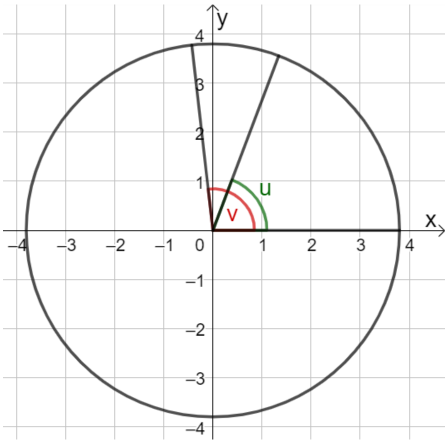
R2 kapittel 3 Trigonometri

LØSNINGER AV OPPGAVENE I BOKA

3.1

a



b $u = \frac{b}{r} = \frac{4{,}6\text{ cm}}{3{,}8\text{ cm}} = 1{,}211$

c $v = \frac{b}{r} = \frac{6{,}4\text{ cm}}{3{,}8\text{ cm}} = 1{,}684$

d $b = w \cdot r = 1{,}0 \cdot 3{,}8\text{ cm} = 3{,}8\text{ cm}$

3.2

a **1** $90° = \frac{90°}{180°} \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$

2 $36{,}9° = \frac{36{,}9°}{180°} \cdot \pi = 0{,}205 \cdot \pi = 0{,}644$

3 $\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} \cdot 180° = \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$

4 $0{,}963 = \frac{0{,}963}{\pi} \cdot 180° = 55{,}2°$

b Fra grader til radianer:

```
from pylab import*
d = float(input("Vinkelen i grader:"))
r = (d/180)*pi
print("Vinkelen er", round(r, 3), "radianer")
```

Fra radianer til grader:

```
from pylab import*
r = float(input("Vinkelen i radianer:"))
d = (r/pi)*180
print("Vinkelen er", round(d, 1), "grader.")
```

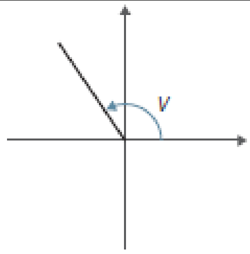
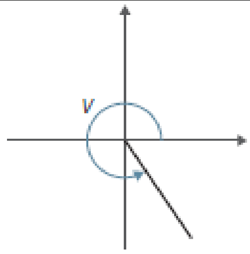
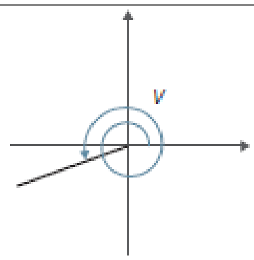
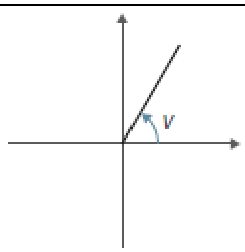
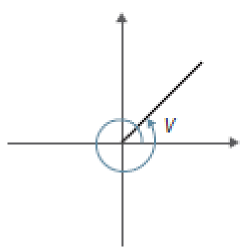
3.3

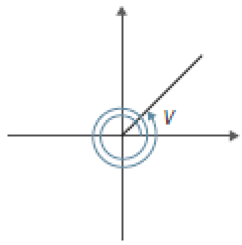
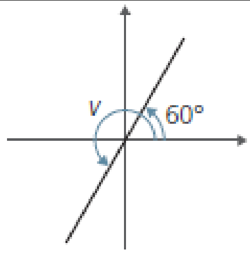
$v°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
v (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

3.4

a –

b

***v* i grader**	***v* i radianer**	***v* tegnet i grunnstilling**	**Omløp**	**Kvadrant**
120°	$\frac{2\pi}{3}$		Første	Andre
330°	$\frac{11\pi}{6}$		Første	Fjerde
570°	$\frac{19\pi}{6}$		Andre	Tredje
60°	$\frac{\pi}{3}$		Første	Første
405°	$\frac{9\pi}{4}$		Andre	Første

750°	$\frac{25\pi}{6}$		Tredje	Første
240°	$\frac{4\pi}{3}$		Første	Tredje

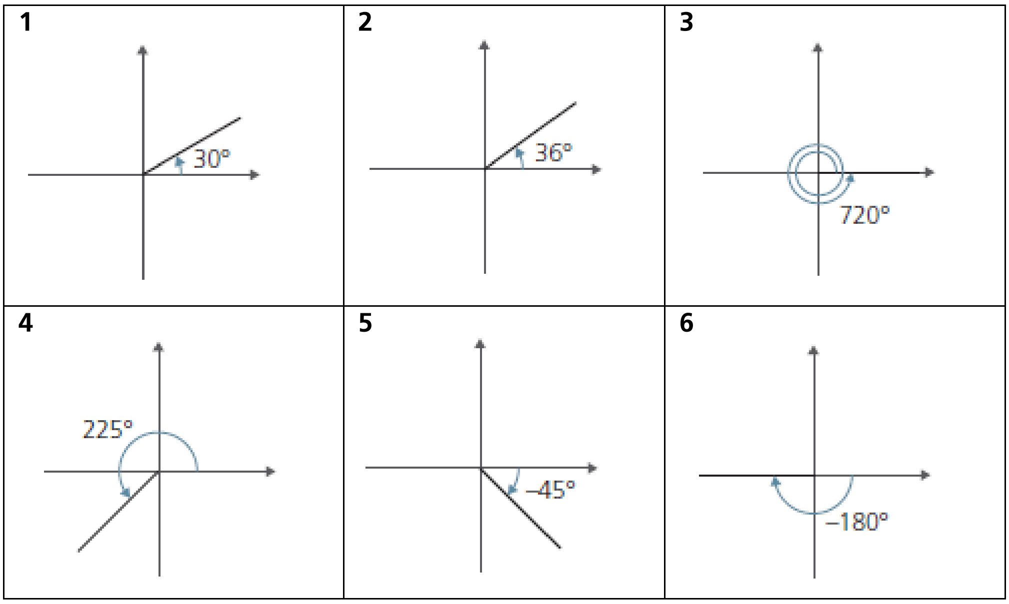
c Det er vinkelen på 300° som er sammenfallende med $u = -60°$. Det er fordi to vinkler u og v er sammenfallende hvis $v = u + k \cdot 360°$, der $k \in \mathbb{Z}$. Her er $-60° + 1 \cdot 360° = 300° = v$.

3.5

a **1** $\frac{30°}{180°} \cdot \pi = \frac{\pi}{6}$ **2** $\frac{36°}{180°} \cdot \pi = \frac{\pi}{5}$ **3** $\frac{720°}{180°} \cdot \pi = 4\pi$

4 $\frac{225°}{180°} \cdot \pi = \frac{5\pi}{4}$ **5** $\frac{-45°}{180°} \cdot \pi = -\frac{\pi}{4}$ **6** $\frac{-180°}{180°} \cdot \pi = -\pi$

b



3.6

a $\frac{2\pi}{\pi} \cdot 180° = 360°$ **b** $\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot 180° = 90°$ **c** $\frac{\frac{\pi}{5}}{\pi} \cdot 180° = 36°$

d $\frac{\frac{11\pi}{6}}{\pi} \cdot 180° = 330°$ **e** $\frac{-\pi}{\pi} \cdot 180° = -180°$ **f** $\frac{-\frac{\pi}{3}}{\pi} \cdot 180° = -60°$

3.7

a $b = 1{,}8 \cdot 12{,}8 \text{ cm} = 21{,}6 \text{ cm}$ **b** $r = \dfrac{19 \text{ cm}}{0{,}63 \text{ cm}} = 30{,}2 \text{ cm}$ **c** $v = \dfrac{6 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 1{,}000$

3.8

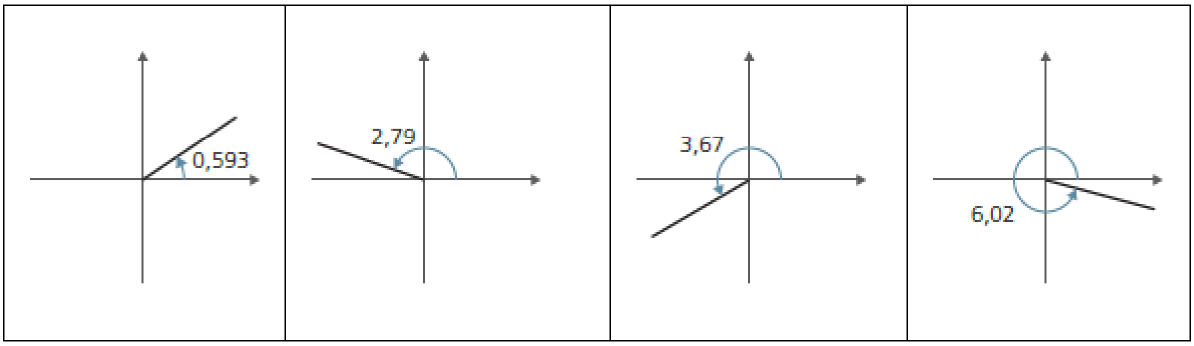
a $0 < 0{,}593 < \dfrac{\pi}{2}$ u er i første kvadrant. $\dfrac{\pi}{2} < 2{,}79 < \pi$ v er i andre kvadrant.

$\pi < 3{,}67 < \dfrac{3\pi}{2}$ w er i tredje kvadrant. $\dfrac{3\pi}{2} < 6{,}02 < 2\pi$ z er i fjerde kvadrant.

b $u = \dfrac{0{,}593}{\pi} \cdot 180° = 34{,}0°$ $v = \dfrac{2{,}79}{\pi} \cdot 180° = 160°$

$w = \dfrac{3{,}67}{\pi} \cdot 180° = 210°$ $z = \dfrac{6{,}02}{\pi} \cdot 180° = 345°$

c



3.9

$u = 180° - 30° = 150° = \dfrac{5\pi}{6}$ $v = 30° + 180° = 210° = \dfrac{7\pi}{6}$

$w = u + 180° = 150° + 180° = 330° = \dfrac{11\pi}{6}$ $z = (180° - 60°) - 360° = -240° = -\dfrac{4\pi}{3}$

$x = z - (-180°) = -240° + 180° = -60° = -\dfrac{\pi}{3}$ $y = 60° - 180° = -120° = -\dfrac{2\pi}{3}$

3.10

a Fra kl. 18.00 til kl. 19.00 går minuttviseren et helt omløp, altså 360° eller 2π.

b Fra kl. 18.00 til kl. 20.15 går minuttviseren to hele omløp, pluss et kvart omløp, altså $\left(2 + \dfrac{1}{4}\right) \cdot 360° = 810°$ eller $\dfrac{9\pi}{2}$.

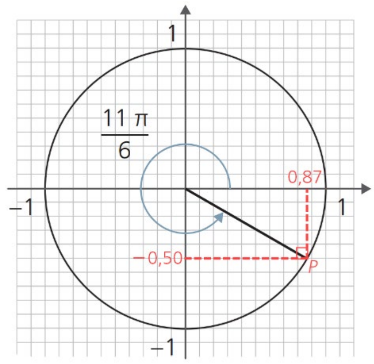
3.11

a $\cos 217°$ er førstekoordinaten til punktet (–0,8 , –0,6), altså er $\cos 217° = -0{,}8$.

b $\sin 217°$ er andrekoordinaten til punktet (–0,8 , –0,6), altså er $\sin 217° = -0{,}6$.

c $\tan 217° = \dfrac{\sin 217°}{\cos 217°} = \dfrac{-0{,}6}{-0{,}8} = 0{,}75$

3.12

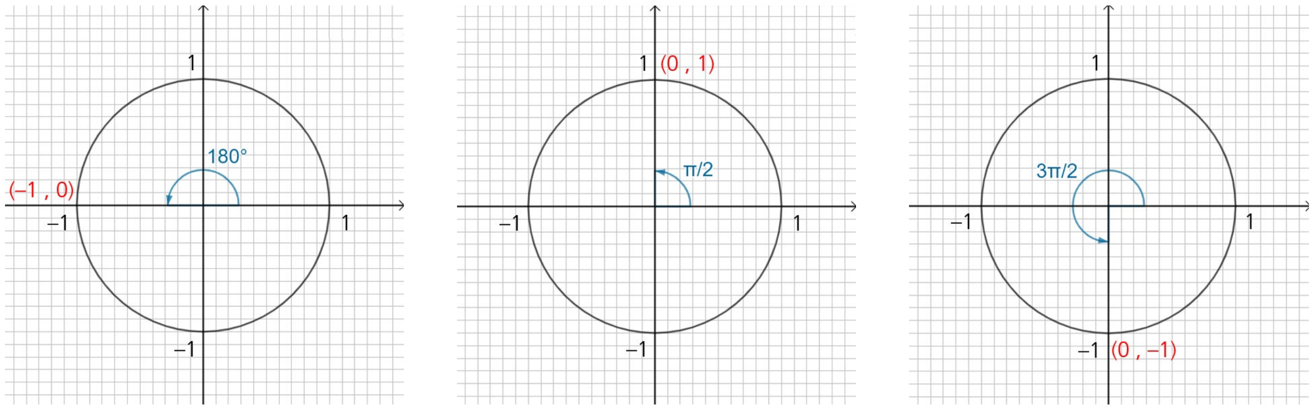


a $\cos\frac{11\pi}{6}$ er førstekoordinaten til punktet P, altså er $\cos\frac{11\pi}{6} = 0{,}87$.

b $\sin\frac{11\pi}{6}$ er andrekoordinaten til punktet P, altså er $\sin\frac{11\pi}{6} = -0{,}50$.

c $\tan\frac{11\pi}{6} = \frac{\sin\frac{11\pi}{6}}{\cos\frac{11\pi}{6}} = \frac{-0{,}50}{0{,}87} = -0{,}57$

3.13



a $\cos 180° = -1$

b $\sin 180° = 0$

c $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

d $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

3.14

En vinkel i første omløp er i intervallet $[0°, 360°\rangle$, som tilsvarer $[0, 2\pi\rangle$. $\sin v$ har en periode på $360°$, som tilsvarer 2π.

a $\sin 410° = \sin(410° - 360°) = \sin 50°$

b $\sin(-40°) = \sin(-40° + 360°) = \sin 320°$

c $\sin 4\pi = \sin(4\pi - 2\cdot 2\pi) = \sin 0$

d $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{3}$

3.15

En vinkel i første omløp er på intervallet $[0°, 360°\rangle$, som tilsvarer $[0, 2\pi\rangle$. $\cos v$ har en periode på $360°$, som tilsvarer 2π.

a $\cos 400° = \cos(400° - 360°) = \cos 40°$

b $\cos(-100°) = \cos(-100° + 360°) = \cos 260°$

c $\cos 3\pi = \cos(3\pi - 2\pi) = \cos\pi$

d $\cos(-\pi) = \cos(-\pi + 2\pi) = \cos\pi$

3.16

En vinkel i første omløp er i intervallet $[0°, 360°\rangle$, som tilsvarer $[0, 2\pi\rangle$. $\tan v$ har en periode på $180°$, som tilsvarer π.

a $\tan 390° = \tan(390° - 180°) = \tan 210°$ $\quad$ $\tan 390° = \tan(390° - 2\cdot 180°) = \tan 30°$

b $\tan(-610°) = \tan(-610° + 4\cdot 180°) = \tan 110°$ $\quad$ $\tan(-610°) = \tan(-610° + 5\cdot 180°) = \tan 290°$

c $\tan 5\pi = \tan(5\pi - 5\pi) = \tan 0$ $\quad$ $\tan 5\pi = \tan(5\pi - 4\pi) = \tan \pi$

d $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right) = \tan\frac{2\pi}{3}$ $\quad$ $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \tan\frac{5\pi}{3}$

3.17

a $\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0$

b $\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c $\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

d $\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

3.18

$v°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
v (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	udef.

3.19

I første omskrivning av de to uttrykkene bruker Torill at $\sin v$ og $\cos v$ har en periode på 2π. I tredje omskrivning bruker hun henholdsvis at $\sin(-v) = -\sin v$, og at $\cos(-v) = \cos v$, og dette er kjente verdier når $v = \frac{\pi}{6}$.

Torkil finner plasseringen av det andre vinkelbeinet til $v = \frac{11\pi}{6}$ ved å tegne inn vinkelen $\frac{\pi}{6}$ og speile den om førsteaksen. Da kan han bruke det andre vinkelbeinet til vinkelen $\frac{\pi}{6}$ til å utlede verdiene $\sin\frac{11\pi}{6}$ og $\cos\frac{11\pi}{6}$.

3.20

$v°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
v (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	udef.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	udef.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.21

a Perioden til $\sin v$ og formelen for supplementvinkler gir oss de to vinklene i første omløp.

$\sin 420° = \sin(420° - 360°) = \sin 60°$ $\quad$ $\sin 60° = \sin(180° - 60°) = \sin 120°$

Verdien vi kjenner fra første omløp, gir da at $\sin 420° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b Perioden til $\sin v$ og formelen for supplementvinkler gir oss de to vinklene i første omløp.

$\sin(-\pi) = \sin(-\pi + 2\pi) = \sin \pi$ $\quad$ $\sin \pi = \sin(\pi - \pi) = \sin 0$

Verdien vi kjenner fra første omløp, gir da at $\sin(-\pi) = 0$.

c Perioden til $\sin v$ gir oss en vinkel i første omløp.

$$\sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2}$$

Verdien vi kjenner fra første omløp gir da at $\sin\frac{5\pi}{2} = 1$. Bare én vinkel i hvert omløp har denne verdien.

3.22

a Perioden til $\sin v$ gir oss en vinkel i første omløp med samme sinusverdi, som vi kjenner fra før.

$$\sin 405° = \sin(405° - 360°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b Perioden til $\cos v$ gir oss en vinkel i første omløp med samme cosinusverdi, som vi kjenner fra før.

$$\cos 405° = \cos(405° - 360°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c Perioden til $\tan v$ gir oss en vinkel i første omløp med samme tangensverdi, som vi kjenner fra før.

$$\tan 405° = \tan(405° - 2\cdot 180°) = \tan 45° = 1$$

Merk at vi også kunne ha regnet ut svaret her basert på svarene i oppgave a og b.

d Formelen for sinus til motsatte vinkler lar oss se på sinus til en vinkel i første omløp.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e Formelen for cosinus til motsatte vinkler lar oss se på cosinus til en vinkel i første omløp.

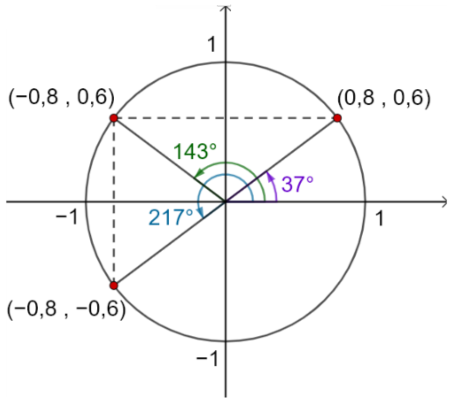
$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

f Formlene for motsatte vinkler, sammen med definisjonen av $\tan v$, lar oss se på tangens til en vinkel i første omløp.

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

3.23

a Koordinatene til det oppgitte punktet forteller at $\cos 217° = -0{,}8$, og at $\sin 217° = -0{,}6$. Videre er $217° - 180° = 37°$. Rotasjonen på $-180°$ (dvs. speiling om både *x*-aksen og *y*-aksen) tilsvarer at begge koordinatene til punktet $(-0{,}8\,,\,-0{,}6)$ bytter fortegn, og vi leser av at $\cos 37° = 0{,}8$.



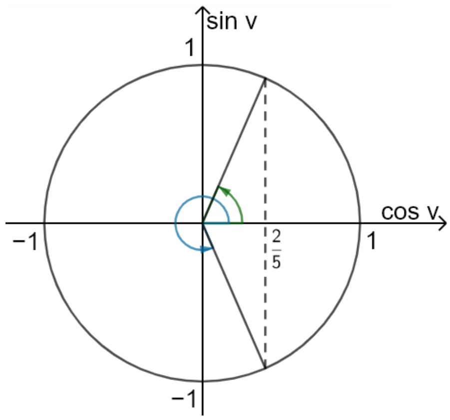
b Med begrunnelsen fra oppgave a får vi at $\sin 37° = 0{,}6$.

c Fordi 143° og 37° er supplementvinkler, tilsvarer de en speiling om *y*-aksen, så (bare) *x*-koordinaten til punktet $(0{,}8\,,\,0{,}6)$ bytter fortegn. Da får vi at $\cos 143° = -0{,}8$.

d Med begrunnelsen fra oppgave c får vi at $\sin 143° = 0{,}6$.

3.24

a $\cos v$ tar positive verdier i første og fjerde kvadrant, så når $\cos v = \frac{2}{5}$, er v i én av disse kvadrantene.



b $\sin(90° - v) = \cos v = \frac{2}{5}$

c $\cos(180° - v) = -\cos v = -\frac{2}{5}$

d $\cos(2\pi - v) = \cos(-v) = \cos v = \frac{2}{5}$

e $\cos(v + \pi) = \cos(\pi - (-v)) = -\cos(-v) = -\cos v = -\frac{2}{5}$

3.25

a $\sin 390° = \sin(390° - 360°) = \sin 30°$ $\quad$ $\sin 390° = \sin 30° = \sin(180° - 30°) = \sin 150°$

$\sin 30° = \sin 150° = \frac{1}{2}$

b $\cos(-90°) = \cos 90°$ $\quad$ $\cos(-90°) = \cos(-90° + 360°) = \cos 270°$

$\cos 90° = \cos 270° = 0$

c $\sin 735° = \sin(735° - 2\cdot 360°) = \sin 15°$

$\sin 735° = \sin 15° = \sin(180° - 15°) = \sin 165°$

$\cos 735° = \cos(735° - 2\cdot 360°) = \cos 15°$

$\cos 735° = \cos 15° = \cos(-15°) = \cos(-15° + 360°) = \cos 345°$

I første omløp er det to vinkler med samme sinusverdi som 735°, og to vinkler med samme cosinusverdi som 735°. Når vi sammenlikner vinklene vi fant, ser vi at den eneste vinkelen i første omløp som oppfyller begge betingelsene, er 15°.

3.26

a $\sin 80° = \cos(90° - 80°) = \cos 10°$

$\sin 80° = \cos 10° = \cos(-10°) = \cos(-10° + 360°) = \cos 350°$

b $\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45°$

$\cos 45° = \sin 45° = \sin(180° - 45°) = \sin 135°$

c $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \cos\frac{11\pi}{6}$

3.27

a Sinusverdien leses av på andreaksen, så der må verdiene være like.

$\sin v = \sin u$ $\qquad$ $\sin w = \sin x$

b Cosinusverdien leses av på førsteaksen, så der må verdiene være like.

$\cos v = \cos x$ $\qquad$ $\cos u = \cos w$

c Forskjellen mellom to vinkler med samme tangensverdi, tilsvarer å gjøre et heltall antall halve omdreininger.

$\tan v = \tan w$ $\qquad$ $\tan u = \tan x$

3.28

a $\tan(-v) = \dfrac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \dfrac{-\sin v}{\cos v} = -\dfrac{\sin v}{\cos v} = -\tan v$

b $\tan(90° - v) = \dfrac{\sin(90° - v)}{\cos(90° - v)} = \dfrac{\cos v}{\sin v} = \dfrac{\frac{\cos v}{\cos v}}{\frac{\sin v}{\cos v}} = \dfrac{1}{\tan v}$

3.29

a Største verdi: $4\sin v = 4\cdot 1 = 4$ $\qquad$ Minste verdi: $4\sin v = 4\cdot(-1) = -4$

b Største verdi: $-6\cos v = -6\cdot(-1) = 6$ $\qquad$ Minste verdi: $-6\cos v = -6\cdot 1 = -6$

c Største verdi: $2\sin v + 1 = 2\cdot 1 + 1 = 3$ $\qquad$ Minste verdi: $2\sin v + 1 = 2\cdot(-1) + 1 = -1$

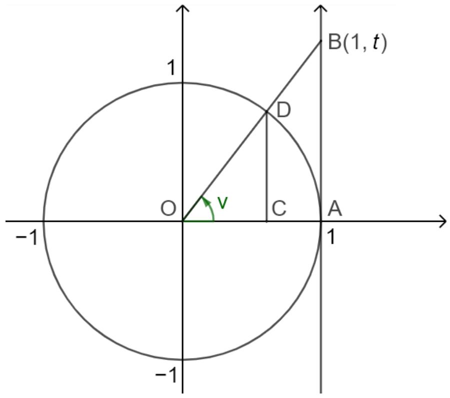
d Største verdi: $(\cos v)^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$ $\qquad$ Minste verdi: $(\cos v)^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$

Merk at fordi $\cos v$ er opphøyd i andre her, får leddet $(\cos v)^2$ den minste verdien når $\cos v = 0$, mens alle andre (inkludert negative) verdier av $\cos v$ gir en positiv $(\cos v)^2$.

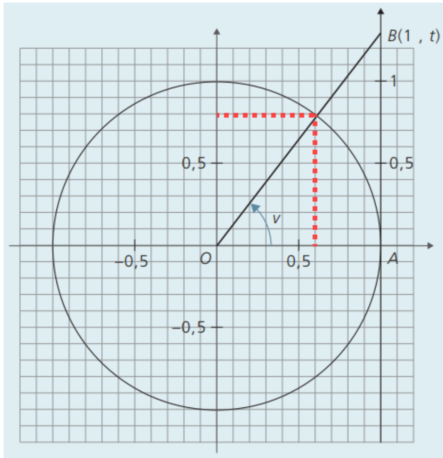
3.30

a La D være skjæringspunktet mellom OB og sirkelbuen, og la C være punktet der normalen fra D ned på OA treffer. Trekantene OCD og OAB er formlike, så

$$\frac{CD}{OC}=\frac{AB}{OA} \Leftrightarrow \frac{\sin v}{\cos v}=\frac{t}{1} \Leftrightarrow \tan v = t\,.$$



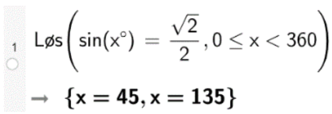
b $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}=\dfrac{0{,}8}{0{,}6}=1{,}3$



c Når v vokser mot $90°$, går verdien t der det andre vinkelbeinet møter linja $x=1$, mot uendelig. Siden $t=\tan v$ (fra oppgave a), eksisterer ikke grenseverdien $\lim\limits_{v\to 90°} \tan v$.

3.31

a $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad , \quad x\in[0°\,,360°\rangle$

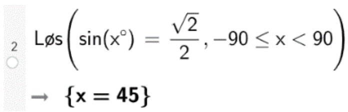


$x=45°+k\cdot 360° \quad\vee\quad x=135°+k\cdot 360°$

$k=0:\quad x=45°+0\cdot 360°=45° \quad\vee\quad x=135°+0\cdot 360°=135°$

$L=\{45°\,,135°\}$

b $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad , \quad x\in[-90°\,,90°\rangle$



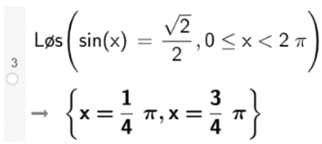
$x=45°+k\cdot 360° \quad\vee\quad x=135°+k\cdot 360°$

$k=0:\quad x=45°+0\cdot 360°=45° \quad\vee\quad x=135°+0\cdot 360°=135°$

Vi forkaster 135° som løsning, for den er ikke med i det oppgitte intervallet.

$L=\{45°\}$

c $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad , \quad x\in[0\,,2\pi\rangle$



$x=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi \quad\vee\quad x=\dfrac{3\pi}{4}+k\cdot 2\pi$

$k=0:\quad x=\dfrac{\pi}{4}+0\cdot 2\pi=\dfrac{\pi}{4} \quad\vee\quad x=\dfrac{3\pi}{4}+0\cdot 2\pi=\dfrac{3\pi}{4}$

$L=\left\{\dfrac{\pi}{4}\,,\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

d $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

4 Løs$\left(\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\rightarrow \left\{ \mathbf{x = 2\,k_1\,\pi + \frac{1}{4}\,\pi, x = 2\,k_1\,\pi + \frac{3}{4}\,\pi} \right\}$

3.32

a $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x \in [0°\,, 360°\rangle$

$x = 240° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 300° + k \cdot 360°$

$L = \{240°\,, 300°\}$

c $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x \in [0\,, 2\pi\rangle$

$x = \dfrac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \dfrac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$L = \left\{\dfrac{4\pi}{3}\,, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

d $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$x = \dfrac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \dfrac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$L = \left\{-\dfrac{2\pi}{3}\,, -\dfrac{\pi}{3}\right\}$

3.33

a $\sin 67° = 0{,}92 \iff \sin(180° - 67°) = 0{,}92 \iff \sin 113° = 0{,}92$

$L = \{67°\,, 113°\}$

b $x = 67° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 113° + k \cdot 360°$

3.34

a $\cos x = \dfrac{1}{2} \quad , \quad x \in [0°\,, 360°\rangle$

$x = 60° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 300° + k \cdot 360°$

$L = \{60°\,, 300°\}$

1 Løs$\left(\cos(x°) = \dfrac{1}{2}, 0 \le x < 360\right)$

$\rightarrow \{\mathbf{x = 60, x = 300}\}$

b $\cos x = \dfrac{1}{2} \quad , \quad x \in [-180°\,, 180°\rangle$

$x = 60° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 300° + k \cdot 360°$

$L = \{-60°\,, 60°\}$

2 Løs$\left(\cos(x°) = \dfrac{1}{2}, -180 \le x < 180\right)$

$\rightarrow \{\mathbf{x = -60, x = 60}\}$

c $\cos x = \dfrac{1}{2} \quad , \quad x \in [0\,, 2\pi\rangle$

$x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \dfrac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$L = \left\{\dfrac{\pi}{3}\,, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

3 Løs$\left(\cos(x) = \dfrac{1}{2}, 0 \le x < 2\,\pi\right)$

$\rightarrow \left\{\mathbf{x = \frac{1}{3}\,\pi, x = \frac{5}{3}\,\pi}\right\}$

d $\cos x = \dfrac{1}{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

Løs$\left(\cos(x) = \frac{1}{2}\right)$

$\rightarrow \left\{ \mathbf{x = 2\,k_1\,\pi - \frac{1}{3}\,\pi, x = 2\,k_1\,\pi + \frac{1}{3}\,\pi} \right\}$

Merk at fordi $-\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} - 2\pi$ (en forskjell på et heltall antall perioder), er mengden som i CAS er notert som $2k_1\pi - \dfrac{1}{3}\pi$, den samme som den vi noterte som $\dfrac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$.

3.35

$\cos x = 0{,}219 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$$x = 1{,}35 + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -1{,}35 + k \cdot 2\pi$$

3.36

a $2\cos x = -\sqrt{2} \quad , \quad x \in [0°\,, 360°\rangle$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 135° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 225° + k \cdot 360°$$

$L = \{135°\,, 225°\}$

b $2\cos x = -\sqrt{2} \quad , \quad x \in [0\,, 2\pi\rangle$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$L = \left\{ \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \right\}$

c $2\cos x = -\sqrt{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

3.37

a Løsningene til Vibe og Astrid er begge riktige, for de uttrykker samme mengde. Vi vet at vinklene i første omløp som gir $\cos x = 0$, er $x = \dfrac{\pi}{2}$ og $x = \dfrac{3\pi}{2}$, og at perioden $\cos x$ er 2π. Dette gir grunnlag for Vibes notasjon, slik vi er vant med. Vi antar nå at Astrid tar utgangspunkt i løsningen $x = \dfrac{\pi}{2}$. Fordi differansen mellom de to løsningene i første omløp er π, og perioden er 2π, vil hun finne en ny løsning hver gang hun legger til π ganget med et heltall. Det gir grunnlag for hennes notasjon for den samme løsningsmengden.

b $\sin x = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$$x = k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot \pi\,, \; k \in \mathbb{Z}$$

3.38

a $\tan x = 0{,}60 \quad , \quad x \in [0°\,,360°\rangle$

$x = 31° \quad \vee \quad x = 31° + 180°$

$L = \{31°\,,211°\}$

b $x = 31° + k \cdot 180°$

3.39

a $3\tan x = 3 \quad , \quad x \in [0°\,,360°\rangle$

$\tan x = 1$

$x = 45° + k \cdot 180°$

$L = \{45°\,,225°\}$

1 Løs(3 tan(x°) = 3, 0 ≤ x < 360)
→ $\{x = 45, x = 225\}$

b $3\tan x = 3 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi\rangle$

$\tan x = 1$

$x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

$L = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

2 Løs(3 tan(x) = 3, 0 ≤ x < 2 π)
→ $\left\{x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{5}{4}\pi\right\}$

c $3\tan x = 3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$\tan x = 1$

$x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

3 Løs(3 tan(x) = 3)
→ $\left\{x = k_1\,\pi + \frac{1}{4}\pi\right\}$

3.40

$\tan 2x = -\sqrt{3} \quad , \quad x \in [0\,,\pi\rangle$

$2x = \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot \pi$

$x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$L = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

3.41

a $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad , \quad x \in [0°, 360°\rangle$

$$\sin x + \frac{1}{2} = 0 \quad \vee \quad \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \sin x + \frac{1}{2} &= 0 \\ \sin x &= -\frac{1}{2} \\ x &= 210° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 330° + k \cdot 360° \\ x &= 210° \quad \vee \quad x = 330° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0 \\ \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x &= 60° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 120° + k \cdot 360° \\ x &= 60° \quad \vee \quad x = 120° \end{aligned}$$

$L = \{60°, 120°, 210°, 330°\}$

b $(\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

$$\cos x + 1 = 0 \quad \vee \quad \cos x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \cos x + 1 &= 0 \\ \cos x &= -1 \\ x &= \pi + k \cdot \pi \\ x &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x + 2 &= 0 \\ \cos x &= -2 \end{aligned}$$

Ingen løsning

$L = \{\pi\}$

c $\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\cdot\cos x=0 \quad , \quad x\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}-\sin x=0 \quad \vee \quad \cos x=0$$

$$\frac{1}{2}-\sin x=0$$
$$\sin x=\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi$$

$$\cos x=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$

d $(\tan x-\sqrt{3})(1-\sin x)=0 \quad , \quad x\in[0\,,\,3\pi\rangle$

$$\tan x-\sqrt{3}=0 \quad \vee \quad 1-\sin x=0$$

$$\tan x-\sqrt{3}=0$$
$$\tan x=\sqrt{3}$$
$$x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$$
$$x=\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x=\frac{4\pi}{3} \quad \vee \quad x=\frac{7\pi}{3}$$

$$1-\sin x=0$$
$$\sin x=1$$
$$x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{2}$$

$$L=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{5\pi}{2}\right\}$$

e $\tan x \cdot (\tan x - 1) = 0 \quad , \quad x \in [0\,,5]$

$$\tan x = 0 \quad \vee \quad \tan x - 1 = 0$$

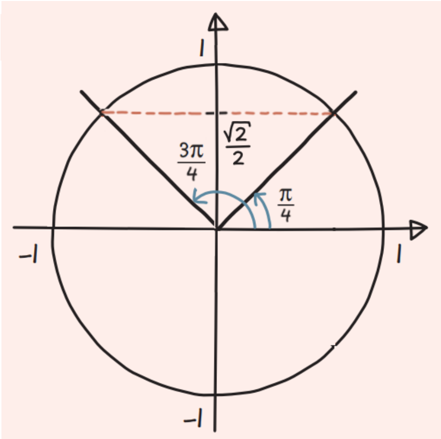
$$\tan x = 0$$
$$x = k \cdot \pi$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pi$$

$$\tan x - 1 = 0$$
$$\tan x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$
$$x = \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

$$L = \left\{0\,, \frac{\pi}{4}\,, \pi\,, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

3.42

a Den som løser oppgaven, har lest av den oppgitte sinusverdien på førsteaksen i stedet for på andreaksen.



b $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x \in [0\,, 2\pi\rangle$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$L = \left\{\frac{\pi}{4}\,, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

3.43

a $7\cos\frac{\pi x}{3} = 0 \quad , \quad x \in [0\,, 2\pi\rangle$

$$\cos\frac{\pi x}{3} = 0$$
$$\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$
$$\frac{x}{3} = \frac{1}{2} + k$$
$$x = \frac{3}{2} + 3k$$

$$L = \left\{\frac{3}{2}\,, \frac{9}{2}\right\}$$

b $4\sin\frac{x}{2}+4=0 \quad , \quad x\in[0\,,2\pi\rangle$

$$\sin\frac{x}{2}=-1$$

$$\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$

$$x=3\pi+k\cdot 4\pi$$

$$x=\frac{3}{2}+3k$$

$L=\varnothing$

c $\cos 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad x\in[0\,,2\pi\rangle$

$$\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x=\frac{3\pi}{4}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x=\frac{5\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{3\pi}{8}+k\cdot\pi \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{8}+k\cdot\pi$$

$L=\left\{\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{13\pi}{8}\right\}$

d $\sin(x-1)\cdot\tan 3x=0 \quad , \quad x\in[0\,,2\pi\rangle$

$$\sin(x-1)=0 \quad \vee \quad \tan 3x=0$$

$$\sin(x-1)=0$$

$$x-1=k\cdot\pi$$

$$x=1+k\cdot\pi$$

$$x=1 \quad \vee \quad x=\pi+1$$

$$\tan 3x=0$$

$$3x=k\cdot\pi$$

$$x=k\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x=\frac{2\pi}{3} \quad \vee \quad x=\pi \quad \vee \quad x=\frac{4\pi}{3} \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{3}$$

$L=\left\{0\,,1\,,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi\,,\pi+1\,,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

3.44

a $\cos x + 1 = 1{,}809 \quad , \quad x \in [0°\,,\,360°\rangle$

$\cos x = 0{,}809$

$x = 36° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 324° + k \cdot 360°$

$L = \{36°\,,\,324°\}$

b $\sin x = 0{,}809 \quad , \quad x \in [0°\,,\,360°\rangle$

$\cos(90° - x) = 0{,}809$

$90° - x = 36° + k \cdot 360° \quad \vee \quad 90° - x = 324° + k \cdot 360°$

$x = 54° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = -234° + k \cdot 360°$

$x = 54° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 126° + k \cdot 360°$

$L = \{54°\,,\,126°\}$

c $\cos 2x = -0{,}809 \quad , \quad x \in [0°\,,\,360°\rangle$

$-\cos 2x = 0{,}809$

$\cos(180° - 2x) = 0{,}809$

$180° - 2x = 36° + k \cdot 360° \quad \vee \quad 180° - 2x = 324° + k \cdot 360°$

$-2x = -144° + k \cdot 360° \quad \vee \quad -2x = 144° + k \cdot 360°$

$x = 72° + k \cdot 180° \quad \vee \quad x = -72° + k \cdot 180°$

$x = 72° + k \cdot 180° \quad \vee \quad x = 108° + k \cdot 180°$

$L = \{72°\,,\,108°\,,\,252°\,,\,288°\}$

3.45

Problemet med å dividere en likning på et uttrykk som kan være lik 0, er at vi kan miste løsninger. Derfor må vi, etter å ha løst likningen, kontrollere hva som skjer med likningen slik den var oppgitt, hvis vi lar dette uttrykket være lik 0. Hvis det fins verdier av x som både gir dette uttrykket en verdi på 0, og som samtidig oppfyller likningen, har vi mistet den eller de løsningene.

a $\sin x - \cos x = 0 \quad , \quad x \in [0\,,\,6]$

$\sin x - \cos x = 0 \quad \Big| \quad : \cos x \quad , \quad \cos x \neq 0$

$\tan x - 1 = 0$

$\tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

$L = \left\{\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{4}\right\}$

Så kontrollerer vi: For $x \in [0\,,\,6]$ er $\cos x = 0$ når $x = \frac{\pi}{2}$ eller $x = \frac{3\pi}{2}$, men ingen av disse verdiene oppfyller likningen $\sin x - \cos x = 0$. Altså har vi ikke mistet noen løsninger.

b $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \quad , \quad x \in [0\,,6]$

$$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \quad \Big| \quad :\cos x \quad , \quad \cos x \neq 0$$

$$\sqrt{3}\tan x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi$$

$$L = \left\{\frac{\pi}{6}\,,\frac{7\pi}{6}\right\}$$

Så kontrollerer vi: For $x \in [0\,,6]$ er $\cos x = 0$ når $x = \frac{\pi}{2}$ eller $x = \frac{3\pi}{2}$, men ingen av disse verdiene oppfyller likningen $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$. Altså har vi ikke mistet noen løsninger.

c $2\sin x = \tan x \quad , \quad x \in [0\,,6]$

$$\sin x = \frac{\sin x}{2\cos x}$$

$$\sin x - \frac{\sin x}{2\cos x} = 0$$

$$\frac{2\cos x\cdot\sin x - \sin x}{2\cos x} = 0$$

$$\frac{\sin x(2\cos x - 1)}{2\cos x} = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad 2\cos x = 1 \quad , \quad 2\cos x \neq 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = k\cdot\pi$$

$$2\cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

$$L = \left\{0\,,\frac{\pi}{3}\,,\pi\,,\frac{5\pi}{3}\right\}$$

Her har vi ikke delt på noe uttrykk som kan være lik 0, men hvis vi deler på $\sin x$ etter linje to i utregningen, mister vi løsningene $x = k\cdot\pi$.

3.46

1 $3x\cdot\cos x - ax = 0 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi\rangle\,,\, a \in \mathbb{R}$

$$x\cdot(3\cos x - a) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 3\cos x - a = 0$$

$x = 0$ er en løsning på likningen for alle verdier av a. Verdier av a som fører til at $3\cos x - a = 0$ samtidig, vil derfor ikke gi flere løsninger på likningen.

$$3\cos 0 - a = 0$$
$$3 \cdot 1 - a = 0$$
$$a = 3$$

I tillegg, fordi verdimengden til $\cos x$ er $[-1, 1]$, vil $3\cos x - a = 0$ ikke ha noen løsning når $a < -3$ eller $a > 3$.

Altså: Når $a < -3$ eller $a \geq 3$, har likningen én løsning, $x = 0$.

2 Hva så med løsningene der $x \neq 0$? Da må vi studere likningen

$$\cos x = \frac{a}{3}$$

Verdimengden til $\cos x$ er $[-1, 1]$, der hvert av endepunktene for dette intervallet opptrer for én *x*-verdi i første omløp, mens de andre verdiene i intervallet opptrer for to *x*-verdier. $\cos x = 1$ inntreffer når $x = 0$, som vi allerede har diskutert. $\cos x = -1$ inntreffer når $x = \pi$, og vi får

$$\cos \pi = \frac{a}{3}$$
$$-1 = \frac{a}{3}$$
$$a = -3$$

Altså: Når $a = -3$, har likningen to løsninger, $x = 0$ og $x = \pi$.

3 Til slutt, hvis $-1 < \cos x < 1$, vil det finnes to *x*-verdier i første omløp som er løsninger på likningen, i tillegg til $x = 0$.

$$-1 < \cos x < 1$$
$$-1 < \frac{a}{3} < 1$$
$$-3 < a < 3$$

Dette inntreffer når $-3 < a < 3$.

For å oppsummere: Likningen har én løsning når $a < -3$ eller $a \geq 3$, to løsninger når $a = -3$, og tre løsninger når $-3 < a < 3$.

3.47

a $2 - 2\cos^2 v = 2(1 - \cos^2 v) = 2\sin^2 v$

b $\dfrac{\cos^2 v + \sin^2 v - \cos v}{1 - \cos v} = \dfrac{1 - \cos v}{1 - \cos v} = 1$

c $\dfrac{\sin^2 v + 2\cos^2 v}{2 + \cos^2 v} = \dfrac{\sin^2 v + \cos^2 v + \cos^2 v}{2 + \cos^2 v} = \dfrac{1 + \cos^2 v}{2 + \cos^2 v}$

3.48

Rumi:
$$\begin{aligned}\cos^2 v - 3\sin^2 v + 2 &= 1 - \sin^2 v - 3\sin^2 v + 2 \\ &= 1 - 4\sin^2 v + 2 \\ &= 3 - 4\sin^2 v\end{aligned}$$

Tom:
$$\begin{aligned}\cos^2 v - 3\sin^2 v + 2 &= \cos^2 v - 3(1 - \cos^2 v) + 2 \\ &= \cos^2 v - 3 + 3\cos^2 v + 2 \\ &= 4\cos^2 v - 1\end{aligned}$$

3.49

a $\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi\rangle$

$$\cos x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

$$\cos x = 3 \quad \vee \quad \cos x = -1$$

$\cos x = 3$ har ingen løsning siden $\cos x \in [-1\,,1]$.

$\cos x = -1$

$x = \pi + k\cdot 2\pi$

$x = \pi$

$L = \{\pi\}$

b $-2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi\rangle$

$-2(1-\cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$$

$$\cos x = 1 \quad \vee \quad \cos x = -\frac{3}{2}$$

$\cos x = 1$

$x = k\cdot 2\pi$

$x = 0$

$\cos x = -\frac{3}{2}$ har ingen løsning siden $\cos x \in [-1\,,1]$.

$L = \{0\}$

c $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi\rangle$

$2(1-\sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$

$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = 1$$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi$

$x = \frac{7\pi}{6} \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{6}$

$\sin x = 1$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

d $\quad 5\sin x - \cos^2 x + 7 = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

$$5\sin x - (1 - \sin^2 x) + 7 = 0$$

$$\sin^2 x + 5\sin x + 6 = 0$$

$$\sin x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$\sin x = -2 \quad \vee \quad \sin x = -3$$

$\sin x = -2$ og $\sin x = -3$ har ingen løsning siden $\sin x \in [-1, 1]$.

$L = \varnothing$

3.50

a

$$\begin{aligned} 2\cos^2 v + \sin v - 2 &= 2(1 - \sin^2 v) + \sin v - 2 \\ &= 2 - 2\sin^2 v + \sin v - 2 \\ &= \sin v - 2\sin^2 v \\ &= \sin v \cdot (1 - 2\sin v) \end{aligned}$$

b $\quad 2\cos^2 x + \sin x = 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$$2\cos^2 x + \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x \cdot (1 - 2\sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad 1 - 2\sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = k \cdot \pi$$

$$1 - 2\sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

Løsning:

$$x = k \cdot \pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

3.51

a $\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0 \quad , \quad x \in [0° , 360°\rangle$

Vi kan dividere med $\cos^2 x$ fordi $\cos x = 0$ ikke gir løsning på likningen.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$$

$$\tan x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$\tan x = 3 \quad \vee \quad \tan x = 1$$

$$\tan x = 3$$

$$x = 71{,}6° + k \cdot 180°$$

$$x = 71{,}6° \quad \vee \quad x = 251{,}6°$$

$$\tan x = 1$$

$$x = 45{,}0° + k \cdot 180°$$

$$x = 45{,}0° \quad \vee \quad x = 225{,}0°$$

$L = \{45{,}0° , 71{,}6° , 225{,}0° , 251{,}6°\}$

b $2\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 1 \quad , \quad x \in [0° , 360°\rangle$

Vi bruker enhetsformelen til å skrive om likningen til samme form som i oppgave a.

$$2\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 1$$

$$2\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

$L = \{45{,}0° , 71{,}6° , 225{,}0° , 251{,}6°\}$

3.52

$3\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 2 \quad , \quad x \in [0° , 360°\rangle$

Vi kan dividere med $\cos^2 x$ fordi $\cos x = 0$ ikke gir løsning på likningen.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{6\cos^2 x}{\cos^2 x} = 2$$

$$\tan^2 x - 5\tan x + 4 = 0$$

$$\tan x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$\tan x = 4 \quad \vee \quad \tan x = 1$$

$$\tan x = 4$$

$$x = 76{,}0° + k \cdot 180°$$

$$x = 76{,}0° \quad \vee \quad x = 256{,}0°$$

$$\tan x = 1$$
$$x = 45{,}0^\circ + k \cdot 180^\circ$$
$$x = 45{,}0^\circ \quad \vee \quad x = 225{,}0^\circ$$

$L = \{45{,}0^\circ\ ,\ 76{,}0^\circ\ ,\ 225{,}0^\circ\ ,\ 256{,}0^\circ\}$

3.53

a
$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ)\\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}\\ &= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}\\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}\\ &= -2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

3.54

a
$$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos(x+45^\circ) &= \sqrt{2}(\cos x \cdot \cos 45^\circ - \sin x \cdot \sin 45^\circ)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \cos x - \sin x\end{aligned}$$

Når vi sammenlikner dette uttrykket med $a\sin x + b\cos x$, ser vi at $a = -1$ og $b = 1$.

b
$$\begin{aligned}-2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= -2\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= -2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= -\sin x + \sqrt{3}\cos x\end{aligned}$$

Når vi sammenlikner dette uttrykket med $a\sin x + b\cos x$, ser vi at $a = -1$ og $b = \sqrt{3}$.

3.55

$$\begin{aligned}\sin 2v &= \sin(v+v)\\ &= \sin v\cdot\cos v+\cos v\cdot\sin v\\ &= 2\sin v\cdot\cos v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2v &= \cos(v+v)\\ &= \cos v\cdot\cos v-\sin v\cdot\sin v\\ &= \cos^2 v-\sin^2 v\\ &= 1-\sin^2 v-\sin^2 v\\ &= 1-2\sin^2 v\\ &= 1-2(1-\cos^2 v)\\ &= 2\cos^2 v-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2v &= \tan(v+v)\\ &= \frac{\tan v+\tan v}{1-\tan v\cdot\tan v}\\ &= \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}\end{aligned}$$

3.56

a

$$\begin{aligned}\sin^2 v &= 1-\cos^2 v\\ &= 1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\\ &= \frac{15}{16}\\ \sin v &= \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

Ettersom v er i fjerde kvadrant, er $\sin v<0$. Altså får vi at $\sin v=-\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$\begin{aligned}\tan v &= \frac{\sin v}{\cos v}\\ &= \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}}\\ &= -\sqrt{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2v &= 2\sin v\cdot\cos v\\ &= 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\\ &= -\frac{\sqrt{15}}{8}\end{aligned}$$

$$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v$$
$$= 1 - 2 \cdot \frac{15}{16}$$
$$= -\frac{7}{8}$$

$$\tan 2v = \frac{\sin 2v}{\cos 2v}$$
$$= \frac{-\frac{\sqrt{15}}{8}}{-\frac{7}{8}}$$
$$= \frac{\sqrt{15}}{7}$$

b $$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$$
$$= 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$
$$= \frac{16}{25}$$
$$\cos v = \pm\frac{4}{5}$$

Ettersom v er i fjerde kvadrant, er $\cos v > 0$. Altså får vi at $\cos v = \frac{4}{5}$.

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$
$$= \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$$
$$= -\frac{3}{4}$$

$$\sin 2v = 2\sin v \cdot \cos v$$
$$= 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{5}$$
$$= -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v$$
$$= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$
$$= \frac{7}{25}$$

$$\tan 2v = \frac{\sin 2v}{\cos 2v}$$
$$= \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}$$
$$= -\frac{24}{7}$$

3.57

a $\sin 2v - \cos v = 2\sin v \cdot \cos v - \cos v$

$$= \cos v \cdot (2\sin v - 1)$$

b $\sin 2x - \cos x = 0 \quad , \quad x \in [0\,,\,2\pi\rangle$

$$\cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad 2\sin x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

3.58

a $\cos 2v + \sin v = 1 - 2\sin^2 v + \sin v$

$$= -2\sin^2 v + \sin v + 1$$

b $\cos 2x + \sin x = 0 \quad , \quad x \in [0\,,\,2\pi\rangle$

$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = 1$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot \pi \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{6}$$

$$\sin x = 1$$

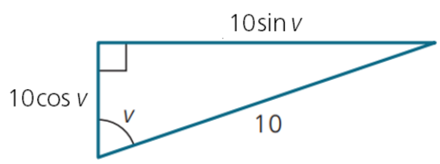
$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

3.59

a $F = \frac{1}{2} \cdot 10\sin v \cdot 10\cos v = 50\sin v \cdot \cos v = 50 \cdot \frac{\sin 2v}{2} = 25\sin 2v$



b

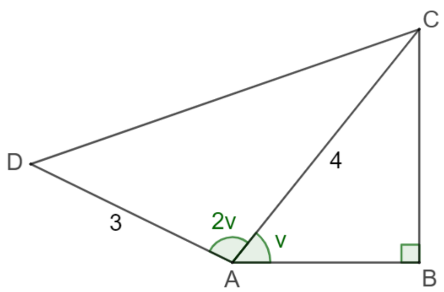
1 NLøs(25 · sin(2v°) = 14)
→ {v = 17.03, v = 72.97}

$v = 17{,}0° \quad \vee \quad v = 73{,}0°$

c Arealet av trekanten er størst mulig når $25\sin 2v$ har sin største verdi. Det skjer når $\sin 2v = 1$, som gir et areal på 25. $\sin 2v = 1$ når $2v = 90°$, som gir $v = 45°$.

3.60

a



b Arealet av $\square ABCD$ er lik summen av arealet av $\triangle ACD$ og $\triangle ABC$, som vi finner med henholdsvis arealsetningen og arealformelen for en trekant.

$$F = A_{\triangle ACD} + A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin 2v + \frac{1}{2}\cdot 4\sin v\cdot 4\cos v = 6\sin 2v + 8\sin v\cdot \cos v$$
$$= 6\sin 2v + 4\sin 2v = 10\sin 2v$$

c
$$10\sin 2v = 5$$
$$\sin 2v = \frac{1}{2}$$
$$2v = 30° + k\cdot 360° \quad \vee \quad 2v = 150° + k\cdot 360°$$
$$v = 15° + k\cdot 180° \quad \vee \quad v = 75° + k\cdot 180°$$

Ettersom forutsetningen var at $0° < v < 60°$, må $v = 15°$.

d Arealet av firkanten er størst mulig når $10\sin 2v$ har sin største verdi. Det skjer når $\sin 2v = 1$, som gir et areal på 10. $\sin 2v = 1$ når $2v = 90°$, som gir $v = 45°$.

3.61

a $$\frac{4\cos^2 v + 4\sin^2 v}{2} = \frac{4(\cos^2 v + \sin^2 v)}{2} = \frac{4\cdot 1}{2} = 2$$

b $$\frac{1+\cos^2 v - \sin^2 v}{\cos v} = \frac{1+\cos^2 v - (1-\cos^2 v)}{\cos v} = \frac{2\cos^2 v}{\cos v} = 2\cos v$$

c $$\cos 2v + 1 + 2\sin^2 v = 1 - 2\sin^2 v + 1 + 2\sin^2 v = 2$$

3.62

a $\cos^2 x = 1 \quad , \quad x \in [0°, 360°\rangle$

$$\cos x = \pm 1$$

$$\cos x = 1$$
$$x = k\cdot 360°$$
$$x = 0°$$

$$\cos x = -1$$
$$x = 180° + k\cdot 360°$$
$$x = 180°$$

$$L = \{0°, 180°\}$$

b $2\sin^2 x + \cos x - 2 = 0 \quad , \quad x \in [0° , 360°\rangle$

$$2(1-\cos^2 x) + \cos x - 2 = 0$$
$$-2\cos^2 x + \cos x = 0$$
$$\cos x \cdot (1-2\cos x) = 0$$

$$\cos x = 0$$
$$x = 90° + k \cdot 180°$$
$$x = 90° \quad \vee \quad x = 270°$$

$$1-2\cos x = 0$$
$$\cos x = \frac{1}{2}$$
$$x = 60° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 300° + k \cdot 360°$$
$$x = 60° \quad \vee \quad x = 300°$$

$L = \{60° , 90° , 120° , 300°\}$

c $\cos(x - 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x \in [0° , 360°\rangle$

$$x - 30° = 45° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x - 30° = 315° + k \cdot 360°$$
$$x = 75° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 345° + k \cdot 360°$$
$$x = 75° \quad \vee \quad x = 345°$$

$L = \{75° , 345°\}$

d $\frac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x = 0 \quad , \quad x \in [0° , 360°\rangle$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$$
$$\sin x \cdot (\cos x + \sin x) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$
$$x = k \cdot 180°$$
$$x = 0° \quad \vee \quad x = 180°$$

$$\cos x + \sin x = 0$$
$$\sin x = -\cos x$$
$$x = 135° + k \cdot 180°$$
$$x = 135° \quad \vee \quad x = 315°$$

$L = \{0° , 135° , 180° , 315°\}$

3.63

a $\sin(90° - v) = \sin 90° \cdot \cos v - \cos 90° \cdot \sin v = 1 \cdot \cos v - 0 \cdot \sin v = \cos v$

b $\cos(\pi - v) = \cos \pi \cdot \cos v + \sin \pi \cdot \sin v = -1 \cdot \cos v + 0 \cdot \sin v = -\cos v$

3.64

a $2\cos\left(v - \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos v \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin v \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos v \cdot \frac{1}{2} + \sin v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos v + \sqrt{3}\sin v$

b $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2} \quad , \quad x \in [0\,,\,2\pi\rangle$

$$2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{25\pi}{12} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{12} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12}$$

$$L = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$$

3.65

a $\sin^2 v = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$$\sin^2 v = \frac{7}{16}$$

$$\sin v = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Siden v er i fjerde kvadrant, forkaster vi den positive verdien vi fant, så $\sin v = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

b $\tan v = 2$

$$\frac{\sin v}{\cos v} = 2$$

$$\sin v = 2\cos v$$

$$\sin v = \pm 2\sqrt{1 - \sin^2 v}$$

$$\sin^2 v = 4(1 - \sin^2 v)$$

$$\sin^2 v = \frac{4}{5}$$

$$\sin v = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Siden v er i tredje kvadrant, forkaster vi den positive verdien vi fant, så $\sin v = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.66

a $\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4}$, $x \in [0\,,\,2\pi\rangle$

$$\sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) - \frac{1}{4} = 0$$

$$-4\left(\sin^2 x - \sin^4 x - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

b $4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$

$$\sin^2 x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

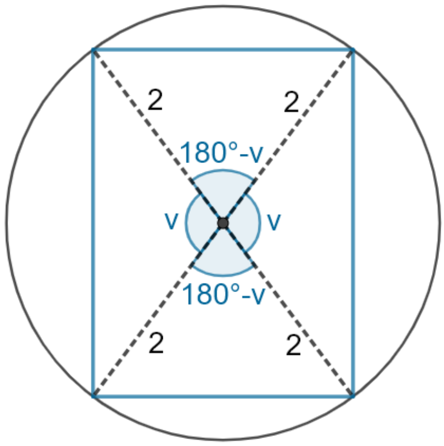
$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4}$$

$$L = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

3.67

a Når vi trekker hvert av de to stiplede linjestykkene hele veien til motsatt hjørne i rektanglet, blir det tydelig at dette er diagonaler, og at rektanglet består av to og to kongruente trekanter, der sentralvinkelen er henholdsvis v og $180° - v$. Arealet av rektanglet er lik summen av arealet av de fire trekantene, som vi kan finne med arealsetningen.



$$\begin{aligned} A &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin v + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin(180° - v) \\ &= 4\sin v + 4\sin(180° - v) \\ &= 4\sin v + 4\sin v \\ &= 8\sin v \end{aligned}$$

b Vi løser likningen i CAS og finner at $v = 22{,}0°$ eller $v = 158{,}0°$.

1 $\text{Løs}(3 = 8\sin(v°), v, 0 < v < 180)$

$\approx \{v = 22.02, v = 157.98\}$

c Verdien av $8\sin v$ er størst når $\sin v = 1$, som gir et areal på 8. Det skjer når $v = 90°$. Men da er også $180° - v = 180° - 90° = 90°$, så da er området formet som et kvadrat.

3.68

a Når $\sin x = 1$, har funksjonen f sin største verdi, $f(x)_{\text{maks}} = 5\cdot 1 + 2 = 7$. Da er $x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$. $k = 0$ gir $x = \frac{\pi}{2}$, og $k = 1$ gir $x = \frac{5\pi}{2}$, som begge ligger i $D_f = \langle 0\,,\,4\pi\rangle$. Toppunktene på grafen til f er derfor $\left(\frac{\pi}{2}\,,7\right)$ og $\left(\frac{5\pi}{2}\,,7\right)$.

Når $\sin x = -1$, har funksjonen f sin minste verdi, $f(x)_{\text{min}} = 5\cdot(-1) + 2 = -3$. Da er $x = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi$. $k = 0$ gir $x = \frac{3\pi}{2}$, og $k = 1$ gir $x = \frac{7\pi}{2}$, som begge ligger i D_f. Bunnpunktene på grafen til f er derfor $\left(\frac{3\pi}{2}\,,-3\right)$ og $\left(\frac{7\pi}{2}\,,-3\right)$.

b $V_f = [-3\,,7]$

3.69

a Når $x = \frac{\pi}{2}$ har $\sin x$ sin største verdi, 1. Men på grunn av den negative koeffisienten -4 vil dette være et minimalpunkt for f. Tilsvarende har $\sin x$ sin minste verdi, -1, når $x = \frac{3\pi}{2}$, men på grunn av den negative koeffisienten blir dette et maksimalpunkt for f.

b $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 - 4\sin\frac{3\pi}{2} = 3 - 4\cdot(-1) = 7$, så toppunktet på grafen til f blir $\left(\frac{3\pi}{2}\,,7\right)$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - 4\sin\frac{\pi}{2} = 3 - 4\cdot 1 = -1$, så bunnpunktet på grafen til f blir $\left(\frac{\pi}{2}\,,-1\right)$.

3.70

a Når $x = k \cdot 2\pi$. har $\cos x$, og dermed også f, sin største verdi. Når $x = \pi + k \cdot 2\pi$, har $\cos x$, og dermed også f, sin minste verdi. $x = k \cdot 2\pi$ er altså maksimalpunkter, mens $x = \pi + k \cdot 2\pi$ er minimalpunkter.

b For alle $k \in \mathbb{Z}$ er $f(k \cdot 2\pi) = 2\cos(k \cdot 2\pi) + 4 = 2\cos 0 + 4 = 2 \cdot 1 + 4 = 6$, så toppunktene på grafen til f blir $(k \cdot 2\pi\,, 6)$.

For alle $k \in \mathbb{Z}$ er $f(\pi + k \cdot 2\pi) = 2\cos(\pi + k \cdot 2\pi) + 4 = 2\cos \pi + 4 = 2 \cdot (-1) + 4 = 2$, så bunnpunktene på grafen til f blir $(\pi + k \cdot 2\pi\,, 2)$.

c $V_f = [2\,, 6]$

d Det er tydelig at f ikke kan ha nullpunkter, fordi 0 ikke er i V_f.

3.71

a Når $\cos x = 1$, har funksjonen f sin største verdi, $f(x)_{\text{maks}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Da er $x = k \cdot 2\pi$.

$k = 1$ gir $x = 2\pi$, som er det eneste maksimalpunktet i D_f. Toppunktet på grafen til f er derfor $\left(2\pi\,, \frac{1}{2}\right)$.

Når $\cos x = -1$, har funksjonen f sin minste verdi, $f(x)_{\min} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$. Da er $x = \pi + k \cdot 2\pi$.

$k = 0$ gir $x = \pi$, $k = 1$ gir $x = 3\pi$, som er det eneste to minimalpunktene i D_f. Bunnpunktene på grafen til f er derfor $\left(\pi\,, -\frac{3}{2}\right)$ og $\left(3\pi\,, -\frac{3}{2}\right)$.

b $V_f = \left[-\frac{3}{2}\,, \frac{1}{2}\right]$

c
$$\cos x - \frac{1}{2} = 0$$
$$\cos x = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

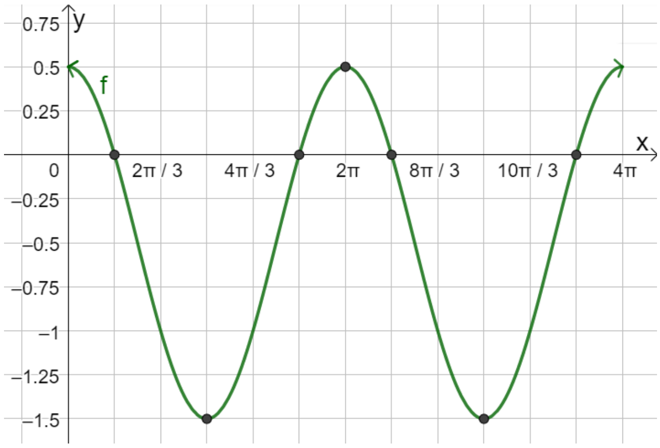
$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{3}$$

Nullpunktene er $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ og $\frac{11\pi}{3}$.

d
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\frac{5\pi}{2} - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

e Vi tegner inn punktene vi allerede har funnet i et koordinatsystem. I tillegg kan vi tegne inn $\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$ og $\left(4\pi\,,\frac{1}{2}\right)$ som er endepunkter på grafen til f, men som ikke er med på D_f. Når vi i tillegg vet hvordan grafen til $\cos x$ ser ut, har vi et godt grunnlag for å skissere grafen til f.



3.72

Maksimalverdien til $\cos x$ er 1, så maksimalverdien til $7\cos x$ er 7. Hvis maksimalverdien til $f(x) = 7\cos x + m$ skal bli 9, må derfor $m = 2$. Minimalverdien til $7\cos x$ er –7, så $f(x)_{\text{min}} = -7 + 2 = -5$.

3.73

a Vi finner maksimalpunkter ved å sette $\cos(x-2) = 1$.

Det gir $x - 2 = k \cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; x = 2 + k \cdot 2\pi$.

Bare $k = 0$ gir $x \in D_f$. Maksimalpunktet til f er altså 2.

Vi finner minimalpunkter ved å sette $\cos(x-2) = -1$.

Det gir $x - 2 = \pi + k \cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; x = 2 + \pi + k \cdot 2\pi$.

Bare $k = 0$ gir $x \in D_f$. Minimalpunktet til f er altså $2 + \pi$.

b $V_f = [-5\,,5]$

3.74

a Vi finner maksimalpunkter ved å sette $\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Det gir $\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = k \cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2} + k \cdot 4$.

$k = 0$ gir $x = \frac{1}{2}$, og $k = 1$ gir $x = \frac{9}{2}$, og disse er de eneste maksimalpunktene i D_f.

Vi finner minimalpunkter ved å sette $\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Det gir $\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = \pi + k \cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{2}x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5}{2} + k \cdot 4$.

$k = 0$ gir $x = \frac{5}{2}$, og dette er det eneste minimalpunktet i D_f.

b $V_f = [-2\,,2]$

3.75

a Vi finner maksimalpunkter ved å sette $\sin(x-1)=1$.

Det gir $x-1=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; x=\frac{\pi}{2}+1+k\cdot 2\pi$.

$k=0$ gir $x=\frac{\pi}{2}+1$, og dette er det eneste maksimalpunktet i D_f.

Vi finner minimalpunkter ved å sette $\sin(x-1)=-1$.

Det gir $x-1=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; x=\frac{3\pi}{2}+1+k\cdot 2\pi$.

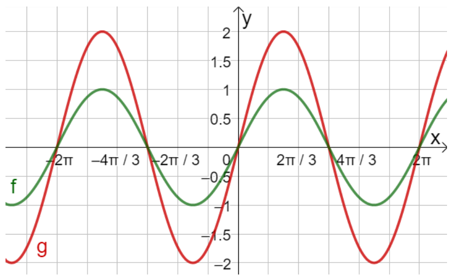
$k=0$ gir $x=\frac{3\pi}{2}+1$, og dette er det eneste minimalpunktet i D_f.

b $V_f=[-1\,,\,3]$

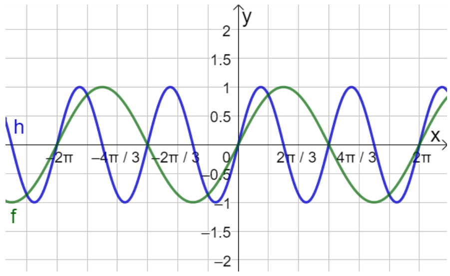
3.76

Merk: Terminologien som det vil være naturlig å bruke i en slik oppgave, vil vi komme tilbake til når vi skal snakke om harmoniske svingninger. I denne oppgaven vil vi bruke begreper vi er kjent med fra før, i tillegg til begreper fra dagligtale, for å beskrive det vi observerer.

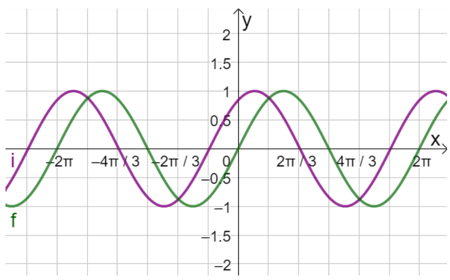
a Grafene til f og g svinger like fort, og har de samme nullpunktene og ekstremalpunktene, men utslaget på grafen til g er dobbelt så stort som på grafen til f.



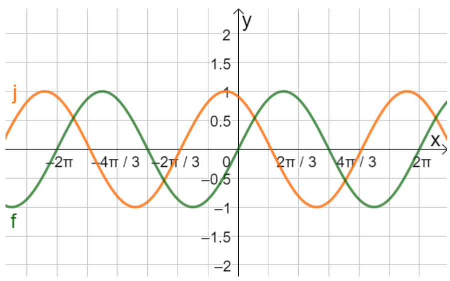
b Grafen til h svinger dobbelt så fort som grafen til f, men utslaget er det samme. Alle nullpunkter på grafen til f opptrer også på grafen til h, men midt mellom hvert av disse, har grafen til h ekstra nullpunkter. Ekstremalpunktene er ikke sammenfallende.



c Grafene til f og i er helt like, bortsett fra at grafen til i er forskjøvet én enhet mot venstre, sammenliknet med grafen til f.

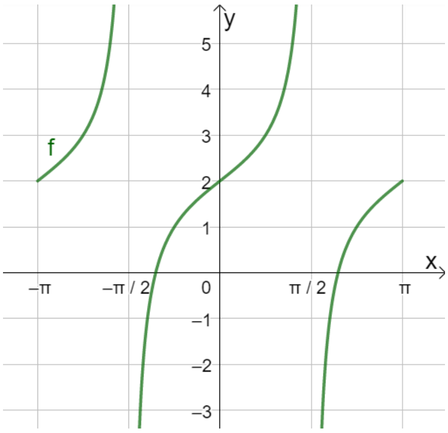


d Grafene til f og j er helt like, bortsett fra at grafen til j er forskjøvet to enheter mot venstre, sammenliknet med grafen til f.



3.77

a Vi skriver følgende i inntastingsfeltet i GeoGebra: f(x):=Dersom(-pi<x<pi, tan(x)+2)



b

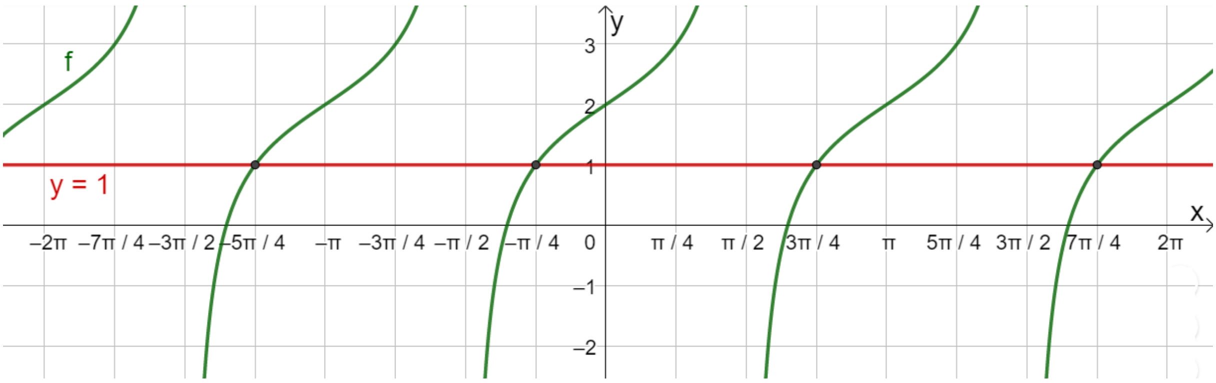
1 Løs(tan(x) + 2 = 0)

≈ $\{x = 3.142\,k_1 - 1.107\}$

Nullpunktene til f er

$x = k \cdot \pi - 1{,}107$

c Som det går fram av figuren fra GeoGebra, er $f(x) = 1$ når $x = \dfrac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$.



3.78

a Linja $y = 1$ ligger like langt fra toppunktene som fra bunnpunktene på grafen. Dette er likevektslinja, og $d = 1$.

Avstanden fra likevektslinja til et vilkårlig toppunkt eller bunnpunkt er 2, så amplituden $A = 2$.

Vi leser av grafen at avstanden mellom to nabotoppunkter (eller nabobunnpunkter) er 2, så perioden $p = 2$.

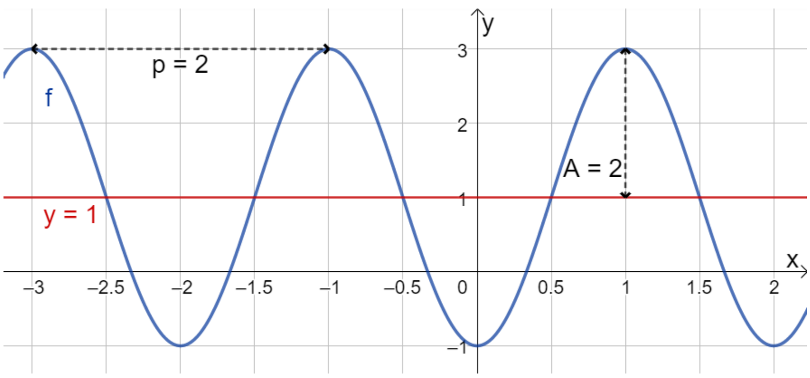
Da blir $c = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Vi leser av grafen at forskyvningen langs likevektslinja er $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Da blir $\varphi = -\dfrac{1}{2} \cdot \pi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Funksjonsuttrykket er derfor

$f(x) = 2\sin\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$.



b Linja $y = 1$ ligger like langt fra toppunktene som fra bunnpunktene på grafen. Dette er altså likevektslinja, og $d = 1$.

Avstanden fra likevektslinja til et vilkårlig toppunkt eller bunnpunkt er 3, så amplituden $A = 3$.

Vi leser av grafen at avstanden mellom to nabotoppunkter (eller nabobunnpunkter) er 4, så perioden $p = 4$.

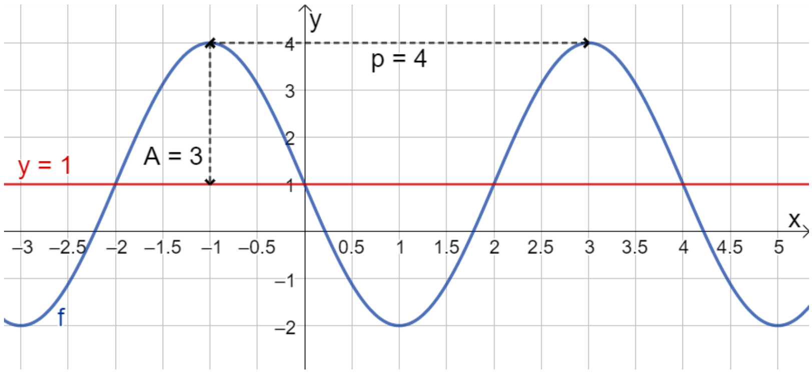
Da blir $c = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Vi leser av grafen at forskyvningen langs likevektslinja er $x_0 = -2$.

Da blir $\varphi = -(-2) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

Funksjonsuttrykket er derfor

$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right) + 1$.



c Linja $y = -2$ ligger like langt fra toppunktene som fra bunnpunktene på grafen. Dette er altså likevektslinja, og $d = -2$.

Avstanden fra likevektslinja til et vilkårlig toppunkt eller bunnpunkt er 1, så amplituden $A = 1$.

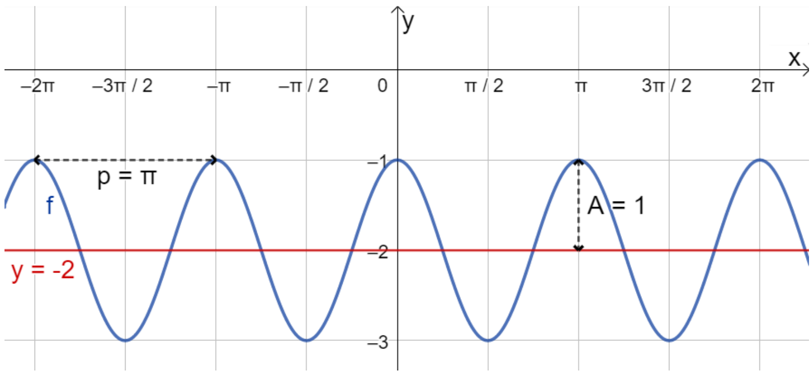
Vi leser av grafen at avstanden mellom to nabotoppunkter (eller nabobunnpunkter) er π, så perioden $p = \pi$. Da blir $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Vi leser av grafen at forskyvningen langs likevektslinja er $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

Da blir $\varphi = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$.

Funksjonsuttrykket er derfor

$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$.



3.79

a Likevektslinja er $y = 2$, og amplituden $A = 3$.

b $f(x)_{\text{maks}} = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ og $f(x)_{\text{min}} = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$.

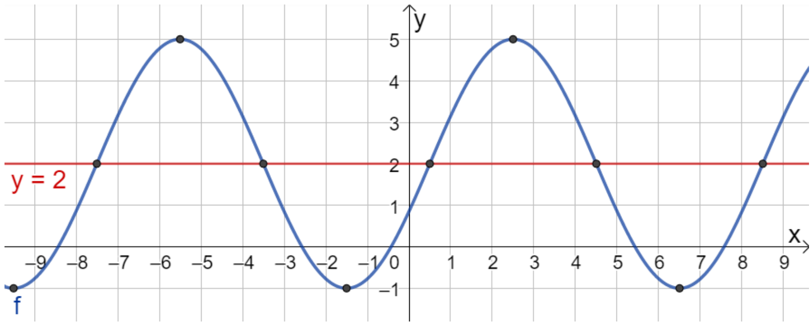
c $c = \frac{\pi}{4}$, så perioden $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$.

d Forskyvningen x_0 er gitt ved $-\frac{\pi}{8} = -x_0 \cdot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$. Siden x_0 er positiv, er det snakk om forskyvning mot høyre.

e En sinusfunksjon skjærer likevektslinja to ganger for hver periode, slik at avstanden mellom alle de skjæringspunktene er den samme. Siden perioden til f er 8, er avstanden mellom hvert skjæringspunkt lik 4.
I utgangspunktet vil ett av skjæringspunktene være i $x = 0$, men på grunn av forskyvningen vi regnet ut i oppgave d, vil grafen ha skjæringspunkter i $x = \frac{1}{2} + k \cdot 4$.

For en sinusfunksjon er alle skjæringspunkter med likevektslinja vendepunkter. Grafen til f skjærer likevektslinja når $A\sin(cx+\varphi)=0$, og $A\sin(cx+\varphi)$ skifter fortegn da. Da må nødvendigvis den andrederiverte $-Ac^2\sin(cx+\varphi)$ skifte fortegn for de samme x-verdiene, for $-c^2$ er bare en konstant faktor.

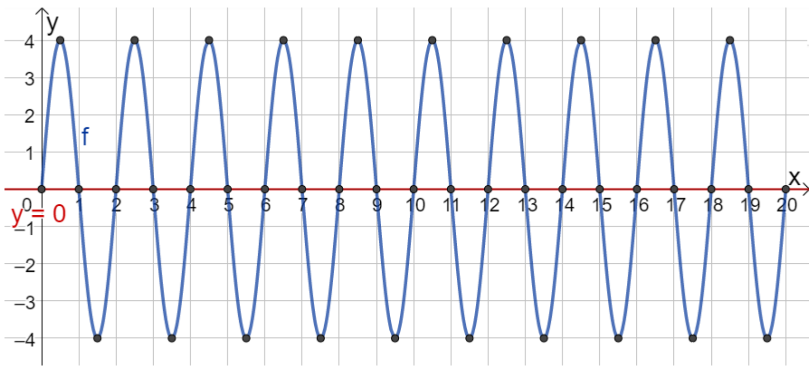
f For å lage en skisse av grafen til f kan vi ta utgangspunkt i likevektslinja $y=2$. Vi merker av skjæringspunkter med grafen til f der $x=\frac{1}{2}+k\cdot 4$. Ekstremalpunktene vil ligge midt mellom dem, og amplituden på 3 gir oss y-verdien til disse punktene. Dette gir oss et bra grunnlag for å skissere grafen til f.



3.80

a Likevektslinja er $y=0$, og amplituden $A=4$. $c=\pi$, så perioden $p=\frac{2\pi}{\pi}=2$. Det er ingen forskyvning langs likevektslinja, så $x_0=0$.

b For å lage en skisse av grafen til f kan vi ta utgangspunkt i likevektslinja $y=0$. Vi har skjæring mellom f og $y=0$ i $x=0$. Siden perioden til f er 2, er avstanden mellom hvert skjæringspunkt lik 1. Vi merker av skjæringspunkter med grafen til f der $x=k$. Ekstremalpunktene vil ligge midt mellom dem, og amplituden på 4 gir oss y-verdien til disse punktene. Dette gir oss et bra grunnlag for å skissere grafen til f.

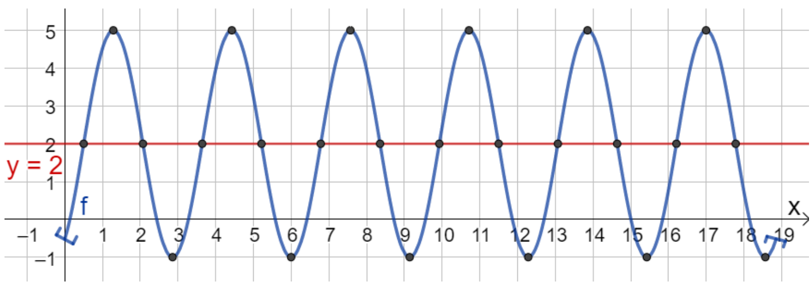


3.81

a Likevektslinja er $y=2$, og amplituden $A=3$. $c=2$, så perioden $p=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Forskyvningen x_0 er gitt ved $-1=-x_0\cdot 2 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$. Siden x_0 er positiv, er det snakk om forskyvning mot høyre.

b For å lage en skisse av grafen til f kan vi ta utgangspunkt i likevektslinja $y=2$. Vi har skjæring mellom f og $y=2$ i $x=\frac{1}{2}$. Siden perioden til f er π, er avstanden mellom hvert skjæringspunkt lik $\frac{\pi}{2}$. Vi



merker av skjæringspunkter med grafen til f der $x=\frac{1}{2}+k\cdot\frac{\pi}{2}$.

Ekstremalpunktene vil ligge midt mellom dem, og amplituden på 3 gir oss y-verdien til disse punktene. Dette gir oss et bra grunnlag for å skissere grafen til f .

3.82

a $A=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$. $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$. $(1\,,\sqrt{3})$ ligger i første kvadrant, så $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Det gir $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2$.

b Likevektslinja er $y=-2$, og amplituden $A=2$. $c=2$, så perioden $p=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Forskyvningen x_0 er gitt ved $\frac{\pi}{3}=-x_0\cdot 2 \Leftrightarrow x_0=-\frac{\pi}{6}$. Siden x_0 er negativ, er dette snakk om forskyvning mot venstre.

c f har maksimalpunkt når

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{\pi}{12}+k\cdot\pi$$

f har minimalpunkt når

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$

$$2x=\frac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{7\pi}{12}+k\cdot\pi$$

3.83

a Vi skriver om funksjonsuttrykket på venstre side til en sinusfunksjon.

$A=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. $\tan\varphi=\frac{1}{1}=1$. $(1\,,1)$ ligger i første kvadrant, så $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Det gir $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Nå kan vi løse likningen.

$$\sin x+\cos x=1 \quad , \quad x\in[0\,,2\pi\rangle$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi \quad\vee\quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$
$$x=k\cdot 2\pi$$
$$x=0$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{\pi}{2}$$

$$L=\left\{0\,,\frac{\pi}{2}\right\}$$

1 Løs(sin(x) + cos(x) = 1, 0 ≤ x < 2 π)

→ $\left\{\mathbf{x=0, x=\frac{1}{2}}\ \pi\right\}$

b Vi skriver om funksjonsuttrykket på venstre side til en sinusfunksjon.

$A=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$. $\tan\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$. $(1\,,-\sqrt{3})$ ligger i fjerde kvadrant, så $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

Det gir $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Nå kan vi løse likningen.

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2 \quad , \quad x\in[0\,,2\pi\rangle$$
$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$$
$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi$$

$$L=\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$$

2 Løs$\left(\sin(x)-\sqrt{3}\ \cos(x)=2, 0\le x<2\ \pi\right)$

→ $\left\{\mathbf{x=\frac{5}{6}}\ \pi\right\}$

3.84

a $f(x)_{maks} = 3+1=4$. Maksimalpunktene er der $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$. Siden $D_f=\langle 0\,,10\rangle$, gir det toppunktene $\left(\frac{\pi}{2}\,,4\right)$ og $\left(\frac{5\pi}{2}\,,4\right)$

$f(x)_{min} = 3-1=2$. Minimalpunktene er der $x=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$. Siden $D_f=\langle 0\,,10\rangle$, gir det bunnpunktet $\left(\frac{3\pi}{2}\,,2\right)$.

b $V_f=[2\,,4]$

c $f(x)=3+\sin x$ har likevektslinje $y=3$, mens amplituden bare er 1. Derfor blir *y*-verdien aldri lavere enn 2.

3.85

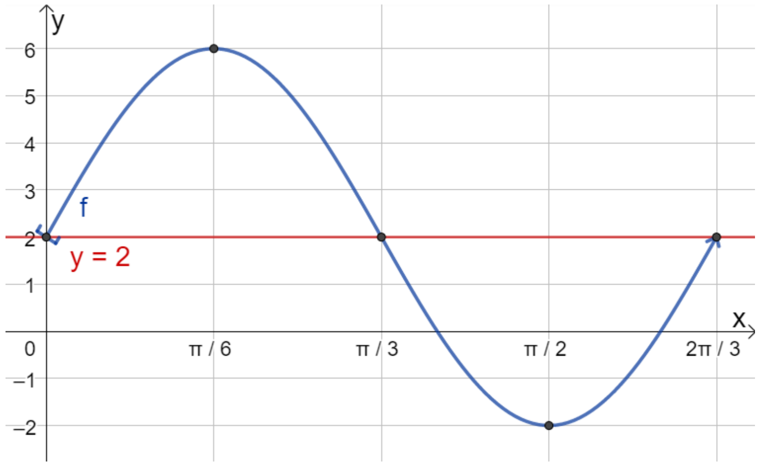
Hvis $V_f=[-1\,,5]$, må likevektslinja $y=\frac{5-1}{2} \Leftrightarrow y=2$, så $b=2$. Amplituden $A=\frac{5-(-1)}{2}=3$, så $a=3$.

3.86

a Likevektslinja er $y=2$, og amplituden $A=4$. $c=3$, så perioden $p=\frac{2\pi}{3}$.

Det er ingen forskyvning langs likevektslinja.

Grunnlaget for å skissere grafen er de to skjæringene med likevektslinja i denne perioden, den første skjæringen med likevektslinja i neste periode, og toppunktet og bunnpunktet i denne perioden.

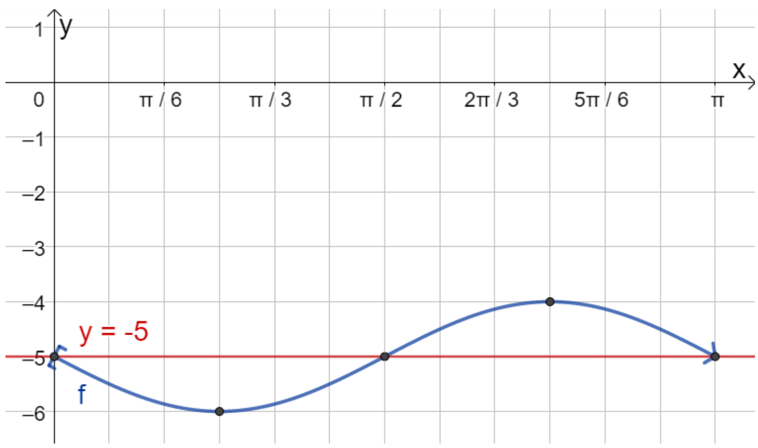


b Likevektslinja er $y=-5$, og amplituden $A=1$. $c=2$ så perioden $p=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Forskyvningen x_0 er gitt ved

$-\pi=-x_0\cdot 2 \Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{2}$. Siden x_0 er positiv, er dette snakk om forskyvning mot høyre.

Grunnlaget for å skissere grafen er de to skjæringene med likevektslinja i denne perioden, den første skjæringen med likevektslinja i neste periode, og toppunktet og bunnpunktet i denne perioden.



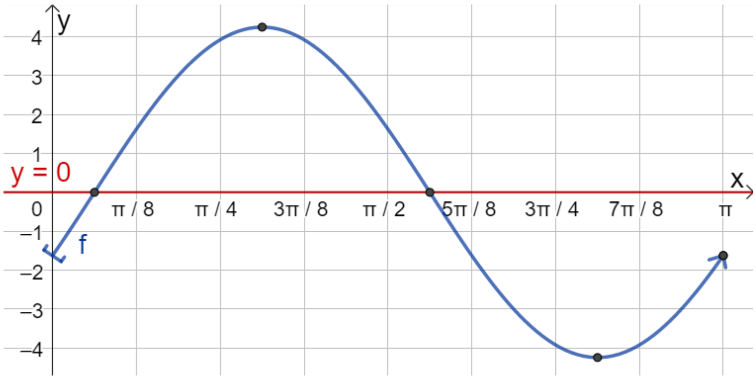
c Vi starter med å skrive om til en sinusfunksjon $f(x) = A\sin(cx + \varphi)$. Amplituden $A = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

$\tan\varphi = \dfrac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{3\pi}{4} + k\cdot\pi$, og siden $(3, -3)$ ligger i fjerde kvadrant, blir $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$. Det gir

$f(x) = 3\sqrt{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Likevektslinja er $y = 0$, og amplituden $A = 3\sqrt{2}$. $c = 2$, så perioden $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$. Forskyvningen x_0 er gitt ved $-\dfrac{\pi}{4} = -x_0 \cdot 2 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{\pi}{8}$. Siden x_0 er positiv, er dette snakk om forskyvning mot høyre.

Grunnlaget for å skissere grafen er de to skjæringene med likevektslinja i denne perioden, den første skjæringen med likevektslinja i neste periode, og toppunktet og bunnpunktet i denne perioden.

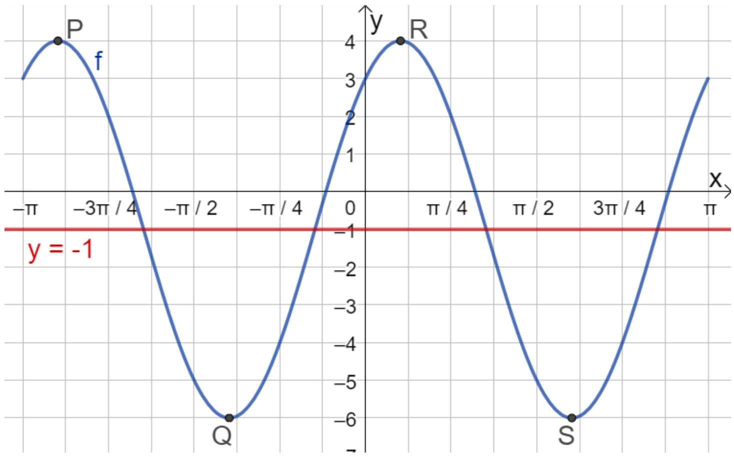


3.87

a I inntastingsfeltet i GeoGebra skriver vi, Dersom(-π < x < π, 3sin(2x) + 4cos(2x) - 1).

b Av funksjonsuttrykket ser vi at likevektslinja er $y = -1$.

c Når vi har tegnet grafen til en funksjon for bare et avgrenset intervall, vil ikke knappen for ekstremalpunkt fungere. Det enkleste kan nå være å legge inn den samme funksjonen uten begrensning for x, finne ekstremalpunktene på grafen til den funksjonen, og så fjerne den grafen fra grafikkfeltet.



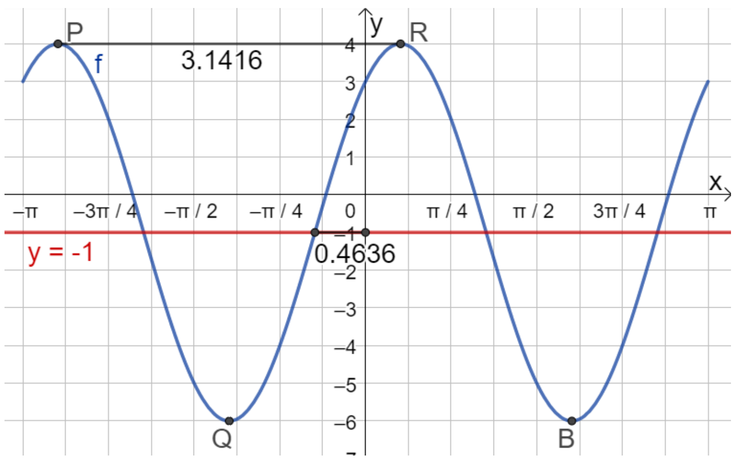
d I algebrafeltet ser vi at ekstremalverdiene er 4 og –6, så avstanden fra toppunktene og bunnpunktene til likevektslinja $y = -1$ er 5.

e Svaret på oppgave d forteller at $A = 5$.

f Vi tegner et linjestykke mellom punktene P og Q. Lengden av det linjestykket er 3,1416, som vi gjenkjenner som π.

g Perioden til den harmoniske svingningen er π.

h Lengden av linjestykket mellom $(0, -1)$ og skjæringspunktet mellom og likevektslinja og der grafen til f er på vei oppover, er 0,4636. Forskyvningen er mot venstre.



i

1 TrigKombiner(3 sin(2 x) + 4 cos(2 x) − 1, sin(x))

$\approx$ **5 sin(2 x + 0.927) − 1**

3.88

a Grafen skjærer *x*-aksen én gang på vei opp, og én gang på vei ned for hver periode.

Perioden er derfor avstanden mellom to nullpunkter i samme fase, for eksempel 1 og 13 eller 5 og 17.

Perioden $p = 12$.

Grafen skjærer likevektslinja to ganger i hver periode, så avstanden mellom skjæringspunktene på likevektslinja er 6.

Grafen til *f* må synke fra *A* til *B*. Grafen har bunnpunkter for *x*-verdiene midt mellom punktene *B* og *C*, og *D* og *E*.

Altså bunnpunkter for $x = 3$ og for $x = 15$.

På grunn av sinusgrafens symmetriegenskaper må grafen stige like mye etter punkt *C* som den synker fra *A* til *B*.

Da må det finnes et punkt A_1 som ligger i (6 , 3). Avstanden mellom *A* og A_1 er 6, og grafen går gjennom begge disse punktene. De må derfor ligge på likevektslinja, $y = 3$.

A_1 er første skjæringspunkt med likevektslinja på vei oppover. Forskyvningen er derfor 6 mot høyre ($x_0 = 6$).

b $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$\varphi = -6 \cdot \frac{\pi}{6} = -\pi$

$f(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right) + 3$

$f(1) = 0$

$A\sin\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right) + 3 = 0$

$A\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 3 = 0$

$A\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 0$

$A = 6$

$f(x) = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 3$

3.89

Først skriver vi om funksjonsuttrykk nummer 1 og 4 til sinusfunksjoner $f(x) = A\sin(cx + \varphi)$.

Nummer 1: Amplituden $A = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. $\tan\varphi = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} + k\cdot\pi$, og siden $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ligger i fjerde kvadrant, blir $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Det gir $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, som er det samme som funksjonsuttrykk nummer 3.

Nummer 4: Amplituden $A = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$. $\tan\varphi = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi$, og siden $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ligger i fjerde kvadrant, blir $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Det gir $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Vi gjenkjenner grafen som den til en sinusfunksjon med amplitude 1 og periode 2π, som er forskjøvet $\frac{\pi}{3}$ mot høyre. Altså er funksjonsuttrykk nummer 1 og 3 riktige.

3.90

a $f'(x) = \cos 3x \cdot (3x)' = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$

b $g'(x) = \frac{1}{5}\cos 5x \cdot (5x)' = \frac{1}{5}\cos 5x \cdot 5 = \cos 5x$

c $h'(x) = 3\cos(4x-1)\cdot(4x-1)' = 3\cos(4x-1)\cdot 4 = 12\cos(4x-1)$

d $i'(x) = (x)'\cdot \sin x + x\cdot(\sin x)' = 1\cdot \sin x + x\cdot \cos x = \sin x + x\cdot\cos x$

3.91

a $(\sin^2 x)' = \left((\sin x)^2\right)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$

b $(\sin^2 x)' = (\sin x\cdot \sin x)' = (\sin x)'\cdot\sin x + \sin x\cdot(\sin x)' = \cos x\cdot \sin x + \sin x\cdot\cos x = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$

3.92

a $f'(x) = \cos x$

$f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(0) = \cos 0 = 1$

Ettpunktsformelen gir likningen til tangenten.

$$
\begin{aligned}
y - f(0) &= f'(0)\cdot(x-0)\\
y - 0 &= 1\cdot x\\
y &= x
\end{aligned}
$$

b $g'(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)' = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$

$g(0) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0 - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 1$

$g'(0) = \frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

Ettpunktsformelen gir likningen til tangenten.

$$
\begin{aligned}
y - g(0) &= g'(0)\cdot(x-0)\\
y - 1 &= \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\cdot x\\
y &= \frac{\sqrt{3}\pi}{3}x + 1
\end{aligned}
$$

c $h'(x) = (6x)'\cdot\sin 6x + 6x\cdot(\sin 6x)' = 6\sin 6x + 6x\cdot\cos 6x\cdot(6x)' = 6\sin 6x + 6x\cdot(\cos 6x)\cdot 6$

$= 6\sin 6x + 36x\cdot\cos 6x$

$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \pi\cdot\sin\pi = \pi\cdot 0 = 0$

$$h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) + 36\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 6\cdot 0 + 6\pi\cdot(-1) = -6\pi$$

Ettpunktsformelen gir likningen til tangenten.

$$y - h\left(\frac{\pi}{6}\right) = h'\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y - 0 = -6\pi\cdot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = -6\pi x + \pi^2$$

3.93

a Programmet finner en svært god tilnærming til verdien av den deriverte av $\sin x$ når $x = \frac{\pi}{3}$. Dette skjer ved å bruke definisjonen av den deriverte med en veldig liten verdi for Δx, nemlig 10^{-8}.

b

```
Powered by trinket
0.4999999969612645
```

Som vi ser av utskriften, får vi en verdi som er veldig nær verdien vi kjenner for $\sin\frac{\pi}{3}$, altså $\frac{1}{2}$. Grunnen til at vi ikke får nøyaktig $\frac{1}{2}$, er at vi brukte $\Delta x = 10^{-8}$, mens verdien $\frac{1}{2}$ framkommer når vi lar Δx gå mot 0 som grenseverdi.

3.94

a $f'(x) = -\sin 3x\cdot(3x)' = -\sin 3x\cdot 3 = -3\sin 3x$

b $g'(x) = (3x)'\cdot\cos x + 3x\cdot(\cos x)' = 3\cdot\cos x + 3x\cdot(-\sin x) = 3\cos x - 3x\cdot\sin x$

c $h'(x) = \dfrac{(\cos x)'\cdot x^2 - \cos x\cdot(x^2)'}{\left(x^2\right)^2} = \dfrac{-\sin x\cdot x^2 - \cos x\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-x\cdot\sin x - 2\cos x}{x^3} = -\dfrac{x\cdot\sin x + 2\cos x}{x^3}$

3.95

I første overgang har eleven brukt formelen for sinus til dobbel vinkel, og i neste overgang har han brukt produktregelen for derivasjon.

$(\sin 2x)' = (2\sin x\cdot\cos x)' = 2\cos x\cdot\cos x + 2\sin x\cdot(-\sin x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$

3.96

Her bruker vi kjerneregelen med kx som kjerne. Da blir $(\cos kx)' = -\sin kx\cdot(kx)' = -\sin kx\cdot k = -k\sin kx$.

3.97

a $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' = \dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2 = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

b $g'(x) = 5 - \dfrac{1}{\cos^2 5x}\cdot(5x)' = 5 - \dfrac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5 = 5 - \dfrac{5}{\cos^2 5x}$

c $h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(1-x^2)}\cdot(1-x^2)' = \dfrac{1}{\cos^2(1-x^2)}\cdot(-2x) = -\dfrac{2x}{\cos^2(1-x^2)}$

3.98

a $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

b $\int 4\cos 2x\,dx = 4\int \cos 2x\,dx = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = 2\sin 2x + C$

c

$$\int x\cdot\sin x\,dx = (-\cos x)\cdot x - \int(-\cos x)\cdot 1\,dx = (-\cos x)\cdot x + \int \cos x\,dx = (-\cos x)\cdot x + \sin x + C = \sin x - x\cdot\cos x + C$$

3.99

a $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b $\int_1^2 \sin \pi x\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]_1^2 = -\frac{1}{\pi}\cos 2\pi - \left(-\frac{1}{\pi}\cos \pi\right) = -\frac{1}{\pi}\cdot 1 + \frac{1}{\pi}\cdot(-1) = -\frac{2}{\pi}$

c Vi finner først det ubestemte integralet.

$\int 2x\cdot\cos x\,dx = \sin x\cdot 2x - \int \sin x\cdot 2\,dx = \sin x\cdot 2x + 2\cos x + C = 2x\cdot\sin x + 2\cos x + C$

Så finner vi det bestemte integralet.

$$\int_0^{\pi} 2x\cdot\cos x\,dx = [2x\cdot\sin x + 2\cos x]_0^{\pi} = (2\pi\cdot\sin\pi + 2\cos\pi) - (2\cdot 0\cdot\sin 0 + 2\cdot\cos 0)$$
$$= (2\pi\cdot 0 + 2\cdot(-1)) - (0 + 2\cdot 1) = -2 - 2 = -4$$

3.100

a $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

b f har nullpunkt for $x = \frac{\pi}{2}$ og ligger under x-aksen i intervallet $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$. For at arealet i dette intervallet ikke skal telle negativt, må vi dele opp det bestemte integralet i to, og skifte fortegn på integralet i intervallet nettopp nevnt.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} = \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = (1-0) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}$$

3.101

$$\int_0^b \sin \pi x\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]_0^b = -\frac{1}{\pi}\cos \pi b - \left(-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi\cdot 0)\right) = -\frac{1}{\pi}\cos \pi b + \frac{1}{\pi}$$

$$-\frac{1}{\pi}\cos \pi b + \frac{1}{\pi} = 0$$
$$\frac{1}{\pi}\cos \pi b = \frac{1}{\pi}$$
$$\cos \pi b = 1$$
$$b = 2k \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Når vi tar integralet av $\sin \pi x$ over et heltall antall perioder (og perioden er 2), vil arealet under x-aksen utlikne arealet over x-aksen, så svaret blir 0.

3.102

$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$

Vi setter $u = \cos x$, og da blir $u' = -\sin x$. Altså får vi at

$\frac{du}{dx} = -\sin x$, som gir

$-\int \frac{\frac{du}{dx}}{u} \, dx = -\int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$

3.103

a **1** $\int \tan 2x \, dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$ **2** $\int \tan \frac{x}{2} \, dx = -2\ln\left|\cos \frac{x}{2}\right| + C$

b

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$
$$\int (\tan x)' \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \, dx$$
$$\tan x + C = \int 1 \, dx + \int \tan^2 x \, dx$$
$$\tan x + C = x + \int \tan^2 x \, dx$$
$$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$$

3.104

a Vi velger $u = \sin x$. Det gir $u' = \cos x$ og dermed $dx = \frac{du}{\cos x}$.

$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{\cos x}{u} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$

b Vi velger $u = 3 + \sin x$. Det gir $u' = \cos x$ og dermed $dx = \frac{du}{\cos x}$.

$\int \frac{2\cos x}{3 + \sin x} \, dx = \int \frac{2\cos x}{u} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{2}{u} \, du = 2\ln|u| + C = 2\ln(3 + \sin x) + C$

c Vi velger $u' = \sin x$ og $v = \cos^2 x$, som gir $u = -\cos x$ og $v' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$.

$\int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot \cos^2 x - \int 2\cos x \cdot (-\sin x) \cdot (-\cos x) \, dx = -\cos^3 x - 2\int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$

Dette gir

$3\int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = -\cos^3 x + C$

$\int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

3.105

a Den antideriverte av $\cos x$ er $\sin x$, og $\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b Se numerisk integrasjon, side 106 i boka.

3.106

a Formelen for cosinus til den dobbelte vinkel gir

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \cos 2x + (1 - \cos^2 x)$$

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

b $$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \pi \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}\cdot\sin \pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \pi\left(\frac{1}{4}\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = \pi\left(\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{\pi}{4}\right) - \pi\left(\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

3.107

a

1 $$\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos(x) + 1\right)^2 dx$$

$\approx$ **22.21**

Volumet av omdreiningslegemet er omtrent 22,21.

b $$V = \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos x + 1\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\cos^2 x + \cos x + 1\right) dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right) + \cos x + 1\right) dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8}\cos 2x + \cos x + \frac{9}{8}\right) dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{16}\sin 2x + \sin x + \frac{9}{8}x\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{16}\cdot\sin 4\pi + \sin 2\pi + \frac{9}{8}\cdot 2\pi\right) - \pi\left(\frac{1}{16}\cdot\sin 0 + \sin 0 + \frac{9}{8}\cdot 0\right)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{16}\cdot 0 + 0 + \frac{9}{8}\cdot 2\pi\right) - \pi\left(\frac{1}{16}\cdot 0 + 0 + \frac{9}{8}\cdot 0\right)$$

$$= \frac{9\pi^2}{4}$$

Volumet av omdreiningslegemet er eksakt $\frac{9\pi^2}{4}$.

3.108

a $f'(x) = -4\sin x$

b $g'(x) = 1 + \tan^2 x - (-3\sin x) = 1 + \tan^2 x + 3\sin x$

c $h'(x) = 0 - \frac{1}{4}(-\sin 4x)\cdot(4x)' = \frac{1}{4}(\sin 4x)\cdot 4 = \sin 4x$

d $i'(x) = \cos(x^2 - 2x)\cdot(x^2 - 2x)' = \cos(x^2 - 2x)\cdot(2x - 2) = (2x - 2)\cos(x^2 - 2x)$

e
$$\begin{aligned} i'(x) &= (2x)'\cdot\sin 2x + 2x\cdot(\sin 2x)' \\ &= 2\sin 2x + 2x\cdot\cos 2x\cdot(2x)' \\ &= 2\sin 2x + 2x(\cos 2x)\cdot 2 \\ &= 2\sin 2x + 4x\cos 2x \end{aligned}$$

f
$$\begin{aligned} k'(x) &= 0 - \frac{(\cos 2x)'\cdot x - (\cos 2x)\cdot x'}{x^2} \\ &= -\frac{(-\sin 2x)\cdot(2x)'\cdot x - (\cos 2x)\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{(\sin 2x)\cdot 2\cdot x + \cos 2x}{x^2} \\ &= \frac{2x\sin 2x + \cos 2x}{x^2} \end{aligned}$$

3.109

a $\int 8\cos 4x\,dx = 8\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = 2\sin 4x + C$

b $\int x\cdot\cos 2x\,dx = x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

c Vi velger $u = \sin x$. Det gir $u' = \cos x$ og dermed $dx = \frac{du}{\cos x}$.

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx = \int u^2\cdot\cos x\,\frac{du}{\cos x} = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

d $\int_0^{\pi}(\sin x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \sin x]_0^{\pi} = (-\cos\pi - \sin\pi) - (-\cos 0 - \sin 0) = (1 - 0) - (-1 - 0) = 2$

e $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left[\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan^2(0) = 1 - 0 = 1$

f $\int_0^{2\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[-\cos x + \frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi} = \left(-\cos 2\pi + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\right) - \left(-\cos 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = (-1 + \pi) - (-1 + 0) = \pi$

3.110

$$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

Når vi tar integralet av $\sin x$ over et heltall antall perioder (og perioden er 2π), vil arealet under x-aksen utlikne arealet over x-aksen, så svaret blir 0.

3.111

$$\text{NLøs}\left(\int_0^k e^x \sin(x)\,dx = \int_k^{\pi} e^x \sin(x)\,dx, k\right)$$

$$\to \{k = 2.093, k = 3.74, k = 7.075, k = 10.21$$

Når vi løser likningen i CAS, får vi flere svar, men vi er bare interessert i $k \in \langle 0\,,\,\pi\rangle$, så tilnærmingen blir $k = 2{,}093$

3.112

$g'(x) = \cos 3x \cdot 3 + k\cos x = 3\cos 3x + k\cos x$

Nå kan vi sette opp en likning for å finne verdien av k.

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5$$

$$3\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) + k\cos\frac{\pi}{3} = 5$$

$$3\cdot(-1) + k\cdot\frac{1}{2} = 5$$

$$k = 16$$

Videre er

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) + 16\sin\frac{\pi}{3} = 0 + 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

Nå kan vi bruke ettpunktsformelen for å finne likningen til tangenten.

$$y - 8\sqrt{3} = 5\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = 5x - \frac{5\pi}{3} + 8\sqrt{3}$$

3.113

Vi velger $u' = e^x$ og $v = \sin x$, som gir $u = e^x$ og $v' = \cos x$.

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x\,dx$$

Vi utfører delvis integrasjon på nytt på integralet på høyre side, med $u' = e^x$ og $v = \cos x$, som gir $u = e^x$ og $v' = -\sin x$.

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x\,dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x)\,dx\right)$$

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x\,dx$$

$$2\int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + C$$

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x \cdot (\sin x - \cos x) + C$$

3.114

Vi finner først det ubestemte integralet med variabelskiftet $u = \sin 2x$. Det gir $u' = 2\cos 2x$ og dermed $dx = \frac{1}{2\cos 2x}du$.

$$\pi\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x\,dx = \pi\int u^2 \cdot \cos 2x\,\frac{du}{2\cos 2x} = \frac{\pi}{2}\int u^2\,du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C = \frac{\pi}{6}u^3 + C = \frac{\pi}{6}\sin 2x + C$$

Så finner vi det bestemte integralet.

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x\cdot\cos 2x\,dx=\left[\frac{\pi}{6}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)-\left(\frac{\pi}{6}\sin(2\cdot 0)\right)=\frac{\pi}{6}\cdot 1-\frac{\pi}{6}\cdot 0=\frac{\pi}{6}$$

3.115

Flatestykkets areal på 12 tilsvarer integralet av f fra 0 til 6. Vi løser likningen i CAS med hensyn på m.

1 Løs(Integral(sin(m · x) + 2, 0, 6) = 12, m)

$\rightarrow \left\{\mathbf{m=\frac{1}{3}\,k_1\,\pi}\right\}$

Vi ser at $m=\frac{1}{3}k\cdot\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$.

3.116

a Fordi $\sin v$ er negativ, ligger v i 3. eller 4. kvadrant.

b $\sin(-v)=-\sin v=\frac{3}{4}$

c $\cos(90°-v)=\sin v=-\frac{3}{4}$

d $\sin(v+\pi)=\sin v\cdot\cos\pi+\cos v\cdot\sin\pi=-\frac{3}{4}\cdot(-1)+\cos v\cdot 0=\frac{3}{4}$

e $\sin(v+2\pi)=\sin v=-\frac{3}{4}$

f $\sin(2\pi-v)=\sin(-v)=-\sin v=\frac{3}{4}$

3.117

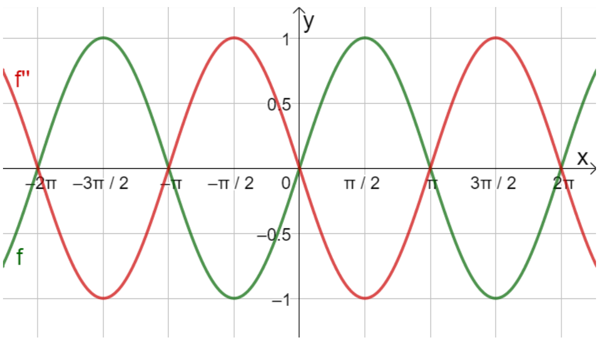
a

1 Derivert(Derivert(sin(x)))

$\rightarrow\ -\mathbf{sin(x)}$

$f''(x)=-\sin x$

b Fordi $f(x)=-f''(x)$, vil de to grafene være speilbilder om x-aksen.



3.118

a $\int\sin x\cdot\cos x\,dx=\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C=-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

b $\int\sin x\cdot\cos x\,dx=\int u\cdot\cos x\,\frac{du}{\cos x}=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2+C=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$

c $\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \int \sin x \cdot u \frac{du}{-\sin x} = -\int u \, du = -\frac{1}{2}u^2 + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$

3.119

a $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \sin x \, dx = \left[-\cos v\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} = \left(-\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b Se numerisk integrasjon, side 106 i boka.

3.120

Dette blir å betrakte som en enhetssirkel der døra er festet i origo. $\cos v = -0{,}6$ gir $v = 126{,}9°$. (Ingen andre verdier av v er aktuelle her.)

3.121

a Arealet av en sirkelsektor er lik arealet av hele sirkelen, ganger hvor stor andel av sirkelen som sirkelsektoren utgjør. Det forholdstallet er lik sirkelsektorens buelengde b, delt på sirkelens omkrets $2\pi r$.

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{b}{2\pi r} = \frac{1}{2} br$$

b En vinkel v målt i radianer, er lik buelengden b, delt på sirkelens radius r, så $b = vr$.

$$A = \frac{1}{2} br = \frac{1}{2} vr \cdot r = \frac{1}{2} vr^2$$

3.122

a

Løs$(\sin(2x) - \cos(x) = 0, 0 \le x < 2\pi)$

1 $\rightarrow \left\{x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{1}{2}\pi, x = \frac{5}{6}\pi, x = \frac{3}{2}\pi\right\}$

b Ellas program leter etter en x-verdi som gjør at uttrykket er maks 0,0001 unna 0. Programmet starter med å sjekke verdien vi får når vi setter gjennomsnittet av $a = 0$ og $b = 2\pi$ inn i uttrykket. Hvis verdien ligger nok nært 0, har vi en god tilnærming. Hvis ikke, justeres verdien av enten a eller b, avhengig av om verdien var for høy eller for lav. Vi tar et nytt gjennomsnitt av a eller b, og vi fortsetter til vi får en god nok tilnærming, som programmet skriver ut. Problemet er at dette ikke tar hensyn til at det kan finnes flere løsninger i definisjonsmengden. Programmet stopper når det har funnet den første løsningen.

Albert mister også løsninger når han deler på faktoren $\cos x$. Det blir tydelig hvis vi faktoriserer.

$$\sin 2x - \cos x = 0$$
$$2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \quad \vee \quad 2\sin x - 1 = 0$$

Når Albert deler på $\cos x$, mister han løsningene på likningen til venstre.

3.123

a **1** $\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2\sin x \cdot \cos x$

2 $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

3 $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b

$$2\sin 2x = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x \quad , \quad x \in [0°, 720°\rangle$$

$$2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x$$

$$4\sin x \cdot \cos x = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x$$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad 4\sin x = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\cos x = 0$$
$$x = 90° + k \cdot 180°$$
$$x = 90° \quad \vee \quad x = 270° \quad \vee \quad x = 450° \quad \vee \quad x = 630°$$

$$4\sin x = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$x = 15° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 165° + k \cdot 360°$$
$$x = 15° \quad \vee \quad x = 165° \quad \vee \quad x = 375° \quad \vee \quad x = 525°$$

$$L = \{15°, 90°, 165°, 270°, 375°, 450°, 525°, 630°\}$$

c

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(x+2x)\\ &= \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x\\ &= \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x\\ &= \cos x \cdot (1 - 2\sin^2 x) - \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x\\ &= \cos x \cdot (1 - 2\sin^2 x) - \cos x \cdot 2\sin^2 x\\ &= \cos x \cdot (1 - 4\sin^2 x)\end{aligned}$$

3.124

a $3\cos(-v) + \sin(90° - v) - 2\cos(180° - v) = 3\cos v + \cos v + 2\cos v = 6\cos v$

b $\cos(2\pi - v) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) - \cos(v + \pi) + \sin\left(v + \frac{3\pi}{2}\right)$

$$= \cos v + 2\cos v - (\cos v \cdot \cos \pi - \sin v \cdot \sin \pi) + \left(\sin v \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \cos v \cdot \sin \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 3\cos v - \cos v \cdot (-1) + \sin v \cdot 0 + \sin v \cdot 0 + \cos v \cdot (-1)$$

$$= 3\cos v$$

3.125

a $\frac{\cos^2 v}{1 - \sin v} = \frac{\cos^2 v \cdot (1 + \sin v)}{(1 - \sin v) \cdot (1 + \sin v)} = \frac{\cos^2 v \cdot (1 + \sin v)}{1 - \sin^2 v} = \frac{\cos^2 v \cdot (1 + \sin v)}{\cos^2 v} = 1 + \sin v$

b $(2 - \cos v) \cdot (2 + \cos v) = 4 - \cos^2 v = 4 - (1 - \sin^2 v) = 3 + \sin^2 v$

c

$$\begin{aligned}
\cos u\cdot\cos v &= \cos u\cdot\cos v+\sin u\cdot\sin v-\sin u\cdot\sin v\\
\cos u\cdot\cos v+\cos u\cdot\cos v &= \cos u\cdot\cos v+\sin u\cdot\sin v-\sin u\cdot\sin v+\cos u\cdot\cos v\\
2\cos u\cdot\cos v &= (\cos u\cdot\cos v+\sin u\cdot\sin v)+(\cos u\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v)\\
2\cos u\cdot\cos v &= \cos(u-v)+\cos(u+v)\\
\cos u\cdot\cos v &= \frac{1}{2}(\cos(u-v)+\cos(u+v))
\end{aligned}$$

3.126

$$\begin{aligned}
\cos(x+u)+\sin(x+v) &= \cos x\\
\cos x\cdot\cos u-\sin x\cdot\sin u+\sin x\cdot\cos v+\cos x\cdot\sin v &= \cos x\\
\cos x\cdot(\cos u+\sin v)+\sin x\cdot(\cos v-\sin u) &= \cos x\\
\cos x\cdot(\cos u+\sin v)+\sin x\cdot(\cos v-\sin u) &= \cos x\cdot 1+\sin x\cdot 0
\end{aligned}$$

Den siste omskrivningen er helt i orden, fordi vi ikke endrer verdien av høyre side når vi ganger et ledd med 1, eller legger til 0 (og 0 ganger en annen faktor, er lik 0). Hensikten med denne omskrivningen er at det gjør det lettere å sammenlikne venstre og høyre side, nærmere bestemt faktorene som er multiplisert med $\cos x$ og $\sin x$. Vi får de to likningene

$\cos u+\sin v=1$

$\cos v-\sin u=0$

Hvis vi ser på den andre likningen først, ser vi at den kan skrives om til

$\cos v=\sin u$

Ettersom både v og u ligger i første kvadrant, forteller denne likningen oss at $u=90°-v$. Det kan vi sette inn i den første likningen.

$$\begin{aligned}
\cos(90°-v)+\sin v &= 1\\
\cos 90°\cdot\cos v+\sin 90°\cdot\sin v+\sin v &= 1\\
0\cdot\cos v+1\cdot\sin v+\sin v &= 1\\
2\sin v &= 1\\
\sin v &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Siden nå v ligger i første kvadrant, blir $v=30°$, og da blir $u=90°-30°=60°$.

3.127

a

$$\begin{aligned}
\frac{BC}{\sin A} &= \frac{4}{\sin C}\\
\frac{BC}{\sin v} &= \frac{4}{\sin(180°-2v)}\\
BC &= \frac{4\sin v}{\sin(180°-2v)}
\end{aligned}$$

b $\dfrac{4\sin v}{\sin(180°-2v)}=\dfrac{4\sin v}{\sin 2v}=\dfrac{4\sin v}{2\sin v\cdot\cos v}=\dfrac{2}{\cos v}$

c $\angle C = 30°$ betyr at $v = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$. Så bruker vi sinussetningen.

$$\frac{BC}{\sin 75°} = \frac{4}{\sin 30°}$$
$$\frac{BC}{\sin 75°} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$$
$$BC = 8\sin 75°$$
$$BC = 8\sin(45° + 30°)$$
$$BC = 8(\sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30°)$$
$$BC = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$
$$BC = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

d Arealet av trekanten er kjent, og lengden *AB* er kjent. For å kunne finne $\sin v$ med arealsetningen må også *BC* være kjent.

Normalen fra *C* ned på *AB* treffer i punktet *D*. Arealformelen for en trekant gir nå at

$$\frac{4 \cdot CD}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$CD = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Siden *ABC* er en likebeint trekant, ligger *D* midt på *AB*, så *BD* = 2. Nå kan vi bruke pytagorassetningen til å finne *BC*.

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Så bruker vi arealsetningen for å finne $\sin v$.

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sin v = \frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$\sin v = \frac{1}{2}$$

Siden både $\angle A = v$ og $\angle B = v$, vil vinkelsummen i en trekant avgrense v til første kvadrant. Dermed gir likningen ovenfor at $v = 30{,}0°$.

3.128

a Arealet av sirkelsegmentet er lik arealet den blå og hvite sirkelsektoren, minus arealet av den hvite trekanten.

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin x = \frac{1}{2}r^2 x - \frac{1}{2}r^2 \sin x = \frac{1}{2}r^2(x - \sin x)$$

Argumentet er gyldig bare når vi kan bruke arealformelen, så $x \in \langle 0\,,\,\pi\rangle$.

b $$\frac{1}{2}r^2 \sin x = \frac{1}{2}r^2(x - \sin x)$$
$$\sin x = x - \sin x$$
$$x = 2\sin x$$

1 Løs($x = 2\ \sin(x), 0 < x < \pi$)
→ $\{\mathbf{x = 1.895}\}$

For at sirkelsegmentet og den hvite trekanten skal ha samme areal, må $x = 1{,}90$.

3.129

Vi skriver om uttrykket på venstre side til formen $A\sin(cx+\varphi)+d$.

$A=\sqrt{6^2+8^2}=10 \qquad c=\dfrac{2\pi}{2\pi}=1 \qquad d=0$

Det gir likningen

$$10\sin(x+\varphi)=m$$
$$\sin(x+\varphi)=\frac{m}{10}$$

Uttrykket på venstre side har verdimengden $[-1\,,\,1]$, så når $m<-10$ eller $m>10$, har likningen ingen løsninger.

I det oppgitte intervallet $[0\,,\,2\pi\rangle$ har uttrykket på venstre side ett toppunkt med verdi 1, og ett bunnpunkt med verdi -1. Det betyr at likningen har én løsning når $m=10$ eller $m=-10$.

Når $x\in[0\,,\,2\pi\rangle$, vil uttrykket på venstre side innta hver verdi i intervallet $\langle -1\,,\,1\rangle$ to ganger, likningen har to løsninger når $m=\langle -10\,,\,10\rangle$.

3.130

a $A=\dfrac{5-(-3)}{2}=4 \qquad c=\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4} \qquad d=\dfrac{5-3}{2}=1$

Grafen til $4\sin\dfrac{\pi}{4}x+1$ har maksimalpunkt når

$$\frac{\pi}{4}x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{\pi}+k\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{\pi}$$
$$x=2+k\cdot 8$$

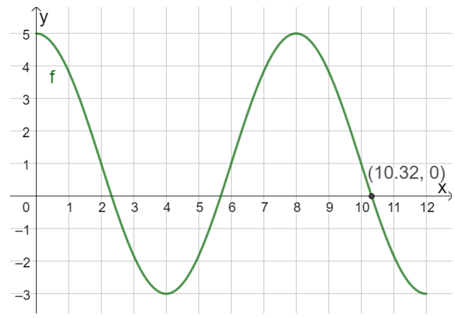
Grafen vi ser, er forskjøvet 2 enheter mot venstre sammenliknet med dette, så $x_0=-2$, som gir

$$\varphi=-(-)2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Da blir

$$f(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}\right)+1$$

b Arealet avgrenset av grafen til f og linjestykket mellom første og andre nullpunkt (som jo teller negativt), er mindre enn arealet avgrenset av grafen til f og linjestykket mellom andre og tredje nullpunkt. (Det er fordi likevektslinja ligger over x-aksen.) Derfor er b lik det tredje nullpunktet, og vi finner i GeoGebra at $b=10{,}32$.



c Vi ser at $4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi\right)=4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, så det eneste som skiller grafen til denne funksjonen fra grafen til f, er at likevektslinja til grafen til f er $x=1$ i stedet for $x=0$. Det betyr at å finne nullpunktene til $4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ tilsvarer å finne x-verdiene som gir $f(x)=1$ i samme intervall. Vi leser av grafen at det gir $L=\{2\,,\,6\,,\,10\}$.

3.131

a Amplituden $A = 4$ Likevektslinja $y = 2$ Perioden $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Forskyvningen $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, og siden den har positivt fortegn, er forskyvningen mot høyre.

b $4\sin(2x - \pi) + 2 = 0 \quad , \quad x \in [0\,,\,3\pi\rangle$

$$\sin(2x - \pi) = -\frac{1}{2}$$

$$2x - \pi = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x - \pi = \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

$$2x - \pi = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{13\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

$$x = \frac{13\pi}{12} + k\cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{12} \quad \vee \quad x = \frac{13\pi}{12} \quad \vee \quad x = \frac{25\pi}{12}$$

$$2x - \pi = \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{17\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{12} + k\cdot \pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} \quad \vee \quad x = \frac{17\pi}{12} \quad \vee \quad x = \frac{29\pi}{12}$$

Nullpunktene er $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}, \dfrac{25\pi}{12}$ og $\dfrac{29\pi}{12}$.

c $f'(x) = 4\cos(2x - \pi)\cdot(2x)' = 4\cos(2x - \pi)\cdot 2 = 8\cos(2x - \pi)$

$$f'(x) = 0$$

$$8\cos(2x - \pi) = 0$$

$$\cos(2x - \pi) = 0$$

$$2x - \pi = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} + k\cdot\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$$

Vi lager så en fortegnslinje for f med verdiene $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\cdot\dfrac{\pi}{2}$ avmerket, i tillegg til venstre endepunkt.

	0		π / 4		3π / 4		5π / 4		7π / 4		9π / 4		11π / 4		3π	x
$f(x)$		- -	0	—	0	- -	0	—	0	- -	0	—	0	- -		

Så finner vi tilhørende *y*-verdier for punktene.

$f(0) = 4\sin(2\cdot 0 - \pi) + 2 = 2$

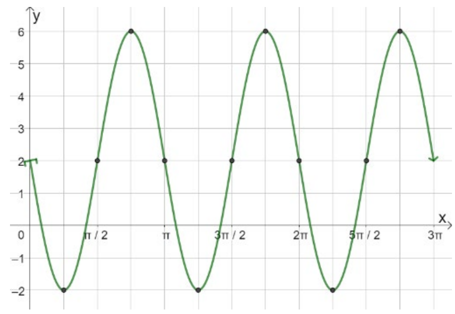
$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = f\left(\frac{11\pi}{4}\right) = 4\cdot 1 + 2 = 6$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 4\cdot(-1) + 2 = -2$

Toppunktene er $(0\,,\,2)$, $\left(\frac{3\pi}{4}\,,6\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4}\,,6\right)$ og $\left(\frac{11\pi}{4}\,,6\right)$.

Bunnpunktene er $\left(\frac{\pi}{4}\,,-2\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}\,,-2\right)$ og $\left(\frac{9\pi}{4}\,,-2\right)$.

d Toppunktene og bunnpunktene på grafen til f, sammen med skjæringspunktene med likevektslinja $y = 2$, gir et godt grunnlag for å skissere grafen.



e Stigningstallet til tangenten er –8, så vi må ha at

$$\begin{aligned}8\cos(2x-\pi) &= -8\\ \cos(2x-\pi) &= -1\\ 2x-\pi &= \pi + k\cdot 2\pi\\ 2x &= k\cdot 2\pi\\ x &= k\cdot\pi\end{aligned}$$

Så bruker vi ettpunktsformelen med –8 som stigningstall.

$$\begin{aligned}y-(4\sin(2k\pi-\pi)+2 &= -8(x-k\cdot\pi)\\ y-(4\cdot 0+2) &= -8x+8k\pi\\ y &= -8x+8k\pi+2\end{aligned}$$

Når vi sammenlikner denne likningen med den i oppgaveteksten, blir det tydelig at $k = 1$, så første likning gir da at $x = 1\cdot\pi = \pi$ er der tangenten treffer.

f Negativt fortegn foran sinusfunksjonen gir speiling om likevektslinja $y = 2$. Men siden perioden $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$, vil fjerning av forskyvningen π langs *x*-aksen gi sammenfallende grafer.

3.132

$A\sin(4x+\varphi)+3$ har perioden $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$A\sin 4x + 3$ har maksimalpunkt der

$$\begin{aligned}4x &= \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\\ x &= \frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2}\\ x &= \frac{\pi + k\cdot 4\pi}{8}\end{aligned}$$

På grunn av forskyvningen φ har grafen til f i stedet maksimalpunkt for $x = \frac{\pi}{4}$. Setter vi $k = 0$ i likningen ovenfor, får vi $x = \frac{\pi}{8}$, så $x = \frac{\pi}{4}$ tilsvarer en forskyvning på $\frac{\pi}{8}$ mot høyre sammenliknet med det. Det gir $\varphi = -\frac{\pi}{8} \cdot 4 = -\frac{\pi}{2}$, men siden $\varphi \in [0\,,\,2\pi\rangle$, velger vi (uten at funksjonen endrer verdi) $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$.

$$A \sin\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 = 5$$
$$A \cdot 1 + 3 = 5$$
$$A = 2$$

3.133

a $\cos x \sqrt{\sin x} = 0 \quad , \quad x \in [0\,,\,\pi\rangle$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{\sin x} = 0$$

$$\cos x = 0$$
$$\cos x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$
$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{\sin x} = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$x = k \cdot \pi$$
$$x = 0$$

$$L = \left\{0\,,\,\frac{\pi}{2}\right\}$$

b Vi regner først ut det ubestemte integralet med variabelskiftet $u = \sin x$ Det gir $u' = \cos x$ og dermed $dx = \frac{1}{\cos x} du$.

$$\int \cos x \cdot \sqrt{\sin x}\, dx = \int \cos x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{\cos x}\, du = \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$$

Så finner vi de bestemte integralene med grensene fra oppgaveteksten, og nullpunktene vi fant i oppgave a.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sqrt{\sin x}\, dx = \frac{2}{3}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(\sin 0)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot \sqrt{\sin x}\, dx = \frac{2}{3}(\sin \pi)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Fordi arealer ikke kan ha negativ verdi, men likevel kan telle negativt for et integral, snur vi fortegnet til det siste integralet. Arealet avgrenset av grafen til f og x-aksen blir dermed

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

c $$V = \pi \int_0^{2\pi} \left(\cos x \cdot \sqrt{\sin x}\right)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$$

Vi regner nå ut det ubestemte integralet med variabelskiftet $u = \cos x$ Det gir $u' = -\sin x$ og dermed $dx = -\frac{1}{\sin x} du$.

$$\pi \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = \pi \int u^2 \cdot \sin x \cdot \left(-\frac{1}{\sin x}\right) du = -\pi \int u^2 \, du = -\frac{\pi}{3} u^3 + C = -\frac{\pi}{3} \cos^3 x + C$$

Så kan vi finne det bestemte integralet som gir oss volumet av omdreiningslegemet.

$$V = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \left[-\frac{\pi}{3} \cos^3 x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{3}(\cos \pi)^3 - \left(-\frac{\pi}{3}(\cos 0)^3\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3} \cdot (-1) + \frac{\pi}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

3.134

a $6\cos^2 x + b\cos x = 0 \quad , \quad x \in [0°, 360°\rangle \quad , \quad b \in \mathbb{R}$

$\cos x \cdot (6\cos x + b) = 0$

$\cos x = 0 \quad \vee \quad 6\cos x + b = 0$

Den første av disse to likningene gir løsninger som gjelder for alle verdier av b.

$\cos x = 0$

$x = 90° + k \cdot 180°$

$x = 90° \quad \vee \quad x = 270°$

Så ser vi på den andre likningen for å finne hvor mange ekstra løsninger vi får for ulike verdier av b.

$6\cos x + b = 0$

$\cos x = -\frac{b}{6}$

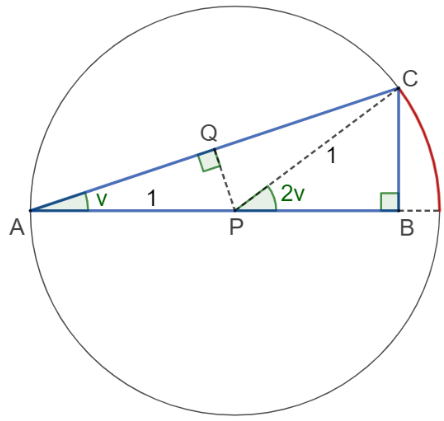
I hvert omløp vil $\cos x$ ta verdiene 1 og -1 nøyaktig én gang, så $b = -6$ og $b = 6$ gir én ekstra løsning hver, henholdsvis $x = 0°$ og $x = 180°$.

$\cos x$ har verdier på $\langle -1, 1\rangle$ to ganger i hvert omløp, så $-6 < b < 0$ og $0 < b < 6$ gir den opprinnelige likningen to ekstra løsninger, mens $b = 0$ gir løsningene $x = 0°$ og $x = 180°$, som vi allerede har registrert.

Når $b < -6$ eller $b > 6$, får vi ingen ekstra løsninger.

Det betyr at vi får to løsninger når $b < -6, b = 0$ eller $b > 6$, tre løsninger når $b = \pm 6$, og fire løsninger når $-6 < b < 0$ eller $0 < b < 6$.

3.135



a Siden $AP = PC = 1$, er ΔAPC likebeint. Derfor er $\angle PCQ = \angle PAQ = v$.

Da er $\angle APC = 180° - 2v$.

$\angle BPC$ og $\angle APC$ er nabovinkler, så $\angle BPC = 2v$.

b I ΔBPC er BP hosliggende katet til $\angle BPC$, og siden hypotenusen $PC = 1$, er $PB = \cos 2v$. Det følger at $AB = AP + PB = 1 + \cos 2v$.

I ΔAQP er AQ hosliggende katet til $\angle PAQ$, og siden hypotenusen $AP = 1$, er $AQ = \cos v$. I ΔCPQ er QC hosliggende katet til $\angle QCP$, og siden hypotenusen $CP = 1$, er $QC = \cos v$. Det gir oss at $AC = AQ + QC = \cos v + \cos v = 2\cos v$.

c

$$\begin{aligned}
AB^2 + BC^2 &= AC^2 \\
(1+\cos 2v)^2 + \sin^2 2v &= (2\cos v)^2 \\
1 + 2\cos 2v + \cos^2 2v + \sin^2 2v &= 4\cos^2 v \\
1 + 2\cos 2v + 1 &= 4\cos^2 v \\
2\cos 2v &= 4\cos^2 v - 2 \\
\cos 2v &= 2\cos^2 v - 1 \\
\cos 2v &= 2\cos^2 v - (\sin^2 v + \cos^2 v) \\
\cos 2v &= \cos^2 v - \sin^2 v
\end{aligned}$$

3.136

a $f'(x) = A\cos(cx+\varphi)\cdot(cx+\varphi)' = Ac\cos(cx+\varphi)$

$f''(x) = Ac\cdot\big(-\sin(cx+\varphi)\big)\cdot(cx+\varphi)' = -Ac^2\sin(cx+\varphi)$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
-Ac^2\sin(cx+\varphi) &= 0 \\
\sin(cx+\varphi) &= 0 \\
cx+\varphi &= k\cdot\pi \\
x &= \frac{k\cdot\pi-\varphi}{c}
\end{aligned}$$

Denne verdien setter vi inn i $f(x)$.

$f\left(\frac{k\cdot\pi-\varphi}{c}\right) = A\sin\left(c\cdot\frac{k\cdot\pi-\varphi}{c}+\varphi\right)+d = A\sin(k\cdot\pi)+d = A\cdot 0+d = d$

Når funksjonsverdien er d, ligger punktet på likevektslinja $y = d$.

b Vendepunkter på grafen til harmoniske svingninger ligger midt mellom et toppunkt og et bunnpunkt, både med hensyn på *x*-verdi og *y*-verdi. Det betyr at $x = 4 + (4-2) = 6$ er et minimalpunkt, med tilhørende minimalverdi $g(6) = 1-(4-1) = 1-3 = -2$. Altså er $(6, -2)$ et bunnpunkt.

c Amplituden $A = \frac{4-(-2)}{2} = 3$. Likevektslinja $y = \frac{4+(-2)}{2} = 1$. Avstanden mellom maksimalpunktet $x = 2$ og nærmeste minimalpunkt til høyre $x = 6$ er nødvendigvis en halv periode, så perioden $p = (6-2)\cdot 2 = 8$, som gir $c = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Det gir $g(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \varphi\right) + 1$. Dessuten vet vi at $g(2) = 4$, som gir likningen

$$3\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2 + \varphi\right) + 1 = 4$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$$

$$\varphi = k\cdot 2\pi$$

Det betyr at vi kan sette $k = 0$, som gir $\varphi = 0$. Da får vi $g(x) = 3\sin\frac{\pi}{4}x + 1$.

3.137

a Hvis A skal være positiv, må vi snu fortegnet, så $A = 3$. Med det har vi forskjøvet grafen med π og må derfor kompensere for dette ved å legge til eller trekke ifra π i parentesen. Vi får $f(x) = 3\sin(2x + 1 + \pi) + 4$.

b Hvis c skal være positiv, kan vi starte med å gange parentesen med –1. Med det har vi forskjøvet grafen med π og må derfor kompensere for dette ved å legge til eller trekke ifra π i parentesen. Vi får $f(x) = 3\sin(2x - 1 + \pi) + 4$.

c Hvis A skal være positiv, må vi snu fortegnet, så $A = 3$. Med det har vi forskjøvet grafen med π og må derfor kompensere for dette. Men hvis også c skal være positiv, kan vi gange parentesen med –1, og da forskyver vi grafen med π én gang til, og denne forskyvningen utlikner den første. Vi får $f(x) = 3\sin(2x - 1) + 4$.

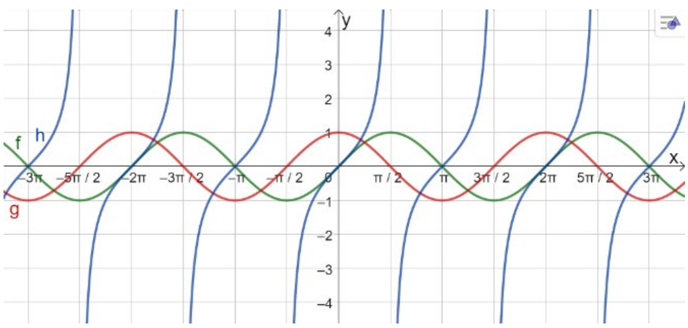
3.138

a **1** $\sin(-x) = -\sin x$, så f er en odde funksjon.

2 $\cos(-x) = \cos x$, så g er en jevn funksjon.

3 $\tan(-x) = -\tan x$, så h er en odde funksjon.

b Påstandene stemmer.

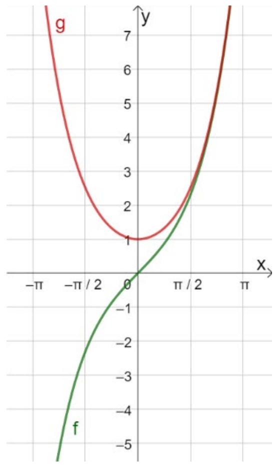


c $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{-e^{-x} + e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$

$\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = -\dfrac{-e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{-e^{x} - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

Altså er $\sinh(x)$ en odde funksjon, mens $\cosh(x)$ er en jevn funksjon.

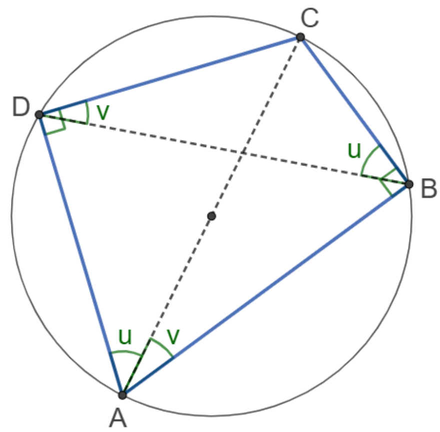
I koordinatsystemet er $f(x) = \sinh(x)$, som er symmetrisk om origo, og $g(x) = \cosh(x)$, som er symmetrisk om y-aksen.



3.139

Thalessetningen sier at siden AC er diameter, er $\angle B = \angle D = 90°$.
Videre er $\angle CBD = \angle CAD = u$ fordi de to vinklene spenner over samme sirkelbue. Tilsvarende er $\angle BDC = \angle BAC = v$.
Vi betrakter så de to rettvinklede trekantene ABC og ACD, og ser at $AB = \cos v$, $CD = \sin u$, $AD = \cos u$ og $BC = \sin v$.
Ptolemaiossetningen sier at $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. Vi setter inn kjent informasjon og får at $AC \cdot BD = \cos v$.

$BD = \cos v \cdot \sin u + \cos u \cdot \sin v$.



Sinussetningen gir

$$\frac{BD}{\sin(u+v)} = \frac{\cos u}{\sin(90° - u)}$$

$$\frac{BD}{\sin(u+v)} = \frac{\cos u}{\cos u}$$

$$BD = \sin(u+v)$$

Dette setter vi inn i likningen ovenfor og får

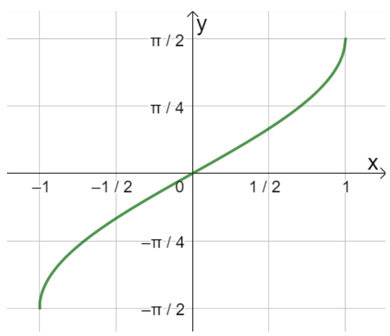
$\sin(u+v) = \cos v \cdot \sin u + \cos u \cdot \sin v$.

3.140

a **1** $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ **2** $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

3 $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$ **4** $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$

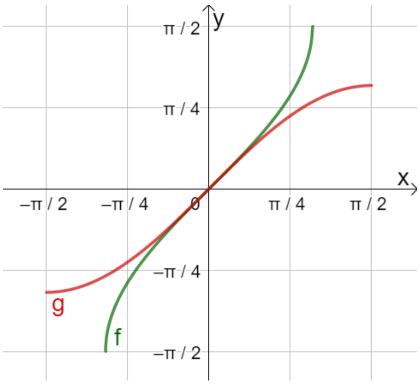
b



c For $f(x) = \arcsin x$ er $D_f = [-1\,,1]$ og $V_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, fordi denne funksjonen er den omvendte funksjonen til $g(x) = \sin x$, så lenge vi avgrenser til $D_g = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (som også gir $V_g = [-1\,,1]$).

d Vi må avgrense til $D_g = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ for at funksjonen skal bli én-entydig, og dermed ha en omvendt funksjon. Blir intervallet større, vil det finnes flere x-verdier som gir samme funksjonsverdi.

e Grafene er speilet om linja $y = x$.



f **1** $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

2 $\arccos 1 = 0$

3 $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

4 $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

g For $h(x) = \arccos x$ er $D_h = [-1\,,1]$ og $V_h = [0\,,\pi]$, fordi denne funksjonen er den omvendte funksjonen til $i(x) = \cos x$, så lenge vi avgrenser til $D_i = [0\,,\pi]$ (som også gir $V_i = [-1\,,1]$).

h Den omvendte funksjonen til $h(x) = \arccos x$ er $i(x) = \cos x$, $D_i = [0\,,\pi]$.

KAPITTELTEST

Oppgave 1

a $\cos x$ leser vi av på førsteaksen, ikke på andreaksen. Da finner vi at $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gir løsningene

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi$.

b Oppgaveteksten avgrenser x til intervallet $[0\,,\,4\pi\rangle$, mens oppgaveløseren har latt de generelle løsningene stå. I stedet blir løsningsmengden $L = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}$ ved å velge $k = 0$ og $k = 1$.

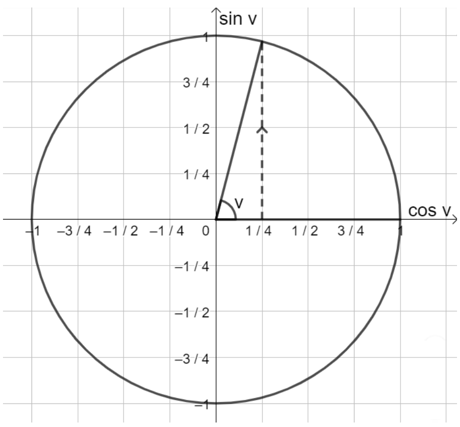
c Oppgaveløseren har glemt at det fins to løsninger i første omløp, så han mangler den ene generelle løsningen, og dermed også to av løsningene i løsningsmengden. De generelle løsningene er $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, som gir $L = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}\right\}$ ved å velge $k = 0$ og $k = 1$.

d Den generelle løsningen skal formuleres med periode (her: $k \cdot \pi$) idet man fjerner den trigonometriske funksjonen. Dette leddet skal være med i videre utregninger og vil påvirkes av dem. Det er ikke noe vi hekter på helt til slutt. Slik skal utregningen se ut:

$$\tan 2x = 1$$
$$2x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$
$$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

Oppgave 2

a



b

1 $\cos(180° - v) = -\cos v = -\frac{1}{4}$

2 $\sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

3 $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$

4 $\cos 2v = 2\cos^2 v - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$

5 $\sin 2v = 2\sin v \cdot \cos v = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

6 $\tan 2v = \frac{2\tan v}{1 - \tan^2 v} = \frac{2\sqrt{15}}{1 - 15} = -\frac{2\sqrt{15}}{14} = -\frac{\sqrt{15}}{7}$

Oppgave 3

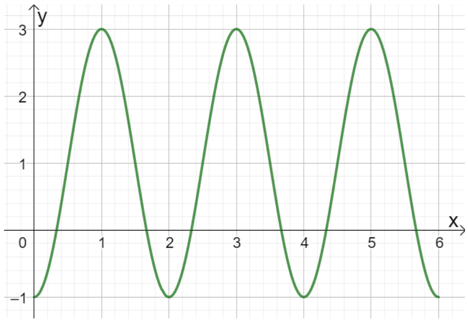
a Nærmeste bunnpunkt (2 , –1) ligger en halv periode unna toppunktet i (1 , 3), så en hel periode er lik 2. Det betyr at vi også har maksimalpunkt i $x = 1+2 = 3$, og den tilhørende funksjonsverdien er den samme som i det første toppunktet, altså 3. Dermed har vi et toppunkt i (3 , 3).

b Amplituden $A = \dfrac{3-(-1)}{2} = 2$ Likevektslinja $y = \dfrac{3+(-1)}{2} = 1$ $c = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Når vi ser på funksjonsuttrykket $f(x) = 2\sin \pi x + 1$, ser vi at vi får toppunkt i $\left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$. Men vår funksjon har toppunkt i (1 , 3) og er dermed forskjøvet $\dfrac{1}{2}$ mot høyre. Derfor er $x_0 = \dfrac{1}{2}$, og $\varphi = -\dfrac{1}{2}\cdot\pi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Vi får funksjonen $f(x) = 2\sin\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$.

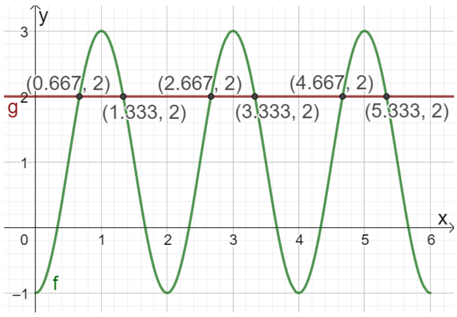
c



d Vi får skjæring mellom $f(x) = 2\sin\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$ og $g(x) = 2$ når $x \in \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{14}{3}, \dfrac{16}{3}\right\}$. Nå vil kommandoen IntegralMellom i CAS gi oss en avrunding av arealet vi leter etter.

1 IntegralMellom$\left(f, g, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ + IntegralMellom$\left(f, g, \dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$ + IntegralMellom$\left(f, g, \dfrac{14}{3}, \dfrac{16}{3}\right)$

→ **1.308**



Hvis vi vil ha det nøyaktige svaret:

$$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left(2\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+1-2\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{8}{3}}^{\frac{10}{3}}\left(2\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+1-2\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{14}{3}}^{\frac{16}{3}}\left(2\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+1-2\right)\mathrm{d}x$$

$$=3\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left(2\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=3\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)-x\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}$$

$$=3\left[\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=3\left[\left(-\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=3\left[\frac{\sqrt{3}}{\pi}-\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi}+\frac{2}{3}\right]$$

$$=\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{\pi}$$

Oppgave 4

a Dette er en enhetssirkel, og da leser vi av $\cos v$ på førsteaksen, og $\sin v$ på andreaksen. Det betyr at lengden av rektanglet blir $2\cos v$, ettersom rektanglet strekkes ut i både positiv og negativ retning langs førsteaksen – og dette er også opphavet til at v er avgrenset til $\left\langle 0\,,\frac{\pi}{2}\right\rangle$ – mens bredden bare blir $\sin v$.
Produktet av disse blir $F(v)=2\sin v\cdot\cos v$.

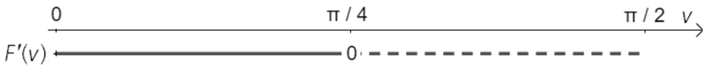
b

$$\begin{aligned}F'(v)&=(2\sin v)'\cdot\cos v+2\sin v\cdot(\cos v)'\\&=2\cos v\cdot\cos v+2\sin v\cdot(-\sin v)\\&=2(\cos^2 v-\sin^2 v)\\&=2\cos 2v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'(v)&=(2\sin v)'\cdot\cos v+2\sin v\cdot(\cos v)'\\&=2\cos v\cdot\cos v+2\sin v\cdot(-\sin v)\\&=2(1-\sin^2 v)-2\sin^2 v\\&=2-4\sin^2 v\\&=2(1-2\sin^2 v)\\&=2\cos 2v\end{aligned}$$

c Først finner vi vinkelen som gir oss det største arealet ved å bruke derivasjon og fortegnslinje.

$$\begin{aligned}F'(v)&=0\\2\cos 2v&=0\\\cos 2v&=0\\2v&=\frac{\pi}{2}\\v&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$



$v=\frac{\pi}{4}$ er altså et maksimalpunkt, og $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$ blir rektanglets størst mulige areal.

d Som fortegnslinja i oppgave c viser, er $v=\frac{\pi}{4}$ det eneste maksimalpunktet i intervallet $\left\langle 0\,,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Oppgave 5

Sammenfallende grafer betyr at

$$5\sin(2x-1)-3=5\cos(2x+k)-3$$
$$\sin(2x-1)=\cos(2x+k)$$

Grafen til $\cos x$ er forskjøvet en kvart periode mot venstre i forhold til grafen til $\sin x$, det vil si $\frac{\pi}{2}$. For *f* og *g* er perioden π, så grafen til *g* er forskjøvet $\frac{\pi}{4}$ mot venstre sammenliknet med grafen til *f* når $k=-1$. For å kompensere for dette må grafen til *g* forskyves $\frac{\pi}{4}$ mot høyre, eventuelt i tillegg til et heltall antall perioder mot venstre eller mot høyre. Fordi vi vet at $c=2$, blir

$$k=-1-\frac{\pi}{4}\cdot 2+n\cdot\pi \quad , \quad n\in\mathbb{Z}$$
$$k=-1-\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$$

Siden k skal være den minste positive verdien som oppfyller denne likningen, må vi velge $n=2$, og vi får

$$k=-1-\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{3\pi}{2}-1$$

Oppgave 6

a Siden både $\sin x$ og $\cos x$ er definert for hele $\mathbb{R}$, gjelder det samme for $f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$, bortsett fra *x*-verdier som gir 0 i nevner, altså når $x=k\cdot\pi$. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{k\cdot\pi\}$, der $k\in\mathbb{Z}$.

Fra før vet vi at verdimengden til $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ er $\mathbb{R}$. Siden $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$, blir også $V_f=\mathbb{R}$.

b $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{1}{\tan x}$