot 0{,}3$$
$$a_1 = 63$$

Dagsdosen bør være 63 mg.

**6.19**

**a** Hvis de velger modell 1, vil de årlige utslippene utgjøre en aritmetisk følge med $a_1 = 5000$ og $a_{10} = 2500$. Det samlede utslippet blir summen av en aritmetisk rekke med 10 ledd.

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{10}{2}(5000 + 2500) = 5 \cdot 7500 = 37\,500$$

Bedriften vil med modell 1 slippe ut 37 500 kg av gassen i løpet av disse 10 årene.

**b** Hvis de velger modell 2, vil de årlige utslippene utgjøre en geometrisk følge med $a_1 = 5000$ og $a_{10} = 2500$. Vi bruker CAS til å finne summen av den geometriske rekka med 10 ledd:

| | |
|---|---|
| 1 | $a_1 := 5000$<br>$\rightarrow\ \mathbf{a_1 := 5000}$ |
| 2 | $a_1\, k^9 = 2500$<br>Løs: $\left\{x = \sqrt[9]{\frac{1}{2}}\right\}$ |
| 3 | $k :=$ HøyreSide($2, 1)<br>$\rightarrow\ \mathbf{k := \sqrt[9]{\frac{1}{2}}}$ |
| 4 | $S_{10} := a_1 \cdot \frac{1 - k^{10}}{1 - k}$<br>$\approx\ \mathbf{S_{10} := 36226.68}$ |

Bedriften vil med modell 2 slippe ut omtrent 36 200 kg av gassen i løpet av disse 10 årene.

**c** Den andre bedriftens utslipp vil utgjøre en geometrisk rekke. Den årlige reduksjonen er minst når den summen av den uendelige rekka er lik 50 000.

$$\frac{5000}{1-k} = 50\,000$$

$$1-k = \frac{1}{10}$$

$$k = 1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$$

Dersom bedriften skal overholde myndighetenes krav, må $p$ være minst 10 %.

**6.20**

**a** $\int 4x \cdot \ln x \, dx$

Vi bruker delvis integrasjon med $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$, $v' = 4x$ og $v = 2x^2$.

$$\begin{aligned}\int 4x \cdot \ln x \, dx &= \ln x \cdot 2x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot 2x^2 \, dx \\ &= 2x^2 \cdot \ln x - \int 2x \, dx \\ &= 2x^2 \cdot \ln x - x^2 + C\end{aligned}$$

**b** $\int 8xe^{2x}\,dx$

Vi bruker delvis integrasjon med $u = 8x$, $u' = 8$, $v' = e^{2x}$ og $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\begin{aligned}\int 8xe^{2x}\,dx &= 8x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 8\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx\\ &= 4x\cdot e^{2x} - 4\int e^{2x}\,dx\\ &= 4x\cdot e^{2x} - 4\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C\\ &= 4x\cdot e^{2x} - 2e^{2x} + C\\ &= 2e^{2x}(2x-1) + C\end{aligned}$$

**c** Vi merker oss at vi her skal integrere med hensyn på $k$ og ikke med hensyn på $x$.

$$\int (k+x)\mathrm{d}k = \frac{1}{2}k^2 + xk + C$$

**d** $\int \frac{4x-10}{x^2-5x+6}\,dx$

Vi bruker variabelskifte der $u = x^2 - 5x + 6$ og $dx = \frac{du}{u'} = \frac{du}{2x-5}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-10}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \frac{4x-10}{u}\cdot\frac{du}{2x-5}\\ &= \int \frac{2(2x-5)}{u}\cdot\frac{du}{2x-5}\\ &= 2\int\frac{1}{u}\,du\\ &= 2\ln|u| + C\\ &= 2\ln\left|x^2-5x+6\right| + C\end{aligned}$$

**e** $\int \frac{4x}{x^2-5x+6}\,dx$

Vi bruker delbrøkoppspalting.

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)$$

$$\frac{4x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \quad \Big|\cdot(x-2)(x-3)$$
$$4x = A(x-3)+B(x-2)$$

Vi setter $x=2$:
$$4\cdot 2 = A(2-3)+B(2-2)$$
$$8=-A$$
$$A=-8$$

Vi setter $x=3$:
$$4\cdot 3 = A(3-3)+B(3-2)$$
$$12=B$$
$$B=12$$
$$\frac{4x}{x^2-5x+6}=\frac{-8}{x-2}+\frac{12}{x-3}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{4x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{-8}{x-2}+\frac{12}{x-3}\right)\mathrm{d}x\\ &= -8\ln|x-2|+12\ln|x-3|+C\\ &= 12\ln|x-3|-8\ln|x-2|+C\end{aligned}$$

**f** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$

Vi finner først det ubestemte integralet med variabelskifte der $u=\sin x+1$ og $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u'}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\cos x}$.

$$\begin{aligned}\int(\sin x+1)^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x &= \int(u)^2\cdot\cos x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\cos x}\\ &= \int u^2\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}u^3+C\\ &= \frac{1}{3}(\sin x+1)^3+C\end{aligned}$$

Så finner vi det bestemte integralet.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}(\sin x+1)^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2}+1\right)^3-\frac{1}{3}(\sin 0+1)^3\\ &= \frac{1}{3}(1+1)^3-\frac{1}{3}(1)^3\\ &= \frac{8}{3}-\frac{1}{3}\\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

**6.21**

Programmet tar for seg funksjonen *f* gitt ved $f(x)=4-\frac{1}{2}x$.

Det tar utgangspunkt i et intervall på *x*-aksen fra 0 til 8, og deler dette intervallet opp i 500 biter med bredde $\frac{8}{500}=0{,}016$.

Programmet regner så ut arealet av 500 rektangler etter hverandre under grafen, hver med bredde 0,016, og med f(x) som høyde. Deretter skrives summen av disse 500 rektanglene ut, noe som er en god tilnærming for det bestemte integralet $\int_0^8\left(4-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$.

**6.22**

Vi finner arealet av rektanglet *ABCD* med utgangspunkt i koordinatene til punktene *B* og *D*. *x*-koordinaten til *B* er nullpunktet til *f* og den positive *x*-verdien som oppfyller likningen $f(x)=0$. Dette gir

$$\begin{aligned}a^2-x^2&=0\\x^2&=a^2\\x&=a\end{aligned}$$

Punktet *D* har *x*-verdi 0 og dermed *y*-verdi $f(0)=a^2$.
Dermed har rektanglet arealet $AB\cdot AD=a\cdot a^2=a^3$.

Vi bestemmer arealet under kurven ved å løse følgende bestemte integral:

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x\\&=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a\\&=\left(a^2\cdot a-\frac{1}{3}a^3\right)-\left(a^2\cdot 0-\frac{1}{3}0^3\right)\\&=a^3-\frac{1}{3}a^3\\&=\frac{2}{3}a^3\end{aligned}$$

Dermed ser vi at arealet av det fargelagte området utgjør $\frac{2}{3}$ av rektanglets areal.

**6.23**

**a** $f(x)=x+a \quad , \quad 0\le x\le 2 \quad , \quad a>0$

Siden $a>0$ og grafen er lineær med positivt stigningstall, ser vi at grafen alltid vil ligge over *x*-aksen. Arealet under grafen skal være 3 og tilsvarer dermed integralet av *f* fra $x=0$ til $x=2$.

$$\int_0^2 (x+a)\,\mathrm{d}x = 3$$
$$\left[\frac{1}{2}x^2 + ax\right]_0^2 = 3$$
$$\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 + a\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0^2 + a\cdot 0\right) = 3$$
$$2 + 2a = 3$$
$$2a = 1$$
$$a = \frac{1}{2}$$

**b** Volum av et omdreiingslegeme blir $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

$$\pi\int_0^2 (x+a)^2\mathrm{d}x = \frac{98}{3}\pi \quad |:\pi$$
$$\int_0^2 (x^2 + 2a\cdot x + a^2)\mathrm{d}x = \frac{98}{3}$$
$$\left[\frac{1}{3}x^3 + 2a\cdot\frac{1}{2}x^2 + a^2\cdot x\right]_0^2 = \frac{98}{3}$$
$$\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2 + a^2\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot 0^2 + a^2\cdot 0\right) = \frac{98}{3}$$
$$\frac{8}{3} + 4a + 2a^2 - 0 = \frac{98}{3} \quad |\cdot 3$$
$$6a^2 + 12a + 8 = 98$$
$$6a^2 + 12a - 90 = 0 \quad |:6$$
$$a^2 + 2a - 15 = 0$$

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}$$
$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$
$$a = \frac{-2 \pm 8}{2}$$
$$a = 3 \quad \vee \quad a = -5$$

Vi ser at $a = -5$ ikke oppfyller kravet i oppgaven om at $a > 0$, så svaret blir $a = 3$.

**6.24**

**a** Vi kan se at leddene på venstre side av ulikhetstegnet tilsvarer summen av arealene av alle rektanglene, både det røde og de blå. Hvert rektangel har bredde 1 og høyde lik $f(x)$.
Uttrykket på høyre side av ulikhetstegnet er arealet av det røde rektanglet i tillegg til arealet avgrenset av linja $x = 1$, $x = k$, grafen til *f* og *x*-aksen.
Som vi ser av figuren, er arealet avgrenset av linja $x = 1$, $x = k$, grafen til *f* og *x*-aksen større enn arealene av de blå rektanglene, og følgelig må ulikheten være oppfylt.

**b** Vi regner ut integralet uttrykt ved $k$.

$$\int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^k x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^k = \left[x^{-1}\right]_k^1 = 1^{-1} - k^{-1} = 1 - \frac{1}{k}$$

Vi lar $k \to \infty$.

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1$$

Setter vi inn dette i resultatet fra oppgave a, får vi at

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \le 1 + 1 = 2$$

Ettersom summen av arealene til rektanglene er mindre enn arealet under grafen, har vi at $S < 2$.

**c** Vi bruker kommandoen **Sum** i CAS og *inf* for å indikere at grensen skal gå mot uendelig.

1 $\text{Sum}\left(\frac{1}{k^2}, k, 1, \text{inf}\right)$

$\rightarrow \frac{1}{6}\pi^2$

Summen av rekka er $\frac{\pi^2}{6}$.

**6.25**

**a** $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = f(1) - f(-1) = 3 - 0 = 3$

**b** Hvis integralet skal bli minst mulig, må $f(b)$ være minst mulig, og $f(a)$ må være størst mulig. Vi ser fra grafen at $f$ har en maksimalverdi for $x = 1$ og en minimalverdi for $x = 4$. Integralet får derfor sin minste verdi når $a = 1$ og $b = 4$.

**6.26**

**a** Vi har tre funksjoner. Funksjonen $f$, og funksjonen $g$ som er den deriverte av $f$ og $h$ som er den antideriverte av $f$. Vi har altså $h'(x) = f(x)$.

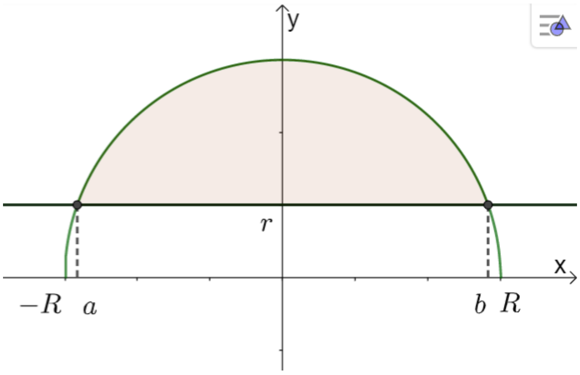
Vi ser at hvis B er grafen til $h$, så er funksjonen $h$ hele tiden monotont stigende.

Dette passer med at A er grafen til $f$, siden denne grafen ligger på oversiden av $x$-aksen og grafen i B stiger brattest når $x = 0$. Dette stemmer også bra med at B er $h$ og A er $f$.

Hvis dette stemmer, så må C være grafen til $g$. Dette passer også bra da C er positiv der grafen til $f$ i figur A stiger, og C er negativ der grafen til $f$ synker. Det passer også godt i og med at C har sitt topp- og bunnpunkt i vendepunktene på grafen til A.

**b** $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = h(1) - h(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

**6.27**
Vi lager først en skisse av situasjonen:




Volumet vi skal finne, er det vi får ved å dreie det skraverte området på figuren 360° om $x$-aksen. Vi tar utgangspunkt i en funksjon $f$ som beskriver halvsirkelen, og en funksjon $g$ som beskriver den rette horisontale linja. Så finner vi $x$-verdiene til skjæringspunktene mellom grafene til de to funksjonene for å finne integrasjonskonstantene $a$ og $b$. Til slutt bruker vi formelen for volumet av et omdreiningslegeme.

1. $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$
   $\rightarrow \mathbf{f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}}$
2. $g(x) := r$
   $\rightarrow \mathbf{g(x) := r}$
3. $f(x) = g(x)$
   Løs: $\left\{\mathbf{x = -\sqrt{R^2 - r^2}, x = \sqrt{R^2 - r^2}}\right\}$
4. $a := \text{HøyreSide}(\$3, 1)$
   $\rightarrow \mathbf{a := -\sqrt{R^2 - r^2}}$
5. $b := \text{HøyreSide}(\$3, 2)$
   $\rightarrow \mathbf{b := \sqrt{R^2 - r^2}}$
6. $V := \pi \cdot \text{Integral}\left(f^2 - g^2, a, b\right)$
   $\rightarrow$
   $\mathbf{V := \frac{1}{3} \pi \left(4 R^2 \sqrt{R^2 - r^2} - 4 r^2 \sqrt{R^2 - r^2}\right)}$

Vi ser av uttrykket fra CAS at det er felles faktorer i leddene i parentesen som lar seg sette utenfor parentesen.

7. $V \stackrel{?}{=} \frac{4}{3} \pi \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \left(R^2 - r^2\right)$
   $\rightarrow$ **true**

Her ser vi at vi har det samme under rottegnet som i parentesen, og vi kan altså skriver volumet slik:

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

**6.28**

**a** Vi regner ut volumet i CAS ved å dreie om *x*-aksen.

1 $f(x) := \frac{2}{x^2}$

$\rightarrow f(x) := \frac{2}{x^2}$

2 $\pi \int_1^2 f^2 \, dx$

$\rightarrow \frac{7}{6} \pi$

Volumet er $\frac{7\pi}{6}$.

**b** Vi regner ut volumet i CAS ved å dreie om *y*-aksen.

1 $f(x) := \frac{2}{x^2}$

$\rightarrow f(x) := \frac{2}{x^2}$

2 $\pi \int_{f(2)}^{f(1)} \text{Invers}(f)^2 \, dx$

$\rightarrow 4 \pi \ln(2)$

Volumet er $4\pi \ln 2$.

**6.29**

Med denne formelen tenker vi oss ikke at romfiguren er delt i «skiver», men i stedet at den er delt i «sylinderrør» inni hverandre. Den innerste sylinderen / det innerste røret har radius $x_0$, overflate $2\pi x_0 \cdot f(x_0)$. Hvis røret har en tykkelse $\Delta x$, så blir volumet $2\pi x_0 \cdot f(x_0)\Delta x$. Tilsvarende får det neste sylinderrøret volumet $2\pi x_1 \cdot f(x_1)\Delta x$ osv. Når vi så summerer opp volumene og lar $\Delta x \to 0$, får vi volumet gitt av formelen.

Ved å sette inn de bestemte grensene *a* og *b* tar vi den største figuren minus den innerste figuren.

Vi finner en tilnærmet verdi i CAS. Vi definerer to funksjoner, en for $f(x) = 1 - \cos x$ og en for $g(x) = 2$. Vi dreier begge disse funksjonene om *y*-aksen fra *x* = 1 til *x* = 3. Vi regner deretter ut differansen for å få det skraverte området.

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) := 1 - \cos(x)$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{f(x) := -\cos(x) + 1}$ |
| 2 | $g(x) := 2$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{g(x) := 2}$ |
| 3 | $2\pi \int_1^3 x\, f\, dx$ <br> $\approx\ \mathbf{37.37}$ |
| 4 | $2\pi \int_1^3 x\, g\, dx$ <br> $\approx\ \mathbf{50.27}$ |
| 5 | $50.26548245744 - 37.37493569183$ <br> $\approx\ \mathbf{12.89}$ |

Svaret blir tilnærmet 12,9.

**6.30**

**a** Vi finner arealet i CAS. Vi finner først en funksjon som beskriver øvre halvdel av ellipsen. Vi finner deretter arealet under ellipsen ved integrasjon. Vi ganger svaret med 2 for å få med oss både delen av ellipsen som ligger over og under *x*-aksen.

| | |
|---|---|
| 1 | $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1}$ |
| 2 | $\text{Løs}\left(\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1, y\right)$ <br> $\rightarrow\ \left\{\mathbf{y = -\frac{\sqrt{-x^2+4}}{2}, y = \frac{\sqrt{-x^2+4}}{2}}\right\}$ |
| 3 | $f(x) := \frac{\sqrt{-x^2+4}}{2}$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{f(x) := \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+4}}$ |
| 4 | $2\int_{-2}^{2} f\, dx$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{2\pi}$ |

Arealet fra $x = -2$ til $x = 2$ blir $2\pi$.

**b** Vi finner volumet i CAS. Vi finner først en funksjon som beskriver øvre halvdel av ellipsen. Vi dreier deretter grafen til funksjonen om $x$-aksen for å finne volumet fra $x = -a$ til $x = a$.

| | |
|---|---|
| 1 | $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ |
| | $\rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ |
| 2 | $\text{Løs}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, y\right)$ |
| | $\rightarrow \left\{y = -\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{b}{a}, y = \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{b}{a}\right\}$ |
| 3 | $f(x) := \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{b}{a}$ |
| | $\rightarrow f(x) := b \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ |
| 4 | $\pi \int_{-a}^{a} f^2 \, dx$ |
| | $\rightarrow \frac{4}{3} a b^2 \pi$ |

Volumet blir $V = \frac{4\pi}{3} ab^2$.

**6.31**

**a** Vi husker sirkellikningen for en sirkel med sentrum $(x_0 , y_0)$ og radius $r$.
Løser vi den med hensyn på $y$, får vi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$(y - y_0)^2 = r^2 - (x - x_0)^2$$
$$y - y_0 = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$
$$y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

Med sentrum (0 , 5) og $r = 2$ får vi de to funksjonene gitt i oppgaven.

$$f(x) = 5 + \sqrt{2^2 - (x - 0)^2} = 5 + \sqrt{4 - x^2}$$
$$g(x) = 5 - \sqrt{2^2 - (x - 0)^2} = 5 - \sqrt{4 - x^2}$$

**b** Vi finner volumet av omdreiningslegemet med CAS.

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) := 5 + \sqrt{4 - x^2}$ |
| | $\rightarrow f(x) := \sqrt{-x^2 + 4} + 5$ |
| 2 | $g(x) := 5 - \sqrt{-x^2 + 4}$ |
| | $\rightarrow g(x) := -\sqrt{-x^2 + 4} + 5$ |
| 3 | $\pi \int_{-2}^{2} f^2 - g^2 \, dx$ |
| | $\rightarrow 40 \pi^2$ |

Volumet er $40\pi^2$.

**c** Vi bruker samme framgangsmåte som i oppgavene a og b, bare at grensene nå er $x_0 \pm r = 2 \pm 3$.

1 $\text{Liste1} := \text{Løs}\left((x-2)^2 + (y-7)^2 = 3^2, y\right)$

$\rightarrow$ $\text{Liste1} := \left\{y = -\sqrt{-x^2+4x+5}+7, y = \sqrt{-x^2+4x+5}+7\right\}$

2 $f(x) := \text{Element}(\text{Liste1}, 2)$

$\rightarrow$ $f(x) := \sqrt{-x^2+4x+5}+7$

3 $g(x) := \text{Element}(\text{Liste1}, 1)$

$\rightarrow$ $g(x) := -\sqrt{-x^2+4x+5}+7$

4 $\pi \int_{-1}^{5} f^2 - g^2 \, dx$

$\rightarrow$ $126\,\pi^2$

Volumet av figuren er $126\pi^2$.

**6.32**

**a** $I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$

Vi finner det samme med CAS:

1 $\text{Integral}(\sin(x), 0, \pi)$

$\rightarrow$ $2$

**b** Vi lager et program i Python som bruker rektangelmetoden med 50 rektangler.

```
from pylab import *

a = 0                   # nedre grense i intervallet
b = pi                   # øvre grense i intervallet
n = 50                  # antall rektangler

def f(x):
  return sin(x)

summen = 0
dx = (b - a)/n    # rektangelbredden

for i in range(n):     # i fra og med 0 til og med n-1
  summen = summen + f(a + i*dx) * dx

print(round(summen, 4))
```

Når vi kjører programmet, får vi tilnærmingsverdien 1,9993.

**c** Vi regner ut integralet i CAS når sin *x* er tilnærmet med fire ledd i rekka.

1 $\int_0^{\pi} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \, dx$

$\approx$ $1.98$

**6.33**
Vi finner den dobbeltderiverte.

$$g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$g(x) = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -\mathrm{e}^{-x} - \left(-\mathrm{e}^{0}\right) = -\mathrm{e}^{-x} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

$$g''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

Vi undersøker om funksjonen har vendepunkter:

$-\mathrm{e}^{-x} = 0$ har ingen løsninger siden venstre side i likningen alltid vil bli negativ for alle reelle tall. Funksjonen har dermed ingen vendepunkter.

**6.34**

**a**

$$f(x) = \sin 5x - 2\cos\frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 5\cos 5x + 2\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$= 5\cos 5x + \sin\frac{x}{2}$$

**b** Vi bruker produktregelen med $u = 3x^2$, $u' = 6x$, $v = \mathrm{e}^{-x}$ og $v' = -\mathrm{e}^{-x}$

$$g(x) = 3x^2\mathrm{e}^{-x}$$

$$g'(x) = 6x\cdot\mathrm{e}^{-x} + 3x^2\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$= 3x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$$

**c** Vi bruker brøkregelen med $u = \sin 6x$, $u' = 6\cos 6x$, $v = 2x$ og $v' = 2$

$$h(x) = \frac{\sin 6x}{2x}$$

$$h'(x) = \frac{6\cos 6x\cdot 2x - \sin 6x\cdot 2}{(2x)^2}$$

$$= \frac{12x\cdot\cos 6x - 2\sin 6x}{4x^2}$$

$$= \frac{6x\cdot\cos 6x - \sin 6x}{2x^2}$$

**d** Vi bruker kjerneregelen.

$$i(x) = \sin^3 x = (\sin x)^3$$

$$i'(x) = 3(\sin x)^2\cdot(\sin x)'$$

$$= 3\sin^2 x\cdot\cos x$$

**e** Vi bruker kjerneregelen.

$$j(x) = 2\mathrm{e}^{-\sin 3x}$$

$$j'(x) = 2\mathrm{e}^{-\sin 3x}\cdot(-\sin 3x)'$$

$$= 2\mathrm{e}^{-\sin 3x}\cdot(-3\cos 3x)$$

$$= -6\cos 3x\cdot\mathrm{e}^{-\sin 3x}$$

**f** Vi bruker kjerneregelen.

$$k(x) = \sqrt{\cos 2x}$$

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} \cdot (\cos 2x)'$$

$$= \frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= -\frac{\sin 2x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{\cos 2x}$$

**6.35**

**a** $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0 \quad , \quad x \in [0°\,,360°]$

$$1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$-\cos^2 x + \cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$\cos x = -1 \quad \vee \quad \cos x = 2 \quad$ men $\cos x = 2$ er ikke mulig

$$x = 180° + k \cdot 360°$$

$$L = \{180°\}$$

**b** $\sin(\pi x) + \sqrt{3}\cos(\pi x) = 0 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi]$

$$\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} + \frac{\sqrt{3}\cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} = \frac{0}{\cos(\pi x)}$$

$$\tan(\pi x) + \sqrt{3} = 0$$

$$\tan(\pi x) = -\sqrt{3}$$

$$\pi x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{3} + k \cdot 1$$

$$L = \left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \frac{14}{3}, \frac{17}{3}\right\}$$

**c** $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi]$

Vi omformer uttrykket til et sinus-uttrykk.

Amplituden:

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Faseforskyvningen:

$$\tan\partial = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\partial = -\frac{\pi}{6}$$

Vi sjekker om den er i riktig kvadrant. Punktet $\left(\sqrt{3}\,,-1\right)$ tilsvarer fjerde kvadrant, hvor også vinkelen vår ligger.

Vi omformer venstre side i likningen til $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$
$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\pi+k\cdot 2\pi$$
$$L=\left\{\frac{\pi}{3}\,,\pi\right\}$$

**6.36**

**a** $\sin(u+v)=\sin u\cdot\cos v+\cos u\cdot\sin v$

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ+45^\circ)\\ &= \sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\cdot\sin 45^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

**b** $4\sin^2 x-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\sin x=0 \quad , \quad x\in\left[0^\circ\,,360^\circ\right\rangle$

$$\sin x\cdot\left(4\sin x-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right)=0$$
$$\sin x=0 \quad \vee \quad 4\sin x=\sqrt{2}+\sqrt{6}$$
$$\sin x=0 \quad \vee \quad \sin x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
$$x=0^\circ+k\cdot 360^\circ \quad x=180^\circ-0^\circ+k\cdot 360^\circ \quad \vee \quad x=75^\circ+k\cdot 360^\circ \quad \vee \quad x=180^\circ-75^\circ+k\cdot 360^\circ$$
$$x=0^\circ+k\cdot 360^\circ \quad x=180^\circ+k\cdot 360^\circ \quad \vee \quad x=75^\circ+k\cdot 360^\circ \quad \vee \quad x=105^\circ+k\cdot 360^\circ$$
$$L=\{0^\circ\,,75^\circ\,,105^\circ\,,180^\circ\}$$

**6.37**

**a** $\cos(u+v)=\cos u\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x)\\ &= \cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot\sin x\\ &= \cos^2 x-\sin^2 x\end{aligned}$$

**b**
$$\begin{aligned}\cos^4 x-\sin^4 x &= \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\\ &= \cos(2x)\cdot 1\\ &= \cos(2x)\end{aligned}$$

**6.38**
Davids løsning er riktig.

Dina gjør feil. I stedet for å finne ut hvilke verdier $2x$ kan være for at $\cos 2x = \frac{1}{2}$, løser hun her bare for første kvadrant. Først når hun har funnet $x$ i første kvadrant, ser hun etter flere løsninger og får feil svar da perioden også skulle vært delt på 2.

**6.39**

**a** Vi ser på funksjonen $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \quad , \quad x \in \langle 1, 9 \rangle$.

Funksjonen er en harmonisk svingning og kan alternativt skrives på formen $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Vi leser av amplituden $A = 2$, likevektslinja $d = 0$, $c = \frac{\pi}{2}$ og $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Dette gir perioden $p = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

Grafen er faseforskjøvet $x_0 = -\frac{\varphi}{c} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 1$, altså til høyre.

Vi finner nullpunktene.

$$f(x) = 0 \quad , \quad x \in \langle 1, 9 \rangle$$
$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$$
$$\frac{\pi}{2}(x-1) = 0 + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2}(x-1) = \pi - 0 + k \cdot 2\pi$$
$$x - 1 = k \cdot 4 \quad \vee \quad x - 1 = 2 + k \cdot 4$$
$$x = 1 + k \cdot 4 \quad \vee \quad x = 3 + k \cdot 4$$
$$x = 5 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = 7$$

Nullpunktene er 3, 5 og 7.
Siden funksjonen er en harmonisk svingning, kan vi finne ekstremalpunkter og topp- og bunnpunkter uten å derivere. Funksjonen har sin største verdi når

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 1$$
$$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$
$$x - 1 = 1 + 4k$$
$$x = 2 + 4k$$
$$x = 2 \quad \vee \quad x = 6$$

Da må funksjonen ha sin minste verdi for $x$-verdier midt mellom verdiene som gir minste verdi, altså når

$$x = 4 + 4k$$
$$x = 4 \quad \vee \quad x = 8$$

Ekstremalpunktene er altså 2, 4, 6 og 8.

$$f(2)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}(2-1)\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$$
$$f(6)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}(6-1)\right)=2\sin\frac{5\pi}{2}=2$$
Toppunkt: (2 , 2) og (6 , 2)
$$f(4)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}(4-1)\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$$
$$f(8)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}(8-1)\right)=2\sin\frac{7\pi}{2}=-2$$
Bunnpunkt: (4 , –2) og (8 , –2)

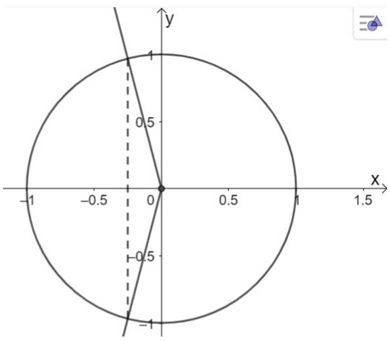
Vendepunktene ligger på likevektslinja, mellom to ekstremalpunkter. Altså er vendepunktene (3 , 0) , (5 , 0) og (7 , 0).

**b** Vi ser på funksjonen $g(x)=\sin x+2\sin 2x \quad , \quad x\in[0\,,2\pi]$.

Vi starter med å finne $g'(x)$ og $\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$ :
$$g(x)=\sin x+2\sin 2x$$
$$g'(x)=\cos x-4\cos 2x$$
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}(\sin x+2\sin 2x)\,\mathrm{d}x\\ &=\left[-\cos x-\cos 2x\right]_0^{2\pi}\\ &=-\cos 2\pi-\cos 4\pi-(-\cos 0-\cos 0)\\ &=-1-1-(-1-1)\\ &=0\end{aligned}$$
Det siste svaret forteller oss at i intervallet $[0\,,2\pi]$ avgrenser grafen til *f* sammen med *x*-aksen, et like stort område på oversiden og undersiden av *x*-aksen.

Funksjonen har et funksjonsuttrykk som gjør det krevende å finne ut særlig mye mer uten hjelpemidler, men vi kan i hvert fall finne tilnærmingsverdier for nullpunktene.
$$\begin{aligned}g(x)&=0\\ \sin x+2\sin 2x&=0\\ \sin x+4\sin x\cdot\cos x&=0\\ \sin x(1+4\cos x)&=0\\ \sin x=0 \quad &\vee \quad 1+4\cos x=0\\ x=0+k\cdot\pi \quad &\vee \quad \cos x=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$
Vi ser at vi kan finne tre av nullpunktene eksakt: 0, $\pi$ og $2\pi$ .

De andre nullpunktene må vi finne tilnærmingsverdier for ved å bruke enhetssirkelen.



Vi ser at det to vinkler i intervallet $[0\ ,\ 2\pi]$. Den ene ligger i 2. kvadrant mellom $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ og $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$. Det er altså et nullpunkt som er omtrent 1,8. Vi finner tilsvarende en vinkel i 4. kvadrant med et tilhørende nullpunkt på omtrent 4,5.

Nullpunktene er 0, 1,8 $\pi$ , 4,5 og $2\pi$ .

**c** Vi ser på funksjonen $h(x) = 3 - 3\cos\left(1 - x^2\right) \quad , \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Vi finner nullpunktene:

$$\begin{aligned}
3 - 3\cos(1 - x^2) &= 0 \\
\cos(1 - x^2) &= 1 \\
1 - x^2 &= k \cdot 2\pi \\
x^2 &= 1 - 2k\pi \\
x &= \pm\sqrt{1 - 2k\pi} \\
x &= \pm 1
\end{aligned}$$

Nullpunktene er 1 og –1.

Vi bruker kjerneregelen og deriverer funksjonen.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 3 \cdot (-2x) \cdot \left(-\sin(1 - x^2)\right) \\
&= 6x \cdot \sin(1 - x^2)
\end{aligned}$$

Vi finner ekstremalpunkter.

$$h'(x) = 0$$

$$6x \cdot \sin(1 - x^2) = 0$$

$$6x = 0 \quad \vee \quad \sin(1 - x^2) = 0$$

Vi ser at $x = 0$ er en løsning.

$$\sin(1 - x^2) = 0$$

$$1 - x^2 = k \cdot 2\pi \quad \vee \quad 1 - x^2 = \pi - k \cdot 2\pi$$

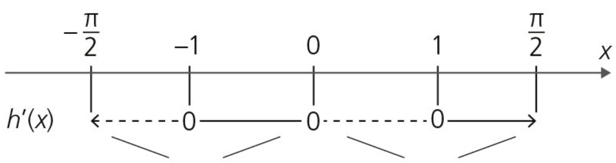
$$x^2 = 1 - k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x^2 = 1 - \pi - k \cdot 2\pi$$

$$x = \pm\sqrt{1 - k \cdot 2\pi} \quad \vee \quad x^2 = \pm\sqrt{1 - \pi - k \cdot 2\pi}$$

Her er det bare $x = \pm\sqrt{1 - k \cdot 2\pi}$ som er gyldige innenfor definisjonsområdet. Denne gir $x = \pm 1$.

Ekstremalpunktene er –1, 0 og 1.

Vi tegner fortegnslinje for $h'(x)$.




Vi ser at vi har et toppunkt for $x = 0$, og bunnpunkt for $x = -1$ og $x = 1$.

**d** Vi ser på funksjonen $i(x) = \dfrac{4\sin x}{2+\cos x}$ , $x \in [0\,,\,2\pi]$.

Vi finner først nullpunktene ved å løse likningen $i(x) = 0$. Legg merke til at nevneren alltid er positiv.

$\dfrac{4\sin x}{2+\cos x} = 0$ gir $\sin x = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = \pi \quad \vee \quad x = 2\pi$

Nullpunktene er 0, $\pi$ og $2\pi$.

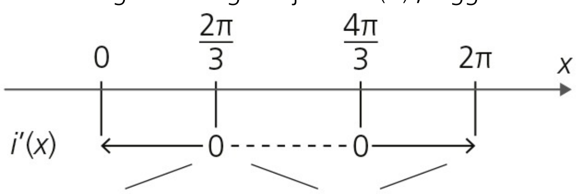
Vi bruker brøkregelen og deriverer funksjonen.

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{4\cos x\cdot(2+\cos x) - 4\sin x\cdot(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} \\ &= \frac{8\cos x + 4\cos^2 x + 4\sin^2 x}{(2+\cos x)^2} \\ &= \frac{4(2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x)}{(2+\cos x)^2} \\ &= \frac{4(2\cos x + 1)}{(2+\cos x)^2} \end{aligned}$$

Vi finner ekstremalpunktene til funksjonen.

$$\begin{aligned} i'(x) &= 0 \\ \frac{4(2\cos x+1)}{(2+\cos x)^2} &= 0 \\ 4(2\cos x + 1) &= 0 \\ 2\cos x + 1 &= 0 \\ \cos x &= -\frac{1}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} \quad &\vee \quad x = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Vi tegner fortegnslinje for $i'(x)$, legg merke til at nevneren alltid er positiv.




Vi ser at vi har et toppunkt for $x = \dfrac{2\pi}{3}$ og et bunnpunkt for $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

$$i\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Toppunktet er $\left(\dfrac{2\pi}{3}\,,\,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$i\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\sin\frac{4\pi}{3}}{2+\cos\frac{4\pi}{3}} = \frac{4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2-\frac{1}{2}} = \frac{-2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$: Bunnpunktet er $\left(\dfrac{4\pi}{3}\,,\,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

**6.40**

**a** Vi finner arealet med CAS.

| | |
|---|---|
| 1 | $h(x) := 2\,x + k\,\sin(x)$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{h(x) := k\,\sin(x) + 2\,x}$ |
| 2 | $\text{Integral}(h, 0, 4\,\pi)$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{16\,\pi^2}$ |

Vi ser at svaret blir et tall uavhengig av *k*.

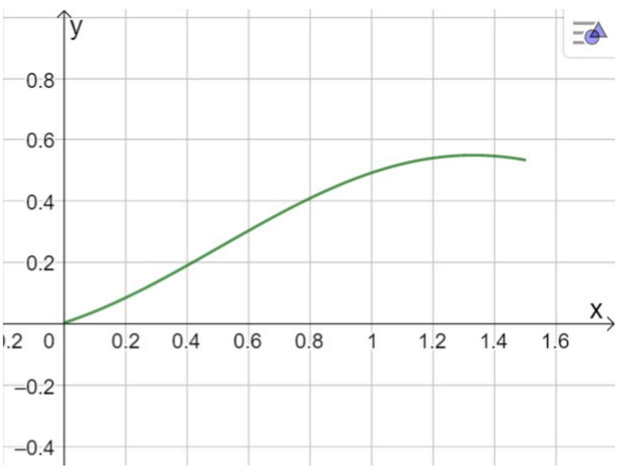
**b** Vi løser med CAS.

| | |
|---|---|
| 1 | $h(x) := 2\,x + k\,\sin(x)$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{h(x) := k\,\sin(x) + 2\,x}$ |
| 2 | $V(k) := \pi \int_0^{4\pi} h^2\,dx$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{V(k) := \frac{256}{3}\,\pi^4 + 2\,k^2\,\pi^2 - 16\,k\,\pi^2}$ |
| 3 | $V'(k) = 0$ <br> Løs: $\mathbf{\{k = 4\}}$ |
| 4 | $V''(k) > 0$ <br> $\rightarrow$ **true** |

Av utregningen ser vi at volumet har sin minste verdi for $k = 4$.

**6.41**

**a** Vi tegner først grafen til *f*, for å få et bilde av situasjonen.




Vi ser at den innvendige radien der glasset er på det tykkeste, svarer til funksjonsverdien i toppunktet på grafen.

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) := -0.3\ \sin(1.9\,x - 4.1) + 0.25$ <br> $\rightarrow\ f(x) := \frac{1}{4} - \frac{3}{10}\sin\left(\frac{19}{10}x - \frac{41}{10}\right)$ |
| 2 | $f'(x) = 0, x = 1$ <br> NLøs: $\{x = 1.331\}$ |
| 3 | $f''(1.33) < 0$ <br> $\rightarrow$ **true** |
| 4 | $f(1.33)$ <br> $\approx\ 0.55$ |

Radien i glasset blir 0,55 dm eller 5,5 cm på det tykkeste.

**b** Mengden vann glasset rommer, finner vi ved å finne volumet av omdreiningslegemet vi får nå vi dreier grafen til $f$ 360° om $x$-aksen.

| | |
|---|---|
| 5 | $V := \pi \cdot \text{Integral}(f^2, 0, 1.5)$ <br> $\approx\ V := 0.715$ |

Volumet blir 0,72 dm³, som tilsvarer 0,72 liter.

**c** Vi finner differansen mellom volumet regnet ut etter ytre radius og etter indre radius.

| | |
|---|---|
| 6 | $g(x) := f(x) + 0.03$ <br> $\approx\ g(x) := -0.3\ \sin(1.9\,x - 4.1) + 0.28$ |
| 7 | $V_2 := \pi \cdot \text{Integral}(g^2, 0, 1.5)$ <br> $\approx\ V_2 := 0.816$ |
| 8 | $V_2 - V$ <br> $\approx\ 0.101$ |

Volumet av materialet blir 0,10 dm³.

**d** Vi bruker CAS til å beregne overflatearealet av utsiden av stettglasset.

| | |
|---|---|
| 9 | $O := 2\,\pi \cdot \text{Integral}\left(g \cdot \sqrt{1 + (g'(x))^2}, 0, 1.5\right)$ <br> $\approx\ O := 3.748$ |

Overflatearealet er 3,7 dm².

**6.42**

Vi løser oppgaven i CAS. Vi definerer først *T* som funksjon av *t*, deretter *P* som funksjon av *T*, slik at *T*(*t*) settes inn i funksjonsuttrykket for *P*(*T*). Til slutt finner vi middelverdien ved integrasjon.

1 $T(t) := 15 + 10\ \sin\left(\frac{\pi\ t}{30}\right)$

$\rightarrow\ \mathbf{T(t)\ :=\ 10\ \sin\left(\frac{1}{30}\ t\ \pi\right) + 15}$

2 $P(T) := 125 - \frac{1}{2}\ T(t)$

$\rightarrow\ \mathbf{P(T)\ :=\ -5\ \sin\left(\frac{1}{30}\ t\ \pi\right) + \frac{235}{2}}$

3 $\frac{1}{30} \cdot \text{Integral}(P, 0, 30)$

$\rightarrow\ \mathbf{\frac{235\ \pi - 20}{2\ \pi}}$

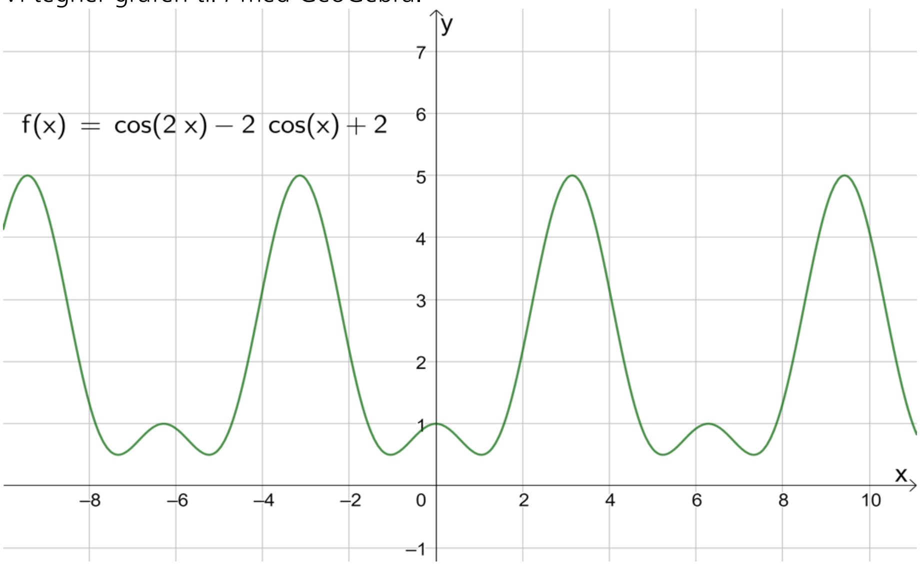
4 $3

$\approx\ \mathbf{114.317}$

Gjennomsnittlig effekt midt på dagen blir 114 watt.

**6.43**

**a** Vi tegner grafen til *f* med GeoGebra.




Siden cos(2*x*) har periode $\pi$ og cos *x* har periode $2\pi$, får vi $f(x) = f(x + 2\pi)$.
Perioden til *f* er derfor $2\pi$. Dette er også tydelig fra grafen, der vi for eksempel ser at toppunktene med ekstremalverdi 1 kommer med intervaller på omtrent $6{,}3 \approx 2\pi$.

**b** Vi skriver om $f(x)$ ved å bruke trigonometriske identiteter.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) - 2\cos x + 2 \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x - 2\cos x + 2 \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 2\cos x + 2 \\ &= 2\cos^2 x - 2\cos x + 1 \end{aligned}$$

Vi ser at $a = 2$, $b = -2$ og $c = -1$.

**6.44**

$f(x) = 3 - 3\cos\left(1 - x^2\right) \quad , \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Vi regner ut skjæringspunktet med *y*-aksen.

$$f(x) = 3 - 3\cos\left(1 - x^2\right)$$
$$f(0) = 3 - 3\cos\left(1 - 0^2\right) = 3 - 3\cos 1$$

Vi vet at cos 1 er større enn 0, men mindre enn 1. Dermed må $f(0)$ være positiv. Vi utelukker dermed graf B.
Vi regner ut $f(1)$.

$$f(1) = 3 - 3\cos\left(1 - 1^2\right) = 3 - 3\cos 0 = 3 - 3 = 0$$

Vi ser at dette er et nullpunkt. Dermed utelukker vi graf C.

Da gjenstår graf A som følgelig må være grafen til *f*.

**6.45**

Siden $f(x) = \sin^2 x$, ser vi at alle *y*-verdier vil bli positive eller 0, siden alle verdier kvadreres. Dermed kan vi utelukke graf D.
Setter vi $f(x) = 0$ for å finne nullpunktene, ser vi at $\sin^2 x = 0$ har de samme løsningene som $\sin x = 0$, altså $x = \{0, \pi, 2\pi, \ldots\}$.

Dermed vil graf B være eneste mulighet.

**6.46**

$$f(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{2}x - b\right) + 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x - b\right)\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}x - b\right)' + 0 \\ &= -a\sin\left(\frac{\pi}{2}x - b\right) \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi a}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x - b\right) \end{aligned}$$

Siden *f* har et toppunkt i $(3, 5)$, vil $f'(3) = 0$ og $f(3) = 5$.

$$\begin{aligned} f'(3) &= 0 \\ -\frac{\pi a}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3 - b\right) &= 0 \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - b\right) &= 0 \\ \frac{3\pi}{2} - b &= k \cdot \pi \\ b &= \frac{3\pi}{2} - k\pi \\ b = \frac{3\pi}{2} \quad &\vee \quad b = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad b \in [0, 2\pi\rangle \end{aligned}$$

Vi har også

$$f(3)=5$$
$$a\cos\left(\frac{3\pi}{2}-b\right)+2=5$$
$$a\cos\left(\frac{3\pi}{2}-b\right)=3$$
$$a=\frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-b\right)}$$

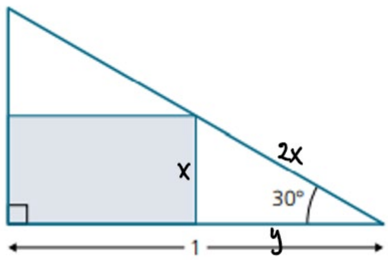
$b=\frac{3\pi}{2}$ gir $a=\frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{3}{\cos 0}=3$

$b=\frac{\pi}{2}$ gir $a=\frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{3}{\cos\pi}=\frac{3}{-1}=-3$

Siden $a>0$, får vi bare løsningen $a=3$ og $b=\frac{3\pi}{2}$.

**6.47**

Vi kaller bredden av rektanglet $x$. Se figur. Dette blir korteste katet i den lille trekanten nede til høyre. Hypotenusen i denne trekanten blir da $2x$ siden trekanten er en 30-, 60- og 90-graderstrekant. Vi kaller den lengste kateten i denne lille trekanten $y$ og finner lengden i CAS:




1 Løs$\left(x^2+y^2=(2x)^2, y\right)$

$\rightarrow \left\{y=-\sqrt{3}\,x, y=\sqrt{3}\,x\right\}$

Lengden må være positiv, og vi får lengden av den lengste kateten som $\sqrt{3}x$.

Dette gir oss lengden i rektanglet som $1-\sqrt{3}x$.

Arealet av rektanglet blir dermed

$$A(x)=l\cdot b=\left(1-\sqrt{3}x\right)\cdot x=x-\sqrt{3}x^2$$

Vi finner toppunktet i CAS.

2 $A(x):=x-\sqrt{3}\,x^2$

$\rightarrow A(x):=-\sqrt{3}\,x^2+x$

3 $A'(x)=0$

Løs: $\left\{x=\frac{\sqrt{3}}{6}\right\}$

4 $A''\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)<0$

$\rightarrow$ **true**

Vi får størst areal når $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Da blir arealet

5 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$\rightarrow \frac{1}{12}\sqrt{3}$

**6.48**

**a** Avstanden mellom to topper tilsvarer bølgelengden eller perioden til funksjonen.

1 $f(x) := 20 \cdot \sin(0.07x)$

$\rightarrow f(x) := 20 \sin\left(\frac{7}{100}x\right)$

2 $\frac{2\pi}{0.07}$

$\approx 89.76$

Avstanden mellom to topper blir ca. 90 mm.

Likevektslinja til funksjon er $d = 0$, og amplituden er $A = 20$. Dermed vil funksjonens $y$-verdier variere mellom –20 og 20.

Den loddrette avstanden mellom topp og bunn blir dermed 20 mm – (–20 mm) = 40 mm.

**b** Vi løser oppgaven i CAS. Vi finner først lengden av grafen til $f$ i rad 2. Vi ganger så lengden med bredden på 1000 mm i rad 3. Til slutt gjør vi om svaret fra mm² til m².

1 $f(x) := 20\ \sin(0.07\ x)$

$\rightarrow f(x) := 20 \sin\left(\frac{7}{100}x\right)$

2 $\int_0^{1000} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

$\approx 1386.71$

3 $1386.71 \cdot 1000$

$\approx 1386710$

4 $\frac{1386710}{100 \cdot 100 \cdot 100}$

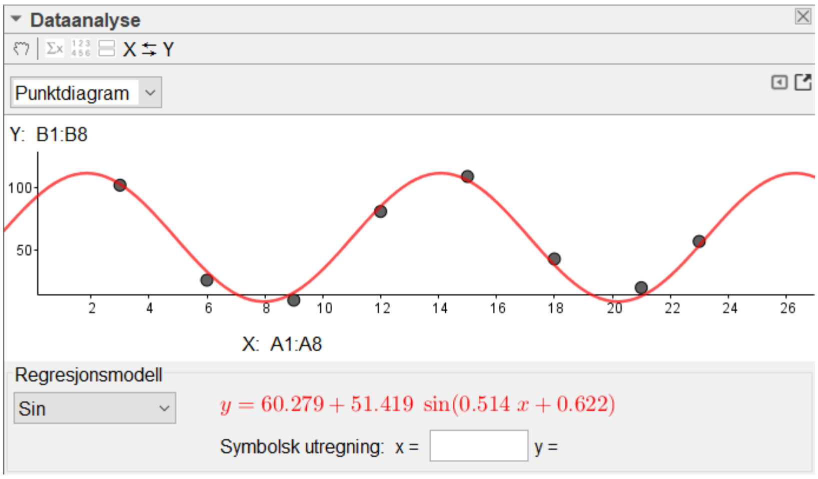
$\approx 1.39$

Overflatearealet blir ca. 1,39 m².

**6.49**

**a** Vi lar $x$ være antall timer etter midnatt den 14. august 2018 og $y$ være vannstanden målt fra sjøkartnull.
Vi legger inn tallene fra tabellen inn i regnearket i GeoGebra.

Vi markerer tallene og trykker på knappen *Regresjonsanalyse*. Vi velger *Sin* som regresjonsmodell og får




Da er

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 102 |
| 2 | 6 | 26 |
| 3 | 9 | 10 |
| 4 | 12 | 81 |
| 5 | 15 | 109 |
| 6 | 18 | 43 |
| 7 | 21 | 20 |
| 8 | 23 | 57 |

$g(x) = 51{,}4\sin(0{,}514x + 0{,}662) + 60{,}3$ en passende modell til målingene som er gjort.

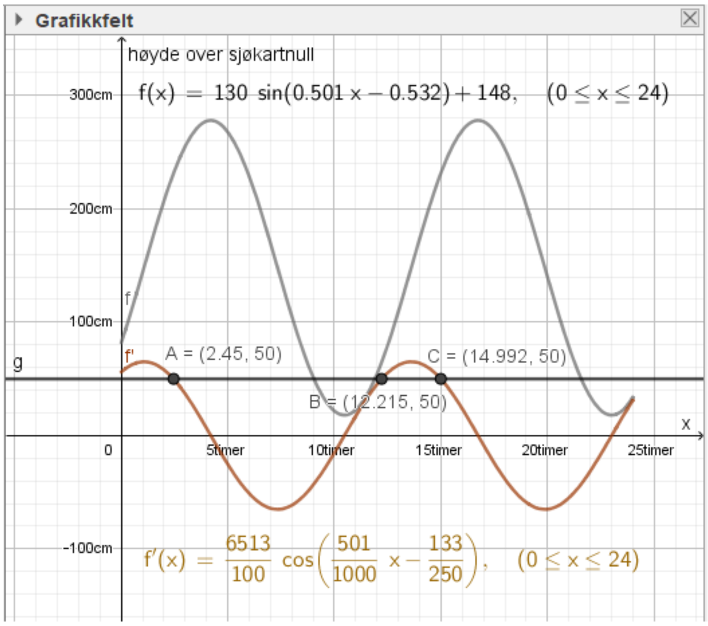
**b** Vi vet at perioden til en funksjon på formen $f(x) = A\sin(cx + \phi) + d$ er gitt ved $\frac{2\pi}{c}$. Vi leser av funksjonsuttrykket og regner ut.

$$\frac{2\pi}{0{,}501} \approx 12{,}5$$

Dette betyr at det ifølge modellen tar omtrent 12,5 timer mellom hver gang det er høyvann.

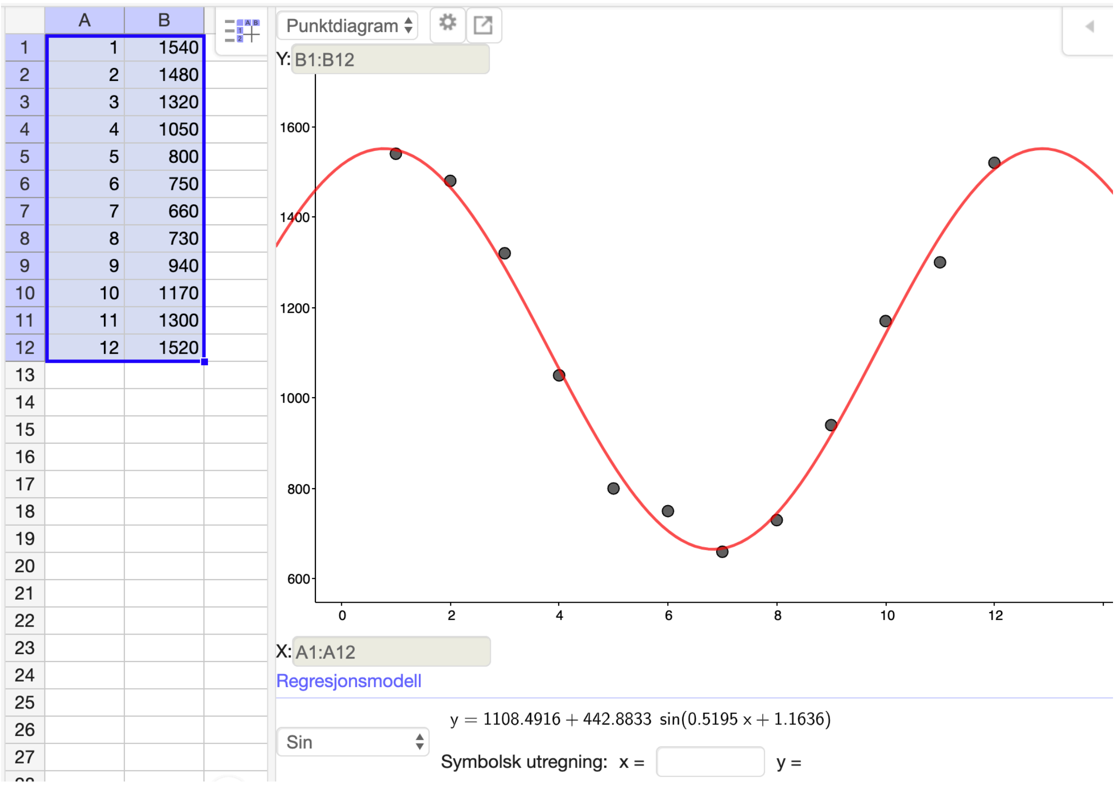
**c** Tallet 148 viser til likevektslinja $d = 148$ og er gjennomsnittshøyden til vannstanden over sjøkartnull. Tallet 130 er amplituden til vannstanden og forteller oss hvor mye over eller under vannstanden kan variere sammenliknet med gjennomsnittshøyden.

**d** Vi brukte kommandoen Funksjon til å tegne grafen til *f*, fant den deriverte ved å bruke kommandoen Derivert(f) og skrev inn «y = 50». Vi brukte knappen *Skjæring mellom to objekt*  til å finne skjæringspunktene mellom $f'(x)$ og linja. Vi observerer at *x*-verdiene til skjæringspunktene *A*, *B* og *C* i utklippet under, forteller oss hvilke tidspunkter vannstanden øker med 50 cm per time. Disse tilsvarer omtrent klokkeslettene 02.27, 12.13 og 15.00.




**6.50**

**a** Vi skriver dataene inn i et regneark, bruker kommandoen «Regresjonsanalyse» i GeoGebra og finner en sinusfunksjon som passer godt med dataene:



| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1540 |
| 2 | 2 | 1480 |
| 3 | 3 | 1320 |
| 4 | 4 | 1050 |
| 5 | 5 | 800 |
| 6 | 6 | 750 |
| 7 | 7 | 660 |
| 8 | 8 | 730 |
| 9 | 9 | 940 |
| 10 | 10 | 1170 |
| 11 | 11 | 1300 |
| 12 | 12 | 1520 |



Funksjonsuttrykket er $f(x)=443\cdot\sin(0{,}52x+1{,}16)+1108$ , $t\in[0\,,12\rangle$.

**b** Vi bruker CAS til å finne tidspunktene der grafen til $f$ har vendepunkter, $f''(t)=0$, og hvilke vendepunkter grafen er stigende:

1 $f(t) := 1300 + 730\ \sin(0.52\ t + 1.07)$

$\rightarrow\ f(t) := 730\ \sin\left(\frac{13}{25}\ t + \frac{107}{100}\right) + 1300$

2 $\{f''(t)\ =\ 0, t > 0, t \leq 12\}$

Løs: $\left\{t = \frac{25}{13}\ \pi - \frac{107}{52}, t = \frac{50}{13}\ \pi - \frac{107}{52}\right\}$

3 $2

$\approx\ \{t = 3.984, t = 10.025\}$

4 $f'(\text{HøyreSide}(\$3, 1))$

$\approx\ -379.6$

5 $f'(\text{HøyreSide}(\$3, 2))$

$\approx\ 379.6$

Siden vi skal finne den raskeste økningen, må den deriverte være positiv. Av dette ser vi at forbruket økte raskest i oktober, etter 10 måneder (CAS-rad 3 og 5).

**c** Vi bruker CAS til å beregne integralet:

6 Integral(f, 0, 12)

$\approx\ 15547.464$

Det årlige «strømforbruket» i 2019 var på 15 547 kWh.

**d** Vi finner den årlige energikostnaden ved å integrere produktet av pris og forbruk:

7 $p(t) := 0.85 + 0.17\ \sin(0.52\ t + 1.07)$

$\rightarrow\ p(t) := \frac{17}{100}\ \sin\left(\frac{13}{25}\ t + \frac{107}{100}\right) + \frac{17}{20}$

8 $\text{Integral}(f(t) \cdot p(t), 0, 12)$

$\approx\ 13941.453$

Den årlige energikostnaden i 2019 var på 13 941 kr.

**6.51**

**a** Kortisolnivået $f(t)$ i kroppen endrer seg med en vekstfart $f'(t)$ som svarer til differansen mellom produksjonsfarten og nedbrytingsfarten. Følgelig er

$$\begin{aligned} f'(t) &= p(t) - q(t) \\ &= 1 + \sin(kt) - q(t) \end{aligned}$$

Perioden til produksjonsfarten er 24 timer, så $k = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.

Nedbrytingsfarten er proporsjonal med tiden, så $q(t) = mt$, der $m$ er proporsjonalitetskonstanten.

Dette gir oss

$$f'(t) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) - mt$$

Vi integrerer så dette uttrykket for å finne $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= t - \frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{1}{2}mt^2 + d \\ &= -\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{1}{2}mt^2 + t + d \end{aligned}$$

Her er $d$ integrasjonskonstanten.

Siden $-\cos(ct) = \sin\left(ct - \frac{\pi}{2}\right)$, så er $-\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Vi kan vi altså omskrive funksjonsuttrykket til $f(t) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}mt^2 + t + d$, og da har vi et uttrykk på formen $f(t) = a\sin\left(\frac{\pi}{12}t + b\right) + ct^2 + t + d$, der $a = \frac{12}{\pi}$, $b = -\frac{\pi}{2}$ og $c = -\frac{1}{2}m$.

**b** Vi kan her bruke regresjon i GeoGebra eller Python. Vi kan videre velge å ha fire ukjente parametre, $a$, $b$, $c$ og $d$, eller vi kan bruke at vi allerede kjenner parameteren $a$ og $b$.

Vi bruker først GeoGebra. Vi legger måledataene inn i regnearket og lager en liste med punkter, l1. Så bruker vi regresjon:

Resultatet i de to tilfellene, avhengige av antallet ukjente parametere blir da slik:

$$f(t) = \text{Reg}\left(l1, \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2}\right) + c\,t^2 + t + d\right)$$
$$= \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2}\right) - 0.0405\,t^2 + t + 3.5491$$

$$f(t) = \text{Reg}\left(l1, a\sin\left(\frac{\pi}{12}t - b\right) + c\,t^2 + t + d\right)$$
$$= 3.9852\sin\left(\frac{\pi}{12}t - 1.4426\right) - 0.0392\,t^2 + t + 3.2904$$

Avhengig av hvilken metode vi bruker med GeoGebra får vi altså at

$$f(t) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}04t^2 + t + 3{,}55 \text{ eller } f(t) = 3{,}99\sin\left(\frac{\pi}{12}t - 1{,}44\right) - 0{,}04t^2 + t + 3{,}29$$

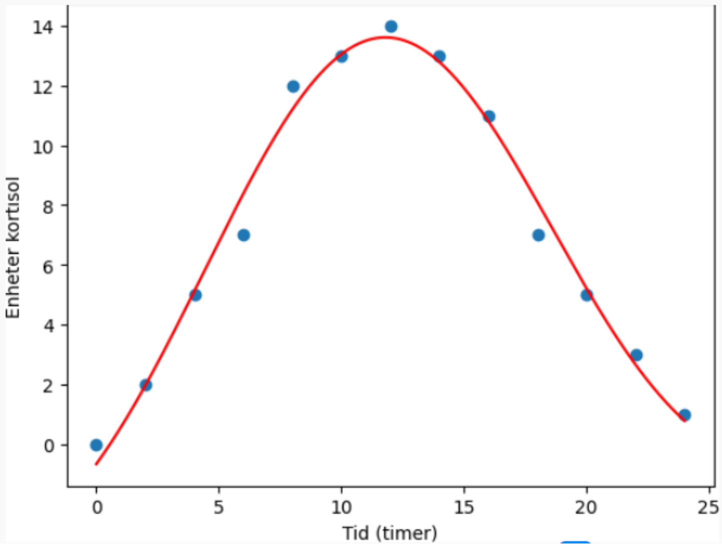
Av plottet i GeGebra ser vi at begge modellene passer godt med måledataene.

Vi lager så et program i Python som bruker regresjon og finner modellen. I programmet nedenfor finner vi både a, *b*, *c* og *d*, som så skrives ut, men som med GeGebra kunne vi også her valgt å sette *a* og *b* som kjente parametere, og bare finne *c* og *d*. Vi velger også å plotte grafen til modellen vi finner, sammen med målepunktene.

```
from pylab import *
from scipy.optimize import curve_fit

# Leser inn dataene
tid = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24]
kortisol = [0, 2, 5, 7, 12, 13, 14, 13, 11, 7, 5, 3, 1]

# Definerer funksjonen f
def f(t, a, b, c, d):
  return a*sin(pi/12*t + b) + c*t**2 + t + d

# Bestemmer a, b, c og d
[a, b, c, d] = curve_fit(f, tid, kortisol)[0]
print("a =", round(a, 4))
print("b =", round(b, 4))
print("c =", round(c, 4))
print("d =", round(d, 4))

# Plotter dataene sammen med grafen til f
plot(tid, kortisol, "o")
xlabel("Tid (timer)")
ylabel("Enheter kortisol")
t = linspace(0, 24, 1000)
plot(t, f(t, a, b, c, d), "r")
show()
```

Utskriften ser slik ut:

```
a = 3.9852
b = -1.4426
c = -0.0392
d = 3.2904
```




Når vi gjør regresjon med Python med fire ukjente parametere, får vi modellen

$f(t)=3{,}99\sin\left(\frac{\pi}{12}t-1{,}44\right)-0{,}04t^2+t+3{,}29$ . Dette er det samme som vi fant med GeoGebra.

**6.52**

Vi setter opp en differensiallikning.

$y'=k\cdot(12\,000-y)$

Vi har initialbetingelsene $y(0)=100$ og $y(10)=4000$ .

Vi løser differensiallikningen i CAS, og finner $c_1$ og $k$ ved hjelp av initialbetingelsene.

| | |
|---|---|
| 1 | LøsODE($y'=k\,(12000-y)$)<br>→ $\mathbf{y=c_1\,e^{-kx}+12000}$ |
| 2 | $f(x):=c_1\,e^{-kx}+12000$<br>→ $\mathbf{f(x)\,:=\,c_1\,e^{-kx}+12000}$ |
| 3 | $f(0)=100$<br>→ $\mathbf{c_1+12000=100}$ |
| 4 | $f(10)=4000$<br>→ $\mathbf{c_1\,e^{-10k}+12000=4000}$ |
| 5 | $\{\$3,\$4\}$<br>Løs: $\left\{\left\{\mathbf{c_1=-11900,k=-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{80}{119}\right)}\right\}\right\}$ |

Vi setter verdiene inn i funksjonsuttrykket og undersøker når antall smittede var 6000.

$f(x) := -11900\, e^{\frac{1}{10} x \ln\left(\frac{80}{119}\right)} + 12000$

$\rightarrow\ f(x) := -11900\, e^{\frac{1}{10} x \ln\left(\frac{80}{119}\right)} + 12000$

$f(x) = 6000, x = 1$

NLøs: $\{x = 17.245\}$

Det tar altså litt over 17,25 uker før halvparten er smittet.

**6.53**

**a** Siden farten er $y$, må akselerasjonen være $y'$. Siden muffinsformen skal ha konstant fart etter en kort stund må $y'$ da være 0.

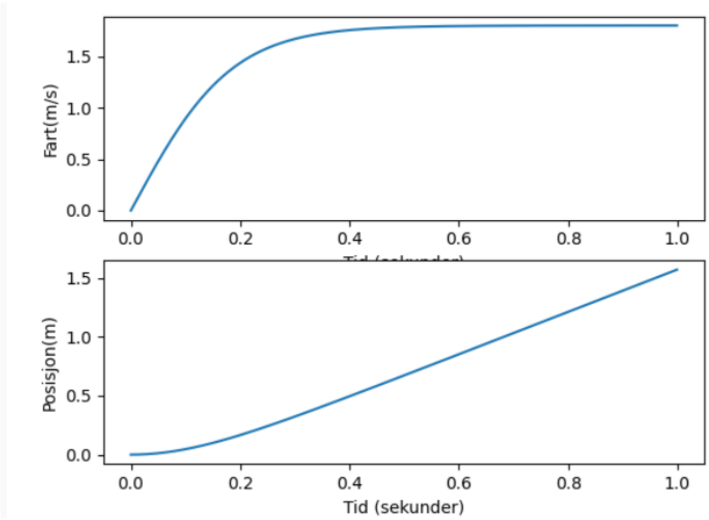
Vi ser at for at det skal skje, må uttrykket inne i parentesen, $\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)$, bli 0. Da må $\frac{y^2}{k^2}=1$ og altså $y^2=k^2$.

Den konstante farten vi raskt oppnår, kaller vi $v_a$, og $v_a = y$. Dermed har vi sammenhengen $v_a^2 = k^2$.

**b** Vi lager et program i Python som bruker eulermetoden.

```
from pylab import *

a = 0
b = 1
n = 1000                 # antall steg
delta_t = (b - a)/n       # steglengde
y0 = 0                    # initialbetingelse
k = 1.8                   # terminalfarten va = k

def yder(y):
  return 9.81*(1-y**2/k**2)

t = zeros(n)              # tom liste for tider
y = zeros(n)              # tom liste for fartsdata
s = zeros(n)              # tom liste for posisjonsdata

y[0] = y0

for i in range(n - 1):
  y[i+1] = y[i] + yder(y[i]) * delta_t   # lagring av fartsdata
  t[i+1] = t[i] + delta_t                # lagring av tider
  s[i+1] = s[i] + y[i]*delta_t           # lagring av posisjonsdata

subplot(2,1,1)
plot(t, y)                              # plotter farten
xlabel("Tid (sekunder)")
ylabel("Fart(m/s)")
subplot(2,1,2)
plot(t, s)                              # plotter posisjonen
xlabel("Tid (sekunder)")
ylabel("Posisjon(m)")
show()
```

Utskriften ser slik ut:




**c** Vi løser oppgaven i CAS:

1 $k := 1.8$

$\rightarrow\ \mathbf{k := \frac{9}{5}}$

2 $f(x) := \text{LøsODE}\left(y' = 9.81\left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right), (0, 0)\right)$

$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := \frac{-9\, e^{\frac{-109}{10}x} + 9}{5\, e^{\frac{-109}{10}x} + 5}}$

3 $\text{Integral}(f, 0, t) = 12$

NLøs: $\mathbf{\{t = -6.794, t = 6.794\}}$

Vi forkaster den negative løsningen. Det vil altså ta 6,79 sekunder før muffinsformen har falt 12 meter.

**6.54**

**a** Vi finner et uttrykk for arealet i CAS. I rad 1 og 2 finner vi vektorene fra *A* til *B* og fra *A* til *C*. I linje 3 definerer vi arealet av trekanten som en funksjon *f* ved hjelp av vektorprodukt.

| | |
|---|---|
| 1 | a := Vektor((3, 2, t), (4, −3, 3)) <br> $\rightarrow\ \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3-t \end{pmatrix}$ |
| 2 | b := Vektor((3, 2, t), (8, 3, 5)) <br> $\rightarrow\ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5-t \end{pmatrix}$ |
| 3 | $f(t) := \frac{1}{2}$ \|Vektorprodukt(a, b)\| <br> $\rightarrow\ f(t) := \sqrt{13}\sqrt{t^2-8t+30}$ |

Vi setter den deriverte av funksjonen lik 0 og utfører dobbeltderivasjonstesten for å sjekke at det er et minimalpunkt vi har funnet.

| | |
|---|---|
| 4 | $f'(t) = 0$ <br> Løs: $\{t = 4\}$ |
| 5 | $f''(4) > 0$ <br> $\rightarrow$ **true** |

Arealet er minst for $t = 4$. Det minste arealet blir

| | |
|---|---|
| 6 | $f(4)$ <br> $\rightarrow\ \sqrt{182}$ |

**6.55**

**a** Vi regner ut volumet av det tenkte tetraedret *ABCD*. Er volumet 0, så ligger de 4 punktene i samme plan. Vi gjør utregningene i CAS. Vi definerer først tre vektorer.

1. $a := \text{Vektor}((2,0,5),(-3,3,4))$
   $\rightarrow \mathbf{a} := \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $b := \text{Vektor}((2,0,5),(-1,2,2))$
   $\rightarrow \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. $c := \text{Vektor}((2,0,5),(-1,3,-10))$
   $\rightarrow \mathbf{c} := \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$
4. $\frac{1}{6} \cdot |(\text{Vektorprodukt}(a,b)) \cdot c|$
   $\rightarrow \mathbf{0}$

*D* ligger i planet.

**b** For at linja ikke skal skjære planet, må linja være parallelt med planet. Det vil si at retningsvektoren til linja må stå ortogonalt på normalvektoren til planet.

Vi finner normalvektoren i CAS.

1. $a := \text{Vektor}((2,0,5),(-3,3,4))$
   $\rightarrow \mathbf{a} := \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $b := \text{Vektor}((2,0,5),(-1,2,2))$
   $\rightarrow \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. $\text{Vektorprodukt}(a,b)$
   $\rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. $(-7,-12,-1) \cdot -1$
   $\rightarrow \mathbf{(7,12,1)}$

Normalvektoren blir $[7\,,12\,,1]$.

Vi ser at retningsvektoren til linja blir $[-3\,,6\,,k]$.

5. $(7,12,1) \cdot (-3,6,k) = 0$
   Løs: $\{\mathbf{k = -51}\}$

Til slutt undersøker vi at linja ikke er sammenfallende med planet. Vi lager en likning for planet. Vi setter et punkt på linja, for eksempel (2 , 1 , 7) inn i likningen. Hvis svaret ikke blir 0, er linja og planet ikke sammenfallende.

6. $7(x-2) + 12 \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-5) = 0$
   $\rightarrow \mathbf{7x + 12y + z - 19 = 0}$
7. $7 \cdot 2 + 12 \cdot 1 + 7 - 19$
   $\rightarrow \mathbf{14}$

Når $k = -51$, skjærer ikke linja planet og er heller ikke sammenfallende med planet.

**6.56**
To rette linjer $\ell$ og $m$ går gjennom henholdsvis tangeringspunktene $P$ og $Q$ og står normalt på hvert av planene. Disse linjene vil også gå gjennom kulas sentrum $S$. Normalvektorene til de to planene vil være retningsvektor for disse to linjene. Vi finner normalvektorene for begge plan:

$\vec{n}_\alpha = [-2\,,2\,,-1]$

$\vec{n}_\beta = [-7\,,4\,,-4]$

Vi bruker normalvektorene som retningsvektorer, og koordinatene til $P$ og $Q$ til å lage parameterframstillinger for de to linjene $\ell$ og $m$ gjennom henholdsvis $P$ og $Q$:

$$\ell:\begin{cases} x=-3-2t \\ y=7+2t \\ z=-1-t \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x=-4-7s \\ y=5+4s \\ z=-2-4s \end{cases}$$

Vi setter koordinatene for $x$ og $y$ lik hverandre:

$-3-2t=-4-7s$

$7+2t=5+4s$

Vi adderer likningene og finner $s$:

$4=1-3s$

$s=-1$

Dette gir oss $t=-3$ og vi ser at begge $z$-koordinatene blir 2.
Linjene er ikke vindskeive, og med $s=-1$ eller $t=-3$ finner vi kulas sentrum som $S=(3\,,1\,,2)$.

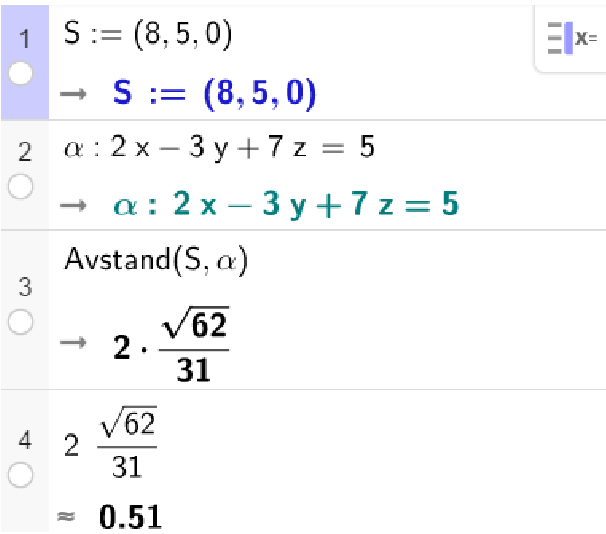
Kulas radius er gitt ved

$$r=\left|\overrightarrow{PS}\right|=\left|[3-(-3)\,,1-7\,,2-(-1)]\right|=\left|[6\,,-6\,,3]\right|=\sqrt{6^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{81}=9$$

Likningen for kuleflaten blir

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=81$

**6.57**
**a** Radien til kuleflaten er lik avstanden fra sentrum planet. Vi finner den i CAS.




Radien til kuleflaten er $\dfrac{2\sqrt{62}}{31}\approx 0{,}51$.

**b** Vi bruker CAS til å finne en normalvektor til planet $\beta$, og dermed likningen til $\beta$. Så bruker vi formelen for avstand fra punkt til plan, og avgjør hvilken verdi av *t* som gjør denne avstanden lik 2.

| | |
|---|---|
| 1 | A := (1, 2, −5)<br>→ $\mathbf{A := (1, 2, -5)}$ |
| 2 | B := (5, −2, 1)<br>→ $\mathbf{B := (5, -2, 1)}$ |
| 3 | C := (t, 1, 4)<br>→ $\mathbf{C := (t, 1, 4)}$ |
| 4 | n := Vektor(A, B) ⊗ Vektor(A, C)<br>→ $\mathbf{n := \begin{pmatrix} -30 \\ 6\,t - 42 \\ 4\,t - 8 \end{pmatrix}}$ |
| 5 | $\beta$ : Skalarprodukt(n, Vektor((x, y, z), A)) = 0<br>→ $\boldsymbol{\beta : (4\,t - 8)\,(-z - 5) + (6\,t - 42)\,(-y + 2) - 30\,(-x + 1) = 0}$ |
| 6 | Løs$\left(\frac{\lvert\text{ByttUt(VenstreSide(\$5), \{x = 7, y = 6, z = −3\})}\rvert}{\lvert n \rvert} = 2, t\right)$<br>→ $\mathbf{\left\{t = \frac{149}{17}, t = 17\right\}}$ |

Planet $\beta$ tangerer kuleflaten når $t = \dfrac{149}{17}$ eller $t = 17$.

**6.58**
Vi starter med likningen for *xy*-planet. Denne likningen er $z = 0$.

Vi bruker CAS til å finne koordinatene til de fire hjørnene i pyramiden. Vi bruker 3 av 4 likninger for å finne hvert av punktene.

I:

| | |
|---|---|
| 1 | 2x − 2y − z = 4<br>→ $\mathbf{2\,x - 2\,y - z = 4}$ |
| 2 | 2x + y − z = −2<br>→ $\mathbf{2\,x + y - z = -2}$ |
| 3 | 3y + 2z = 6<br>→ $\mathbf{3\,y + 2\,z = 6}$ |
| 4 | {\$1, \$2, \$3}<br>Løs: $\mathbf{\{\{x = 3, y = -2, z = 6\}\}}$ |

II:

| | |
|---|---|
| 1 | $z = 0$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{z = 0}$ |
| 2 | $2x + y - z = -2$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{2\,x + y - z = -2}$ |
| 3 | $3y + 2z = 6$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{3\,y + 2\,z = 6}$ |
| 4 | $\{\$1, \$2, \$3\}$ <br> Løs: $\{\{x = -2, y = 2, z = 0\}\}$ |

III:

| | |
|---|---|
| 1 | $2\,x - 2\,y - z = 4$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{2\,x - 2\,y - z = 4}$ |
| 2 | $z = 0$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{z = 0}$ |
| 3 | $3\,y + 2\,z = 6$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{3\,y + 2\,z = 6}$ |
| 4 | $\{\$1, \$2, \$3\}$ <br> Løs: $\{\{x = 4, y = 2, z = 0\}\}$ |

IV:

| | |
|---|---|
| 1 | $2\,x - 2\,y - z = 4$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{2\,x - 2\,y - z = 4}$ |
| 2 | $2\,x + y - z = -2$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{2\,x + y - z = -2}$ |
| 3 | $z = 0$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{z = 0}$ |
| 4 | $\{\$1, \$2, \$3\}$ <br> Løs: $\{\{x = 0, y = -2, z = 0\}\}$ |

Vi finner nå de tre vektorene vi trenger, og passer på at alle starter i det samme punktet. Vi finner så volumet *V* av pyramiden.

| | |
|---|---|
| 1 | a := Vektor((3, −2, 6), (−2, 2, 0)) |
| | → $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ |
| 2 | b := Vektor((3, −2, 6), (4, 2, 0)) |
| | → $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ |
| 3 | c := Vektor((3, −2, 6), (0, −2, 0)) |
| | → $\mathbf{c} := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ |
| 4 | $V = \frac{1}{6} \cdot \lvert(\text{Vektorprodukt}(a, b)) \cdot c\rvert$ |
| | → $\mathbf{V = 24}$ |

Volumet blir 24.

**6.59**

**a** Vi starter med å finne sentrum i kula. Sentrum vil ligge midt mellom *P* og *Q*. Vi trenger derfor $\overrightarrow{PQ}$.

| | |
|---|---|
| 1 | P := (2, 4, −3) |
| | → **P := (2, 4, −3)** |
| 2 | Q := (0, 0, 1) |
| | → **Q := (0, 0, 1)** |
| 3 | d := Vektor(P, Q) |
| | → $\mathbf{d} := \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ |

Vi finner sentrum *S* ved å finne posisjonsvektoren $\overrightarrow{OS}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} \\ &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \\ &= [2\,,4\,,-3] + \frac{1}{2}[-2\,,-4\,,4] \\ &= [2\,,4\,,-3] + [-1\,,-2\,,2] \\ &= [1\,,2\,,-1]\end{aligned}$$

Sentrum $S = (1\ ,2\ ,-1)$.

Diameteren i kula blir lik lengden av $\overrightarrow{PS}$, altså $r = \left|\overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

Vi finner nå avstanden fra $S$ til planet $\alpha$ i CAS.

| | |
|---|---|
| 1 | $\alpha : x - y + z = 7$ <br> $\rightarrow \alpha : x - y + z = 7$ |
| 2 | $S := (1, 2, -1)$ <br> $\rightarrow S := (1, 2, -1)$ |
| 3 | $\text{Avstand}(S, \alpha)$ <br> $\rightarrow 3\sqrt{3}$ |

Vi skal finne avstanden fra kuleflaten til planet. Vi må derfra trekke fra radien.

Avstanden blir $3\sqrt{3} - 3$.

**b** Vi finner et uttrykk for avstanden fra sentrum S til planet $\beta$.

| | |
|---|---|
| 1 | $\beta : 2x + y + t(z - 3) = -1$ <br> $\rightarrow \beta : t(z - 3) + 2x + y = -1$ |
| 2 | $S := (1, 2, -1)$ <br> $\rightarrow S := (1, 2, -1)$ |
| 3 | $\text{Avstand}(S, \beta)$ <br> $\rightarrow \sqrt{\dfrac{\left(t\left(\frac{3t-1}{t} + 1\right) - 4\right)^2}{t^2 + 5}}$ |

For at kuleflaten skal tangere planet, må avstanden være lik radien, altså 3. Vi finner verdiene av $t$ i CAS.

| | |
|---|---|
| 4 | $\sqrt{\dfrac{\left(t\left(\frac{3t-1}{t} + 1\right) - 4\right)^2}{t^2 + 5}} = 3$ <br> Løs: $\left\{ t = \dfrac{-6\sqrt{15} + 20}{7}, t = \dfrac{6\sqrt{15} + 20}{7} \right\}$ |

**6.60**

**a** Planet $\alpha$ skjærer $x$-aksen når $y = z = 0$.

$$x + 0 + 0 \cdot t = 4$$
$$x = 4$$

Planet $\alpha$ skjærer $y$-aksen når $x = z = 0$.

$$0 + y + 0 \cdot t = 4$$
$$y = 4$$

Planet $\alpha$ skjærer $z$-aksen når $x = y = 0$.

$$0 + 0 + z \cdot t = 4$$
$$z = \frac{4}{t}$$

Skjæringspunktene mellom planet $\alpha$ og koordinataksene er $A = (4, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ og $C = \left(0, 0, \dfrac{4}{t}\right)$.

**b** En pyramide avgrenset av planet $\alpha$ , *xy*-planet, *xz*-planet og *yz*-planet vil ha toppunkt i origo, og være utspent av vektorene $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$ og $\overrightarrow{AC}$. Vi definerer punktene vi trenger i CAS.

| | |
|---|---|
| 1 | $A := (4, 0, 0)$ <br> $\rightarrow$ $\mathbf{A := (4, 0, 0)}$ |
| 2 | $B := (0, 4, 0)$ <br> $\rightarrow$ $\mathbf{B := (0, 4, 0)}$ |
| 3 | $C := \left(0, 0, \frac{4}{t}\right)$ <br> $\rightarrow$ $\mathbf{C := \left(0, 0, \frac{4}{t}\right)}$ |
| 4 | $O := (0, 0, 0)$ <br> $\rightarrow$ $\mathbf{O := (0, 0, 0)}$ |

Videre definerer vi vektorene vi trenger, og avgjør når volumet av pyramiden er lik 10.

| | |
|---|---|
| 5 | AB := Vektor(A, B) <br> $\rightarrow$ $\mathbf{AB := \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}$ |
| 6 | AC := Vektor(A, C) <br> $\rightarrow$ $\mathbf{AC := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{4}{t} \end{pmatrix}}$ |
| 7 | AO := Vektor(A, O) <br> $\rightarrow$ $\mathbf{AO := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ |
| 8 | $\frac{1}{6} \left\lvert (AB \otimes AC)\, AO \right\rvert = 10$ <br> Løs: $\left\{ \mathbf{t = \frac{-16}{15}, t = \frac{16}{15}} \right\}$ |

Vi ser at volumet av pyramiden er 10 hvis $t = -\frac{16}{15}$ eller $t = \frac{16}{15}$.

**c** Siden kula har radius 2, ønsker vi å avgjøre når planet har avstand 2 fra kulas sentrum. Vi bruker CAS.

| | |
|---|---|
| 1 | $\alpha: x + y + t\,z = 4$ <br> $\rightarrow\ \alpha: t\,z + x + y = 4$ |
| 2 | $S := (-1, 2, 1)$ <br> $\rightarrow\ S := (-1, 2, 1)$ |
| 3 | Løs(Avstand(S, $\alpha$) = 2, t) <br> $\rightarrow\ \left\{t = \frac{-2\sqrt{3}-3}{3}, t = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right\}$ |

Vi ser at planet $\alpha$ tangerer kuleflaten $K$ når $t = \frac{-2\sqrt{3}-3}{3}$ eller $t = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

**6.61**

Vi finner en parameterframstilling for linja. Den vil ha retningsvektor $[2, -3, 1]$ (det samme som normalvektoren til planet) siden den står normalt på planet.
Parameterframstillingen blir

$$\ell = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Vi finner skjæringspunktet $S$ mellom linja og planet.

| | |
|---|---|
| 1 | $2(1 + 2t) - 3(2 - 3t) + (3 + t) = 13$ <br> Løs: $\{t = 1\}$ |

Vi setter $t = 1$ inn i parameterframstillingen.
$S = (3, -1, 4)$.

Vi finner radius i grunnflaten til kjegla som lengden av $\overrightarrow{SA}$.

| | |
|---|---|
| 1 | $S := (3, -1, 4)$ <br> $\rightarrow\ S := (3, -1, 4)$ |
| 2 | $A := (4, -2, -1)$ <br> $\rightarrow\ A := (4, -2, -1)$ |
| 3 | \|Vektor(S, A)\| <br> $\rightarrow\ 3\sqrt{3}$ |

Vi finner høyden i kjegla som lengden av $\overrightarrow{SP}$.

| | |
|---|---|
| 1 | $S := (3, -1, 4)$ <br> $\rightarrow\ S := (3, -1, 4)$ |
| 2 | $P := (1, 2, 3)$ <br> $\rightarrow\ P := (1, 2, 3)$ |
| 3 | \|Vektor(S, P)\| <br> $\rightarrow\ \sqrt{14}$ |

Vi kan nå finne volumet av kjegla med formelen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

1 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(3 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{14}$

$\rightarrow$ $\mathbf{V = 9\sqrt{14}\,\pi}$

**6.62**
Vi finner en likning for planet. Vi bruker CAS.

1 Plan((3, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 1))

$\rightarrow$ $\mathbf{x \cdot 4 + y \cdot 3 + z \cdot 12 = 12}$

Vi finner tidspunktet der partikkelen skjærer planet:

2 $4 \cdot t + 3 \cdot \left(\frac{t^2}{3}\right) + 12 \cdot \left(-\frac{t}{4}\right) = 12$

Løs: $\mathbf{\{t = -4, t = 3\}}$

Siden $t > 0$, forkaster vi $t = -4$ og velger $t = 3$.
Vi finner posisjonsvektoren ved $t = 3$.

$$\overrightarrow{OP} = \left[3, \frac{3^2}{3}, -\frac{3}{4}\right] = \left[3, 3, -\frac{3}{4}\right]$$

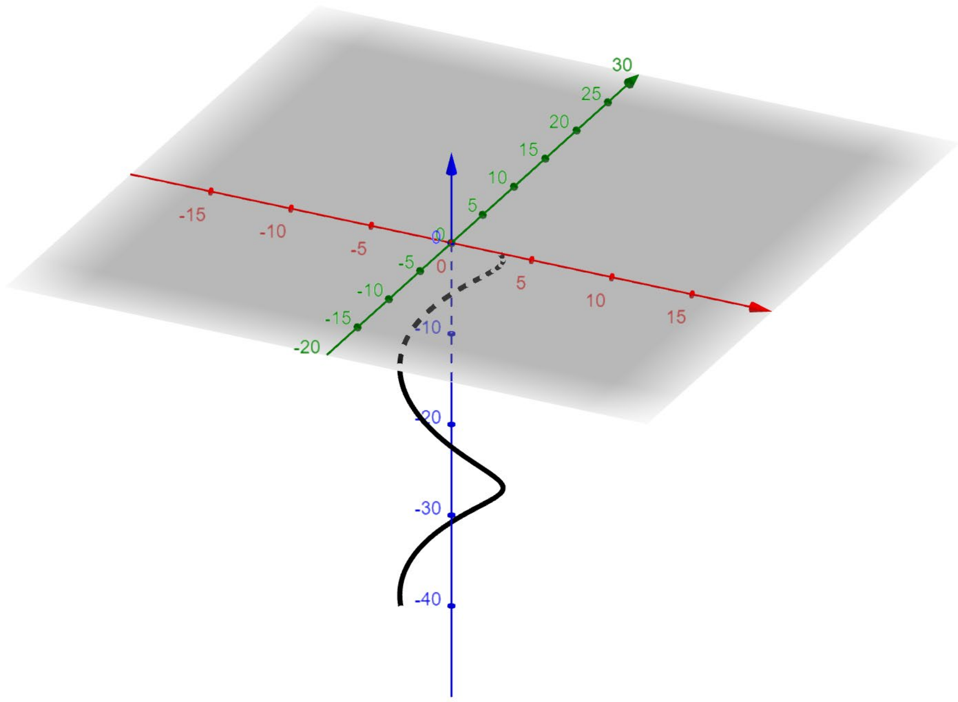
$$P = \left(3, 3, -\frac{3}{4}\right)$$

**6.63**

**a** Vi ser nærmere på partikkelens bevegelse i CAS og GeoGebra. Vi tegner først bevegelsen. Vi bruker kommandoen kurve.

r = Kurve(3 cos(t), 3 sin(t), −4 t, t, 0, 10)

$$= \left.\begin{array}{l} x = 3.00\ \cos(t) \\ y = 3.00\ \sin(t) \\ z = -4.00\ t \end{array}\right\} 0.00 \le t \le 10.0$$




| | |
|---|---|
| 1 | $r(t) := (3\cos(t), 3\sin(t), -4t)$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{r(t) := (3\cos(t), 3\sin(t), -4t)}$ |
| 2 | $v(t) := r'(t)$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{v(t) := (-3\sin(t), 3\cos(t), -4)}$ |
| 3 | $f(t) := \lvert v \rvert$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{f(t) := \sqrt{9\cos^2(t) + 9\sin^2(t) + 16}}$ |
| 4 | $a(t) := v'(t)$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{a(t) := (-3\cos(t), -3\sin(t), 0)}$ |
| 5 | $g(t) := \lvert a \rvert$ <br> $\rightarrow\ \mathbf{g(t) := 3\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}}$ |

Vi ser at banefarten kan uttrykkes ved *f*(*t*). Vi vet også at $\sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t + 16}$ kan omformes slik:

$$\sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t + 16} = \sqrt{9\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + 16} = \sqrt{9\cdot 1 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Partikkelen har altså konstant fart 5.

Vi ser at akselerasjonen kan uttrykkes ved *g*(*t*). Vi vet også at $3\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3\sqrt{1} = 3$. Partikkelen har altså også konstant akselerasjon 3.

**b** Vi starter med akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t) = [t\,,\mathrm{e}^{-t}\,,0]$.

Vi integrerer hver koordinat og får fartsvektoren $\vec{v}(t) = \left[\frac{1}{2}t^2 + C_1\,, -\mathrm{e}^{-t} + C_2\,, C_3\right]$. Vi vet at $\vec{v}(0) = [0\,,0\,,5]$ og kan dermed finne konstantene. $C_1$ blir 0, $C_2$ blir 1 og $C_3$ må være 5.

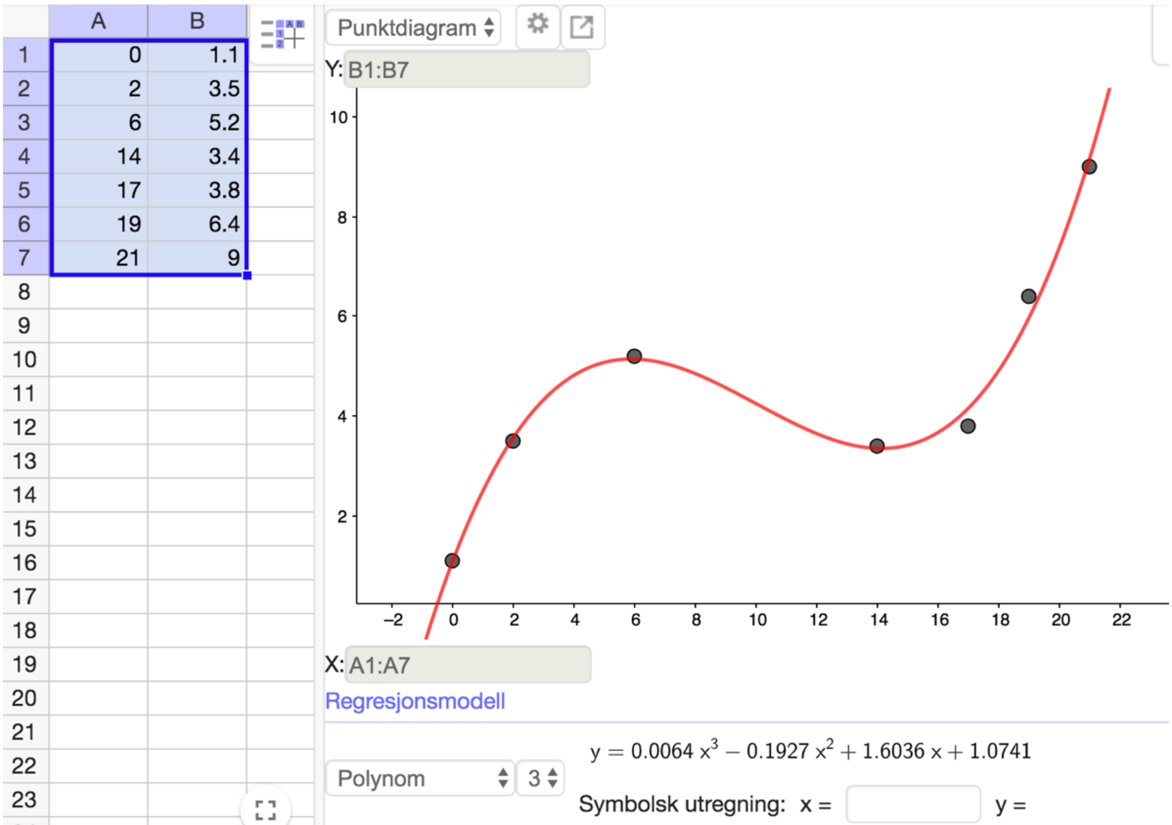
Vi får fartsvektoren $\vec{v}(t) = \left[\frac{1}{2}t^2\,, -\mathrm{e}^{-t} + 1, 5\right]$.

Vi integrerer hver koordinat en gang til og finner posisjonsvektoren $\vec{r}(t) = \left[\frac{1}{6}t^3 + C_4\,, \mathrm{e}^{-t} + t + C_5\,, 5t + C_6\right]$. Vi vet at $\vec{r}(0) = [3\,,4\,,0]$ og kan dermed finne konstantene. $C_4$ blir 3, $C_5$ blir 3 og $C_6$ må være 0.

Vi får posisjonsvektoren $\vec{r}(t) = \left[\frac{1}{6}t^3 + 3\,, \mathrm{e}^{-t} + t + 3\,, 5t\right]$.

**6.64**

**a** Vi bruker regresjonsanalyse i GeoGebra med polynom av grad 3.



**b** Vi løser oppgaven i CAS og roterer *g* om *x*-aksen.

1 $g(x) := 0.00662x^3 - 0.203x^2 + 1.75x + 0.0932$

$\rightarrow\ g(x) := \frac{331}{50000}x^3 - \frac{203}{1000}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{233}{2500}$

2 $\pi \int_0^{21} g^2\,dx$

$\rightarrow\ \frac{918349636323}{2500000000}\pi$

3 $\frac{918349636323}{2500000000}\pi$

$\approx\ 1154.03$

Volumet blir $115\ \text{cm}^3 = 1{,}15\ \text{dm}^2 = 1{,}15\ \text{L}$.

**c** Tykkelsen på vasen blir ytre vegg minus indre vegg. Vi regner ut gjennomsnittet av denne tykkelsen i CAS ved integrasjon. (I denne oppgaven vil antall desimaler i funksjonen kunne gi store utslag på tykkelsen.)

1 $f(x) := 0.00641x^3 - 0.1927x^2 + 1.604x + 1.0741$

$\approx\ f(x) := 0.01x^3 - 0.19x^2 + 1.6x + 1.07$

2 $g(x) := 0.01x^3 - 0.2x^2 + 1.75x + 0.09$

$\approx\ g(x) := 0.01x^3 - 0.2x^2 + 1.75x + 0.09$

3 $\frac{1}{21}\int_0^{21} f - g\,dx$

$\approx\ 0.48$

Gjennomsnittlig tykkelse blir 0,48 cm.