Bevis

Skrevet av André Hansen

November 10, 2025

Abstract

Dette er et dokument for bevis oppgaver jeg har jobbet med. Fordi å skrive bevis er vanskelig men ser best ut i latex. I tilleg kan jeg få chatGPT til å se over bevisene mine

1 Følger og rekker

1.1 Direkte

1.1.1 Bevis at $n^3 + n, n \in \mathbb{N}$ er et partall direkte

vi vil vise at $n^3 + n$ er et partall, det vil si at det fins $m \in \mathbb{N}$ slik at $n^3 + n = 2m$ Jeg skal bevise det for når n er et partall og oddetall

Først antar vi at n er et partall

da fins $k \in \mathbb{N}$ slik at $n = 2k$. Vi får da at $n^3 + n = (2k)^3 + 2k = 2^3 \cdot k^3 + 2k = 8k^3 + 2k = 2(4k^3 + k)$.

Siden $k \in \mathbb{N}$ er $2(4k^3 + k) \in \mathbb{N}$

Dermed fins $m \in \mathbb{N}$ nemelig $m = 4k^3 + k$ slik at $n^3 + n = 2m$

Så antar vi at n er et oddetall

da fins $k \in \mathbb{N}$ slik at $n = 2k + 1$. Vi får da at $n^3 + n = (2k+1)^3 + 2k + 1 = (4k^2 + 4k + 1)(2k + 1) + 2k + 1 = 8k^3 + 8k^2 + 2k + 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 8k^3 + 12k^2 + 8k + 2 = 2(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$

samme som i sta finnes $m \in \mathbb{N}$ er også, nemelig $m = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 2$ slik at $n^3 + n = 2m$ også når n er et oddetall

Så da har vi besvist at $n^3 + n$ er et partall for alle heltall i n.

riktig men Til neste bevis med flere steg bruk paragraph for hver seksjon, også ta utregning i [ ]

1.1.2 Bevis at $a, b, c \in \mathbb{Z}$ hvis a går opp i b, og b går opp i c, så vil a gå opp i c

vi antar at $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ og $\frac{b}{c} \in \mathbb{Z}$

derfor fins $k, u \in \mathbb{Z}$ slik at $\frac{a}{b} = k$ og $\frac{b}{c} = u$

vi får da at:

$$\frac{a}{b} = k \to a = kb$$
$$\frac{b}{c} = u \to b = uc$$
$$\frac{a}{c} = \frac{kb}{c} = \frac{kuc}{c} = ku$$
$$\frac{a}{c} = ku \in \mathbb{Z}$$

siden $k, u \in \mathbb{Z}$ og $\frac{a}{c} = ku$ har vi bevist at $\frac{a}{c} \in \mathbb{Z}$

Nesten dette fungerer men er litt feil. a går opp i b betyr egentlig $b \mid a$ og jeg skulle ha brukt $b \mid a$ i stedet for $\frac{b}{a}$ legg også til **Q.E.D** på slutten for at beviset skal bli mer proft

1.1.3 Bevis at $n \in \mathbb{Z}, n \geq 5$, så kan ikke alle tallene $n, n+2, n+4$ være primtall

Vi lar $\mathbb{P}$ betegne mengden av alle primtall

Tilfelle 1: n er et partall Det finnes $k \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2k$
Det gir oss $\frac{2k}{2} \in \mathbb{Z}$ og dermed $n \notin \mathbb{P}$

Tilfelle 2: n er et odetall Det finnes $k \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2k+1$

1.2 Induksjon

1.2.1 Bevis at $2+4+6+...+2n = n(n+1)$

$P(1) : 2 = 1(1+1) \rightarrow 2 = 2$ P(1) stemmer
Jeg antar at utsagnet er sant for alle naturlige tall $n = k \in \mathbb{N}$
$2+4+6+...+2k = k(k+1)$
Jeg vil vise at utsagnet $n = k+1$ er sant:

$$\begin{aligned}
2+4+6+...+2k+2(k+1) &= (k+1)((k+1)+1) \\
2+4+6+...+2k+2(k+1) &= k(k+1)+2(k+1) \\
&= k^2+3k+2 \\
&= (k+1)(k+2)
\end{aligned}$$

P(N) stemmer
Dermed har jeg bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n
Q.E.D
Riktig Funker kan legge til:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$

For at det skal bli penere

1.2.2 Bevis $a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - 1$ er en eksplisitt formel for $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = 2a_n + 1$ for $n \geq 1$

Jeg sjekker $n = 1$
$a_1 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = 2$
P(1) stemmer
Jeg antar at formelen gjelder for et naturlig tall k, det vil si $a_k = \frac{3}{2} \cdot 2^k - 1$
Jeg skal vise at vi da har $a_{k+1} = \frac{3}{2} \cdot 2^{k+1} - 1$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_k + 1 \\
&= 2(\frac{3}{2} \cdot 2^k - 1) + 1 \\
&= 3 \cdot 2^k - 2 + 1 \\
&= \frac{3}{2} \cdot 2^{k+1} - 1
\end{aligned}$$

Dermed har jeg bevist at formlen gjelder for alle naturlige tall
Q.E.D
Riktig

1.2.3 Bevis at $P(n) : (x^n)' = nx^{n-1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Jeg sjekker $n = 1$

$(x^1)' = 1x^{1-1} \rightarrow x' = 1$

Vi vet at x' har et stigningstall på 1, det vil si $x' = 1$

$P(1)$ stemmer

Jeg antar at utsagnet gjelder for alle naturle tall $k \in \mathbb{N}$, Det vil si $(x^k)' = kx^{k-1}$

Jeg vil vise at $P(k+1)$ er sant:

$$(x^{k+1})' = (k+1)x^{(k+1)-1} = x^k(k+1)$$

Jeg bruker definisjonen til den deriverte

$$(x^{k+1})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x + x)^{k+1} - x^{k+1}}{\Delta x}$$

For å løse denne oppgaven må jeg bruke binomisk formel, den sier at:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x + x)^{k+1} - x^{k+1}}{\Delta x} \\
(\Delta x + x)^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} \Delta^i \\
(\Delta x + x)^{k+1} &= \binom{k+1}{1} x^{k+1-1} \Delta x^1 + \binom{k+1}{2} x^{k-1} \Delta x^2 + ... + \binom{k+1}{k+1} x^{(k+1)-(k+1)} \Delta x^{k+1} \\
(\Delta x + x)^{k+1} &= x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k \Delta x + \binom{k+1}{2} x^{k-1} \Delta x^2 + ... + \Delta x^{k+1} \\
(x^{k+1})' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k \Delta x + \binom{k+1}{2} x^{k-1} \Delta x^2 + ... + \Delta x^{k+1}] - x^{k+1}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{k+1}{1} x^k \Delta x + \binom{k+1}{2} x^{k-1} \Delta x^2 + ... + \Delta x^{k+1}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \binom{k+1}{1} x^k + \binom{k+1}{2} x^{k-1} \Delta x + ... + \Delta x^k \\
&= \binom{k+1}{1} x^k + \binom{k+1}{2} x^{k-1} 0 + ... + 0^k \\
&= \binom{k+1}{1} x^k \\
&= (k+1)x^k
\end{aligned}$$

Dermed har jeg bevist at $(x^{k+1}) = (k+1)x^k$ som var det jeg vile bevise. Dette viser at utsagnet gjelder for alle natulrige tall $n \in \mathbb{N}$

Q.E.D

Riktig

Brukte chat gpt da, men bare til binomisk formel. Kunne også ha blitt løst med potensregelen.

1.2.4 Bevis at $n^5 - n$ er delelig med 5 for $n \in \mathbb{N}$

$P(1) : 1^5 - 1 = 0$

$P(1)$ stemmer fordi $\frac{0}{5} \in \mathbb{Z}$

Jeg antar at utsagnet er sant for $k \in \mathbb{N}$ og er delig med 5. Det vil si at det fines $s \in \mathbb{Z}$ slik at $k^5 - k = 5s$

Jeg vil vise at $P(n+1)$ er sant, det vil si at det finnes tall $r \in \mathbb{Z}$ slik at $(k+1)^5 - (k+1) = 5r$

$$\begin{aligned}
(k+1)^5 - (k+1) &= 1k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k^1 + 1 - k - 1 \\
&= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\
&= 5r + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \qquad \textbf{Her bruker vi antagelsen} \\
&= 5(s + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \\
&= 5(r)
\end{aligned}$$

I den siste likheten har jeg kalt $s + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k$ for r

Jeg har dermed bevist med induksjon at $\frac{n^5-n}{5} \in \mathbb{Z}$ for $n \in \mathbb{N}$

Riktig Men kan kanskje bruke mer ord i sluttsetningen

1.2.5 Lag en tabel som viser hvilke naturlige tall ser ut til at $2^n > 2n$ så bevis resultatet ved induksjon

n	2^n	$2n$	$2^n > 2n$
1	2	2	usant
2	4	4	usant
3	8	6	sant
4	16	8	sant
5	32	10	sant
6	64	12	sant

Jeg ønske å bevise at $2^n > 2n$ for $n \geq 3$

Utsagnet er sant for $n = 3$. Jeg antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $k \geq 3$, altså at $2^k > 2k$

Jeg må vise at da er også $2^{k+1} > (2(k+1))$

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\
&> 2 \cdot 2k \qquad \textbf{Her bruker vi antagelsen} \\
&= 2(k+1)
\end{aligned}$$

Jeg har dermed bevist ved induksjon at $2^n > 2n$ er sant for alle naturlige tall $n \geq 3$

Riktig

References