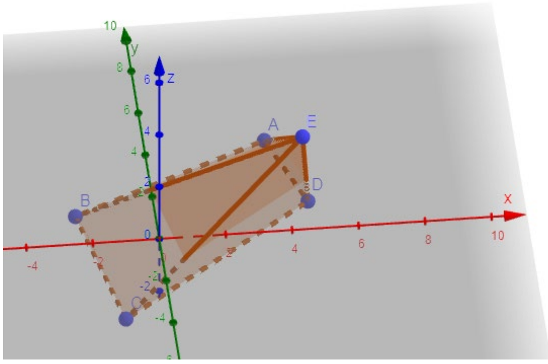
R2 kapittel 5 Romgeometri

LØSNINGER AV OPPGAVENE I BOKA

5.1
Vi skriver inn koordinatene til hver av punktene i algebrafeltet. Deretter bruker vi Pyramide-verktøyet: Vi klikker på *A*, *B*, *C*, *D* og så *A* igjen for å definere grunnflaten. Etterpå klikker vi på *E* for å definere toppunktet i pyramiden.

○	A = (4, 8, -3)
○	B = (-2, 5, -3)
○	C = (-1, 0, -3)
○	D = (5, 5, -3)
○	E = (4, -3, 6)

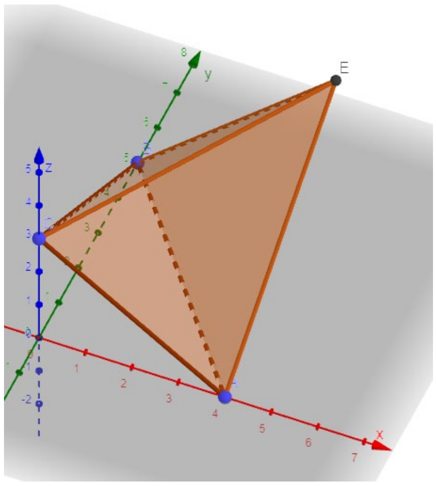


5.2
Vi skriver inn punktene *A*, *B* og *C* i algebrafeltet.

For å lage trekanten *ABC* bruker vi verktøyet Mangekant og trykker på *A*, *B*, *C* og til slutt *A* igjen.

Vi velger så verktøyet Ekstruder til pyramide, klikker på grunnflaten *ABC* og skriver inn 6 som høyde.

○	t1 = Mangekant(A, B, C) → 13.87
○	e = Pyramide(t1, 6) → 27.73



I algebrafeltet ser vi at arealet av trekanten *ABC* er 13,87, og at volumet av pyramiden *ABCE* er 27,73. Formelen for volumet av en pyramide gir

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\cdot 13{,}87\cdot 6 = 27{,}74$

(Vi får et lite avvik siden 13,87 er en tilnærmingsverdi for *G*.)

5.3

a $-4\vec{v} = -4\cdot[5\,,-2\,,1] = [-20\,,8\,,-4]$

b $3\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 3\cdot([1\,,2\,,3]+[5\,,-2\,,1]) = 3\cdot[6\,,0\,,4] = [18\,,0\,,12]$

c $5\cdot(2\vec{w}) = 10\vec{w} = 10\cdot[7\,,0,\,5] = [70\,,0\,,50]$

d $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = [1\,,2\,,3]+[5\,,-2\,,1]+[7\,,0\,,5] = [1+5+7\,,2+(-2)+0\,,3+1+5] = [13\,,0\,,9]$

e $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w} = [1\,,2\,,3]-[5\,,-2\,,1]+[7\,,0\,,5] = [1-5+7\,,2-(-2)+0\,,3-1+5] = [3\,,4\,,7]$

f $-3\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w} = -3\cdot[1\,,2\,,3]+[5\,,-2\,,1]+2\cdot[7\,,0\,,5] = [-3\,,-6\,,-9]+[5\,,-2\,,1]+[14\,,0\,,10] = [16\,,-8\,,2]$

5.4

Vi bruker rad 1, 2 og 3 til å definere de tre vektorene ved hjelp av kommandoen Vektor(<Punkt>).

I rad 4 kan vi nå skrive uttrykket rett inn og få svaret $\left[\sqrt{2}+3\,,-\dfrac{2}{3}\,,3\sqrt{2}\right]$.

1 $u := \text{Vektor}\left((1, \sqrt{2}, 3)\right)$
$\rightarrow\ \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

2 $v := \text{Vektor}((6, -4, 1))$
$\rightarrow\ \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 $w := \text{Vektor}\left(\left(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{3}\right)\right)$
$\rightarrow\ \mathbf{w} := \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

4 $\sqrt{2}\cdot u + \frac{2}{3}\cdot v - \frac{2}{7}\cdot w$
$\rightarrow\ \begin{pmatrix} \sqrt{2}+3 \\ \frac{-2}{3} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5.5

a Vi definerer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i CAS. Vi setter så disse vektorene lik hverandre. Da må *x*-, *y*- og *z*-komponentene være de samme for begge vektorene, så $s = -4$.

1 $u := \text{Vektor}((1, s, 3))$
$\rightarrow\ \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 3 \end{pmatrix}$

2 $v := \text{Vektor}((1, -4, 3))$
$\rightarrow\ \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

3 Løs$(u = v)$
$\rightarrow\ \{s = -4\}$

b Uansett hvilken verdi vi velger for *t*, vil *z*-komponenten til $\vec{v}$ være 3, mens *z*-komponenten til $\vec{w}$ vil være 2. Siden disse aldri er like, kan heller ikke vektorene være like for noen verdi av *t*.

c Hvis $\vec{v}$ starter i origo, er den posisjonsvektoren til (1 , –4 , 3). Den slutter altså i (1 , –4 , 3) hvis den starter i origo.

d Dersom $\vec{u}$ er posisjonsvektoren til (1 , 2 , 3), må $\vec{u}$ ha koordinatene [1 , 2 , 3]. Da ser vi at $s = 2$.

5.6

a I et parallellepiped er alle sideflatene parallellogrammer. Vi ser at både $\overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{HG}$ har samme retning som, og er like lange som, $\vec{u}$. $\overrightarrow{BC}$ har ikke samme retning og er derfor ikke lik $\vec{u}$. $\overrightarrow{FE}$ er parallell med og like lang som $\vec{u}$, men den er motsatt rettet. Dermed er det bare $\overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{HG}$ som er lik $\vec{u}$.

b En vektor som er motsatt av $\vec{v}$, har samme lengde som, men er motsatt rettet av $\vec{v}$. Vi ser at dette gjelder $\overrightarrow{DA}$ og $\overrightarrow{GF}$. Det kan se ut som om $\overrightarrow{BC}$ er en kandidat, men den har samme retning som $\vec{v}$ og er derfor ikke en motsatt vektor. Det siste alternativet er $\overrightarrow{GC}$, men den peker verken i samme eller motsatt retning av $\vec{v}$, så heller ikke denne er en motsatt vektor. De to vektorene som er motsatte av $\vec{v}$, er altså $\overrightarrow{DA}$ og $\overrightarrow{GF}$.

c $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

d $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{FG} = \vec{u} - \vec{v}$

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \vec{u} + \vec{w}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{EF} = \vec{w} - \vec{v} - \vec{u}$

5.7

a $\overrightarrow{PQ} = [7-7\ ,\ 2-5\ ,\ 7-3] = [0\ ,\ -3\ ,\ 4]$

b $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2} = 5$

c Avstanden mellom *P* og *Q* tilsvarer lengden av vektoren mellom dem, og er altså 5 enheter.

5.8

a $\left|[1\ ,0\ ,1]\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

b $\left|[4\ ,7\ ,-4]\right| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9$

c $\left|[23\ ,46\ ,46]\right| = \sqrt{23^2 + 46^2 + 46^2} = \sqrt{23^2 + 2^2 \cdot 23^2 + 2^2 \cdot 23^2} = \sqrt{9 \cdot 23^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{23^2} = 3 \cdot 23 = 69$

5.9

a $\overrightarrow{AB} = [2-t\ ,\ -1-1\ ,\ t-2-(-3)] = [2-t\ ,\ -2\ ,\ t+1]$

b Avstanden mellom punktene er lik lengden av $\overrightarrow{AB}$, altså

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-t)^2 + (-2)^2 + (t+1)^2} = \sqrt{4 - 4t + t^2 + 4 + t^2 + 2t + 1} = \sqrt{2t^2 - 2t + 9}$$

c Vi kan se på avstanden mellom punktene som en funksjon *d* av *t*. Da er avstanden minst i minimalpunktet til *d*. Vi deriverer ved hjelp av kjerneregelen ved å sette $d(u) = \sqrt{u}$ og $u(t) = 2t^2 - 2t + 9$:

$$d'(t) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (4t-2) = \frac{4t-2}{2\sqrt{2t^2 - 2t + 9}} = \frac{2t-1}{\sqrt{2t^2 - 2t + 9}}$$

Verdien av en brøk er null dersom telleren er null (og nevneren er ulik null). For $d(t)$ er $t = \frac{1}{2}$ en slik verdi.

Den deriverte skifter dessuten fortegn fra negativt til positivt når $t = \frac{1}{2}$ (telleren endrer fortegn, nevneren er alltid positiv). Det betyr at $t = \frac{1}{2}$ er et minimalpunkt. Avstanden mellom punktene er altså minst for $t = \frac{1}{2}$.

(Vi kunne også funnet symmetrilinja til radikanden i uttrykket for avstanden: $t = -\frac{-2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.)

d Avstanden er minst når $t = \frac{1}{2}$. Den minste mulige avstanden er derfor

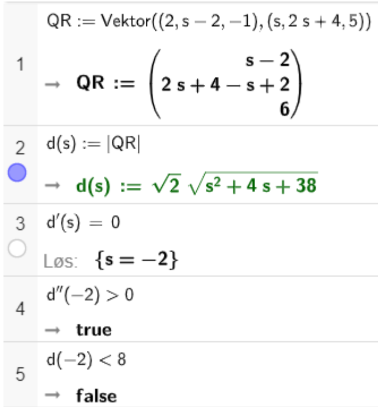
$$d\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 9} = \sqrt{\frac{1}{2} - 1 + 9} = \sqrt{\frac{17}{2}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 2}{2^2}} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

5.10

Lengden av $\overrightarrow{QR}$ gir et uttrykk for avstanden mellom *Q* og *R*. Vi definerer en funksjon *d*(*s*) for avstanden mellom punktene (lengden av vektoren) i CAS.

Funksjonen har et stasjonært punkt for *s* = –2. Siden den andrederiverte er positiv for *s* = –2, er dette et bunnpunkt.

Vi ser i rad 5 at *d*(–2), som altså er den minste mulige avstanden mellom punktene, ikke er mindre enn 8. Svaret er altså at avstanden ikke kan bli mindre enn 8.



5.11

a Fordi $[4\,,1\,,3]=\frac{1}{2}\cdot[8\,,2\,,6]$, er vektorene parallelle.

b Det fins ingen *k* slik at $[1\,,3\,,4]=k\cdot[8\,,2\,,6]$, så vektorene er ikke parallelle.

c Fordi $[-8\,,-2\,,-6]=-1\cdot[8\,,2\,,6]$, er vektorene parallelle.

d Fordi $[0\,,0\,,0]=0\cdot[8\,,2\,,6]$, er vektorene parallelle (nullvektoren er altså parallell med alle vektorer).

5.12

Dersom $\vec{a}\parallel\vec{b}$, må $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$, det vil si $[4\,,-3\,,s]=k\cdot[-12\,,t\,,-6]$. Det gir tre skalare likninger:

$4=-12k \quad\wedge\quad -3=k\cdot t \quad\wedge\quad s=-6k$.

Fra den første likningen ser vi at $k=-\frac{1}{3}$.

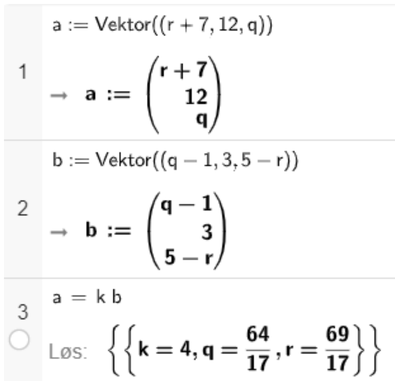
Hvis vi setter dette inn i den andre likningen, får vi $-3=-\frac{1}{3}\cdot t$, som har løsningen *t* = 9.

Når vi setter $k=-\frac{1}{3}$ inn i den tredje likningen, får vi $s=-6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=2$.

Løsningen er altså $s=2 \quad\wedge\quad t=9$.

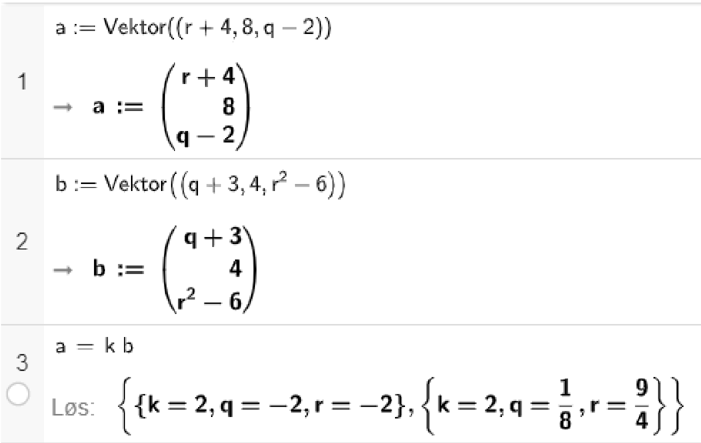
5.13

a Vi definerer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i rad 1 og 2. Så setter vi $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$, som er definisjonen av at $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Det gir én likning for *x*-komponentene, én for *y*-komponentene og én for *z*-komponentene. Vi løser altså $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$ som et likningssett der *k*, *q* og *r* er de ukjente. Fra CAS-vinduet ser vi at $q=\frac{64}{17} \quad\wedge\quad r=\frac{69}{17}$.



b Vi definerer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i rad 1 og 2. Så setter vi $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, som er definisjonen av at $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Det gir én likning for *x*-komponentene, én for *y*-komponentene og én for *z*-komponentene. Vi løser altså $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ som et likningssett der *k*, *q* og *r* er de ukjente. Fra CAS-vinduet ser vi at

$(q = -2 \quad \wedge \quad r = -2) \quad \vee \quad \left(q = \frac{1}{8} \quad \wedge \quad r = \frac{9}{4}\right)$.

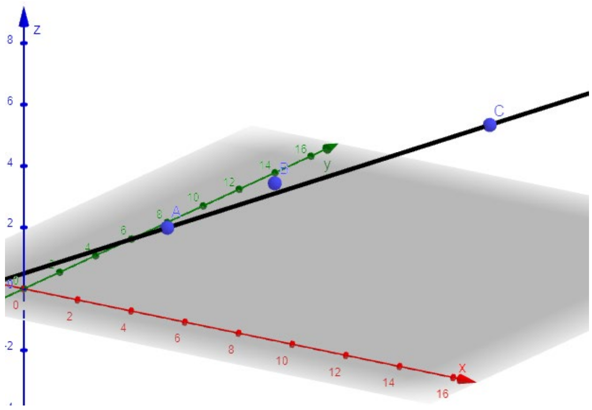


5.14

a Punktene ligger på en rett linje hvis $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, det vil si hvis det fins en *k* slik at $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$[2\,,3\,,1] = k \cdot [6\,,9\,,2]$$
$$[2\,,3\,,1] = [6k\,,9k\,,2k]$$
$$2 = 6k \quad \wedge \quad 3 = 9k \quad \wedge \quad 1 = 2k$$
$$k = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad k = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad k = \frac{1}{2}$$

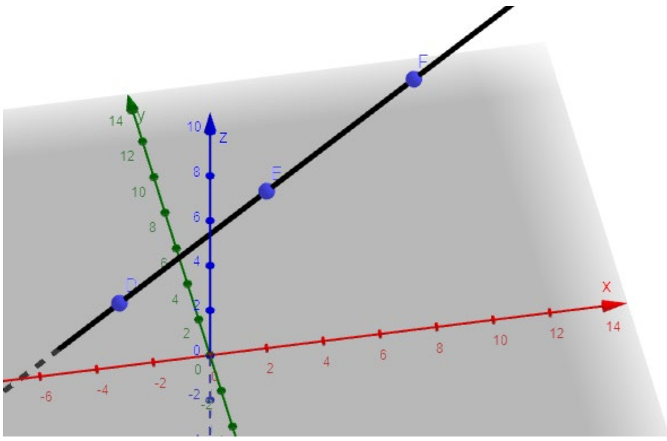
Vi får ikke én bestemt verdi for *k*, så $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$. Dermed ligger ikke *A*, *B* og *C* på en rett linje.



b Punktene ligger på en rett linje hvis $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{DF}$, det vil si hvis det fins en *k* slik at $\overrightarrow{DE} = k \cdot \overrightarrow{DF}$.

$$\overrightarrow{DE} = k \cdot \overrightarrow{DF}$$
$$[5\,,-1\,,5] = k \cdot [10\,,-2\,,10]$$
$$[5\,,-1\,,5] = [10k\,,-2k\,,10k]$$
$$5 = 10k \quad \wedge \quad -1 = -2k \quad \wedge \quad 5 = 10k$$
$$k = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad k = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad k = \frac{1}{2}$$

Verdien $k = \frac{1}{2}$ er en felles løsning for alle de tre skalare likningene, som betyr at $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DF}$.
Siden vektorene er parallelle, ligger *D*, *E* og *F* på en rett linje.



5.15

a $\overrightarrow{AB} = [0-3\,,-2-0\,,0-0] = [-3\,,-2\,,0]$
$\overrightarrow{AC} = [0-3\,,0-0\,,4-0] = [-3\,,0\,,4]$
$\overrightarrow{AD} = [2-3\,,3-0\,,1-0] = [-1\,,3\,,1]$

b $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{9+4+0} = \sqrt{13}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$

c Det er lengden av $\overrightarrow{AC}$ som er størst, som betyr at *C* ligger lengst unna *A*.

d Vi finner vektoren fra origo til hvert av punktene (punktenes posisjonsvektorer), og bruker lengden av dem til å bestemme hvilket punkt som ligger lengst unna.

$\overrightarrow{OA} = [3\,,0\,,0] \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = 3$

$\overrightarrow{OB} = [0\,,-2\,,0] \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2$

$\overrightarrow{OC} = [0\,,0\,,4] \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4$

$\overrightarrow{OD} = [2\,,3\,,1] \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{OD}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

Vi ser at det er $\overrightarrow{OC}$ som er den lengste av de fire vektorene. Altså ligger *C* lengst unna origo.

e At *C* ligger på den rette linja gjennom *A* og *B*, er det samme som at *A*, *B* og *C* ligger på en rett linje.
Vi sjekker om $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$:

$[-3\,,-2\,,0] = k \cdot [-3\,,0\,,4]$

$[-3\,,-2\,,0] = [-3k\,,0\,,4k]$

$3 = -3k \quad \wedge \quad -2 = 0 \quad \wedge \quad 0 = 4k$

Ingen *k*-verdi gjør at $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ fordi −2 = 0 er en selvmotsigelse. Dermed ligger ikke *C* på den rette linja gjennom *A* og *B*.

Akkurat som med *C* sjekker vi om vi kan skrive $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AD}$:

$[-3\,,-2\,,0] = k \cdot [-1\,,3\,,1]$

$[-3\,,-2\,,0] = [-k\,,3k\,,k]$

$-3 = -k \quad \wedge \quad -2 = 3k \quad \wedge \quad 0 = k$

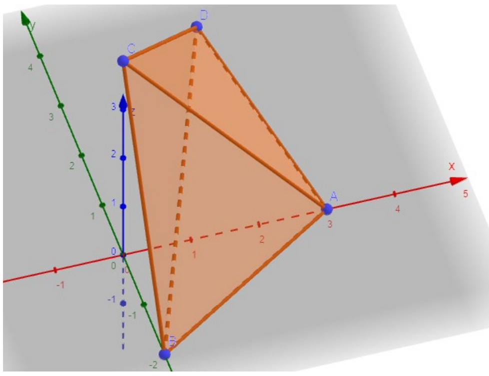
$k = 3 \quad \wedge \quad k = -\frac{2}{3} \quad \wedge \quad k = 0$

De tre skalare likningene gir ulike verdier for *k*, så det fins ikke ett tall *k* slik at $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AD}$. Det betyr at $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AD}$, som vil si at *D* heller ikke ligger på den rette linja gjennom *A* og *B*.

f Punktet *A* ligger på *x*-aksen fordi både *y*- og *z*-koordinaten er 0. På samme måte ligger *B* på *y*-aksen fordi både *x*- og *z*-koordinaten er 0, og *C* på *z*-aksen fordi både *x*- og *y*-koordinaten er 0.
D ligger ikke på noen av aksene.
Det punktet på *x*-aksen som ligger nærmest *D*, er *P*(2 , 0 , 0).
Avstanden til *x*-aksen er dermed $\left|\overrightarrow{DP}\right| = \left|[0\,,-3\,,-1]\right| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.
På samme måte er det nærmeste punktet på *y*-aksen *Q*(0 , 3 , 0), slik at avstanden til *y*-aksen er $\left|\overrightarrow{DQ}\right| = \left|[-2\,,0\,,-1]\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.
Det nærmeste punktet på *z*-aksen er *R*(0 , 0 , 1).
Dermed er avstanden til *z*-aksen $\left|\overrightarrow{DR}\right| = \left|[-2\,,-3\,,0]\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13}$.

g Vi legger inn de fire punktene og velger verktøyet Pyramide. Vi klikker på A, B, C og igjen A for å definere grunnflaten. Så klikker vi på D for å velge pyramidens toppunkt. Vi ser i algebrafeltet at volumet av pyramiden er 6,33.

a = Pyramide(A, B, C, D)
→ 6.33



5.16

a $5\vec{u} - 2\vec{v} = 5 \cdot [3\,,2\,,1] - 2 \cdot [6\,,4\,,1] = [15\,,10\,,5] - [12\,,8\,,2] = [3\,,2\,,3]$

b Vi undersøker om $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$:

$$[3\,,2\,,1] = k \cdot [6\,,4\,,1]$$
$$[3\,,2\,,1] = [6k\,,4k\,,k]$$
$$3 = 6k \quad \wedge \quad 2 = 4k \quad \wedge \quad 1 = k$$
$$k = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad k = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad k = 1$$

Det fins ikke ett tall k slik at $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, så $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ikke parallelle.

c Hvis $\vec{u} \parallel \vec{w}$, er $\vec{u} = k \cdot \vec{w}$:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{w}$$
$$[3\,,2\,,1] = k \cdot [-3\,,s\,,t]$$
$$[3\,,2\,,1] = [-3k\,,ks\,,kt]$$
$$3 = -3k \quad \wedge \quad 2 = ks \quad \wedge \quad 1 = kt$$

Fra den første likningen får vi $k = -1$. Når vi setter denne k-verdien inn i de to andre likningene, får vi $2 = -1 \cdot s \quad \wedge \quad 1 = -1 \cdot t$, som gir $s = -2$ og $t = -1$.

d $\left|\vec{v} - \vec{w}\right| = \left|[6\,,4\,,1] - [-3\,,s\,,t]\right| = \left|[9\,,4-s\,,1-t]\right|$.
Siden førstekoordinaten til vektoren er 9, er dette den minst mulige lengden. Den eneste måten det kan inntreffe på, er hvis de to andre koordinatene er lik 0, dvs. $s = 4$ og $t = 1$.

5.17

a Når to punkter ligger symmetrisk om origo, har alle koordinatene motsatt fortegn. Her ser vi at A og B har motsatt fortegn (men samme tallverdi) på både x-, y- og z-koordinat, slik at de ligger symmetrisk om origo. Det samme gjelder D og E.

b To punkter som ligger symmetrisk om xy-planet, har samme x- og y-koordinater, men motsatte z-koordinater. Dette gjelder A og D, og B og E.

c To punkter som ligger symmetrisk om z-aksen, har motsatte x- og y-koordinater, men samme z-koordinater. For eksempel har både A og E z-koordinaten 3, og x- og y-koordinatene deres har motsatt fortegn. Derfor ligger A og E symmetrisk om z-aksen. Det gjelder også B og D.

5.18

Siden A ligger på y-aksen, kan vi si at $A = (0\,,\,y\,,\,0)$. På samme måte er $B = (0\,,\,0\,,\,z)$.

a Vektoren fra A til C er $\overrightarrow{AC} = [2\,,\,3-y\,,\,1]$, og den har lengde 3. Vi setter opp en likning som vi løser i CAS, og ser at $y = 1 \;\vee\; y = 5$. Dermed kan A ha koordinatene (0 , 1 , 0) eller (0 , 5 , 0).

1	$\lvert\text{Vektor}((2, 3-y, 1))\rvert = 3$
	Løs: $\{y = 1, y = 5\}$

b Vektoren fra B til C er $\overrightarrow{BC} = [2\,,\,3\,,\,1-z]$, og den har lengde 7. Vi setter opp en likning som vi løser i CAS, og ser at $z = -5 \;\vee\; z = 7$. Dermed kan B ha koordinatene (0 , 0 , –5) eller (0 , 0 , 7).

1	$\lvert\text{Vektor}((2, 3, 1-z))\rvert = 7$
	Løs: $\{z = -5, z = 7\}$

c Vi setter $D = (p\,,\,q\,,\,r)$. I et parallellogram er $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Siden vi har to muligheter for A og to for B, er det fire muligheter for D. I CAS-vinduet til høyre har vi løst likningen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ for hver av de fire kombinasjonene av A og B, og funnet at D er et av følgende fire punkter:

$D = (2\,,4\,,6) \;\vee\; D = (2\,,4\,,-6) \;\vee\; D = (2\,,8\,,6) \;\vee\; D = (2\,,8\,,-6)$

1	DC := Vektor((p, q, r), (2, 3, 1))
	$\rightarrow \text{DC} := \begin{pmatrix} 2-p \\ 3-q \\ 1-r \end{pmatrix}$
2	Vektor((0, 1, 0), (0, 0, −5)) = DC
	Løs: $\{\{p = 2, q = 4, r = 6\}\}$
3	Vektor((0, 1, 0), (0, 0, 7)) = DC
	Løs: $\{\{p = 2, q = 4, r = -6\}\}$
4	Vektor((0, 5, 0), (0, 0, −5)) = DC
	Løs: $\{\{p = 2, q = 8, r = 6\}\}$
5	Vektor((0, 5, 0), (0, 0, 7)) = DC
	Løs: $\{\{p = 2, q = 8, r = -6\}\}$

Siden $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, er $O = 2\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right| + 2\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|$ et uttrykk for omkretsen. Vi prøver de fire ulike kombinasjonene av A, B og D.

1	A := (0, 1, 0)
	→ A := (0, 1, 0)
2	B := (0, 0, −5)
	→ B := (0, 0, −5)
3	D := (2, 4, 6)
	→ D := (2, 4, 6)
4	2 · |Vektor(A, B)| + 2 · |Vektor(A, D)|
	$\rightarrow 2\sqrt{26} + 14$
5	\$4
	≈ 24.2

1	A := (0, 1, 0)
	→ A := (0, 1, 0)
2	B := (0, 0, 7)
	→ B := (0, 0, 7)
3	D := (2, 4, −6)
	→ D := (2, 4, −6)
4	2 |Vektor(A, B)| + 2 |Vektor(A, D)|
	$\rightarrow 10\sqrt{2} + 14$
5	\$4
	≈ 28.1

1	A := (0, 5, 0)
	→ A := (0, 5, 0)
2	B := (0, 0, −5)
	→ B := (0, 0, −5)
3	D := (2, 8, 6)
	→ D := (2, 8, 6)
4	2 |Vektor(A, B)| + 2 |Vektor(A, D)|
	$\rightarrow 10\sqrt{2} + 14$
5	\$4
	≈ 28.1

1	A := (0, 5, 0)
	→ A := (0, 5, 0)
2	B := (0, 0, 7)
	→ B := (0, 0, 7)
3	D := (2, 8, −6)
	→ D := (2, 8, −6)
4	2 |Vektor(A, B)| + 2 |Vektor(A, D)|
	$\rightarrow 2\sqrt{74} + 14$
5	\$4
	≈ 31.2

Vi kan se at A(0 , 1 , 0) og B(0 , 0 , –5) er det alternativet som gir minst omkrets. Disse A- og B-koordinatene gir D(2 , 4 , 6).

5.19

a Når punktene har samme z-koordinat, er $2t - 3 = t + 1$, slik at $t = 4$. Vi setter inn denne verdien for t, slik at punktene blir henholdsvis (4 , 6 , 5) og (0 , 8 , 5). Avstanden mellom dem er lengden av vektoren mellom dem. Som vi ser i CAS-vinduet, er den $2\sqrt{5}$.

1	t := 4
	→ t := 4
2	v := Vektor((t, t + 2, 2 t − 3), (t − 4, 2 t, t + 1))
	$\rightarrow v := \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
3	|v|
	$\rightarrow 2\sqrt{5}$

b Avstanden mellom punktene tilsvarer lengden av vektoren mellom dem. Vi bruker GeoGebra til å finne $\vec{v}$, definere en funksjon $d(t)$ som lengden $\vec{v}$, og sette den deriverte lik null for å finne bunnpunktet. I rad 4 ser vi at den minste mulige avstanden er $3\sqrt{2}$.

Merk: Vi vet at $t = 3$ er minimalpunktet til d fordi vi i oppgave a fikk en større avstand enn den vi fant her. Vi kunne ellers bekreftet at dette var et minimalpunkt ved å sjekke fortegnet til den andrederiverte for $t = 3$.

1 v := Vektor((t, t + 2, 2 t − 3), (t − 4, 2 t, t + 1))
$\rightarrow \mathbf{v} := \begin{pmatrix} t-4-t \\ -t-2+2t \\ t+1-2t+3 \end{pmatrix}$

2 d(t) := |v|
$\rightarrow \mathbf{d(t)} := \sqrt{2}\sqrt{t^2-6t+18}$

3 d'(t) = 0
Løs: $\{t = 3\}$

4 d(3)
$\rightarrow 3\sqrt{2}$

5.20

a Vi definerer vektorene i CAS og bruker vanlig multiplikasjonstegn når vi finner skalarproduktet.
Vi ser at $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = -6$, altså at vi får samme svar uansett hvilken rekkefølge vi skriver vektorene opp i. Vi sier at skalarproduktet er *kommutativt*, en egenskap det har felles med for eksempel addisjon og multiplikasjon av skalarer (tall).

1 a := Vektor((3, 7, 4))
$\rightarrow \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 b := Vektor((2, 0, −3))
$\rightarrow \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

3 a · b
$\rightarrow -6$

4 b · a
$\rightarrow -6$

b $\vec{a}^2 = [3,7,4]\cdot[3,7,4] = 3\cdot3+7\cdot7+4\cdot4 = 9+49+16 = 74$

c Dersom vi bruker definisjonen av skalarproduktet, har vi at $\vec{a}^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos v$, der v er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{a}$. Den er 0° siden $\vec{a}$ er parallell med seg selv. Dermed er $\vec{a}^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0° = |\vec{a}|^2$, slik at $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{74}$.

d Nå som vi har funnet skalarproduktet mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$, kan vi bruke definisjonen av skalarproduktet til å finne vinkelen. Vi har nemlig likningen $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v = -6$, som vi kan løse ved hjelp av CAS.

Siden $v \in [0°, 180°]$, kan vi utelukke alle løsningene bortsett fra 101,2°. Vinkelen mellom vektorene er altså 101,2°.

1 a := Vektor((3, 7, 4))
$\rightarrow \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 b := Vektor((2, 0, −3))
$\rightarrow \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

3 $|a|\ |b|\ \cos(v°) = -6$
NLøs: $\{v = -821.2, v = -258.8, v = -101.2, v = 101.2, v = 258.8, v = 821.2\}$

5.21

a $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot4\cdot\cos 0° = 28\cdot1 = 28$

b $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot4\cdot\cos 30° = 28\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$

c $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot4\cdot\cos 60° = 28\cdot\frac{1}{2} = 14$

d $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot4\cdot\cos 90° = 28\cdot0 = 0$

e $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot 4\cdot\cos 135° = 28\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -14\sqrt{2}$

f $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot 4\cdot\cos 180° = 28\cdot(-1) = -28$

5.22
Vi starter med å finne skalarproduktet mellom vektorene:

$[5\,,3+t\,,-7]\cdot[2t\,,-3\,,5] = 5\cdot 2t + (3+t)\cdot(-3) + (-7)\cdot 5 = 10t - 9 - 3t - 35 = 7t - 44$

Når to vektorer står vinkelrett på hverandre, er skalarproduktet mellom dem 0. Derfor er

$$\begin{aligned} 7t - 44 &= 0 \\ 7t &= 44 \\ t &= \frac{44}{7} \end{aligned}$$

5.23
Vi bruker GeoGebra til å finne skalarproduktet. Når to vektorer står vinkelrett på hverandre, er skalarproduktet mellom dem 0. Vi setter derfor skalarproduktet lik 0 og løser likningen.

1 $\text{Vektor}((q^2, 1-q, -7))\ \text{Vektor}((2q, q+7, 1)) = 0$

Løs: $\left\{\mathbf{q = \frac{-3}{2}, q = 0, q = 2}\right\}$

Vektorene er ortogonale når $q = -\frac{3}{2} \quad \vee \quad q = 0 \quad \vee \quad q = 2$.

5.24

a $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = [1\,,0\,,0]\cdot[0\,,1\,,0] = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$

b $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z = [1\,,0\,,0]\cdot[0\,,0\,,1] = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

c $\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = [0\,,0\,,1]\cdot[0\,,0\,,1] = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$

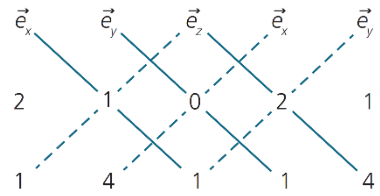
5.25
Programmet ber først brukeren om å skrive inn koordinatene til to vektorer, $\vec{u} = [x_1\,,y_1\,,z_1]$ og $\vec{v} = [x_2\,,y_2\,,z_2]$. Deretter regner det ut skalarproduktet, som er $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$. Vi vet at vektorene er ortogonale dersom skalarproduktet er 0. Hvis $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$, betyr det at cosinus til vinkelen mellom dem også er positiv, og følgelig at vinkelen mellom dem ligger i intervallet $[0°\,,90°\rangle$. I «alle andre tilfeller», det vil si når skalarproduktet er negativt, er det fordi cosinus til vinkelen mellom vektorene er negativ, altså at vinkelen er større enn 90°.

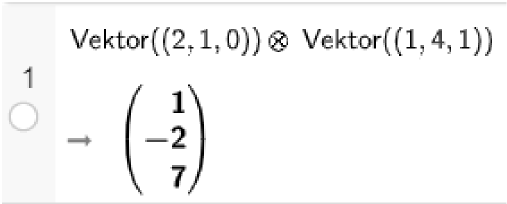
```
print("Skriv inn koordinatene til vektoren u = [x1 , y1 , z1].")
x1 = float(input("x1 = "))
y1 = float(input("y1 = "))
z1 = float(input("z1 = "))
print("Skriv inn koordinatene til vektoren v = [x2 , y2 , z2].")
x2 = float(input("x2 = "))
y2 = float(input("y2 = "))
z2 = float(input("z2 = "))
skalarprodukt = x1*x2 + y1*y2 + z1*z2
if skalarprodukt == 0:
  print("Vektorene er ortogonale.")
elif skalarprodukt > 0:
  print("Vinkelen mellom vektorene er spiss.")
else:
  print("Vinkelen mellom vektorene er stump.")
```

5.26

a Av skjemaet ser vi at

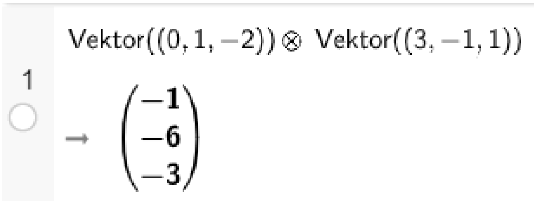
$$\begin{aligned}[2\,,1\,,0]\times[1\,,3\,,5] &= [1\cdot 1-0\cdot 4\,,\,0\cdot 1-2\cdot 1\,,\,2\cdot 4-1\cdot 1]\\ &= [1-0\,,\,0-2\,,\,8-1]\\ &= [1\,,-2\,,7]\end{aligned}$$

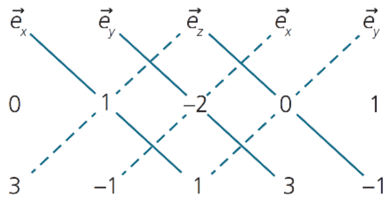




b Av skjemaet ser vi at $[0\,,1\,,-2]\times[3\,,-1\,,1] = [1\cdot 1-(-2)\cdot(-1)\,,\,-2\cdot 3-0\cdot 1\,,\,0\cdot(-1)-1\cdot 3]$

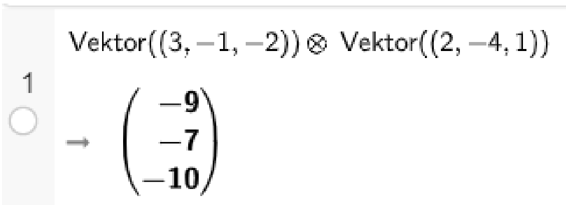
$$\begin{aligned}&= [1-2\,,-6-0\,,\,0-3]\\ &= [-1\,,-6\,,-3]\end{aligned}$$

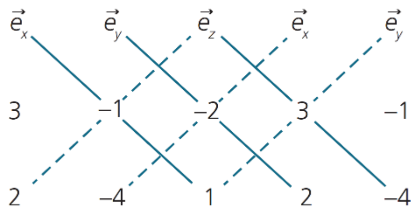




c Av skjemaet ser vi at $[3\,,-1\,,-2]\times[2\,,-4\,,1] = [-1\cdot 1-(-2)\cdot(-4)\,,\,-2\cdot 2-3\cdot 1\,,\,3\cdot(-4)-(-1)\cdot 2]$

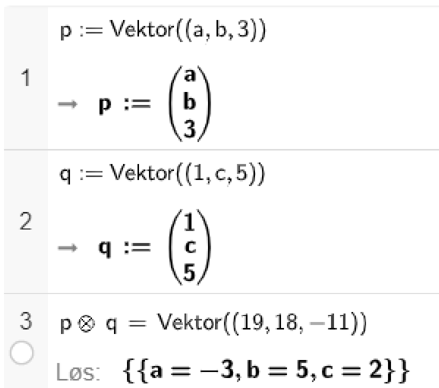
$$\begin{aligned}&= [-1-8\,,-4-3\,,-12+2]\\ &= [-9\,,-7\,,-10]\end{aligned}$$





5.27

a Vi definerer $\vec{p}$ og $\vec{q}$ i CAS og setter vektorproduktet lik $[19\,,18\,,-11]$.
Vi løser vektorlikningen og får at $a=-3 \;\;\wedge\;\; b=5 \;\;\wedge\;\; c=2$.



b Vi har nå fire ukjente, men fordi vi får oppgitt både kryss- og prikkproduktet mellom vektorene, har vi også fire skalare likninger (én for *x*-komponenten, én for *y*-komponenten og én for *z*-komponenten, og også én for skalarproduktet).

Vi skriver hver av de fire skalare likningene i rad 4–7. I rad 8 løser vi likningssystemet og finner at $a=-11 \quad \wedge \quad b=2 \quad \wedge \quad c=5 \quad \wedge \quad d=8$.

1 p := Vektor((a, 7, b))
$\rightarrow \; \mathbf{p} := \begin{pmatrix} a \\ 7 \\ b \end{pmatrix}$

2 q := Vektor((c, b, d))
$\rightarrow \; \mathbf{q} := \begin{pmatrix} c \\ b \\ d \end{pmatrix}$

3 p ⊗ q = Vektor((52, 98, −57))
$\rightarrow \; \begin{pmatrix} -b^2+7d \\ -ad+bc \\ ab-7c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 98 \\ -57 \end{pmatrix}$

4 $-b^2+7d = 52$
$\rightarrow \; -b^2+7d = 52$

5 $-ad+bc = 98$
$\rightarrow \; -ad+bc = 98$

6 $ab-7c = -57$
$\rightarrow \; ab-7c = -57$

7 $p \cdot q = -25$
$\rightarrow \; ac+bd+7b = -25$

8 {$4, $5, $6, $7}
Løs: $\{\{a=-11, b=2, c=5, d=8\}\}$

5.28

Vi bruker CAS. I rad 1 og 2 definerer vi vektorene, og kryssproduktene regnes ut i rad 3 og 4. Vi ser at $\vec{u}\times\vec{v}=[-8\,,6\,,-1]$ og at $\vec{v}\times\vec{u}=[8\,,-6\,,1]$.

Kryssproduktene er de samme, bortsett fra at fortegnene til alle komponentene er endret. Sammenhengen er altså at $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$.
På denne måten skiller kryssproduktet seg fra skalarproduktet: rekkefølgen spiller en rolle.

1 u := Vektor((1, 2, 4))
$\rightarrow \; \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 v := Vektor((3, 5, 6))
$\rightarrow \; \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

3 u ⊗ v
$\rightarrow \; \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

4 v ⊗ u
$\rightarrow \; \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.29

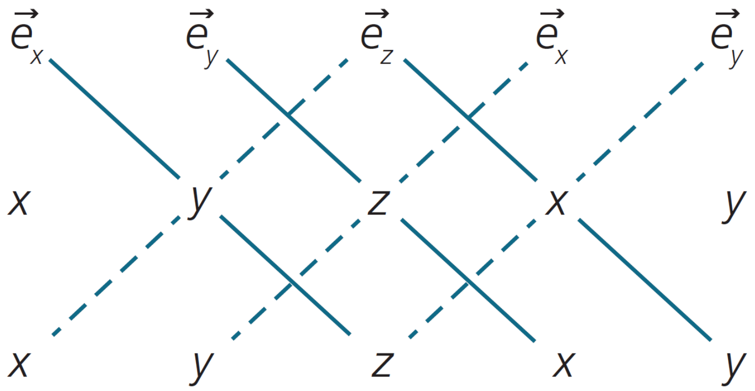
a-1 Vi bruker CAS og ser at $[1\,,8\,,2]\times[1\,,8\,,2]=[0\,,0\,,0]$.

1 Vektor((1, 8, 2)) ⊗ Vektor((1, 8, 2))
$\rightarrow \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a-2 Vi bruker CAS og ser at $[-2\,,3\,,0]\times[-2\,,3\,,0]=[0\,,0\,,0]$.

1 Vektor((−2, 3, 0)) ⊗ Vektor((−2, 3, 0))
$\rightarrow \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b Fra definisjonen av vektorproduktet har vi at
$\vec{u}\times\vec{u}=[x\,,\,y\,,\,z]\times[x\,,\,y\,,\,z]=[y\cdot z-z\cdot y\,,\,z\cdot x-x\cdot z\,,\,x\cdot y-y\cdot x]=[0\,,\,0\,,\,0]=\vec{0}$.



5.30

a $\vec{v}\times\vec{u}=-(\vec{u}\times\vec{v})=-1\cdot[-2\,,\,0\,,\,3]=[2\,,\,0\,,\,-3]$

b $4(\vec{u}\times\vec{v})=4\cdot[-2\,,\,0\,,\,3]=[-8\,,\,0\,,\,12]$

c $\vec{u}\times(2\vec{v})=2(\vec{u}\times\vec{v})=2\cdot[-2\,,\,0\,,\,3]=[-4\,,\,0\,,\,6]$

5.31

a $(3\vec{u})\times\vec{v}+\vec{u}\times(4\vec{v})=3(\vec{u}\times\vec{v})+4(\vec{u}\times\vec{v})=7(\vec{u}\times\vec{v})=7\cdot[-2\,,\,1\,,\,4]=[-14\,,\,7\,,\,28]$

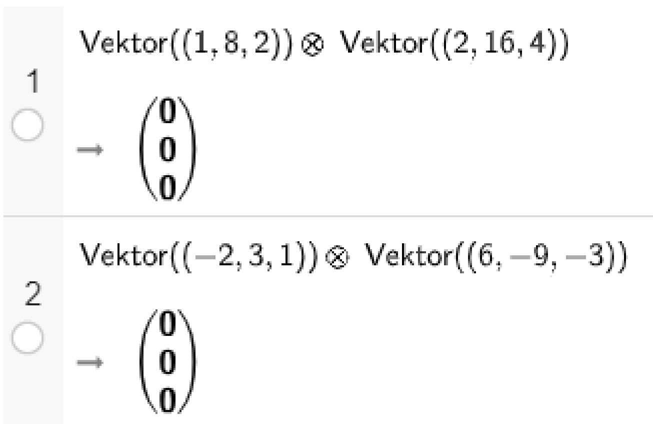
b $2(\vec{u}\times\vec{v})+3(\vec{v}\times\vec{u})=2(\vec{u}\times\vec{v})-3\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=-(\vec{u}\times\vec{v})=-[-2\,,\,1\,,\,4]=[2\,,\,-1\,,\,-4]$

c $\vec{v}\times\vec{u}+\vec{u}\times(\vec{v}-4\vec{u})=-(\vec{u}\times\vec{v})+\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times(-4\vec{u})=-4\cdot(\vec{u}\times\vec{u})=\vec{0}$

5.32

a Som vi ser i CAS-vinduet under, blir begge vektorproduktene [0 , 0 , 0].
Vi legger merke til at $[1\,,\,8\,,\,2]\parallel[2\,,\,16\,,\,4]$, og at $[-2\,,\,3\,,\,1]\parallel[6\,,\,-9\,,\,-3]$.

Det ser ut som om vektorproduktet av parallelle vektorer alltid er $\vec{0}$.



b Som vist i oppgave 5.29 er $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$. Derfor er $\vec{u}\times(k\vec{u})=k\cdot(\vec{u}\times\vec{u})=k\cdot[0\,,\,0\,,\,0]=[0\,,\,0\,,\,0]=\vec{0}$.

c Dersom vektorproduktet blir $\vec{0}$, betyr det at de to vektorene er parallelle.
Vi ønsker altså å skrive $[3\,,\,2\,,\,1]=k\cdot[9\,,\,m\,,\,3]$.

Her ser vi at $k=\frac{1}{3}$ gjør at vektorene er parallelle fordi $3=\frac{1}{3}\cdot 9$ og $1=\frac{1}{3}\cdot 3$.

Det gir $2=\frac{1}{3}m$, som har løsningen $m=6$.

5.33

a Vi ser at $\overrightarrow{AB} = [2, 3, 1]$, og at $\overrightarrow{AC} = [6, 9, 2]$. Dersom $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, ligger *A*, *B* og *C* på en rett linje. For å sjekke om $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ kan vi se om vektorproduktet mellom dem blir $\vec{0}$. Men som vi ser fra CAS-vinduet under, er vektorproduktet [–3 , 2 , 0]. Vektorene er ikke parallelle, så *A*, *B* og *C* ligger ikke på en rett linje.

1 Vektor((2, 3, 1)) ⊗ Vektor((6, 9, 2))

$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b Vi ser at $\overrightarrow{DE} = [-3, 1, 2]$, og at $\overrightarrow{DF} = [10, -2, 10]$. Dersom $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{DF}$, ligger *D*, *E* og *F* på en rett linje. For å sjekke om $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{DF}$ kan vi se om vektorproduktet mellom dem blir $\vec{0}$. Som vi ser fra CAS-vinduet under, stemmer det at vektorproduktet blir $\vec{0}$, som betyr $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{DF}$. Derfor ligger *D*, *E* og *F* på en rett linje.

1 Vektor((5, −1, 5)) ⊗ Vektor((10, −2, 10))

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.34

a Fordi vektorproduktet står vinkelrett på de to vektorene som multipliseres, er en slik vektor $[3, 4, -1] \times [-1, 2, 1] = [6, -2, 10]$.

1 Vektor((3, 4, −1)) ⊗ Vektor((−1, 2, 1))

$\rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

b Et eksempel er [1 , 10 , –7]. Samtidig vil vektoren [–1 , –10 , 7] være motsatt rettet, men like lang. Begge disse vektorene står vinkelrett på både [–3 , 1 , 1] og [1 , 2 , 3].

1 Vektor((−3, 1, 1)) ⊗ Vektor((1, 2, 3))

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$

c Vi finner først vektorproduktet mellom vektorene og definerer dette som $\vec{v} = [0, -6, 3]$.

For å få riktig lengde kan vi dividere vektoren med sin egen lengde og deretter multiplisere med $\sqrt{5}$.

Etter å ha dividert den med sin egen lengde, $|\vec{v}|$, har den lengde 1. Dersom vi så multipliserer med $\sqrt{5}$, får den endelige vektoren den ønskede lengden.

1 v := Vektor((6, 1, 2)) ⊗ Vektor((3, 1, 2))

$\rightarrow \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2 $\frac{v}{|v|} \cdot \sqrt{5}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektoren kan altså være [0 , –2 , 1]. Merk at den motsatte vektoren, [0 , 2 , –1], også er en mulighet.

d For å finne en vektor som står vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$, finner vi først $\vec{u} \times \vec{v}$. Så vil vi finne en vektor som er parallell med denne, men har lengde 3. For å få til det dividerer vi vektoren med sin egen lengde. Da har den samme retning, men lengde 1. Så multipliserer vi den med 3, slik at lengden blir 3.
Som vi ser i rad 2 i CAS-vinduet til høyre, vil vektoren [2 , 1 , 2] være en mulighet. Samtidig vil også [–2 , –1 , –2] ha lengde 3 og stå vinkelrett på $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
Hvilken av de to vektorene er den riktige?
$\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u} \times \vec{v}$, i denne rekkefølgen, danner et høyrehåndssystem.

1 Vektor((2, 4, −4)) ⊗ Vektor((−1, 0, 1))
$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 $\frac{\$1}{|\$1|} \cdot 3$
$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

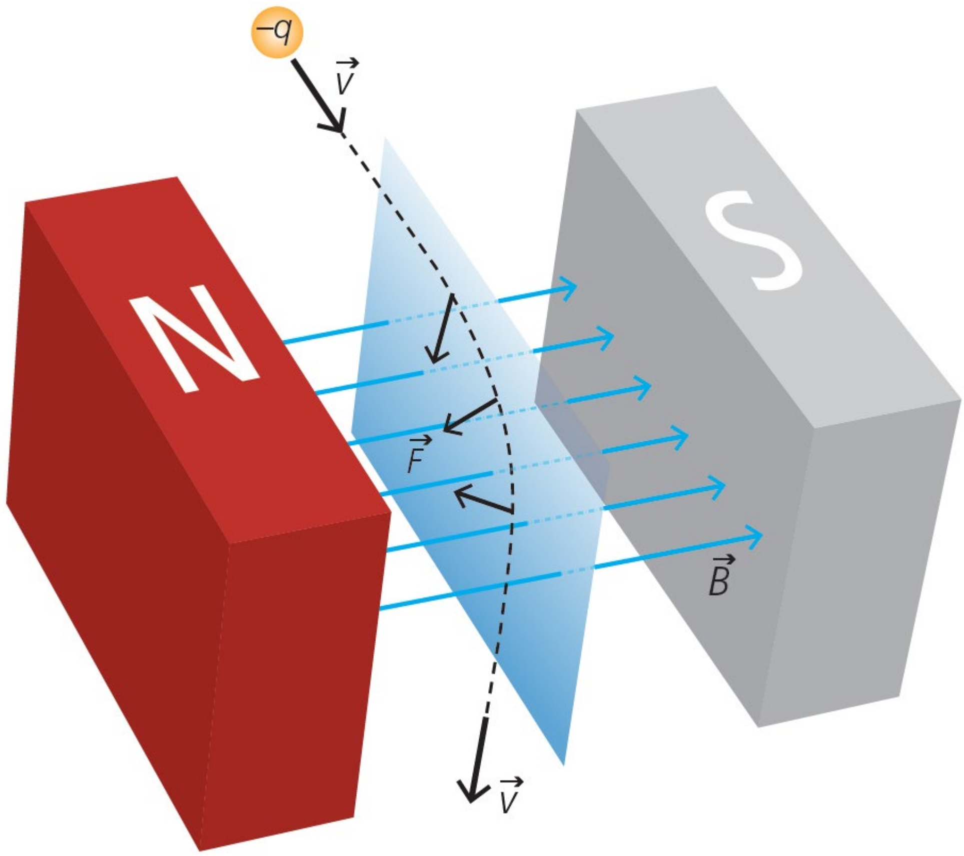
Ettersom bare [2 , 1 , 2] har samme retning som $\vec{u} \times \vec{v}$, er det bare denne som vil danne et høyrehåndssystem med $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
[–2 , –1 , –2] har motsatt retning og danner derfor et venstrehåndssystem.
Det betyr at $\vec{w} = [2, 1, 2]$.

5.35

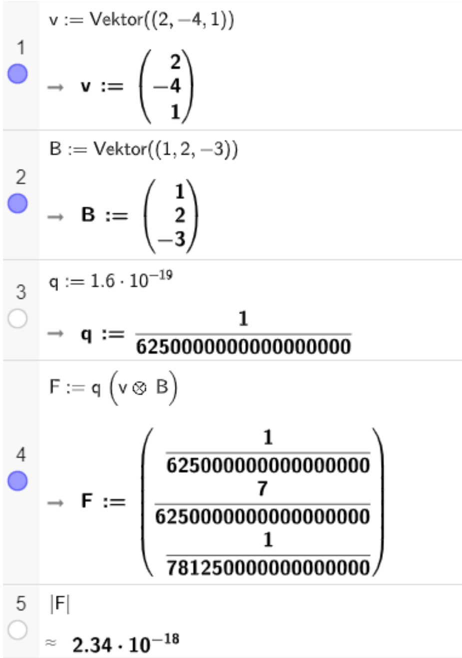
a At proporsjonalitetskonstanten er q, betyr at q skal multipliseres med vektorproduktet $\vec{v} \times \vec{B}$:
$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

b Hvis vi lar pekefingeren ha samme retning som $\vec{v}$, vil langfingeren peke i samme retning som $\vec{B}$ slik at tommelen peker oppover (i samme retning som $\vec{F}$). Dette viser at $\vec{v}$, $\vec{B}$ og $\vec{F}$ danner et høyrehåndssystem, som stemmer med formelen $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ når q er positiv.

En negativ partikkel vil ha negativ q, slik at $\vec{F}$ peker i motsatt retning av $\vec{v} \times \vec{B}$. Den negative partikkelen har derfor en akselerasjon i motsatt retning av den positive partikkelen.



c Vi starter med å definere $\vec{v}, \vec{B}$ og q. Deretter bruker vi den matematiske formuleringen vi fant i oppgave a, og finner kraftvektoren $\vec{F}$. Når vi snakker om den magnetiske kraften som virker på protonet, er det lengden av denne vektoren vi er ute etter. Vi ser i rad 5 i CAS at $\left|\vec{F}\right| = 2{,}3 \cdot 10^{-18}$.

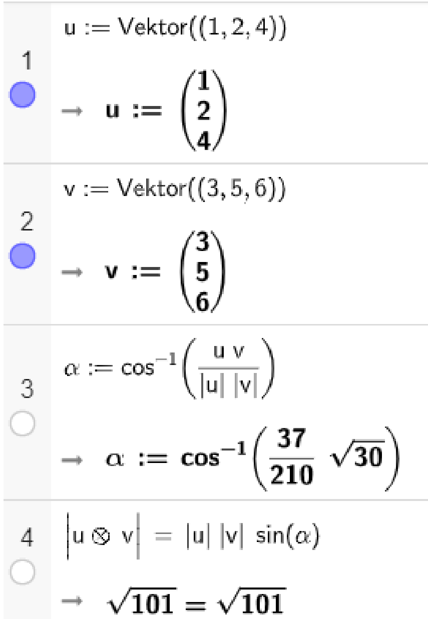


5.36

Vi definerer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i rad 1 og 2.

Siden $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, der α er vinkelen mellom vektorene, vil $\alpha = \arccos \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

I rad 4 viser vi at likheten $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$, siden vi får $\sqrt{101}$ på begge sider av likhetstegnet.



5.37

Vi kaller vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Lengden av vektorproduktet er $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta = 4 \cdot 4 \cdot \sin 30° = 16 \cdot \dfrac{1}{2} = 8$.

5.38

Fra sammenhengen $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta$ får vi likningen $3 = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin \theta$, som gir

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 60° \quad \vee \quad \theta = 120°$$

5.39

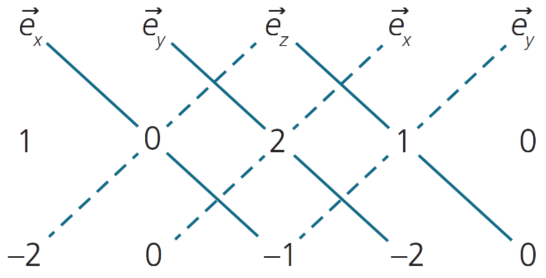
a Hvis både $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$ og $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ skal være oppfylt, må $\sin\theta = 1$ slik at $\theta = 90°$.
Vinkelen mellom vektorene er 90°.

b Hvis $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$ og $|\vec{u}\times\vec{v}| = 0$, må $\sin\theta = 0$ slik at $\theta = 0° \quad \vee \quad \theta = 180°$.
Vinkelen mellom vektorene er 0° eller 180°.

5.40

a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\cdot(-2)+0\cdot 0+2\cdot(-1) = -2+0-2 = -4$. Skalarproduktet er ikke null, som betyr at vektorene ikke står vinkelrett på hverandre. Vinkelen er nærmere bestemt stump, siden skalarproduktet er negativt.

b Vi ser at $\vec{u}\times\vec{v} = [0\cdot(-1)-2\cdot 0\ ,\ 2\cdot(-2)-1\cdot(-1)\ ,\ 1\cdot 0-0\cdot(-2)] = [0\ ,\ -3\ ,\ 0]$. Det forteller at $[0\ ,\ -3\ ,\ 0]$ står vinkelrett på både $[1\ ,\ 0\ ,\ 2]$ og $[-2\ ,\ 0\ ,\ -1]$. Dessuten viser det, fordi kryssproduktet ikke ble $\vec{0}$, at $\vec{u}$ ikke er parallell med $\vec{v}$.
Videre er $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+0^2} = \sqrt{0+9+0} = 3$.
Lengden av kryssproduktet er 3.



c Vi starter med $\sin\theta$, som kan finnes ved hjelp av sammenhengen $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$:

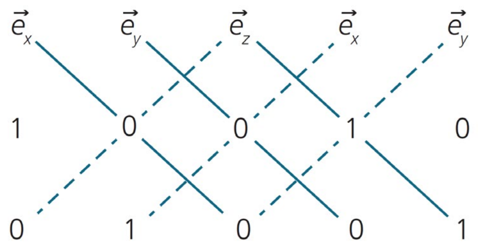
$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$$
$$3 = \sqrt{1^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sin\theta$$
$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$$
$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

Vi bestemmer $\cos\theta$ slik:

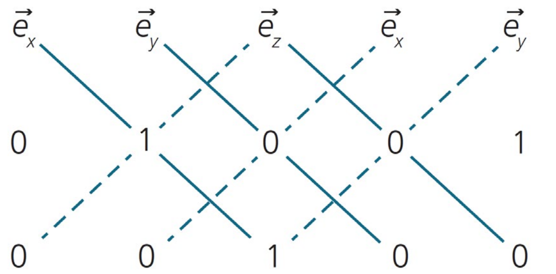
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$
$$1\cdot(-2)+0\cdot 0+2\cdot(-1) = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\theta$$
$$\frac{-2+0-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \cos\theta$$
$$\cos\theta = -\frac{4}{5}$$

5.41

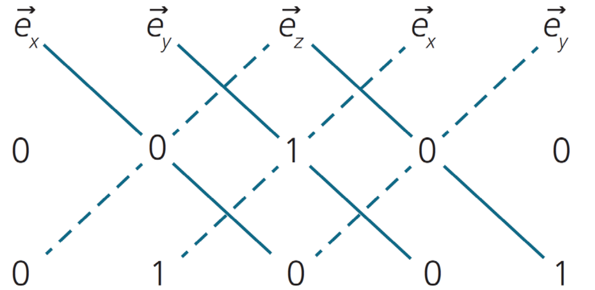
a $\vec{e}_x\times\vec{e}_y = [0\cdot 0-0\cdot 1\ ,\ 0\cdot 0-1\cdot 0\ ,\ 1\cdot 1-0\cdot 0] = [0\ ,\ 0\ ,\ 1] = \vec{e}_z$



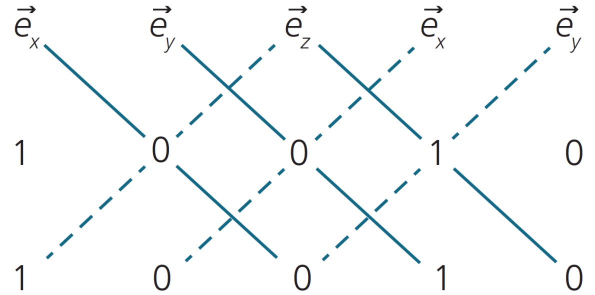
b $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = [1\cdot 1 - 0\cdot 0\,,\,0\cdot 0 - 0\cdot 1\,,\,0\cdot 0 - 1\cdot 0] = [1\,,\,0\,,\,0] = \vec{e}_x$



c $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = [0\cdot 0 - 1\cdot 1\,,\,1\cdot 0 - 0\cdot 0\,,\,0\cdot 1 - 0\cdot 0] = [-1\,,\,0\,,\,0] = -\vec{e}_x$



d $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = [0\cdot 0 - 0\cdot 0\,,\,0\cdot 1 - 1\cdot 0\,,\,1\cdot 0 - 0\cdot 1] = [0\,,\,0\,,\,0] = \vec{0}$



5.42

a $\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

b $\vec{u}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{u} = \vec{u}\times\vec{v} - \left(-(\vec{u}\times\vec{v})\right) = 2(\vec{u}\times\vec{v})$

c $3\vec{u}\times(2\vec{v} - 4\vec{u}) = 3\vec{u}\times 2\vec{v} - 3\vec{u}\times 4\vec{u} = 6(\vec{u}\times\vec{v}) - 12(\vec{u}\times\vec{u}) = 6(\vec{u}\times\vec{v}) - 12\cdot\vec{0} = 6(\vec{u}\times\vec{v})$

d $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\times(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\times(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\times\vec{u} + \vec{u}\times\vec{v} + \vec{v}\times\vec{u} + \vec{v}\times\vec{v} = \vec{0} + \vec{u}\times\vec{v} - \vec{u}\times\vec{v} + \vec{0} = \vec{0}$

e $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{u} - (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{v} = \vec{u}\times\vec{u} + \vec{v}\times\vec{u} - \vec{u}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}\times\vec{u} + \vec{v}\times\vec{u} - \vec{0} = 2(\vec{v}\times\vec{u})$

f $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\times(\vec{u}-\vec{v}) - \vec{v}\times(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\times\vec{u} - \vec{u}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{u} + \vec{v}\times\vec{v} = \vec{0} - \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v} + \vec{0} = \vec{0}$

Merk:
I oppgavene d og f kan vi også si at vektorproduktet må bli $\vec{0}$ fordi vi multipliserer en vektor med seg selv.

5.43

a Skalarproduktet mellom hver av vektorene på venstresiden og vektoren på høyresiden skal være null, siden vektorproduktet skal stå vinkelrett på de to vektorene vi multipliserer. I dette tilfellet er imidlertid

$[2\,,3\,,1]\cdot[-7\,,5\,,1]=2\cdot(-7)+3\cdot5+1\cdot1=-14+15+1=2$ og
$[1\,,1\,,-2]\cdot[-7\,,5\,,1]=1\cdot(-7)+1\cdot5+(-2)\cdot1=-7+5-2=-4$.

Ingen av skalarproduktene er null, selv om begge skulle vært det dersom Per hadde regnet rett. Altså må han ha regnet feil.

b Hvis pekefingeren på høyrehånda peker i samme retning som [4 , 1 , 0], vil [3 , 2 , 0] være til venstre for pekefingeren. Tommelen peker oppover, som betyr at vektorproduktet av dem må ha en positiv *z*-komponent (siden $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u}\times\vec{v}$ danner et høyrehåndssystem). *z*-komponenten i Karis resultantvektor er negativ, så det kan se ut som om hun har brukt et venstrehåndssystem.

c Skalarproduktene mellom hver av vektorene på venstresiden og vektoren på høyresiden er

$[4\,,1\,,0]\cdot[0\,,0\,,-5]=4\cdot0+1\cdot0+0\cdot(-5)=0$ og $[3\,,2\,,0]\cdot[0\,,0\,,-5]=3\cdot0+2\cdot0+0\cdot(-5)=0$.

Altså står [0 , 0 , –5] vinkelrett på de to andre vektorene, akkurat som den skal.
Årsaken til at det likevel kan bli feil, er at alle vektorer som er parallell med den *riktige* vektoren, også står vinkelrett på de to andre. Selv om [0 , 0 , –5] peker feil vei, står den fortsatt vinkelrett på de to andre. Derfor er ikke «skalarprodukt-testen» en garanti for at man har regnet rett.

5.44

a Vi ser først på $\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}$. Her har vi et skalarprodukt med tre faktorer. Siden skalarproduktet er kommutativt, det vil si at rekkefølgen ikke spille noen rolle, skal vi kunne bytte om på rekkefølgen uten å endre svaret.
Vi tenker oss at vi starter med å beregne $a=\vec{u}\cdot\vec{v}$. Da får vi et tall (en skalar) *a*, slik at svaret blir $a\vec{w}$. Hvis det ikke er noe galt med denne skrivemåten, kan vi bytte om på rekkefølgen, for eksempel til $\vec{u}\cdot\vec{w}\cdot\vec{v}$. Hvis vi tenker oss at $b=\vec{u}\cdot\vec{w}$, blir svaret i stedet $b\vec{v}$. Disse to svarene er generelt ikke like, så regneoperasjonen har ikke noe entydig svar.
Så ser vi på $\vec{u}\times\vec{v}\times\vec{w}$. Siden vi har 3! = 6 ulike rekkefølger å sortere vektorene på, er det ytterst tvetydig hvilken vei vektorproduktet skal peke.
Det må brukes parenteser for å spesifisere rekkefølgen på regneoperasjonene:
$(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$ eller $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$, $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ eller $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

b Vi bruker CAS til å vise at denne likheten stemmer. Først definerer vi $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ som i oppgaveteksten. Deretter setter vi VS til venstre side og HS til høyre side av den antatte likheten. Ved å skrive VS == HS kan vi få CAS til å sjekke om de to verdiene er like. Siden CAS returnerer **true** (sant), stemmer det at venstre side er lik høyre side.

1	u := Vektor((x_1, y_1, z_1)) → **u** := $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$
2	v := Vektor((x_2, y_2, z_2)) → **v** := $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$
3	w := Vektor((x_3, y_3, z_3)) → **w** := $\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$
4	VS := u (v ⊗ w) → **VS** := $x_1\,(y_2\,z_3-y_3\,z_2)+y_1\,(-x_2\,z_3+x_3\,z_2)+z_1\,(x_2\,y_3-x_3\,y_2)$
5	HS := (u ⊗ v) w → **HS** := $x_3\,(y_1\,z_2-y_2\,z_1)+y_3\,(-x_1\,z_2+x_2\,z_1)+z_3\,(x_1\,y_2-x_2\,y_1)$
6	VS $\stackrel{?}{=}$ HS → **true**

c Vi bruker i stor grad CAS på samme måte som i oppgave b og definerer de tre vektorene i rad 1–3. I rad 4 og 5 setter vi VS og HS lik de uttrykkene til venstre og høyre for likhetstegnet i oppgaveteksten.

Nå er uttrykket så stort at det er fare for at CAS gir feilaktige svar dersom vi ikke er varsomme. Derfor kan det være lurt å sjekke komponent for komponent om venstre og høyre side stemmer overens.

Vi bruker kommandoen Element(<Liste>,<Posisjon>) for å få tak i henholdsvis *x*-, *y*- og *z*-komponenten av VS og HS i rad 5–7. *Element*-kommandoen ser på vektorer som en liste, så når vi skriver Element(VS,1), henter CAS fram den første verdien (*x*-komponenten) i vektoren VS. Tilsvarende for HS, og for posisjon 2 og 3.

4 VS := u ⊗ (v ⊗ w)

$$\rightarrow \mathbf{VS} := \begin{pmatrix} y_1\,(x_2\,y_3 - x_3\,y_2) - z_1\,(-x_2\,z_3 + x_3\,z_2) \\ -x_1\,(x_2\,y_3 - x_3\,y_2) + z_1\,(y_2\,z_3 - y_3\,z_2) \\ x_1\,(-x_2\,z_3 + x_3\,z_2) - y_1\,(y_2\,z_3 - y_3\,z_2) \end{pmatrix}$$

5 HS := u w v − u v w

$$\rightarrow \mathbf{HS} := \begin{pmatrix} x_2\,y_1\,y_3 + x_2\,z_1\,z_3 - x_3\,y_1\,y_2 - x_3\,z_1\,z_2 \\ -x_1\,x_2\,y_3 + x_1\,x_3\,y_2 + y_2\,z_1\,z_3 - y_3\,z_1\,z_2 \\ -x_1\,x_2\,z_3 + x_1\,x_3\,z_2 - y_1\,y_2\,z_3 + y_1\,y_3\,z_2 \end{pmatrix}$$

6 Element(VS, 1) $\stackrel{?}{=}$ Element(HS, 1)

→ **true**

7 Element(VS, 2) $\stackrel{?}{=}$ Element(HS, 2)

→ **true**

8 Element(VS, 3) $\stackrel{?}{=}$ Element(HS, 3)

→ **true**

Siden CAS returnerer **true** for alle tre, betyr det at venstre side er lik høyre side for hver av de tre komponentene. Dermed er VS = HS.

d Hvis $\vec{u}$ er ortogonal med både $\vec{v}$ og $\vec{w}$, betyr det at $\vec{u} \parallel (\vec{v} \times \vec{w})$. Men fordi kryssproduktet mellom to parallelle vektorer er $\vec{0}$, betyr det at $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$.

5.45

Vi skriver $\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$, slik at $\vec{a} \times \vec{b} = (-\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{b} = -\vec{0} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$. Dermed er første likhet vist. Tilsvarende skriver vi $\vec{b} = -\vec{a} - \vec{c}$, som gir $\vec{b} \times \vec{c} = (-\vec{a} - \vec{c}) \times \vec{c} = -\vec{a} \times \vec{c} - \vec{c} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} - \vec{0} = \vec{c} \times \vec{a}$. Altså er $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

5.46

Vi ser at $\vec{p} \times \vec{q}$ er parallell med *z*-aksen fordi både *x*- og *y*-koordinaten er 0. Dermed må både $\vec{p}$ og $\vec{q}$ være parallelle med *xy*-planet, for ellers står ikke $\vec{p} \times \vec{q}$ vinkelrett på begge de to vektorene. Siden vektorene er parallelle med *xy*-planet, har de *z*-koordinat 0, som betyr at $b = d = 0$.

Vi setter inn $b = d = 0$ i $\vec{p}$ og $\vec{q}$. Deretter skriver vi inn likningene $\vec{p} \times \vec{q} = [0\,,0\,,8]$ og $\vec{p} \cdot \vec{q} = 4$ i CAS, slik at vi får et likningssystem. Vi løser dette i rad 3 og finner at $(a = -2 \quad \wedge \quad c = 1) \quad \vee \quad \left(a = -\frac{2}{3} \quad \wedge \quad c = 3\right)$.

1 Vektor((2, a, 0)) ⊗ Vektor((3, c, 0)) = Vektor((0, 0, 8))

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\,a + 2\,c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2 Vektor((2, a, 0)) · Vektor((3, c, 0)) = 4

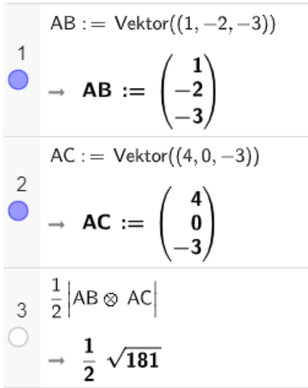
→ $\mathbf{a\,c + 6 = 4}$

3 {$1, $2}

Løs: $\left\{\{a = -2, c = 1\}, \left\{a = \frac{-2}{3}, c = 3\right\}\right\}$

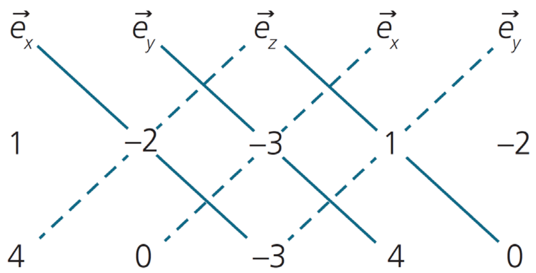
5.47

Trekanten spennes ut av vektorene $\overrightarrow{AB} = [1\,,-2\,,-3]$ og $\overrightarrow{AC} = [4\,,0\,,-3]$. I CAS definerer vi vektorene i rad 1 og 2, og regner ut at arealet av trekanten er $\dfrac{\sqrt{181}}{2}$ i rad 3.



Vi får samme svar når vi regner for hånd:

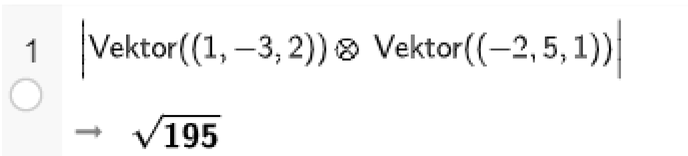
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-2\cdot(-3)-(-3)\cdot 0\,,(-3)\cdot 4-1\cdot(-3)\,,1\cdot 0-(-2)\cdot 4] = [6\,,-9\,,8]$



$\frac{1}{2}\left|[6\,,-9\,,8]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-9)^2+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+81+64} = \frac{1}{2}\sqrt{181}$

5.48

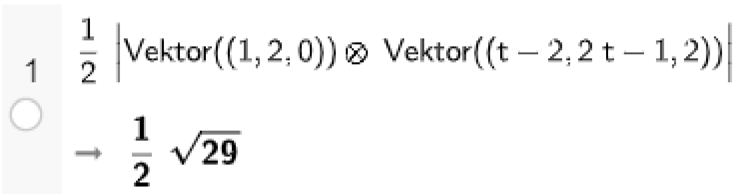
a Vi bruker CAS til å regne ut $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Arealet av parallellogrammet er $\sqrt{195}$.



b Vi bruker CAS til å regne ut $\frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|$. Arealet av trekanten er $\frac{7}{2}\sqrt{66}$.

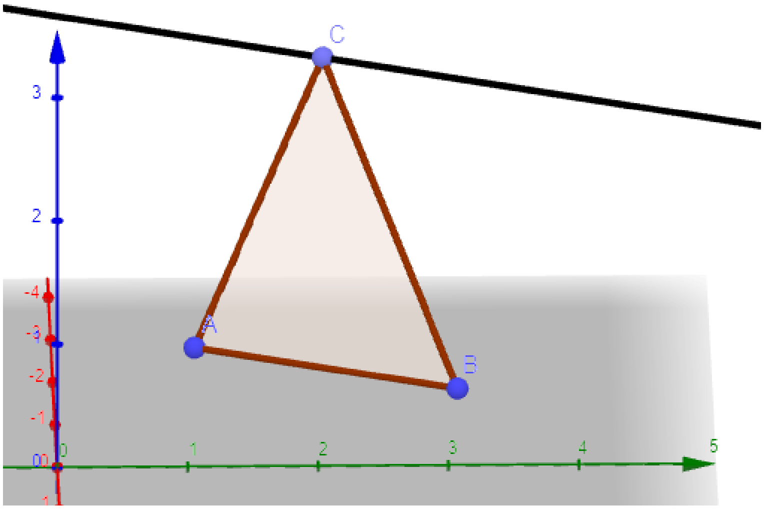
5.49

a Vi begynner med å finne vektorene som utspenner trekanten: $\overrightarrow{AB} = [4-3\,,3-1\,,2-2] = [1\,,2\,,0]$ og $\overrightarrow{AC} = [1+t-3\,,2t-1\,,4-2] = [t-2\,,2t-1\,,2]$. Vi bruker så CAS og finner at arealet er $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{29}$.



b Vi begynner med å tegne opp situasjonen i 3D-grafikkfeltet i GeoGebra.

Med denne definisjonen av C kan punktet bevege seg langs den svarte linja. Hvis vi tenker oss at AB er grunnlinja i trekanten, kan avstanden fra AB til C betraktes som høyden i trekanten. Dersom AB er parallell med den svarte linja, vil imidlertid denne avstanden være konstant. Da er både grunnlinja og høyden konstant, slik at arealet er uavhengig av t.



5.50

I grafikkfelt 3D legger vi først inn origo, de tre vektorene $\vec{u} = [1, 4, 1]$, $\vec{v} = [2, 2, 1]$ og $\vec{w} = [4, 2, 1]$ og deres endepunkter.

Vi tenker oss nå at $\vec{v}$ og $\vec{w}$ spenner ut grunnflaten i parallellepipedet. Vi bruker derfor verktøyet Vektor fra punkt, og kopierer $\vec{v}$ slik at den starter i W, og $\vec{w}$ slik at den starter i V. Punktene O, V, W og W' utgjør nå grunnflaten. Vi bruker så verktøyet Prisme med $OVWW'$ som grunnflate, og U som punkt i toppflaten.

u = Vektor((1, 1, 4)) $\rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

v = Vektor((2, 2, 1)) $\rightarrow \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

w = Vektor((4, 2, 3)) $\rightarrow \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$

O = (0, 0, 0)

U = u $\rightarrow$ (1, 1, 4)

V = v $\rightarrow$ (2, 2, 1)

W = w $\rightarrow$ (4, 2, 3)

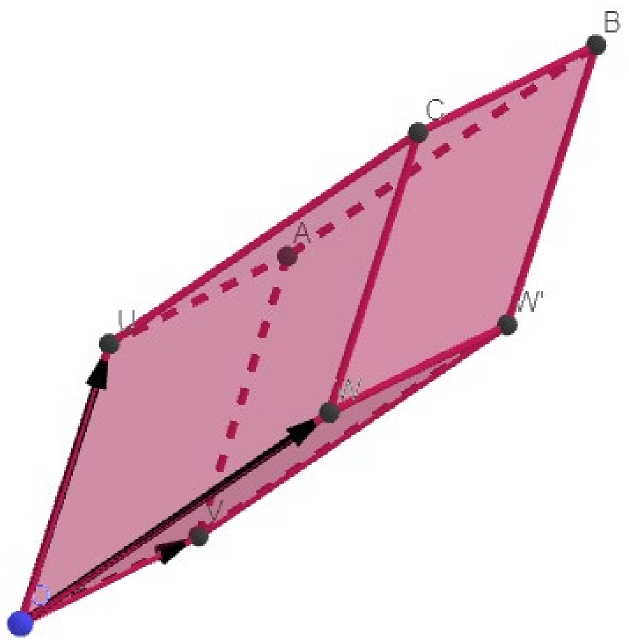
W′ = Flytt(W, v) $\rightarrow$ (6, 4, 4)

c = Prisme(O, V, W′, W, U) $\rightarrow$ 14

Vi ser i algebrafeltet at volumet av parallellepipedet er 14. Nedenfor er et bilde av figuren.

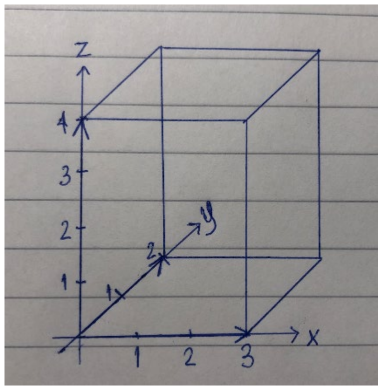
Vi prøver så å vise det samme ved hjelp av CAS. Da får vi $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = 14$, akkurat som vi så i algebrafeltet ovenfor.

1	u := Vektor((1, 1, 4)) → $\mathbf{u} := \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$
2	v := Vektor((2, 2, 1)) → $\mathbf{v} := \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$
3	w := Vektor((4, 2, 3)) → $\mathbf{w} := \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$
4	$\left|(u \otimes v)\cdot w\right|$ → **14**



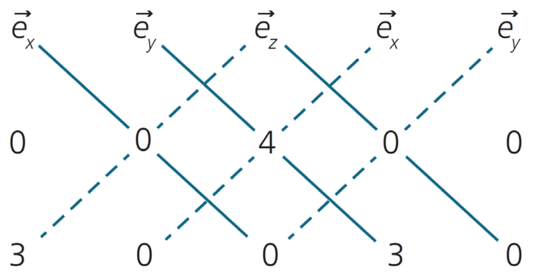
5.51

a I dette parallellepipedet er alle vinklene 90°, så alle sideflatene er rektangler. Denne typen parallellepiped kaller vi et rett prisme.



b Fordi vi har de tre vektorene som utspenner parallellepipedet (prismet), kan vi finne volumet slik:

$V = \left|([0\,,0\,,4]\times[3\,,0\,,0])\cdot[0\,,2\,,0]\right| = \left|[0\,,12\,,0]\cdot[0\,,2\,,0]\right| = 24$.



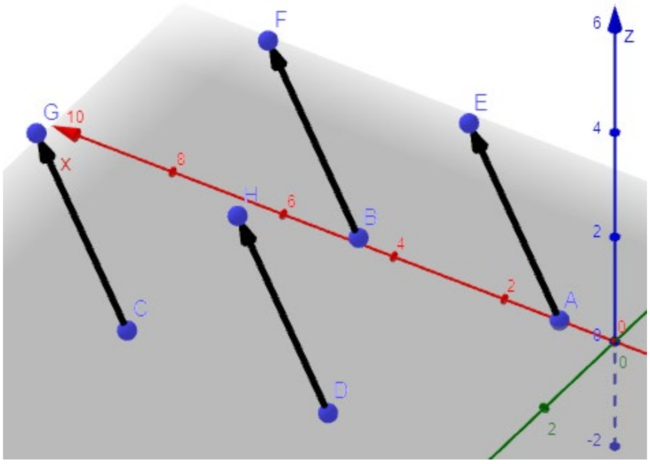
Vi kan også bruke den kjente formelen for volumet av et prisme, $V = \ell \cdot b \cdot h = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$, som vi ser gir samme resultat.

5.52

a Et parallellogram har to og to like lange og parallelle sider. For *ABCD* ser vi at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [3\,,1\,,1]$ samtidig som at $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [1\,,5\,,1]$. Altså er *AB* like lang som og parallell med *CD*, og *AD* like lang som og parallell med *BC*.

b $\overrightarrow{AE} = [2-1\,,1-0\,,4-0] = [1\,,1\,,4]$, $\overrightarrow{BF} = [5-4\,,2-1\,,5-1] = [1\,,1\,,4]$, $\overrightarrow{CG} = [6-5\,,7-6\,,6-2] = [1\,,1\,,4]$ og $\overrightarrow{DH} = [3-2\,,6-5\,,5-1] = [1\,,1\,,4]$. Vi ser at alle vektorene er lik [1 , 1 , 4].

Vi har nå vist at de fire linjestykkene *AE*, *BF*, *CG* og *DH* er parallelle og like lange. Hvis vi nå for eksempel ser på linjestykket *FG*, er dette like langt som og parallelt med linjestykkene *BC*, *AD* og *EH*. På samme måte er *FE*, *GH*, *CD* og *BA* både parallelle og like lange. Det betyr at vi har 6 ulike parallellogrammer, der to og to av dem er parallelle. Derfor er *ABCDEFGH* et parallellepiped.



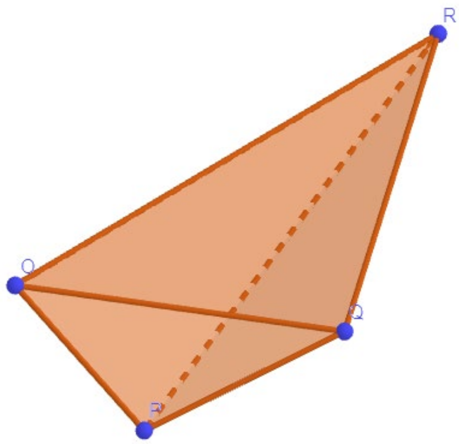
Parallellepipedet utspennes av vektorene
$\overrightarrow{AB} = [3\,,1\,,1]$, $\overrightarrow{AD} = [1\,,5\,,1]$ og $\overrightarrow{AE} = [1\,,1\,,4]$.
Vi bruker CAS og ser at volumet blir
$\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right| = \left|([3\,,1\,,1] \times [1\,,5\,,1]) \cdot [1\,,1\,,4]\right| = 50$.

1 $\left|\left(\text{Vektor}((3,1,1)) \otimes \text{Vektor}((1,5,1))\right) \cdot \text{Vektor}((1,1,4))\right|$
$\rightarrow$ **50**

5.53
Vi skriver inn punktene i algebrafeltet og velger verktøyet Pyramide. Vi velger *OPQ* som grunnflate og *R* som toppunkt.

I algebrafeltet ser vi at volumet av pyramiden er 10,83.

O = (0, 0, 0)
P = (3, -1, -2)
Q = (6, 2, -1)
R = (5, 10, 0)
a = Pyramide(P, Q, R, O)
→ 10.83



Så finner vi volumet ved hjelp av CAS.
Siden *OPQR* er et tetraeder, er volumet *V* gitt ved
$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\right) \cdot \overrightarrow{OR}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|([3\,,-1\,,-2] \times [6\,,2\,,-1]) \cdot [5\,,10\,,0]\right| = \frac{65}{6}$

1 $\frac{1}{6}\left|\left(\text{Vektor}((3,-1,-2)) \otimes \text{Vektor}((6,2,-1))\right) \cdot \text{Vektor}((5,10,0))\right|$
$\rightarrow \mathbf{\frac{65}{6}}$

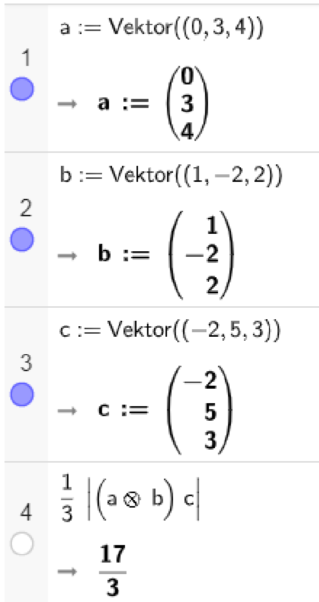
Når vi bruker CAS, ser vi at volumet er $V = \frac{65}{6} \approx 10{,}83$.

5.54

a Sammen spenner $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ ut et parallellepiped, slik at volumet V av trekantprismet er halvparten av dette:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| [0\,,12\,,0] \cdot [0\,,2\,,0] \right| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$$

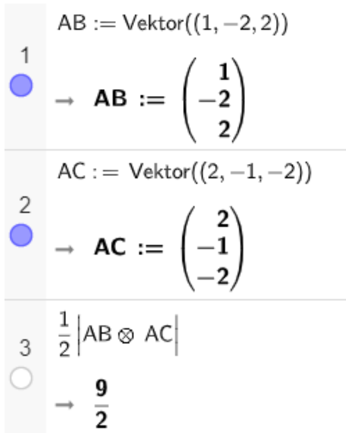
b Vi bruker formelen for volum av en firkantet pyramide med de tre vektorene som er oppgitt. Ved hjelp av CAS kan vi se at volumet av den firkantede pyramiden er $\frac{17}{3}$.



5.55

a To vektorer som utspenner trekanten, er $\overrightarrow{AB} = [1\,,-2\,,2]$ og $\overrightarrow{AC} = [2\,,-1\,,-2]$. Vi finner arealet i CAS.

Arealet av trekanten er $\frac{9}{2}$.



b Lengden av $\overrightarrow{AB}$ er $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$. Hvis AB er grunnlinja, er $\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot h}{2} = \frac{9}{2}$, slik at høyden $h = 3$.

5.56

a Arealet av grunnflaten ABC er arealet av trekanten utspent av $\overrightarrow{AB} = [-6\,,-1\,,2]$ og $\overrightarrow{AC} = [3\,,-1\,,0]$.

Ved hjelp av CAS ser vi at arealet er $\frac{11}{2}$.

b De tre vektorene $\overrightarrow{AB} = [-6\,, -1\,, 2]$, $\overrightarrow{AC} = [3\,, -1\,, 0]$ og $\overrightarrow{AD} = [3\,, 1\,, 2]$ spenner ut tetraedret. Volumet er da gitt ved uttrykket $\frac{1}{6} \cdot \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$, som vi regner ut i CAS. Volumet av tetraedret er 5.

1: AB := Vektor((−6, −1, 2))
$\rightarrow \; \mathbf{AB} := \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2: AC := Vektor((3, −1, 0))
$\rightarrow \; \mathbf{AC} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3: AD := Vektor((3, 1, 2))
$\rightarrow \; \mathbf{AD} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4: $\frac{1}{6} \left| (AB \otimes AC) \cdot AD \right|$
$\rightarrow \; \mathbf{5}$

c $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ spenner ut grunnflaten. Vi viste i oppgave a at den har arealet $G = \frac{11}{2}$. Vi kan nå sette inn $G = \frac{11}{2}$ og $V = 5$ i formelen $V = \frac{1}{3}Gh$:

$$5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{2} \cdot h$$
$$5 = \frac{11}{6} \cdot h$$
$$h = 5 \cdot \frac{6}{11}$$
$$h = \frac{30}{11}$$

Høyden i tetraedret er $\frac{30}{11}$.

d Vi definerer punktene *A*, *B*, *C* og *D* i rad 1–4.

I rad 5 bruker vi *ABC* som grunnflate.
I rad 6 bruker vi *ABD* som grunnflate.
I rad 7 bruker vi *BCD* som grunnflate.
I rad 8 bruker vi *ACD* som grunnflate.

Som vi ser, er volumet 5 i alle tilfeller, uavhengig av hva vi velger som grunnflate.

5: $\frac{1}{6} \left| (\text{Vektor}(A, B) \otimes \text{Vektor}(A, C)) \; \text{Vektor}(A, D) \right|$
$\rightarrow \; \mathbf{5}$

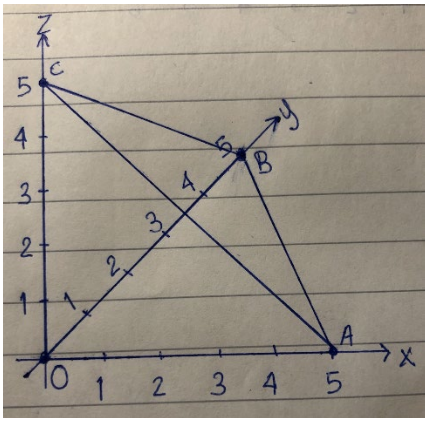
6: $\frac{1}{6} \left| (\text{Vektor}(A, B) \otimes \text{Vektor}(A, D)) \; \text{Vektor}(A, C) \right|$
$\rightarrow \; \mathbf{5}$

7: $\frac{1}{6} \left| (\text{Vektor}(B, C) \otimes \text{Vektor}(B, D)) \cdot \text{Vektor}(B, A) \right|$
$\rightarrow \; \mathbf{5}$

8: $\frac{1}{6} \left| (\text{Vektor}(A, C) \otimes \text{Vektor}(A, D)) \cdot \text{Vektor}(A, B) \right|$
$\rightarrow \; \mathbf{5}$

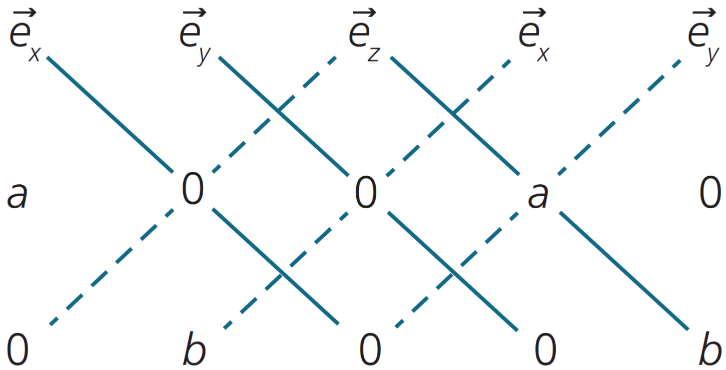
5.57

a



b Tetraedret spennes ut av $\overrightarrow{OA} = [a\,,0\,,0]$, $\overrightarrow{OB} = [0\,,b\,,0]$ og $\overrightarrow{OC} = [0\,,0\,,c]$.
Derfor vil et uttrykk for volumet være

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|[0\,,0\,,ab]\cdot[0\,,0\,,c]\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|0\cdot 0+0\cdot 0+ab\cdot c\right| = \frac{|abc|}{6}.$$



Grunnflaten i tetraedret har areal $\left|\frac{a\cdot b}{2}\right|$ siden *O*, *A* og *B* danner en trekant med grunnlinje *a* og høyde *b*.

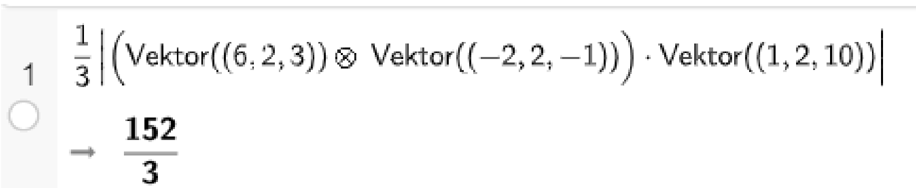
Høyden i tetraedret er avstanden fra grunnflaten *OAB* til *C*. Altså er $h = |c|$.

Derfor er $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\cdot\left|\frac{a\cdot b}{2}\right|\cdot|c| = \frac{1}{3}\cdot\left|\frac{1}{2}\right|\cdot|a\cdot b|\cdot|c| = \frac{1}{6}\cdot|a\cdot b\cdot c| = \frac{|abc|}{6}$.

5.58

For at vi skal kunne bruke trippelproduktet for å finne volumet *V* av pyramiden, må grunnflaten *ABCD* være et parallellogram. Her ser vi at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [6\,,2\,,3]$, og at $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [-2\,,2\,,-1]$. Altså har *ABCD* parvis like lange og parallelle sider, som betyr at den er et parallellogram. Derfor kan vi bruke trippelproduktet for å finne volumet av *ABCDE*.

Vi velger å ta utgangspunkt i *A* og ser da at pyramiden spennes ut av vektorene $\overrightarrow{AB} = [6, 2\,,3]$, $\overrightarrow{AD} = [-2\,,2\,,-1]$ og $\overrightarrow{AE} = [1\,,2\,,10]$. Dermed er volumet $V = \frac{1}{3}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{3}\left|\left([6\,,2\,,3]\times[-2\,,2\,,-1]\right)\cdot[1\,,2\,,10]\right| = \frac{152}{3}$.

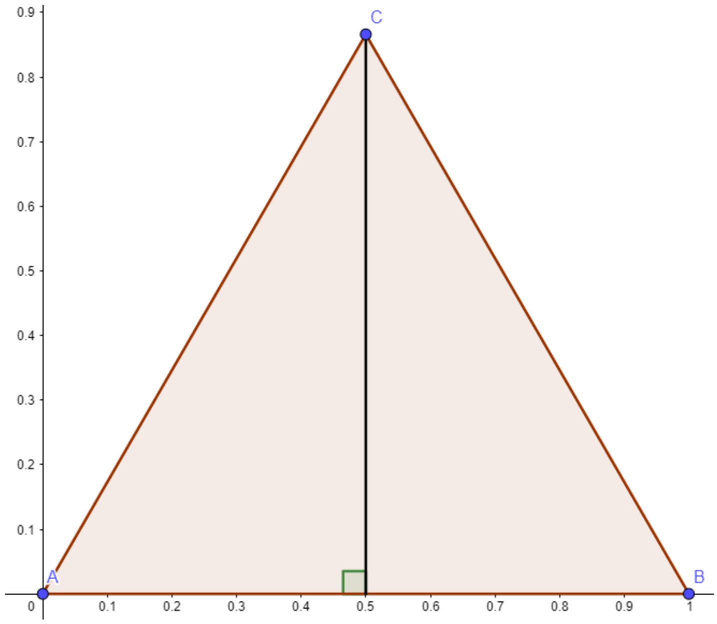


5.59

a Siden A sammenfaller med origo, er $A = (0\,,\,0\,,\,0)$. Avstanden fra A til B er 1, og siden B ligger på x-aksen er $B = (1\,,\,0\,,\,0)$. x-koordinaten til C ligger midt mellom x-koordinatene til A og B (siden ABC er likesidet), og er derfor $\frac{1}{2}$. Som vi ser av tegningen, blir y-koordinaten til C lik

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dermed er $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.



For å finne koordinatene til $D = (x\,,\,y\,,\,z)$ kan vi lage et likningssystem ved å sette $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = 1$. Det gir tre likninger og tre ukjente. I CAS definerer vi først de fire punktene og løser så de tre likningene. Siden D ikke har noen negative koordinater, forkaster vi den ene løsningen.

Derfor er $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

1 $A := (0, 0, 0)$

→ $\mathbf{A := (0, 0, 0)}$

2 $B := (1, 0, 0)$

→ $\mathbf{B := (1, 0, 0)}$

3 $C := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

→ $\mathbf{C := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)}$

4 $D := (x, y, z)$

→ $\mathbf{D := (x, y, z)}$

5 $|\text{Vektor}(A, D)| = 1$

→ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$

6 $|\text{Vektor}(B, D)| = 1$

→ $\sqrt{y^2 + z^2 + (x-1)^2} = 1$

7 $|\text{Vektor}(C, D)| = 1$

→ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}\,y - x + 1} = 1$

8 $\{\$5, \$6, \$7\}$

Løs: $\left\{\left\{x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{6}, z = \frac{\sqrt{6}}{3}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{6}, z = \frac{-\sqrt{6}}{3}\right\}\right\}$

b Tetraedret utspennes av $\overrightarrow{AB} = [1\,,0\,,0]$, $\overrightarrow{AC} = \left[\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,0\right]$ og $\overrightarrow{AD} = \left[\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{6}\,,\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$. Volumet er derfor $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Når vi regner ut overflaten husker vi at alle sideflatene er like store, så vi kan regne ut arealet av sideflaten *ABC* og multiplisere det med 4. Det samlede overflatearealet er altså $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3}$.

1 AB := Vektor((1, 0, 0))
$\rightarrow$ **AB** := $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

2 AC := Vektor$\left(\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\right)$
$\rightarrow$ **AC** := $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}$

3 $4\cdot\frac{1}{2}\cdot|AB \otimes AC|$
$\rightarrow \sqrt{3}$

1 AB := Vektor((1, 0, 0))
$\rightarrow$ **AB** := $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

2 AC := Vektor$\left(\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\right)$
$\rightarrow$ **AC** := $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}$

3 AD := Vektor$\left(\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right)$
$\rightarrow$ **AD** := $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

4 $\frac{1}{6}\left|(AB \otimes AC)\cdot AD\right|$
$\rightarrow \frac{1}{12}\sqrt{2}$

c Dersom vi tenker på *S* som midtpunktet i metanmolekylet, er tetraedervinkelen den samme som vinkelen mellom $\overrightarrow{SA}$ og $\overrightarrow{SD}$. $S = (p\,,q\,,r)$ er et punkt som er slik at $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\overrightarrow{BS}\right| = \left|\overrightarrow{CS}\right| = \left|\overrightarrow{DS}\right|$ fordi det ligger midt i tetraedret. Vi har tre ukjente og kan ut fra resonnementet ovenfor lage et likningssystem med tre likninger.

Vi definerer punktene *A*, *B*, *C*, *D* og *S* i rad 1–5, og bruker rad 6–8 til å skrive opp de tre likningene som utgjør likningssettet. I rad 9 ser vi at $S = \left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{6}\,,\frac{\sqrt{6}}{12}\right)$.

6 |Vektor(A, S)| = |Vektor(B, S)|
$\rightarrow \sqrt{p^2+q^2+r^2} = \sqrt{q^2+r^2+(p-1)^2}$

7 |Vektor(B, S)| = |Vektor(C, S)|
$\rightarrow \sqrt{q^2+r^2+(p-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{4r^2+(2p-1)^2+\left(2q-\sqrt{3}\right)^2}$

8 |Vektor(C, S)| = |Vektor(D, S)|
$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{4r^2+(2p-1)^2+\left(2q-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}}\sqrt{9(2p-1)^2+4\left(3r-\sqrt{6}\right)^2+\left(6q-\sqrt{3}\right)^2}$

9 {$6, $7, $8}
Løs: $\left\{\left\{p=\frac{1}{2}, q=\frac{\sqrt{3}}{6}, r=\frac{\sqrt{6}}{12}\right\}\right\}$

Nå som vi kjenner S, finner vi vinkelen mellom $\overrightarrow{SA}$ og $\overrightarrow{SD}$.

Vi bruker kommandoen Vinkel(<Vektor>,<Vektor>) og ser at vinkelen mellom de to vektorene er 109,47°. Altså er tetraedervinkelen 109,47°.

1 $A := (0,0,0)$
→ $\mathbf{A := (0,0,0)}$

2 $S := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}\right)$
→ $\mathbf{S := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}\right)}$

3 $D := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$
→ $\mathbf{D := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)}$

4 Vinkel(Vektor(S, A), Vektor(S, D))
≈ **109.47**

5.60

Vi setter inn tallene i den generelle formelen for parameterframstillingen og får $\ell: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$.

5.61

a $\overrightarrow{AB} = [3\,,-3\,,0]$ er en retningsvektor for denne linja. Vi kan nå ta utgangspunkt i $A(1\,,2\,,3)$, slik at en parameterframstilling for linja blir $m: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 \end{cases}$.

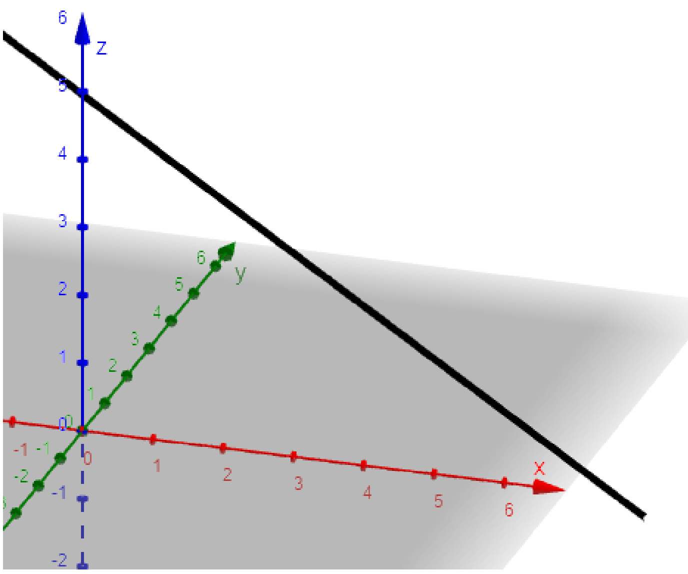
Siden $[1\,,-1\,,0]$ også er en retningsvektor for linja, kan vi oppgi parameterframstillingen slik:

$$m: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$$

b–c I algebrafeltet bruker vi kommandoen Linje(<Punkt>,<Punkt>). Da står det at $X = (1\,,2\,,3) + \lambda\,(3\,,-3\,,0)$, som betyr at det tas utgangspunkt i $(1\,,2\,,3)$, og at retningsvektoren er $[3\,,-3\,,0]$. Vi ser altså igjen at

$$m: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 \end{cases}$$

f : Linje((1, 2, 3), (4, −1, 3))
→ X = (1, 2, 3) + λ (3, -3, 0)



5.62

a En retningsvektor for *x*-aksen er [1 , 0 , 0], og punktet (0 , 0 , 0) ligger på *x*-aksen.

En parameterframstilling for *x*-aksen blir derfor $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

b En retningsvektor for *y*-aksen er [0 , 1 , 0], og punktet (0 , 0 , 0) ligger på *y*-aksen.

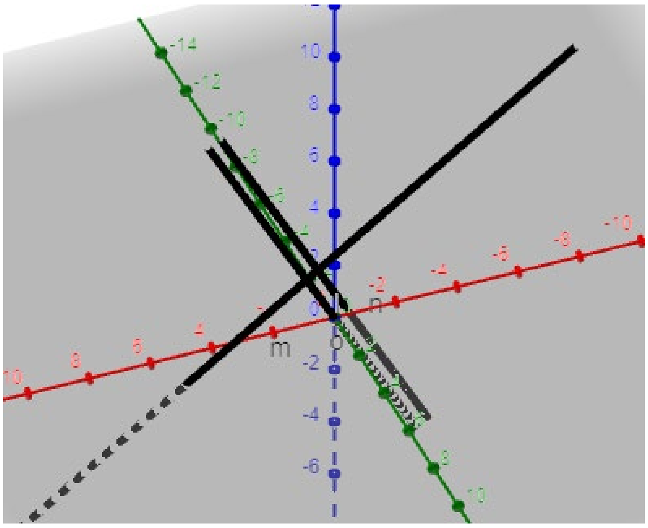
En parameterframstilling for *y*-aksen blir derfor $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

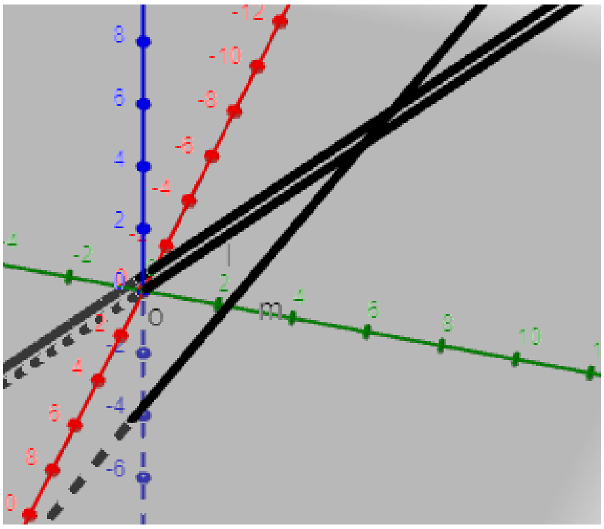
c En retningsvektor for *z*-aksen er [0 , 0 , 1], og punktet (0 , 0 , 0) ligger på *z*-aksen.

En parameterframstilling for *z*-aksen blir derfor $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

5.63

Det første vi legger merke til, er at vi bare ser 3 linjer selv om vi har definert 4. Årsaken til dette er at ℓ og *n* er sammenfallende. Samtidig kan vi se at de er parallelle med *o*. Det er ingen av de tre linjene ℓ, *o* eller *n* som skjærer *m*. Altså er *m* vindskeiv i forhold til alle disse tre.





5.64

a Vi kan lese ut av parameterframstillingene at linjene har [1 , –1 , 1] og [0 , 2 , 1] som retningsvektorer. Siden de ikke er parallelle, er heller ikke linjene det.

Vi sjekker om linjene har et skjæringspunkt ved å sette koordinatene lik hverandre, men vi bruker *s* som parameter i den andre linja:

$$2+t=4 \quad \wedge \quad 1-t=-5+2s \quad \wedge \quad t=s$$
$$t=2 \quad \wedge \quad 1-t=-5+2s \quad \wedge \quad t=s$$

Vi setter *t* = 2 inn i andre og tredje likning:

$$1-2=-5+2s \quad \wedge \quad 2=s$$
$$2s=4 \quad \wedge \quad s=2$$
$$s=2 \quad \wedge \quad s=2$$

Løsningen på likningssystemet er *t* = *s* = 2. Vi setter *t* = 2 inn i parameterframstillingen for den første linja og får punktet (4 , –1 , 2), som altså er skjæringspunktet mellom de to linjene.

b Her er retningsvektorene [1 , –3 , –2] og [–3 , 9 , 6]. Disse vektorene er parallelle (k = –3). Derfor er også linjene parallelle, slik at de enten har alle eller ingen punkter felles. Punktet (3 , –1 , 1) ligger på den første linja. Hvis de er sammenfallende, må dette punktet også ligge på den andre linja. Det gir følgende likningssystem (vi bruker s som parameter for linje nummer 2):

$$3 = 4 - 3s \quad \wedge \quad -1 = 2 + 9s \quad \wedge \quad 1 = 6s$$
$$3s = 1 \quad \wedge \quad 9s = -3 \quad \wedge \quad 6s = 1$$
$$s = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad s = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad s = \frac{1}{6}$$

Det fins ikke ett tall s slik at både x-, y- og z-koordinaten i den andre linja stemmer overens med punktet $(3, -1, 1)$, som betyr at punktet ikke ligger på linja. Siden linjene er parallelle og et punkt som ligger på den første linja ikke ligger på den andre, har de ingen felles punkter.

c Retningsvektorene er [2 , 5 , –2] og [1 , 3 , 6]. De er ikke parallelle, så linjene er heller ikke det. For å se om de skjærer hverandre, setter vi hver av x-koordinatene, y-koordinatene og z-koordinatene til de to linjene lik hverandre:

$$3 + 2t = -1 + s \quad \wedge \quad 2 + 5t = 2 + 3s \quad \wedge \quad -1 - 2t = 4 + 6s$$
$$s = 2t + 4 \quad \wedge \quad 5t = 3s \quad \wedge \quad -5 - 2t = 6s$$

Vi setter $s = 2t + 4$ inn i likning nummer 2 og 3. Da får vi

$$5t = 3 \cdot (2t + 4) \quad \wedge \quad -5 - 2t = 6 \cdot (2t + 4)$$
$$5t = 6t + 12 \quad \wedge \quad -5 - 2t = 12t + 24$$
$$t = -12 \quad \wedge \quad t = -\frac{29}{12}$$

Vi får ikke én bestemt verdi for t, som betyr at linjene ikke skjærer hverandre. Altså er de vindskeive.

5.65

a Fartsvektoren er $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left[-\sin t \,,\, \cos t \,,\, \frac{1}{2}\right]$, og farten er

$$v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}1\,.$$

x- og y-koordinaten til fartsvektoren viser at Line løper i en sirkel i forhold til xy-planet.

z-koordinaten er konstant og lik $\frac{1}{2}$, så hun løper med en fart i vertikal retning på 0,5 m/s.

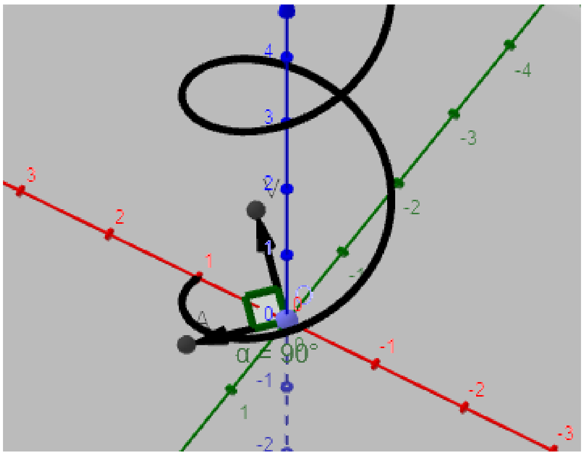
Banefarten er konstant lik 1,1 m/s.

b Akselerasjonsvektoren er $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = [-\cos t \,,\, -\sin t \,,\, 0]$, og akselerasjonen er 1 m/s^2:

$$a = |\vec{a}(t)| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + 0^2} = 1$$

På grunn av at z-koordinaten er 0, har Line konstant fart i z-retning. Det samsvarer med observasjonen gjort i oppgave a.
Akselerasjonsvektoren viser også at Line konstant endrer retning. Det er fordi hun er nødt til å akselerere når hun løper i en sirkel i forhold til bakken.
Vi legger også merke til at lengden av akselerasjonsvektoren er konstant, og ulik 0. Men siden også fartsvektoren er konstant, betyr ikke dette at hun øker farten sin. Akselerasjonen kommer bare fra at Line konstant må svinge for å bevege seg i en sirkel.

c Vi bruker kommandoen Kurve(<Uttrykk>,<Uttrykk>,<Uttrykk>,<Parametervariabel>,<Start>,<Slutt>) i algebrafeltet i GeoGebra. Videre definerer vi $\vec{v}(4) = \vec{r}'(4)$ og $\vec{a}(4) = \vec{r}''(4)$.



$r = \text{Kurve}\left(\cos(t), \sin(t), \frac{t}{2}, t, 0, 30\right)$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \\ z &= \frac{t}{2} \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 30$

$v = \text{Vektor}(r'(4))$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.76 \\ -0.65 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

$a = \text{Vektor}(r''(4))$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.76 \\ 0 \end{pmatrix}$

d Skalarproduktet mellom $\vec{v} = \left[-\sin t\ ,\ \cos t\ ,\ \frac{1}{2}\right]$ og $\vec{a} = [-\cos t\ ,\ -\sin t\ ,\ 0]$ er

$\vec{v} \cdot \vec{a} = -\sin t \cdot (-\cos t) + \cos t \cdot (-\sin t) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \sin t \cdot \cos t - \sin t \cdot \cos t = 0$.

Det betyr at fartsvektoren står vinkelrett på akselerasjonsvektoren. For å klare sirkelbevegelsen må nemlig Line konstant svinge mot venstre. Dermed vil akselerasjonsvektoren peke til venstre når fartsvektoren peker framover.

5.66

a Fartsvektoren er $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [5 - 2{,}6t\ ,\ 20 - 1{,}4t\ ,\ 7 - 10t]$. Rett etter at Erling har sparket ballen, er $t = 0$.

$|\vec{v}(0)| = |[5\ ,\ 20\ ,\ 7]| = \sqrt{5^2 + 20^2 + 7^2} = 21{,}8$. Farten til ballen er omtrent 21,8 m/s.

b Akselerasjonsvektoren er $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = [-2{,}6\ ,\ -1{,}4\ ,\ -10]$, og akselerasjonen er 10,4 m/s^2:

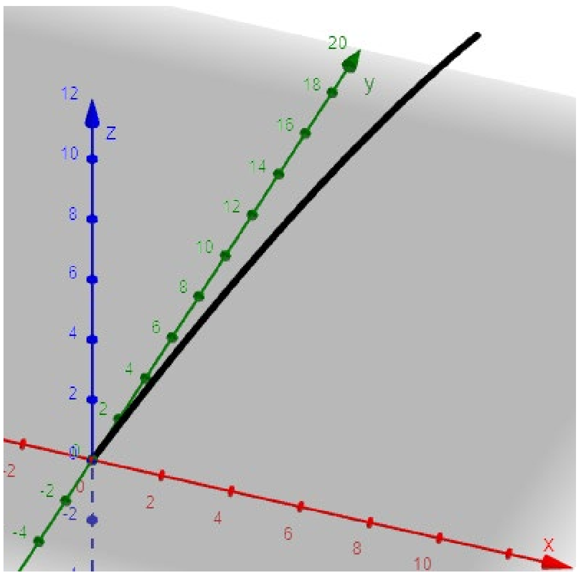
$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-2{,}6)^2 + (-1{,}4)^2 + (-10)^2} = 10{,}4$

Akselerasjonsvektoren har bare negative koordinater. Det innebærer at ballen skrur mot venstre (siden positiv *x*-koordinat ville betydd bevegelse mot høyre). Dessuten bremses ballen i *y*-retning (grunnet luftmotstand), og den vil etter hvert også falle i *z*-retning (på grunn av gravitasjon).

c Vi tegner banen i Grafikkfelt 3D i GeoGebra.

$r = \text{Kurve}(5\,t - 1.3\,t^2, 20\,t - 0.7\,t^2, 7\,t - 5\,t^2, t, 0, 1)$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 5\,t - 1.3\,t^2 \\ y &= 20\,t - 0.7\,t^2 \\ z &= 7\,t - 5\,t^2 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$



d På det høyeste punktet er z-koordinaten til farten 0. Altså er $7 - 10t = 0$, som gir $t = \frac{7}{10}$.

Når vi setter inn $t = \frac{7}{10}$ i uttrykket for z-koordinaten til $\vec{r}$, får vi $7 \cdot \frac{7}{10} - 5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 = 2{,}45$.
På det høyeste er altså ballen 2,45 meter over bakken.

e Det er ballens x- og z-posisjon når $y = 18$, som avgjør om den treffer målet eller ikke.

1 $20t - 0.7t^2 = 18$
NLøs: $\{t = 0.93, t = 27.64\}$

At $y = 18$, gir likningen $20t - 0{,}7t^2 = 18$, med løsningen $t = 0{,}93$. Den andre løsningen forkastes fordi vi får oppgitt at $t \in [0\ ,\ 1]$.

Vi ser at når $y = 18$, er ballen i punktet (3,5 , 18 , 2,2). Målet går $\frac{7{,}32\text{ m}}{2} = 3{,}66\text{ m}$ hver vei i x-retning og er 2,44 meter høyt. Vi ser at både x- og z-koordinatene til posisjonen til ballen er innenfor disse grensene. Det betyr at ballen treffer mål.

1 r(t) := Kurve$(5t - 1.3t^2, 20t - 0.7t^2, 7t - 5t^2, t, 0, 1)$
→ $\mathbf{r := (5t - 1.3t^2, 20t - 0.7t^2, 7t - 5t^2)}$
2 r(0.93)
≈ $\mathbf{(3.53, 17.99, 2.19)}$

Merk at CAS viser 17,99 som y-koordinat, og ikke 18. Det er et resultat av at vi har tilnærmet litt underveis. Det er imidlertid nærme nok 18, så det har ingen innvirkning på resultatet.

5.67

a Vi kan for eksempel velge $t = 0$ og $t = 1$, som gir punktene (2 , –1 , 11) og (6 , –2 , 13).

b Fra parameterframstillingen ser vi at [0 , 3 , 15] er en retningsvektor. Alle vektorer som er parallelle med den, er også retningsvektorer for n. Et annet eksempel er derfor [0 , –6 , –30].

c Vi prøver først med m. Vi ser av x-koordinaten at $2 + 4t = 5$, slik at $t = \frac{3}{4}$.

Det gir $y = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4} \neq 14$, så punktet ligger ikke på m.

Så ser vi på n, der x-koordinaten allerede stemmer. For y-koordinaten får vi $3t - 1 = 14$, som gir $t = 5$. Dermed blir z-koordinaten $15t = 15 \cdot 5 = 75$, som også er z-verdien i punktet. Punktet (5 , 14 , 75) ligger altså på n for $t = 5$.

d Først av alt ser vi at linjene ikke er parallelle, fordi retningsvektorene [4 , –1 , 2] og [0 , 3 , 15] ikke er det. Dessuten kan vi se at n er mye brattere i z-retning enn m. Det er fordi z-koordinaten til n er stor i forhold til x- og y-koordinatene, noe som ikke er tilfelle for m.

Nå skal vi se om linjene har et skjæringspunkt. Merk at vi bruker s som parameter for n.
Vi setter hver av koordinatene lik hverandre og ser om likningssystemet har en løsning:

$$2 + 4t = 5 \quad \wedge \quad -1 - t = 3s - 1 \quad \wedge \quad 11 + 2t = 15s$$
$$4t = 3 \quad \wedge \quad -t = 3s \quad \wedge \quad 2t = 15s - 11$$
$$t = \frac{3}{4} \quad \wedge \quad t = -3s \quad \wedge \quad 2t = 15s - 11$$

Vi setter $t = \frac{3}{4}$ inn i likning nummer 2 og får $\frac{3}{4} = -3s \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4} = -s \;\Leftrightarrow\; s = -\frac{1}{4}$.
Så setter vi verdiene for s og t inn i den siste likningen, og ser om den stemmer.

$$2 \cdot \frac{3}{4} = 15 \cdot \frac{1}{4} - 11$$
$$\frac{6}{4} = \frac{15}{4} - 11$$

Venstre og høyre side stemmer ikke overens, så det fins ikke noen s og t slik at m og n gir samme punkt. Derfor har de ingen skjæringspunkter, som betyr at de er vindskeive.

5.68

a Vi setter punktet C og vektoren $\vec{u}$ inn i den generelle parameterframstillingen og får $\ell: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$.

b Linjene er parallelle, så vi kan bruke $\vec{u} = [1\,,3\,,-2]$ som retningsvektor også her, slik at $m: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

c Vi bruker først $\overrightarrow{CD} = [-2\,,2\,,-1]$ som retningsvektor.

Vi kan ta utgangspunkt i C først og får da $n: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$.

Så kan vi for eksempel bruke $\overrightarrow{DC} = [2\,,-2\,,1]$ som retningsvektor og ta utgangspunkt i D.

Da får vi $n: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Merk at linjene er de samme – vi tar bare utgangspunkt i forskjellige punkter og bruker ulike (men parallelle) retningsvektorer.

d Som vi så i oppgave c, var retningsvektorene parallelle, og dette er viktig. Det betyr nemlig at forholdet mellom bevegelse i x-, y- og z-retning alltid er konstant.

Hvis vi ser på $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$, legger vi merke til følgende:

Dersom t øker med 1, vil x øke med 2, y minke med 2 og z øke med 1. Dersom t øker med 5, vil x øke med 10, y minke med 10, og z øke med 5. Vi ser uansett at når verdiene endres, er forholdet mellom endringene konstant. Dette gir en rett linje.

De ulike retningsvektorene bestemmer der fort x, y og z øker eller minker for en gitt endring av t. Dersom vi brukte [600 , –600 , 300] som retningsvektor, ville jo samme endringer i t gi mye større utslag, men forholdet mellom endringene ville ennå vært det samme. Når vi velger ulike punkter å ta utgangspunkt i, vil de alltid ligge en avstand fra hverandre slik at en retningsvektor kan legges mellom dem. Derfor spilte det ingen rolle om vi tok utgangspunkt i C eller D i oppgave c. De to representasjonene beskrev den samme linja.

5.69

a Vi ser først på ubåt A:

$$\vec{v}_A(t) = \vec{r}_A{}'(t) = [-1\,,-1\,,2]$$
$$\vec{a}_A(t) = \vec{v}_A{}'(t) = [0\,,0\,,0]$$

Så ser vi på ubåt *B*:

$\vec{v}_B(t) = \vec{r}_B{}'(t) = [4\ ,2\ ,-2]$

$\vec{a}_B(t) = \vec{v}_B{}'(t) = [0\ ,0\ ,0]$

Vi kan se at ingen av ubåtene har noen akselerasjon i noen retning. De beveger seg derfor i rette linjer der vi kan bruke fartsvektorene deres som retningsvektorer.

b For å se om ubåtene kolliderer, setter vi de to posisjonsvektorene lik hverandre. Merk at vi bruker samme parameter, *t*, både for *A* og *B* siden de må være i samme punkt *på samme tid* for å kollidere. Når vi setter likhetstegn mellom de to vektorene, får vi et sett med skalare likninger, men vi har bare én variabel som må passe med alle tre likningene. Vi ser i CAS at vi ikke får noen løsning. Det betyr at ubåtene ikke ved noe tidspunkt har samme posisjon, så de kolliderer ikke.

1 Vektor((10 − t, −10 − t, 2 t)) = Vektor((2 + 4 t, 10 + 2 t, 55 − 2 t))

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -t+10 \\ -t-10 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t+2 \\ 2t+10 \\ -2t+55 \end{pmatrix}$$

2 $1

Løs: {}

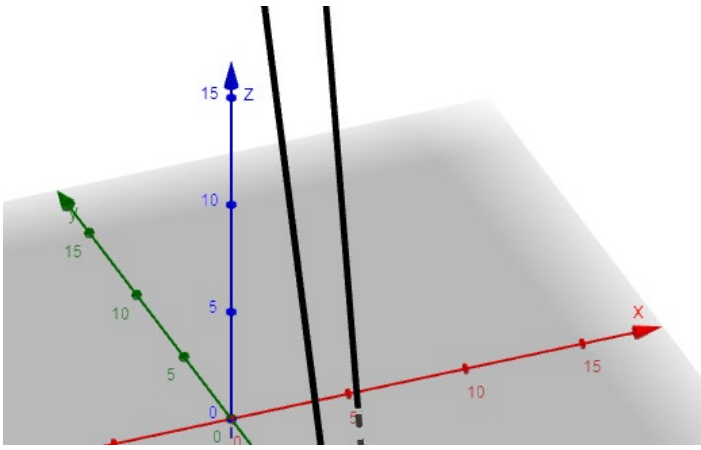
5.70

a *m* og *n* har retningsvektorene [4 , –1 , 2] og [0 , 3 , 15]. En linje som står vinkelrett på begge, kan for eksempel ha retningsvektoren [4 , –1 , 2] × [0 , 3 , 15] = [–21 , –60 , 12]. Denne vektoren er lang, så vi bruker i stedet [7 , 20 , –4]. Det lar seg gjøre fordi de to vektorene er parallelle.

Hvis denne linja skjærer *m*, kan vi velge et punkt på *m* å ta utgangspunkt i for ℓ.
Hvis vi for eksempel velger $t = 0$, ser vi at (2 , –1 , 11) ligger på *m*.

Derfor er en parameterframstilling $\ell: \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = -1 + 20t \\ z = 11 - 4t \end{cases}$.

Vi kan bekrefte at ℓ ikke skjærer *n* ved å tegne linjene i GeoGebra.



b Et vilkårlig punkt *A* på *m* har koordinatene $(2 + 4t\ , -1 - t\ , 11 + 2t)$, og et vilkårlig punkt *B* på *n* har koordinatene $(5\ , 3s - 1\ , 15s)$. Her bruker vi *s* som parameter for *n* siden parameterne for *m* og *n* ikke har noe med hverandre å gjøre. Vi bruker CAS og ser at $\overrightarrow{AB} = [3 - 4t\ , 3s + t\ , 15s - 2t - 11]$.

1	Vektor((2 + 4 t, −1 − t, 11 + 2 t), (5, 3 s − 1, 15 s))
	$\rightarrow \begin{pmatrix} 5-2-4t \\ 3s-1+1+t \\ -11-2t+15s \end{pmatrix}$
2	\$1
	$\approx \begin{pmatrix} -4t+3 \\ 3s+t \\ 15s-2t-11 \end{pmatrix}$

Videre må $\overrightarrow{AB}$ stå vinkelrett på retningsvektorene til både *m* og *n*. Det betyr at skalarproduktene mellom $\overrightarrow{AB}$ og disse retningsvektorene må bli null. Vi kan derfor sette opp to likninger i CAS. Med to ukjente får vi ett svar.

Etter å ha definert $\overrightarrow{AB}$ i rad 1 og satt skalarproduktene lik null i rad 2 og 3, ser vi i rad 4 at $s=\frac{71}{93} \wedge t=\frac{47}{93}$.

1	AB := Vektor((2 + 4 t, −1 − t, 11 + 2 t), (5, 3 s − 1, 15 s))
	$\rightarrow \mathbf{AB} := \begin{pmatrix} 5-2-4t \\ 3s-1+1+t \\ -11-2t+15s \end{pmatrix}$
2	AB · Vektor((4, −1, 2)) = 0
	$\rightarrow 27s-21t-10=0$
3	AB · Vektor((0, 3, 15)) = 0
	$\rightarrow 234s-27t-165=0$
4	{\$2, \$3}
	Løs: $\left\{\left\{s=\frac{71}{93}, t=\frac{47}{93}\right\}\right\}$

Når vi setter inn $t=\frac{47}{93}$ i *m*, får vi punktet $\left(2+4\cdot\frac{47}{93}, -1-\frac{47}{93}, 11+2\cdot\frac{47}{93}\right)=\left(\frac{374}{93}, -\frac{140}{93}, \frac{1117}{93}\right)$.

Siden ℓ står vinkelrett på både *m* og *n*, kan vi bruke [7 , 20 , –4] som retningsvektor akkurat som i oppgave a. En mulig parameterframstilling blir derfor $\ell: \begin{cases} x=\frac{374}{93}+7t \\ y=-\frac{140}{93}+20t \\ z=\frac{1117}{93}-4t \end{cases}$.

c I oppgave b tok vi utgangspunkt i $\left(\frac{373}{93}, -\frac{140}{93}, \frac{1117}{93}\right)$. *z*-koordinaten i punktet er $\frac{1117}{93}\approx 12$. Hvis vi flytter hele linja noen enheter opp, for eksempel slik at *z*-koordinaten er 20, vil den ikke gå gjennom dette punktet, men fortsatt stå vinkelrett på både *m* og *n*. Den vil heller ikke skjære verken *m* eller *n*, siden ingen av disse linjene er vertikale. Et eksempel på en slik linje blir derfor $\ell: \begin{cases} x=\frac{374}{93}+7t \\ y=-\frac{140}{93}+20t \\ z=20-4t \end{cases}$.

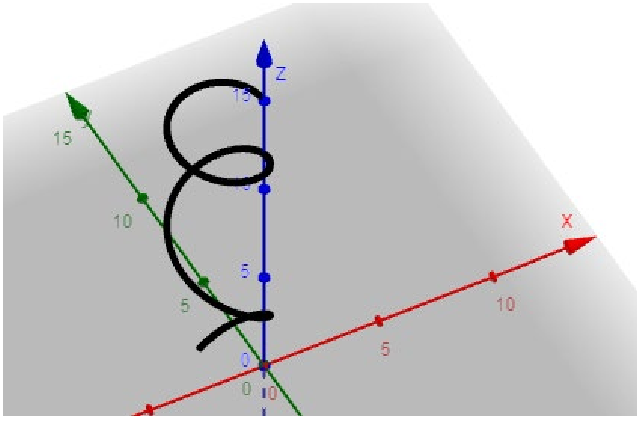
5.71

Før vi tegner kurven, finner vi ut når Siv treffer bassenget nederst. Det gjør hun når $z = 0$, noe som gir likningen $15-0{,}1t^2=0$. Vi forkaster den negative løsningen, noe som betyr at Siv treffer vannflaten etter 11,7 sekunder.

1	$15-0.11t^2=0$
	NLøs: $\{t=-11.7, t=11.7\}$

Vi tegner kurven i Grafikkfelt 3D med $0 \le t \le 11{,}7$. Fra den ser vi at Siv beveger seg i en sirkel rundt midten av sklia. Vi ser også at sklia etter hvert blir brattere enn i begynnelsen.

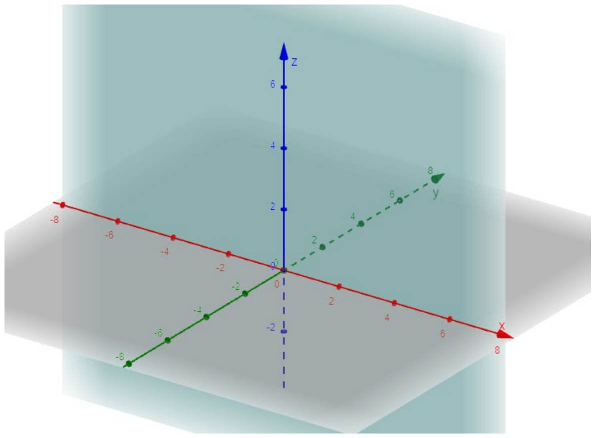
Begge disse observasjonene stemmer overens med uttrykket for kurven: cosinus- og sinusfunksjon i *x*- og *y*-koordinatene gir sirkelbevegelser. Andregradsuttrykket i *z*-koordinaten øker raskere med tiden.



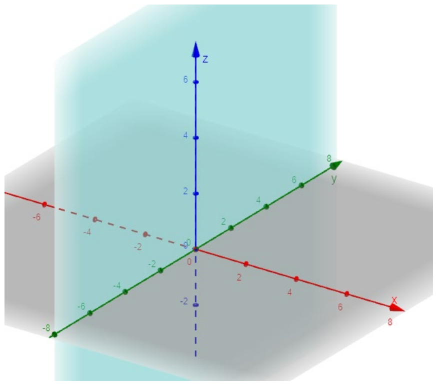
5.72

a Alle punktene i *xz*-planet har *y*-koordinat 0. Likningen til planet har derfor formen $0 \cdot x + y + 0 \cdot z = 0$.

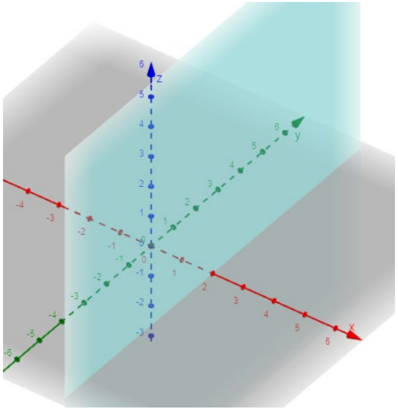
Altså er likningen til *xz*-planet $y = 0$.



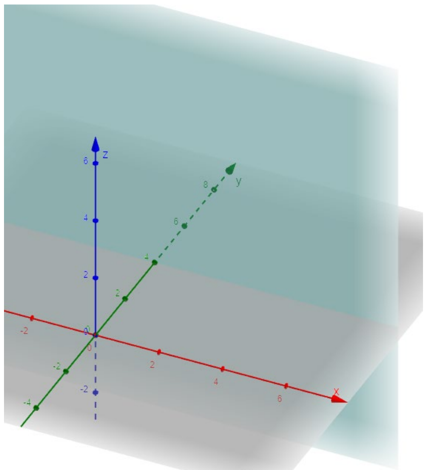
b Alle punktene i *yz*-planet har *x*-koordinat 0. Likningen til planet har derfor formen $x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$. Altså er likningen til *yz*-planet $x = 0$.



c Alle disse punktene har x-koordinat lik 2 og ligger ikke på en rett linje. Siden alle disse tre punktene har x-koordinat lik 2, har alle andre punkter i planet også det. Altså er likningen til planet $x = 2$.



d Planet som går gjennom (0 , 4 , 0) og som er parallelt med xz-planet, har likningen $y = 4$. Siden planet er parallelt med xz-planet, har nemlig alle punkter samme y-verdi, nettopp 4.



5.73

a Likningen til planet er $x + 5y - 2z = 17$.

1 Normalplan((3, 2, −2), Vektor((1, 5, −2)))

$\rightarrow$ $\mathbf{x + 5y - 2z = 17}$

b Likningen til planet er $x + 5y - 2z = 0$.

1 Normalplan((0, 0, 0), Vektor((1, 5, −2)))

$\rightarrow$ $\mathbf{x + 5y - 2z = 0}$

c Likningen til planet er $3x - z = -54$.

1 Normalplan((−13, −2, 15), Vektor((3, 0, −1)))

$\rightarrow$ $\mathbf{3x - z = -54}$

d Likningen til planet er $7x - y - 12z = 0$.

1 Plan((0, 0, 0), (2, 2, 1), (3, −3, 2))

$\rightarrow$ $\mathbf{x \cdot 7 + y\,(-1) + z\,(-12) = 0}$

e Planet går gjennom (3 , 0 , 0), (0 , −2 , 0) og (0 , 0 , 4). Med kommandoen Plan(<Punkt>,<Punkt>,<Punkt>) ser vi da at likningen for planet er $-8x + 12y - 6z = -24$, som vi kan forenkle til $4x - 6y + 3z = 12$.

1 Plan((3, 0, 0), (0, −2, 0), (0, 0, 4))

$\rightarrow$ $\mathbf{x\,(-8) + y \cdot 12 + z\,(-6) = -24}$

5.74

a Vi kan lese rett ut av likningen at [–3 , 2 , –5] er en normalvektor til planet. Alle andre normalvektorer er parallelle med den, så to eksempler er [3 , –2 , 5] og [12 , –8 , 20].

b Vi setter inn koordinatene til (4 , –1 , –3) og får –3 · 4 + 2 · (–1) – 5 · (–3) –1 = –12 – 2 +15 – 1 = 0 på venstresiden. Dette stemmer med høyresiden, så punktet (4 , –1 , –3) ligger i planet.

Når vi setter inn koordinatene til (0 , –3 , –1), får vi –3 · 0 + 2 · (–3) – 5 · (–1) –1 = 0 – 6 + 5 – 1 = –2 på venstresiden. Det stemmer ikke med høyresiden, så (0 , –3 , –1) ligger ikke i planet.

5.75

a Vi setter inn koordinatene i den generelle parameterframstillingen og får $\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = -3s - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

b Vi finner vektorene fra (1 , 4 , 1) til hvert av de to andre punktene. De blir [0 , 4 , 6] og [5 , –1 , 4].

Vektorene er ikke parallelle, så de definerer planet $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 4 + 4s - t \\ z = 1 + 6s + 4t \end{cases}$.

c Linjene har retningsvektorer [4 , 1 , 0] og [3 , 2 , 4], og de er ikke parallelle.
Den første linja går dessuten gjennom punktet (2 , 1 , 0) for s = 0. Sammen utgjør de derfor planet

$$\begin{cases} x = 2 + 4s + 3t \\ y = 1 + s + 2t \\ z = 4t \end{cases}.$$

Merk at selv om begge linjene oppgis med parametervariabelen s, må vi bruke ulike parametervariabler når vi definerer planet.

5.76

a Vi kan for eksempel velge $s = t = 0$, som gir (3 , –1 , 4), eller s = 1 og t = 2, som gir (3 , 3 , 11).

b Vi leser ut av parameterframstillingen at to slike vektorer kan være [2 , –2 , 3] og [–1 , 3 , 2].

c Vi setter koordinatene i parameterframstillingen lik de respektive koordinatene til punktene. Siden likningssystemet har en løsning, ligger (–2 , 6 , 0) i γ. Vi ser at vi får dette punktet for s = –2 og t = 1.

1	$3 + 2s - t = -2$ → $\mathbf{2\,s - t + 3 = -2}$
2	$-1 - 2s + 3t = 6$ → $\mathbf{-2\,s + 3\,t - 1 = 6}$
3	$4 + 3s + 2t = 0$ → $\mathbf{3\,s + 2\,t + 4 = 0}$
4	{$1, $2, $3} Løs: $\{\{\mathbf{s = -2, t = 1}\}\}$

Vi gjør det samme med (11 , –13 , 8), men denne gang har ikke likningssystemet noen løsning. Det betyr at det ikke fins noen s og t som gir (11 , –13 , 8) når man setter dem inn i parameterframstillingen for γ. Derfor ligger ikke punktet i planet.

1	$3+2s-t=11$ $\rightarrow$ $\mathbf{2s-t+3=11}$
2	$-1-2s+3t=-13$ $\rightarrow$ $\mathbf{-2s+3t-1=-13}$
3	$4+3s+2t=8$ $\rightarrow$ $\mathbf{3s+2t+4=8}$
4	{\$1, \$2, \$3} Løs: {}

5.77

Normalvektorene til planene er $\vec{n}_\alpha = [2 , 1 , -1]$, $\vec{n}_\beta = [16 , 8 , 4]$, $\vec{n}_\gamma = [4 , 2 , 1]$ og $\vec{n}_\delta = [-2 , -1 , 1]$.

Fra normalvektorene ser vi at α og δ er parallelle, og at β og γ er parallelle.

Vi multipliserer likningen til δ med –1 og får da $-1 \cdot (-2x - y + z - 3) = 2x + y - z + 3 = 0$.

Vi legger merke til at dette er nøyaktig samme likning som for α, så de to planene er sammenfallende.

For å sjekke om β og γ er sammenfallende, multipliserer vi likningen for γ med 4. Det gir $16x + 8y + z - 12 = 0$. Hvis vi legger til 12 på begge sider av likhetstegnet, får vi $16x + 8y + z = 12$. Vi kan se at venstresiden av likningene for β og γ er de samme, men høyresidene stemmer ikke overens. β og γ er altså ikke sammenfallende.

5.78

a Vi setter $x = 0$ og finner hvilken y- og z-koordinat som da oppfyller de to planlikningene.

$$0 + y + z = 0 \quad \wedge \quad 3 \cdot 0 - y + 2z - 6 = 0$$
$$y + z = 0 \quad \wedge \quad 2z - y = 6$$
$$y = -2 \quad \wedge \quad z = 2$$

Punktet (0 , –2 , 2) ligger på skjæringslinja. Normalvektorene til planene er [1 , 1 , 1] og [3 , –1 , 2]. Retningsvektoren til skjæringslinja står vinkelrett på begge planene, så vi velger å bruke $[1 , 1 , 1] \times [3 , -1 , 2] = [3 , 1 , -4]$ som retningsvektor.

1	Vektor((1, 1, 1)) ⊗ Vektor((3, −1, 2)) $\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

En parameterframstilling for linja er derfor $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$.

b Vi setter $x = 0$ og finner hvilken y- og z-koordinat som da oppfyller de to planlikningene.

$$4 \cdot 0 + y - z + 5 = 0 \quad \wedge \quad 0 - y + 2z + 3 = 0$$
$$y - z = -5 \quad \wedge \quad 2z - y = -3$$
$$y = -13 \quad \wedge \quad z = -8$$

Punktet (0 , –13 , –8) ligger på skjæringslinja. Normalvektorene til planene er [4 , 1 , –1] og [1 , –1 , 2]. Retningsvektoren til skjæringslinja står vinkelrett på begge planene, så vi velger å bruke $[4 , 1 , -1] \times [1 , -1 , 2] = [1 , -9 , -5]$ som retningsvektor.

1	Vektor((4, 1, −1)) ⊗ Vektor((1, −1, 2)) $\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-9} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

En parameterframstilling for linja er derfor $\begin{cases} x = t \\ y = -13 - 9t \\ z = -8 - 5t \end{cases}$.

c *yz*-planet har likningen $x = 0$. Her kan vi ikke sette $x = 0$, for da har vi to ukjente, *y* og *z*, men bare én likning, $y + 2z - 5 = 0$. Vi velger derfor å sette $z = 0$, slik at vi får to likninger og to ukjente:

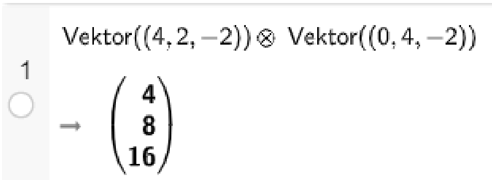
$$2x + y - 5 = 0 \quad \wedge \quad x = 0$$
$$2x + y = 5 \quad \wedge \quad x = 0$$
$$x = 0 \quad \wedge \quad y = 5$$

Altså ligger punktet (0 , 5 , 0) på skjæringslinja.

Vi bruker $[2 , 1 , 2] \times [1 , 0 , 0] = [0 , 2 , -1]$ som retningsvektor for linja fordi den står vinkelrett på begge planene. En parameterframstilling for skjæringslinja er derfor $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 + 2t \\ z = -t \end{cases}$.

5.79

a For å bestemme likningen til planet trenger vi et punkt og en normalvektor.
Siden både $\overrightarrow{KD} = [4 , 2 , -2]$ og $\overrightarrow{KC} = [0 , 4 , -2]$ ligger i planet, er $\overrightarrow{KD} \times \overrightarrow{KC} = [4 , 8 , 16]$ en normalvektor til planet.
Vi bruker i stedet [1 , 2 , 4] fordi den er enklere.



Planet går gjennom punktet *K*(0 , 0 , 5), så likningen blir

$$\alpha : 1(x - 0) + 2(y - 0) + 4(z - 5) = 0$$
$$\alpha : x - 0 + 2y - 0 + 4z - 20 = 0$$
$$\alpha : x + 2y + 4z = 20$$

b *xy*-planet har likningen $z = 0$, og α har likningen $x + 2y + 4z = 20$. Hvis vi setter $x = 0$ i begge likningene (*xy*-planet har jo likningen $0x + 0y + z = 0$, så *x* inngår på et vis i denne likningen), får vi likningssystemet

$$z = 0 \quad \wedge \quad 0 + 2y + 4z = 20$$
$$z = 0 \quad \wedge \quad 2y + 4z = 20$$
$$y = 10 \quad \wedge \quad z = 0$$

Punktet (0 , 10 , 0) oppfyller likningen til både *xy*-planet og α, så det ligger på skjæringslinja.

Retningsvektoren til skjæringslinja står vinkelrett på normalvektorene til planene. Derfor er $[0 , 0 , 1] \times [1 , 2 , 4] = [-2 , 1 , 0]$ en retningsvektor. Vi bruker i stedet $[2 , -1 , 0]$, slik at en parameterframstilling for linja blir $\begin{cases} x = 2t \\ y = 10 - t \\ z = 0 \end{cases}$.

c I oppgave b så vi at punktet (0 , 10 , 0) både ligger i α og *xy*-planet. Hvis vi ser på tegningen, ser vi at dette punktet er *F*, fordi *F* ligger på *y*-aksen (siden både *x*- og *y*-koordinaten er 0), og fordi *F* er et punkt på skjæringslinja til planene.

Vi finner så en parameterframstilling for linja gjennom *K* og *E*. En retningsvektor for denne linja er $\overrightarrow{KD} = [4 , 2 , -2]$ siden *D* ligger på linja gjennom *K* og *E*. Siden linja går gjennom *K*(0 , 0 , 5), er en parameterframstilling $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$. Skjæringspunktet mellom denne linja og *xy*-planet gir punktet *E*.

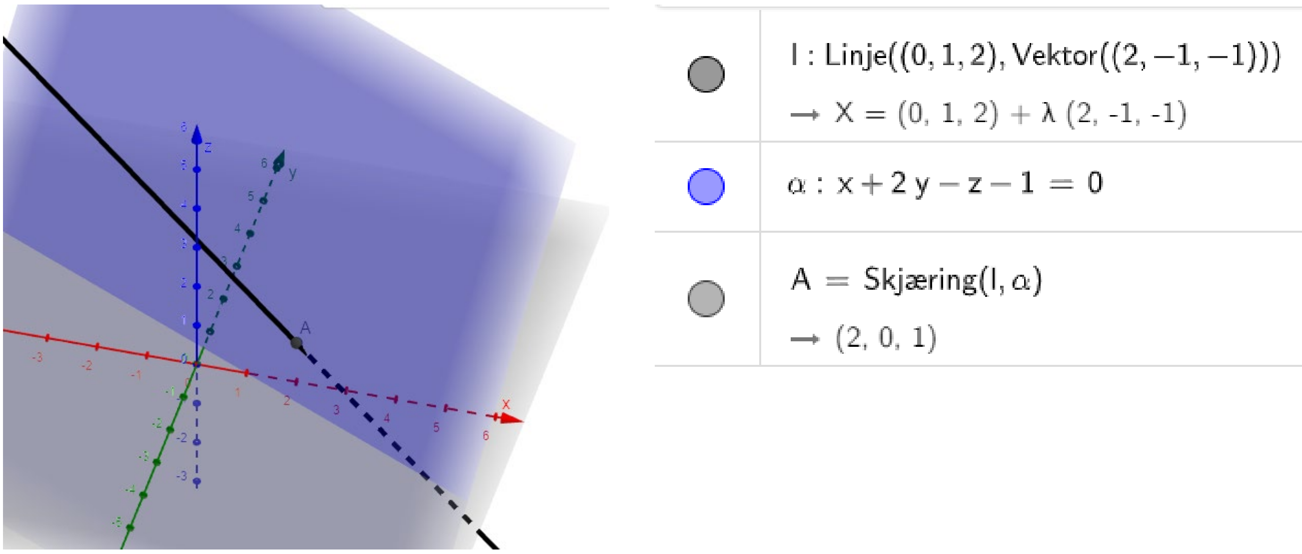
Vi setter derfor koordinatene inn i likningen til *xy*-planet, som er $z = 0$. Det gir $5 - 2t = 0$, det vil si $t = \frac{5}{2}$.

Vi setter denne verdien inn i parameterframstillingen og får punktet $E = \left(4 \cdot \frac{5}{2}, 2 \cdot \frac{5}{2}, 5 - 2 \cdot \frac{5}{2}\right) = (10, 5, 0)$.

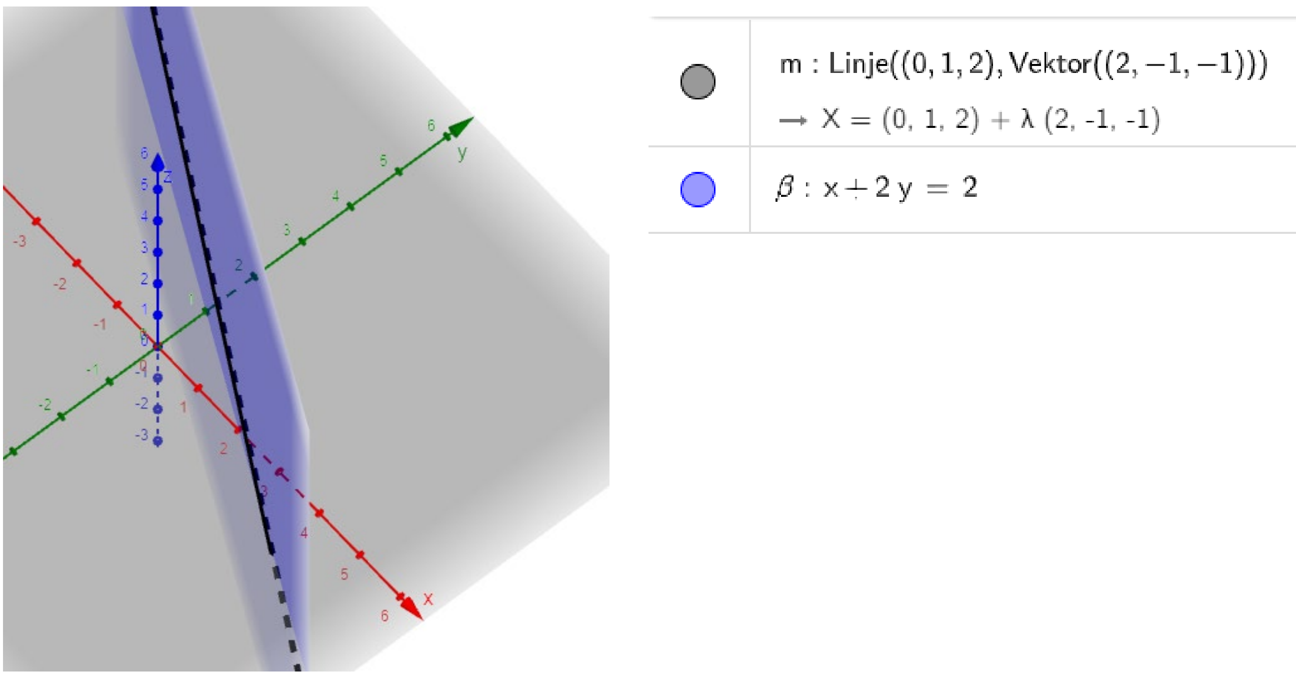
Lengden av skyggekanten *EF* tilsvarer lengden av $\overrightarrow{EF}$.
Den er $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|[0-10, 10-5, 0-0]\right| = \left|[-10, 5, 0]\right| = \sqrt{(-10)^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.
Lengden av skyggekanten *EF* er altså $5\sqrt{5}$ m, dvs. omtrent 11,2 m.

5.80

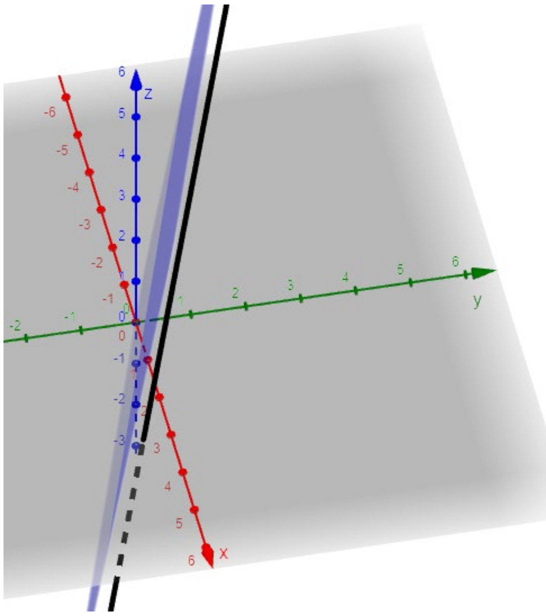
a Vi tegner ℓ og α i Grafikkfelt 3D. De skjærer hverandre i punktet (2 , 0 , 1), men har ingen andre felles punkter.

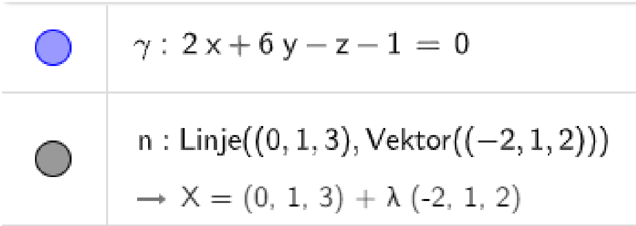


b Vi tegner *m* og β i Grafikkfelt 3D. Fra bildet ser vi at *m* ligger i β, så alle punkter på *m* ligger også i β.



c Vi tegner n og γ i Grafikkfelt 3D. Fra bildet ser vi at n og γ er parallelle, men ikke sammenfallende.





5.81
Likningen $0t = 0$ holder for alle t. Uansett hvilken t-verdi vi setter inn i ℓ, vil altså punktet vi får også ligge i α. Det betyr at ℓ ligger i α.

5.82

a Vi setter koordinatene inn i likningen og får $1 - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 4$ på venstresiden og 0 på høyresiden. Høyre og venstre side av likhetstegnet stemmer ikke, så (1 , 1 , 1) ligger ikke i α.

b Vi leser rett ut av likningen at [1 , –2 , 5] er en normalvektor for α.
Vektoren [–2 , 4 , –10] er parallell med den og er derfor også en normalvektor til α.

c Vi må finne tre punkter som ligger i α. Vi setter først $x = y = 0$ inn i likningen for planet. Da ser vi at $z = 0$, slik at $A(0 , 0 , 0)$ ligger i planet.
Vi kan også sette $x = -3$ og $y = 1$ inn i likningen.
Da får vi likningen $-3 - 2 \cdot 1 + 5z = 0$, med løsningen $z = 1$. Altså ligger også $B(-3 , 1 , 1)$ i α.
Til slutt kan vi sette $x = 1$ og $y = 8$. Da blir likningen $1 - 2 \cdot 8 + 5z = 0$, som har løsningen $z = 3$. Dermed ligger $C(1 , 8 , 3)$ også i α.

Vi har nå to ikke-parallelle vektorer $\overrightarrow{AB} = [-3 , 1 , 1]$ og $\overrightarrow{AC} = [1 , 8 , 3]$ som ligger i planet.

Dessuten vet vi at planet går gjennom (0 , 0 , 0). En parameterframstilling blir derfor $\alpha: \begin{cases} x = -3s + t \\ y = s + 8t \\ z = s + 3t \end{cases}$.

Merk at vi kunne valgt hvilke som helst punkter og at de tre som ble valgt her, var tilfeldige. Ethvert punkt som oppfyller likningen for planet kan brukes, så lenge de tre punktene ikke ligger på en rett linje. Parameterframstillingen ville riktignok sett annerledes ut, men den ville beskrevet det samme planet.

d Vi kan bruke samme retningsvektor for det parallelle planet som for α. Med retningsvektoren [1 , –2 , 5] og punktet (2 , –5 , 1) blir likningen for planet

$$1(x-2) + (-2)\cdot\big(y-(-5)\big) + 5(z-1) = 0$$
$$x - 2 - 2y - 10 + 5z - 5 = 0$$
$$x - 2y + 5z = 17$$

e Når vi setter koordinatene til m inn i likningen til α, får vi at

$$2t - 2 \cdot (1 - t) + 5 \cdot (2 - t) = 0$$
$$2t - 2 + 2t + 10 - 5t = 0$$
$$t = 8$$

$t = 8$ innsatt i m gir punktet $(16 , -7 , -6)$, som altså er skjæringspunktet mellom α og m.

f Vi setter $x = 0$ og finner hvilken y- og z-koordinat som da oppfyller planlikningene $0 - 2y + 5z = 0$ og $2 \cdot 0 - y + 3z = 4$. Vi løser likningssettet i CAS og finner at $y = 20 \quad \wedge \quad z = 8$.
Skjæringslinja til planene går altså gjennom punktet $(0 , 20 , 8)$.

1 $0 - 2y + 5z = 0$
→ $\mathbf{-2\,y + 5\,z = 0}$
2 $2 \cdot 0 - y + 3z = 4$
→ $\mathbf{-y + 3\,z = 4}$
3 {$1, $2}
Løs: $\{\{\mathbf{y = 20, z = 8}\}\}$

Linja står vinkelrett på normalvektorene til begge planene, det vil si $[1 , -2 , 5]$ og $[2 , -1 , 3]$. Vi bruker derfor retningsvektoren $[1 , -2 , 5] \times [2 , -1 , 3] = [-1 , 7 , 3]$.

1 Vektor((1, −2, 5)) ⊗ Vektor((2, −1, 3))
→ $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

En parameterframstilling for linja blir da $\begin{cases} x = -t \\ y = 20 + 7t \\ z = 8 + 3t \end{cases}$.

5.83

a Hvis vi setter $s = t = 0$, ser vi at punktet $(1 , 0 , 2)$ ligger i planet. Vi kan dessuten lese ut av koeffisientene til s og t i parameterframstillingen at de to vektorene $[1 , 2 , -1]$ og $[4 , -1 , 1]$ er parallelle med planet. Vi ser også at disse ikke er parallelle med hverandre.

To linjer som ligger i planet, og som ikke er parallelle, er derfor $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2s \\ z = 2 - s \end{cases}$ og $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

b Når vi setter inn koordinatene for x, y og z i parameterframstillingen for planet, får vi tre likninger med to ukjente. Vi bruker CAS og ser at likningssystemet har en løsning for $s = t = 1$. Det betyr at når vi setter inn $s = t = 1$ i parameter-framstillingen, får vi punktet $(6 , 1 , 2)$. Punktet ligger altså i planet.

1 $6 = 1 + s + 4t$
→ $\mathbf{6 = s + 4\,t + 1}$
2 $1 = 2s - t$
→ $\mathbf{1 = 2\,s - t}$
3 $2 = 2 - s + t$
→ $\mathbf{2 = -s + t + 2}$
4 {$1, $2, $3}
Løs: $\{\{\mathbf{s = 1, t = 1}\}\}$

5.84

a xz-planet har likningen $y = 0$. Retningsvektoren $[0 , 1 , 0]$ kan vi også bruke for de to planene vi skal finne. xz-planet går gjennom punktet $(0 , 0 , 0)$. De to planene med avstand 6 fra xz-planet må derfor gå gjennom $(0 , -6 , 0)$ og $(0 , 6 , 0)$. Likningene til de to planene blir $\alpha : y = -6$ og $\beta : y = 6$.

To vektorer som ikke er parallelle med hverandre, men som er parallelle med planene, er for eksempel $[1 , 0 , 0]$ og $[0 , 0 , 1]$. Vektorproduktet av dem er $[0 , 1 , 0]$.

Parameterframstillingene for de samme planene blir derfor $\alpha : \begin{cases} x = s \\ y = -6 \\ z = t \end{cases}$ og $\beta : \begin{cases} x = s \\ y = 6 \\ z = t \end{cases}$.

b Når planet skjærer aksene to enheter fra origo, betyr det at de går gjennom $A(2\ ,0\ ,0)$, $B(0\ ,2\ ,0)$ og $C(0\ ,0\ ,2)$. To vektorer som er parallelle med planet, er derfor $\overrightarrow{AB} = [-2\ ,2\ ,0]$ og $\overrightarrow{AC} = [-2\ ,0\ ,2]$, slik at en normalvektor til planet er $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [4\ ,4\ ,4]$. Vektoren [1 , 1 , 1] er parallell med den, så vi bruker den i stedet fordi den er enklere.

1 Vektor((−2, 2, 0)) ⊗ Vektor((−2, 0, 2))

→ $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Siden planet går gjennom punktet (2 ,0 , 0), blir likningen til planet $1(x-2)+1(y-0)+1(z-0)=0$, som vi forenkler til $x+y+z=2$.

Siden $[-2\ ,2\ ,0] \parallel [-1\ ,1\ ,0]$ og $[-2\ ,0\ ,2] \parallel [-1\ ,0\ ,1]$ er parallelle med planet, kan vi bruke dem når vi lager en parameterframstilling for planet.

Vi tar igjen utgangspunkt i $A(2\ ,0\ ,0)$ og får parameterframstillingen $\begin{cases} x = 2-s-t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$.

5.85

Dersom vi setter $t = -2$ inn i n, får vi $x = t = -2$, $y = -2t = 4$ og $z = 1 + 3t = -5$, det vil si punktet $(-2\ ,4\ ,-5)$.

Skjæringspunktet mellom n og β finner vi ved å sette koordinatene til n inn i likningen til β.
Det gir likningen $k \cdot t + 3 \cdot (-2t) + 2 \cdot (1 + 3t) = 4$.
Når vi setter inn $t = -2$ i denne planlikningen, får vi en likning med én ukjent, nemlig k. Vi løser likningen i CAS, og finner at $k = -1$.

1 $t := -2$

→ $\mathbf{t := -2}$

2 $k\,t + 3\,(-2\,t) + 2\,(1 + 3\,t) = 4$

Løs: $\{\mathbf{k = -1}\}$

5.86

Med $P(x\ ,y\ ,z)$ vet vi at $\overrightarrow{AP} = [x-2\ ,y\ ,z-2]$, slik at $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2}$.

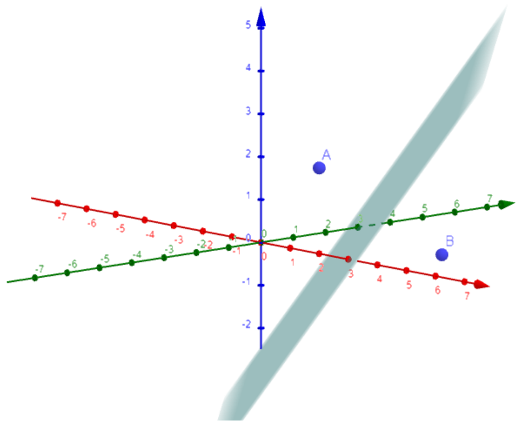
På tilsvarende måte er $\overrightarrow{BP} = [x-4\ ,y-2\ ,0]$, slik at $\left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2}$.

Hvis vi setter $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right|$, får vi likningen $\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 4z + 4} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 + z^2}$, som vi kan forenkle betraktelig:

$$x^2 - 4x + y^2 + z^2 - 4z + 8 = x^2 - 8x + y^2 - 4y + z^2 + 20$$
$$4x + 4y - 4z = 12$$
$$x + y - z = 3$$

Når vi setter $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right|$, forenkles likningen til planet $x + y - z = 3$. Punktene P ligger altså i dette planet.

Et slikt plan er en generalisering av midtnormalen vi kjenner fra 2D:



5.87
Umiddelbart ser dette ut som en parameterframstilling for et plan. Vi finner en normalvektor til planet ved å regne ut $[-1\,,3\,,2]\times[2\,,-6\,,-4]=\vec{0}$. Siden planet går gjennom punktet (1 , 5 , 0), blir likningen

$$\begin{aligned} 0(x-1)+0(y-5)+0(z-0)&=0\\ 0x-0+0y-0+0z-0&=0\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Likningen 0 = 0 er oppfylt for alle *x*, *y* og *z*. Det betyr at punktmengden faktisk ikke er et plan, men hele rommet.

5.88

a Retningsvektorene til linjene er $\vec{r}_\ell=[1\,,2\,,-3]$ og $\vec{r}_m=[-2\,,1\,,0]$. Vinkelen mellom vektorene er 90°. Dette er også vinkelen mellom ℓ og *m*.

1 Vinkel(Vektor((1, 2, −3)), Vektor((−2, 1, 0)))
$\rightarrow$ **90**

b Retningsvektorene til linjene er $\vec{r}_\ell=[1\,,4\,,3]$ og $\vec{r}_m=[2\,,-1\,,1]$. Vinkelen mellom vektorene er 85,4°. Dette er også vinkelen mellom ℓ og *m*.

1 Vinkel(Vektor((1, 4, 3)), Vektor((2, −1, 1)))
$\approx$ **85.4**

c Retningsvektorene til linjene er $\vec{r}_\ell=[1\,,-1\,,1]$ og $\vec{r}_m=[0\,,2\,,1]$. Vinkelen mellom vektorene er 105°, så vinkelen mellom ℓ og *m* er 180° – 105° = 75°.

1 Vinkel(Vektor((1, −1, 1)), Vektor((0, 2, 1)))
$\approx$ **105**
2 180 − $1
$\approx$ **75**

5.89
Vi definerer retningsvektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ til linjene ved hjelp av kommandoen Vektor(<Startpunkt>,<Sluttpunkt>). Vinkelen mellom retningsvektorene er 45°. Vinkelen mellom de to linjene er derfor også 45°.

1 u := Vektor((−3, −2, 0), (6, 4, 2))
$\rightarrow$ **u :=** $\begin{pmatrix}9\\6\\2\end{pmatrix}$
2 v := Vektor((−1, 2, 7), (4, 2, 12))
$\rightarrow$ **v :=** $\begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix}$
3 Vinkel(u, v)
$\rightarrow$ **45**

5.90
Vi leser ut av parameterframstillingen at en retningsvektor for *n* er $\vec{r}_n=[1\,,0\,,-1]$.
z-aksen går gjennom punktene (0 , 0 , 0) og (0 , 0 , 1), så en retningsvektor for den er $\vec{r}_z=[0\,,0\,,1]$.
Skalarproduktet av disse vektorene er [1 , 0 , –1] · [0 , 0 , 1] = 1 · 0 + 0 · 0 + (–1) · 1 = –1.
Den geometriske tolkningen av skalarproduktet gir så at

$$|\vec{r}_n|\cdot|\vec{r}_z|\cdot\cos v=-1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos v=-1 \;\Leftrightarrow\; \cos v=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Siden $v\in[0°\,,180°]$, er *v* = 135°.
v er imidlertid bare vinkelen mellom retningsvektorene til *n* og *z*-aksen.
Vinkelen mellom selve linjene blir derfor 180° – 135° = 45°.

5.91

a Vi finner vinkelen mellom normalvektorene til planene. Denne er mer enn 90°, så vi trekker den fra 180°. Vinkelen mellom planene er 180° – 159° = 21°.

1	Vinkel(Vektor((1, −2, 2)), Vektor((0, 4, −3))) °
	≈ **159**
2	180 − $1
	≈ **21**

b Vi finner vinkelen mellom normalvektorene til planene. Den er mindre enn 90°, så vi trekker den ikke fra 180°. Vinkelen mellom planene er 60°.

1	Vinkel(Vektor((2, 1, −1)), Vektor((2, −2, −4))) °
	≈ **60**

c Vi flytter først 3*z* over til venstre side av likhetstegnet for å få likningen til α på ønsket form. Normalvektoren til α er [2 , 5 , –3], og normalvektoren til β er [4 , 10 , –6]. Vinkelen mellom normalvektorene til planene er 0°. Det betyr at planene er parallelle.

1	Vinkel(Vektor((2, 5, −3)), Vektor((4, 10, −6))) °
	→ **0**

d De to vektorene [2 , –2 , 3] og [–1 , 3 , 2] ligger i α, mens [1 , 2 , –3] og [–2 , –1 , 0] ligger i β. Vi bruker CAS til å bergene vektorproduktene av vektorene som ligger i de to planene. Vi bruker vektorproduktene som normalvektorer for de to planene og ser at vinkelen mellom dem er 85,4°. Siden 85,4° < 90°, trekker vi ikke vinkelen fra 180°.

1	n_α := Vektor((2, −2, 3)) ⊗ Vektor((−1, 3, 2))
	→ $n_\alpha := \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$
2	n_β := Vektor((1, 2, −3)) ⊗ Vektor((−2, −1, 0))
	→ $n_\beta := \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
3	Vinkel(n_α, n_β) °
	≈ **85.4**

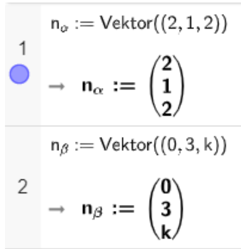
e En normalvektor for α er [2 , –2 , 3] × [–1 , 3 , 2] = [–13 , –7 , 4]. Vi ser fra likningen til β at en normalvektor er $\vec{n}_\beta = [1\,,0\,,0]$. Vinkelen mellom vektorene finner vi ved hjelp av CAS. Fordi vinkelen mellom normalvektorene er 148° > 90°, er vinkelen mellom planene 180° – 148,2° = 31,8°.

1	n_α := Vektor((2, −2, 3)) ⊗ Vektor((−1, 3, 2))
	→ $n_\alpha := \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$
2	n_β := Vektor((1, 0, 0))
	→ $n_\beta := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3	Vinkel(n_α, n_β) °
	≈ **148.2**
4	180 − $3
	≈ **31.8**

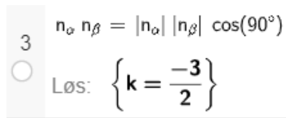
5.92

Normalvektorene til planene er $\vec{n}_\alpha = [2\,,1\,,2]$ og $\vec{n}_\beta = [0\,,3\,,k]$.

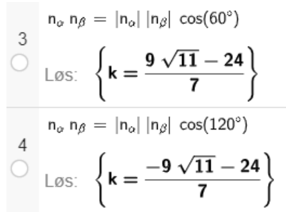
I CAS definerer vi først de to vektorene og bruker skalarproduktet.



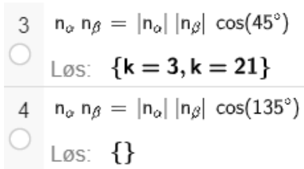
a Vi setter inn 90° for vinkelen mellom vektorene og løser likningen.
Vi finner at $k = -\dfrac{3}{2}$.



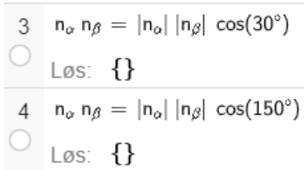
b Når vinkelen mellom planene er 60°, kan vinkelen mellom normalvektorene være enten 60° eller 180° – 60° = 120°. Vi prøver begge og ser at vinkelen mellom planene er 60° med $k = \dfrac{\pm 9\sqrt{11} - 24}{7}$.



c Når vinkelen mellom planene er 45°, kan vinkelen mellom normalvektorene være enten 45° eller 180° – 45° = 135°. Vi prøver begge og ser at vinkelen mellom planene er 45° når $k = 3 \quad \vee \quad k = 21$.

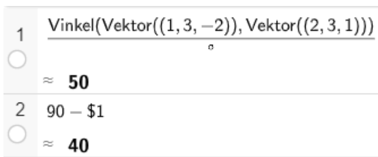


d Når vinkelen mellom planene er 30°, kan vinkelen mellom normalvektorene være enten 30° eller 180° – 30° = 150°. Vi prøver begge, men ingen av likningene har noen løsning. Vinkelen mellom planene kan derfor ikke være 30°.

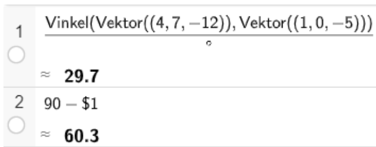


5.93

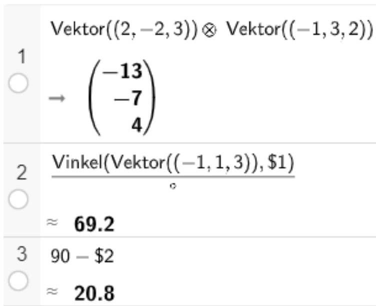
a En retningsvektor for linja er [1 , 3 , –2], og en normalvektor for planet er [2 , 3 , 1]. Vinkelen mellom vektorene er 50° < 90°, så vinkelen mellom linja og planet er 90° – 50° = 40°.



b En retningsvektor for linja er [4 , 7 , –12] og en normalvektor for planet er [1 , 0 , –5]. Vinkelen mellom vektorene er 29,7° < 90°, så vinkelen mellom linja og planet er 90° –- 29,7° = 60,3°.



c De to vektorene [2 , –2 , 3] og [–1 , 3 , 2] er parallelle med α, så vi bruker vektorproduktet av dem som normalvektor for planet.
Vinkelen mellom normalvektoren for α og retningsvektoren for linja er 69,2° < 90°. Vinkelen mellom planet og linja er derfor 90° – 69,2° = 20,8°.



5.94
En normalvektor for planet er [2 , 1 , –1], og en retningsvektor for linja er [–1 , –2 , –1].
Skalarproduktet mellom vektorene er $2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) = -2 - 2 + 1 = -3$.

Lengden av normalvektoren for planet er $\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

Lengden av retningsvektoren for linja er $\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

Derfor er $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos v = -3 \;\Leftrightarrow\; \cos v = -\frac{1}{2}$ slik at $v = 120°$.

Når vinkelen mellom vektorene er 120°, er vinkelen mellom planet og linja 120° – 90° = 30°.

5.95

a Linjene har retningsvektorene [1 , 3 , 0] og [4 , –2 , 11].
Vinkelen mellom disse vektorene er 93,1°, slik at vinkelen mellom linjene blir 180° – 93,1° = 86,9°.

1 $\frac{\text{Vinkel}(\text{Vektor}((1,3,0)),\text{Vektor}((4,-2,11)))}{°}$
≈ **93.1**
2 $180 - \$1$
≈ **86.9**

b Planene har normalvektorene [2 , 3 , 1] og [0 , 1 , 0].
Vinkelen mellom disse vektorene er 36,7° < 90°, så vinkelen mellom planene er også 36,7°.

1 $\frac{\text{Vinkel}(\text{Vektor}((2,3,1)),\text{Vektor}((0,1,0)))}{°}$
≈ **36.7**

c En retningsvektor for ℓ er [1 , 3 , 0] og en normalvektor for α er [2 , 3 , 1]. Vinkelen mellom vektorene er 21,6° < 90°, slik at vinkelen mellom linja og planet er 90° – 21,6° = 68,4°.

1 $\frac{\text{Vinkel}(\text{Vektor}((1,3,0)),\text{Vektor}((2,3,1)))}{°}$
≈ **21.6**
2 $90 - \$1$
≈ **68.4**

d En retningsvektor for m er [4 , –2 , 11], og en normalvektor for β er [0 , 1 , 0]. Vinkelen mellom vektorene er 99,7° > 90°, slik at vinkelen mellom linja og planet er 99,7° – 90° = 9,7°.

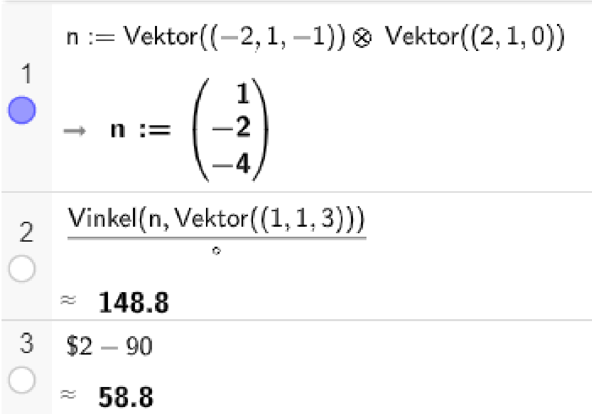
1 $\frac{\text{Vinkel}(\text{Vektor}((4,-2,11)),\text{Vektor}((0,1,0)))}{°}$
≈ **99.7**
2 $\$1 - 90$
≈ **9.7**

5.96

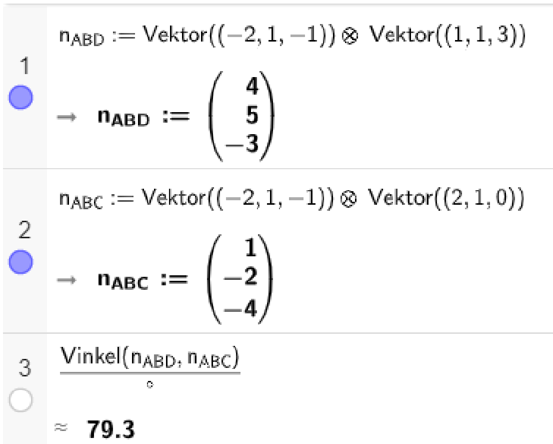
a En retningsvektor for linja gjennom A og D er $\overrightarrow{AD} = [1, 1, 3]$, og en retningsvektor for linja gjennom B og C er $\overrightarrow{BC} = [4 , 0 , 1]$. Vinkelen mellom disse vektorene er 59,2°. Derfor er også vinkelen mellom sidekantene 59,2°.

1 $\frac{\text{Vinkel}(\text{Vektor}((1,1,3)),\text{Vektor}((4,0,1)))}{°}$
≈ **59.2**

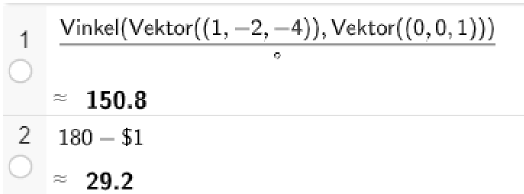
b Vi ser på vinkelen mellom planet som *ABC* ligger i og linja som går gjennom *AD*. En normalvektor for planet er $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-2\,,1\,,-1] \times [2\,,1\,,0] = [1\,,-2\,,-4]$.
Vinkelen mellom $\vec{n}$ og $\overrightarrow{AD} = [1\,,1\,,3]$ er 148,8°.
Derfor er vinkelen mellom sidekanten *AD* og sideflaten *ABC* 148,8° – 90° = 58,8°.



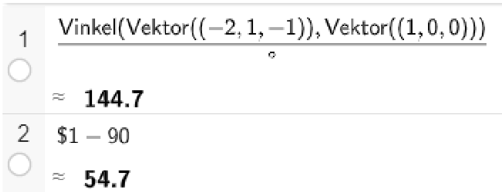
c Vi ser på vinkelen mellom planene som de to sideflatene ligger i. *ABD* ligger i et plan der $\vec{n}_{ABD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = [-2\,,1\,,-1] \times [1\,,1\,,3] = [4\,,5\,,-3]$ er en normalvektor, og *ABC* ligger i et plan der $\vec{n} = [1\,,-2\,,-4]$ er en normalvektor (som vist i oppgave b).
Vinkelen mellom dem er 79,3°.
Derfor er vinkelen mellom de to sideflatene også 79,3°.



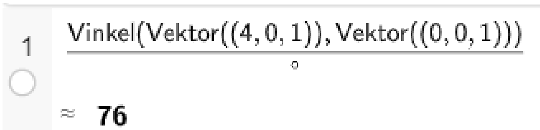
d En normalvektor for planet gjennom *ABC* er $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-2\,,1\,,-1] \times [2\,,1\,,0] = [1\,,-2\,,-4]$.
En normalvektor for *xy*-planet er [0 , 0 , 1].
Vinkelen mellom vektorene er 150,8°, slik at vinkelen mellom *ABC* og *xy*-planet er 180° – 150,8° = 29,2°.



e Sidekanten *AB* er en del av linja gjennom *A* og *B*.
En retningsvektor for denne linja er $\overrightarrow{AB} = [-2\,,1\,,-1]$.
En normalvektor for *yz*-planet er [1 , 0 , 0].
Vinkelen mellom disse to vektorene er 144,7°.
Derfor er vinkelen mellom *AB* og *yz*-planet 144,7° – 90° = 54,7°.



f Sidekanten *BC* er en del av linja gjennom *B* og *C*.
En retningsvektor for denne linja er $\overrightarrow{BC} = [4\,,0\,,1]$.
z-aksen er også en linje, men med retningsvektor [0 , 0 , 1].
Vinkelen mellom disse er 76,0°.
Derfor er også vinkelen mellom *BC* og *z*-aksen 76,0°.



5.97
Siden *ABCDEFGH* er en terning og vi *bare* er interessert i vinkler, kan vi godt sette lengder på sidene. Vi kan for eksempel la alle sider ha lengde 1. Det vil ikke påvirke vinklene. Vi tenker så at vi plasserer *A* i origo, *B* i (1 , 0 , 0), *C* i (1 , 1 , 0) osv. Da kan vi bruke vektorregning til å finne vinklene.

a En retningsvektor for linja gjennom A og G er $\overrightarrow{AG} = [1-0\ ,1-0\ ,1-0] = [1\ ,1\ ,1]$.
En retningsvektor for linja gjennom B og H er $\overrightarrow{BH} = [0-1\ ,1-0\ ,1-0] = [-1\ ,1\ ,1]$.
Vinkelen mellom dem er 70,5°.
Derfor er også vinkelen mellom *AG* og *BH* 70,5°.

1 Vinkel(Vektor((1, 1, 1)), Vektor((−1, 1, 1)))°
≈ **70.5**

b Vi bruker [1 , 1 , 1] som retningsvektor for linja gjennom *A* og *G*. En normalvektor for planet gjennom grunnflaten *ABCD* er
$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = [1\ ,0\ ,0] \times [0\ ,1\ ,0] = [0\ ,0\ ,1]$.
Vinkelen mellom $\overrightarrow{AG}$ og $\vec{n}$ er 54,7°.
Derfor er vinkelen mellom *AG* og grunnflaten *ABCD* $90° - 54{,}7° = 35{,}3°$.

1 Vinkel(Vektor((1, 1, 1)), Vektor((0, 0, 1)))°
≈ **54.7**
2 90 − \$1
≈ **35.3**

c Vi bruker [1 , 1 , 1] som retningsvektor for linja gjennom *A* og *G*.
En normalvektor for planet gjennom sideflaten *BCGF* er
$\vec{n} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF} = [1\ ,0\ ,0] \times [0\ ,0\ ,1] = [0\ ,-1\ ,0]$. Vinkelen mellom $\overrightarrow{AG}$ og $\vec{n}$ er 125,3°.
Derfor er vinkelen mellom *AG* og *BCGF* lik $125{,}3° - 90° = 35{,}3°$.

1 Vinkel(Vektor((1, 1, 1)), Vektor((0, −1, 0)))°
≈ **125.3**
2 \$1 − 90
≈ **35.3**

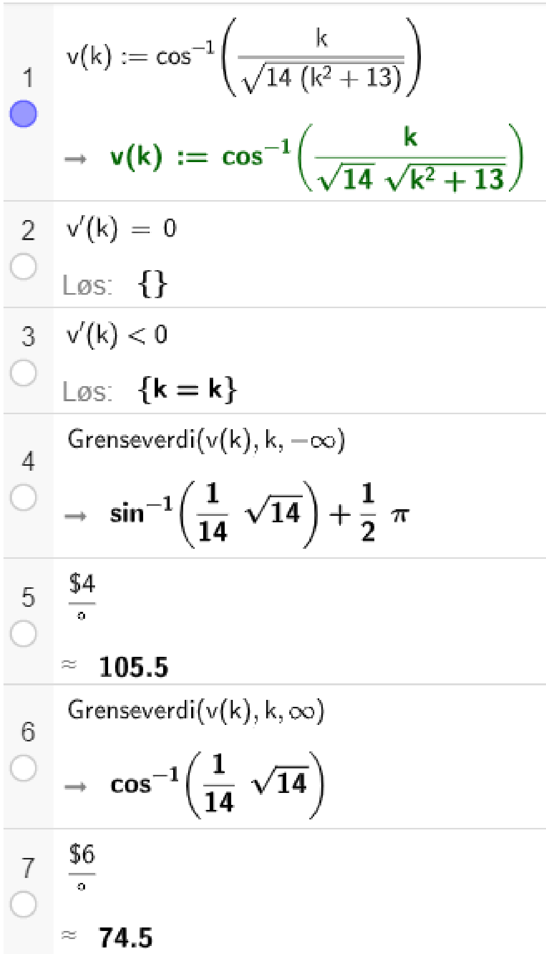
d En normalvektor for planet som går gjennom *BDE*, er
$\vec{n}_{BDE} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BE} = [-1\ ,1\ ,0] \times [-1\ ,0\ ,1] = [1\ ,1\ ,1]$.
En normalvektor for planet gjennom *BFHD* er
$\vec{n}_{BFHD} = \overrightarrow{BF} \times \overrightarrow{BD} = [0\ ,0\ ,1] \times [-1\ ,1\ ,0] = [-1\ ,-1\ ,0]$.

Vinkelen mellom de to normalvektorene er 144,7°.
Derfor er vinkelen mellom flatene 180° – 144,7° = 35,3°.

1 n_{BDE} := Vektor((−1, 1, 0)) ⊗ Vektor((−1, 0, 1))
→ $\mathbf{n_{BDE}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2 n_{BFHD} := Vektor((0, 0, 1)) ⊗ Vektor((−1, 1, 0))
→ $\mathbf{n_{BFHD}} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3 Vinkel(n_{BDE}, n_{BFHD})°
≈ **144.7**
4 180 − \$3
≈ **35.3**

5.98
En retningsvektor for linja er $\vec{r} = [1\ ,-2\ ,3]$, og en normalvektor for planet er $\vec{n} = [k\ ,3\ ,2]$.
Vi bruker skalarproduktet til å finne et uttrykk for vinkelen *v* mellom vektorene.

$$1\cdot k+(-2)\cdot 3+3\cdot 2=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{k^2+3^2+2^2}\cdot\cos v$$
$$k=\sqrt{14}\cdot\sqrt{k^2+13}\cdot\cos v$$
$$\cos v=\frac{k}{\sqrt{14\cdot(k^2+13)}}$$
$$v=\arccos\left(\frac{k}{\sqrt{14\cdot(k^2+13)}}\right)$$



Vi definerer v som en funksjon av k i CAS.
I rad 2 viser vi at den deriverte av v aldri er null, og i rad 3 viser vi at den alltid er negativ, slik at grafen til enhver tid synker.

Det viser seg at den største vinkelen mellom retningsvektoren og normalvektoren er 105,5°, slik at vinkelen mellom planet og linja er 105,5° – 90° = 15,5°. Samtidig er den minste vinkelen mellom vektorene 74,5°. I dette tilfellet skal vinkelen mellom plan og linje være 90° – 74,5° = 15,5°. Det ser altså ut til at både minste og største vinkel mellom planet og linja er 15,5°.

Men her er det viktig å tenke seg om to ganger. Regelen om at vinkelen mellom planet og linja er 90° – v eller v – 90°, forteller i realiteten at den er $|v-90°|$. Her er v i området 74,5° til 105,5°, slik at v – 90° ligger i området –15,5° til 15,5°.

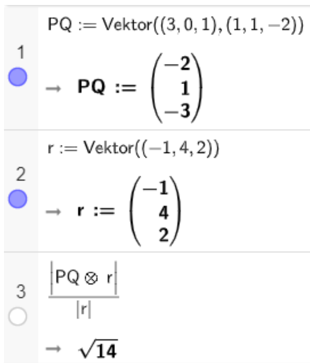
Vi skriver begge de to ytterpunktene som 15,5° når vi oppgir vinkelen, men dette viser at v faktisk også er innom null.
Derfor finner vi v i området fra og med 0° til ca. 15,5°.

5.99

a En retningsvektor for ℓ er $\vec{r}=[-1\,,4\,,2]$. Et punkt på linja er $P=(3\,,0\,,1)$.

Vi definerer vektoren fra P til Q og regner ut $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{r}|}{|\vec{r}|}$ ved hjelp av CAS.

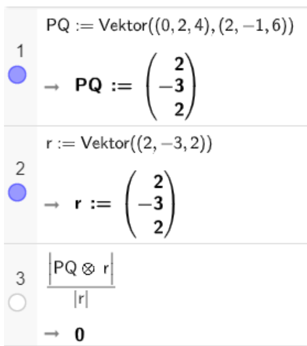
Avstanden mellom linja og punktet er $\sqrt{14}$.



b En retningsvektor for ℓ er $\vec{r}=[2\,,-3\,,2]$. Et punkt på linja er $P=(0\,,2\,,4)$.

Vi definerer vektoren fra P til Q og regner ut $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{r}|}{|\vec{r}|}$ ved hjelp av CAS.

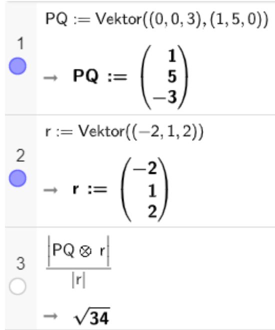
Avstanden mellom linja og punktet er 0. Det betyr at Q ligger på ℓ.



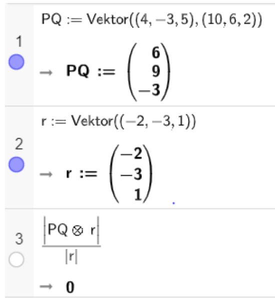
5.100

a Linjene har retningsvektorene $\vec{r}_\ell = [-2\,,1\,,2]$ og $\vec{r}_m = [-2\,,1\,,2]$, så $\ell \parallel m$. Derfor finner vi et punkt, for eksempel $Q(1\ ,\ 5\ ,\ 0)$ på ℓ og regner ut avstanden fra det til m. Et punkt på m er $P(0\ ,\ 0\ ,\ 3)$. Vi bruker CAS til å regne ut $\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{r}\right|}{\left|\vec{r}\right|}$, der vi bruker $[-2\ ,\ 1\ ,\ 2]$ som retningsvektor for m.

Avstanden mellom Q og linja m, og derfor også avstanden mellom linjene ℓ og m, er $\sqrt{34}$.

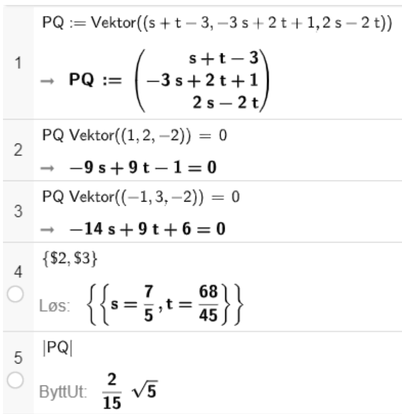


b Linjene har retningsvektorene $\vec{r}_\ell = [2\,,3\,,-1]$ og $\vec{r}_m = [-2\,,-3\,,1]$, så $\ell \parallel m$. Derfor finner vi et punkt, for eksempel $Q(4\ ,\ -3\ ,\ 5)$ på ℓ og regner ut avstanden fra dette til m. Et punkt på m er $P(10\ ,\ 6\ ,\ 2)$. Vi bruker CAS til å regne ut $\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{r}\right|}{\left|\vec{r}\right|}$, der vi bruker $[-2\ ,\ -3\ ,\ 1]$ som retningsvektor.
Avstanden mellom Q og linja m, og derfor også avstanden mellom linjene ℓ og m, er 0. Siden de er parallelle og har avstand 0, er linjene sammenfallende.



c Linjene har retningsvektorene $\vec{r}_\ell = [1\,,2\,,-2]$ og $\vec{r}_m = [-1\,,3\,,-2]$. Retningsvektorene er ikke parallelle, så linjene er heller ikke det. Vektoren fra et vilkårlig punkt Q på ℓ til et vilkårlig punkt P på m, er
$\overrightarrow{PQ} = [t-(3-s)\,,\,2t+1-3s\,,\,3-2t-(3-2s)] = [s+t-3\,,\,-3s+2t+1\,,\,2s-2t]$.

Vi bestemmer s og t slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på hver av retningsvektorene ved å sette skalarproduktene mellom dem lik null.
Da ser vi at $s = \dfrac{7}{5} \ \wedge\ t = \dfrac{68}{45}$.
Vi setter disse verdiene inn i uttrykket for $\overrightarrow{PQ}$ ved hjelp av ByttUt-knappen i CAS og finner lengden av vektoren. Lengden av vektoren, og dermed avstanden mellom linjene, er $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$.



5.101

a $D = \dfrac{\left|1\cdot 0+(-2)\cdot 0+(-2)\cdot 0-6\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \dfrac{\left|-6\right|}{\sqrt{9}} = 2$

b Vi flytter -2 over på venstresiden av likhetstegnet slik at planlikningen blir $x + 4y - z + 2 = 0$.
Det gir $D = \dfrac{\left|1\cdot 3+4\cdot 1+(-1)\cdot(-3)+2\right|}{\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}} = \dfrac{\left|12\right|}{\sqrt{18}} = \dfrac{12}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

c $D = \dfrac{\left|2\cdot 0+(-1)\cdot(-3)+6\cdot 2\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+6^2}} = \dfrac{\left|15\right|}{\sqrt{41}} = \dfrac{15\sqrt{41}}{41}$

d *xy*-planet har likningen $z = 0$. Derfor blir $D = \dfrac{|0\cdot(-4)+0\cdot5+1\cdot6+0|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \dfrac{|6|}{\sqrt{1}} = 6$.

e *xz*-planet har likningen $y = 0$. Derfor blir $D = \dfrac{|0\cdot(-4)+1\cdot5+0\cdot6+0|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \dfrac{|5|}{1} = 5$.

f *yz*-planet har likningen $x = 0$. Derfor blir $D = \dfrac{|1\cdot(-4)+0\cdot5+0\cdot6+0|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \dfrac{|-4|}{1} = 4$.

5.102

a En normalvektor for planet som ABC ligger i, er $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-2, 1, -1] \times [2, 1, 0] = [1, -2, -4]$.
Planet går gjennom punktet $A(1, 1, 1)$, så likningen blir $1(x-1) - 2(y-1) - 4(z-1) = 0$, som vi kan forenkle til $x - 2y - 4z + 5 = 0$. Avstanden fra dette planet til punktet D tilsvarer høyden h_1 i tetraedret. Denne avstanden er $h_1 = \dfrac{|1\cdot2-2\cdot2-4\cdot4+5|}{\sqrt{1^2+2^2+4^2}} = \dfrac{|-13|}{\sqrt{21}} = \dfrac{13\sqrt{21}}{21}$.

b En normalvektor for planet som ACD ligger i, er $\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = [2, 1, 0] \times [1, 1, 3] = [3, -6, 1]$.
Planet går gjennom punktet $A(1, 1, 1)$, så likningen blir $3(x-1) - 6(y-1) + 1(z-1) = 0$, som vi kan forenkle til $3x - 6y + z + 2 = 0$. Avstanden fra dette planet til punktet B tilsvarer høyden h_2 i tetraedret. Denne avstanden er $h_2 = \dfrac{|3\cdot(-1)-6\cdot2+1\cdot0+2|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+1^2}} = \dfrac{|-13|}{\sqrt{46}} = \dfrac{13\sqrt{46}}{46}$.

5.103

a En retningsvektor for ℓ er $\vec{r} = [1, -3, 4]$, og en normalvektor for α er $\vec{n} = [2, 2, 1]$. Skalarproduktet mellom dem er $1\cdot2 + (-3)\cdot2 + 4\cdot1 = 2 - 6 + 4 = 0$. Linja er altså parallell med planet. Vi velger punktet $(3, 0, 1)$ på linja og finner at avstanden D mellom punktet (linja) og planet er $D = \dfrac{|2\cdot3+2\cdot0+1\cdot1-14|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{|-7|}{\sqrt{9}} = \dfrac{7}{3}$.

b En retningsvektor for ℓ er $\vec{r} = [1, 3, -2]$, og en normalvektor for α er $\vec{n} = [2, 3, 1]$. Skalarproduktet mellom dem er $1\cdot2 + 3\cdot3 + (-2)\cdot1 = 2 + 9 - 2 = 9$. Siden normalvektoren til α ikke står vinkelrett på retningsvektoren til ℓ, er ikke planet og linja parallelle. Derfor er avstanden mellom dem 0.

c En retningsvektor for ℓ er $\vec{r} = [2, -2, 3]$, og en normalvektor for α er $\vec{n} = [13, 7, -4]$. Skalarproduktet mellom dem er $2\cdot13 + (-2)\cdot7 + 3\cdot(-4) = 26 - 14 - 12 = 0$. Linja er altså parallell med planet. Vi velger punktet $(0, 1, 2)$ på linja og finner at avstanden D mellom punktet (linja) og planet er
$D = \dfrac{|13\cdot0+7\cdot1-4\cdot2-25|}{\sqrt{13^2+7^2+(-4)^2}} = \dfrac{|-26|}{\sqrt{234}} = \dfrac{26}{3\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

5.104

a *xy*-planet har likningen $z = 0$. $[0, 0, 1]$ er derfor en normalvektor for begge planene, så de er parallelle.
Vi ser at $(0, 0, 0)$ er et punkt i planet $z = 0$. Avstanden fra $(0, 0, 0)$ til planet $z = 5$, eller $z - 5 = 0$, er
$D = \dfrac{|0\cdot0+0\cdot0+1\cdot0-5|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{1}} = 5$.

b *xy*-planet har likningen $z = 0$. Derfor er $[0, 0, 1]$ en normalvektor. Men $y = 5$ har normalvektoren $[0, 1, 0]$, som ikke er parallell med $[0, 0, 1]$. Derfor er ikke planene parallelle. De har avstand 0.

c Begge planene har [6 , 4 , –1] som en normalvektor og er derfor parallelle. Vi setter $x = y = 0$ i likningen for det første planet. Det gir $z = -20$. Derfor ligger punktet (0 , 0 , –20) i det første planet. Vi finner at avstanden D fra (0 , 0 , –20) til planet $6x + 4y - z - 5 = 0$ (merk at 5 er flyttet over til venstresiden) er

$$D = \frac{|6\cdot 0 + 4\cdot 0 - 1\cdot(-20) - 5|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{53}} = \frac{15\sqrt{53}}{53}.$$

d En normalvektor for det første planet er [1 , 1 , 1], som ikke er parallell med [2 , 2 , 1], som er en normalvektor for det andre planet. Siden normalvektorene ikke er parallelle er heller ikke planene det, så de har avstand 0.

5.105

a $$D = \frac{|1\cdot 7 + 1\cdot 0 + 1\cdot 4 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|11|}{\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{3}$$

b En retningsvektor for ℓ er $\vec{r} = [0\,,2\,,-2]$, og et punkt på ℓ er $Q(2 , 4 , 0)$. Vi har da at $\overrightarrow{PQ} = [2-7\,,4-0\,,0-4] = [-5\,,4\,,-4]$. Avstanden mellom P og ℓ blir derfor

$$\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{r}\right|}{|\vec{r}|} = \frac{|[-10\,,-10\,,0]|}{|[0\,,2\,,-2]|} = \frac{\sqrt{(-10)^2 + (-10)^2 + 0^2}}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{8}} = \frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 5.$$

c En normalvektor for α er [1 , 1 , 1], og en retningsvektor for ℓ er [0 , 2 , –2]. Skalarproduktet mellom dem er $1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-2) = 0$, så planet og linja er parallelle. Vi velger punktet (2 , 4 , 0) på ℓ og finner avstanden $D = \dfrac{|1\cdot 2 + 1\cdot 4 + 1\cdot 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{|6|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\cdot 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

5.106

a Høyden h i pyramiden er avstanden fra grunnflaten $ABCD$ til toppunktet $E(2 , 2 , 4)$. Grunnflaten ligger i planet som går gjennom $A(1 , 1 , 1)$ og der $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [-2\,,1\,,-1]\times[2\,,1\,,0] = [1\,,-2\,,-4]$ er en normalvektor. Likningen til planet er derfor $1(x-1) - 2(y-1) - 4(z-1) = 0$, som vi kan forenkle til $x - 2y - 4z + 5 = 0$. Siden høyden er avstanden mellom $ABCD$ og E, er

$$h = \frac{|1\cdot 2 - 2\cdot 2 - 4\cdot 4 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{21}} = \frac{13\sqrt{21}}{21}.$$

b Grunnflaten er et parallellogram dersom den har to og to parallelle og like lange sider. Her er $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [-2\,,1\,,-1]$. Samtidig er $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [4\,,0\,,1]$. Altså er AB og DC like lange, og det samme gjelder AD og BC. Altså har $ABCD$ to og to like lange og parallelle sider, slik at flaten er et parallellogram.

Punktet $A(1 , 1 , 1)$ ligger på AD, og punktet $B(-1 , 2 , 0)$ ligger på BC. Vi bruker $\overrightarrow{BC} = [4\,,0\,,1]$ som retningsvektor for linja gjennom B og C. Det gir at avstanden mellom AD og BC er $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{\sqrt{357}}{17}$.

1 $$\frac{|\text{Vektor}((1,1,1),(-1,2,0)) \otimes \text{Vektor}((4,0,1))|}{|\text{Vektor}((4,0,1))|}$$

$$\rightarrow \ \frac{1}{17}\sqrt{357}$$

Punktet $A(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ ligger på AB, og punktet $C(3\ ,\ 2\ ,\ 1)$ ligger på CD.
Vi bruker $\overrightarrow{CD} = [2\ ,-1\ ,\ 1]$ som retningsvektor for linja gjennom C og D. Det gir at avstanden mellom AB og CD er $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

1 $\frac{\left|\text{Vektor}((1,1,1),(3,2,1)) \otimes \text{Vektor}((2,-1,1))\right|}{\left|\text{Vektor}((2,-1,1))\right|}$

$\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{14}$

c $\overrightarrow{AB} = [-2\ ,\ 1\ ,-1]$ er en retningsvektor for linja gjennom A og B, som inneholder punktet $A(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$. Avstanden fra denne linja til E er

$$\frac{\left|\overrightarrow{AE} \times \vec{r}\right|}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{\left|[1\ ,1\ ,3] \times [-2\ ,1\ ,-1]\right|}{\left|[-2\ ,1\ ,-1]\right|} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

1 $\frac{\left|\text{Vektor}((1,1,3)) \otimes \text{Vektor}((-2,1,-1))\right|}{\left|\text{Vektor}((-2,1,-1))\right|}$

$\rightarrow \frac{5}{3}\sqrt{3}$

5.107

a α må være parallelt med både $[-1\ ,\ 2\ ,-2]$ og $[1\ ,\ 1\ ,-1]$, det vil si retningsvektorene for de to linjene. En normalvektor for α er derfor $[-1\ ,\ 2\ ,-2] \times [1\ ,\ 1\ ,-1] = [0\ ,-3\ ,-3]$. Vi bruker i stedet $[0\ ,\ 1\ ,\ 1]$ (som er parallell med $[0\ ,-3\ ,-3]$).

Et punkt på ℓ er $(2\ ,\ 4\ ,\ 0)$. Vi tar utgangspunkt i dette og får at likningen for planet er

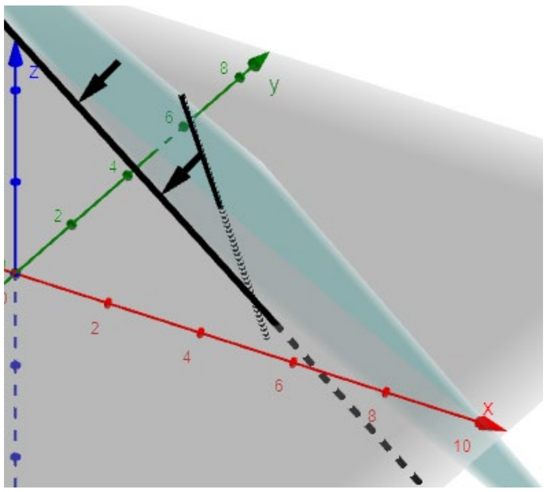
$0(x - 2) + 1(y - 4) + 1(z - 0) = 0$, som vi kan forenkle til $y + z - 4 = 0$.

b Et punkt på m er $(4\ ,\ 0\ ,\ 2)$. Vi bruker dette når vi finner avstanden D fra m til α.

$$D = \frac{\left|0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 4\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\left|-2\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

c Avstanden mellom ℓ og m finner vi som lengden av en vektor som står vinkelrett på både ℓ og m, og som starter i ℓ og slutter i m, slik vi ser til høyre.

Siden α er parallelt med begge linjene og inneholder ℓ, vil den samme vektoren gjelde for avstanden mellom α og m. Derfor vil avstanden mellom α og m være den samme som avstanden mellom ℓ og m.



5.108

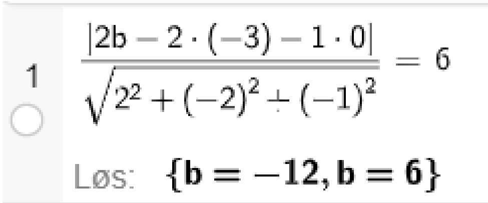
Vi starter med å bestemme likningen til planet α som grunnflaten ligger i. En normalvektor for dette planet er $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [3\ ,3\ ,0] \times [4\ ,2\ ,4] = [12\ ,-12\ ,-6]$. Vi bruker heller $\vec{n} = [2\ ,-2\ ,-1]$ fordi den er enklere. Planet går gjennom punktet $A(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$. Likningen til planet blir derfor $2(x - 0) - 2(y - 0) - 1(z - 0) = 0$, som vi forenkler til $2x - 2y - z = 0$.

Punktet $D(1\ ,-1\ ,\ a)$ ligger i dette planet.

Vi setter koordinatene til D inn i likningen til α og får $2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - a = 0$, som har løsningen $a = 4$.

Høyden i pyramiden tilsvarer avstanden mellom α og T.
Den er 6, noe som gir følgende likning:

$$\frac{|2\cdot b-2\cdot(-3)-1\cdot 0|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=6$$



Vi løser den i CAS og får $b=-12 \quad \vee \quad b=6$.

Altså er $(a=4 \quad \wedge \quad b=-12) \quad \vee \quad (a=4 \quad \wedge \quad b=6)$.

5.109
Vi setter opplysningene inn i den generelle likningen til en kuleflate.

a $$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=2^2$$
$$x^2+y^2+z^2=4$$

b $$(x-0)^2+(y-4)^2+\left(z-(-3)\right)^2=3^2$$
$$x^2+(y-4)^2+(z+3)^2=9$$

c $$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=7$$

d Dersom kula har sentrum i (2 , 3 , 4) og går gjennom (3 , 4 , 6), blir radius i sirkelen lengden av vektoren mellom disse to punktene. Vektoren blir [3 – 2 , 4 – 3 , 6 – 4] = [1 , 1 , 2].
Lengden av denne vektoren er $\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$.
Siden $r=\sqrt{6}$, blir $r^2=6$ slik at likningen til kuleflaten blir $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=6$.

5.110

a Vi leser ut fra likningen at sentrum i kula er (0 , 0 , 0). Vektoren fra sentrum til (5 , –4 , 8) er [5 , –4 , 8], og den har lengde $\sqrt{5^2+(-4)^2+8^2}=\sqrt{105}$. Radien i sirkelen er $\sqrt{82}$. Siden avstanden fra sentrum til (5 , –4 , 8) er større enn avstanden fra sentrum til kuleflaten (det vil si radius), ligger punktet utenfor kuleflaten.

b Sentrum i kula er $S(2\,,-1\,,0)$, og punktet vi undersøker, er $P(5\,,-4\,,8)$.
Da er $\overrightarrow{SP}=[3\,,-3\,,8]$, slik at avstanden fra S til P er $\left|\overrightarrow{SP}\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+8^2}=\sqrt{82}$.
Avstanden fra sentrum til (5 , –4 , 8) er den samme som radien i kula, så (5 , –4 , 8) ligger på kuleflaten.

c Avstanden fra (1 , 0 , –4) til (5 , –4 , 8) er lik lengden av vektoren [5 – 1 , –4 – 0 , 8 – (–4)] = [4 , –4 , 12].
Lengden av denne vektoren er $\sqrt{4^2+(-4)^2+12^2}=\sqrt{176}$, som er større enn 12. Punktet ligger derfor utenfor kuleflaten.

5.111

a Sentrum er (0 , 0 , 0), og radius er $\sqrt{121}=11$

b Sentrum er (2 , –5 , 0), og radius er $\sqrt{49}=7$

c Sentrum er $\left(-3\,,0\,,\frac{1}{4}\right)$, og radius er $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

5.112

a Vi fullfører kvadratene, og leser ut av likningen at sentrum er (–2 , 1 , 3), og at radius er $\sqrt{25} = 5$.

$$\begin{aligned} x^2+4x+y^2-2y+z^2-6z &= 11 \\ x^2+4x+4-4+y^2-2y+1-1+z^2-6z+9-9 &= 11 \\ (x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 &= 11+4+1+9 \\ (x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

eq1 : $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 - 6z = 11$
$\rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$

b Vi fullfører kvadratene, og leser ut av likningen at sentrum er (1 , –7 , 0), og at radius er $\sqrt{169} = 13$.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x+14y &= 119 \\ x^2-2x+1-1+y^2+14y+49-49+z^2 &= 119 \\ (x-1)^2+(y+7)^2+z^2 &= 119+1+49 \\ (x-1)^2+(y+7)^2+z^2 &= 169 \end{aligned}$$

eq1 : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 14y = 119$
$\rightarrow (x - 1)^2 + (y + 7)^2 + z^2 = 169$

c Vi fullfører kvadratene, og leser ut av likningen at sentrum er (0 , 9 , –1), og at radius er $\sqrt{9} = 3$.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-18y+2z+73 &= 0 \\ x^2+y^2-18y+81-81+z^2+2z+1-1 &= -73 \\ x^2+(y-9)^2+(z+1)^2 &= -73+81+1 \\ x^2+(y-9)^2+(z+1)^2 &= 9 \end{aligned}$$

eq1 : $x^2 + y^2 + z^2 - 18y + 2z + 73 = 0$
$\rightarrow x^2 + (y - 9)^2 + (z + 1)^2 = 9$

5.113

Vi finner først avstanden D fra sentrum i kula, det vil si (0 , 0 , 0), til planet.

Den er $D = \dfrac{|1\cdot 0+2\cdot 0-2\cdot 0+18|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{|18|}{\sqrt{9}} = 6$.

Derfor er radius i skjæringssirkelen $r = \sqrt{10^2-6^2} = 8$.

Linja gjennom sentrum i kuleflaten og med retningsvektor lik normalvektoren for planet er $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$.

Den går også gjennom sentrum i skjæringssirkelen. For å finne hvilken t-verdi som gjør at den treffer sentrum i skjæringssirkelen, setter vi koordinatene inn i likningen til planet. Da får vi $t + 2 \cdot 2t - 2 \cdot (-2t) + 18 = 0$. Vi får likningen $9t = -18$, som gir $t = -2$.

Vi setter t-verdien inn i parameterframstillingen ovenfor for å finne sentrum i skjæringssirkelen. Det er nemlig for $t = -2$ at linja som går gjennom skjæringssirkelen, samtidig skjærer planet som danner den. Sentrum i skjæringssirkelen er (–2 , –4 , 4).

5.114

Sentrum for kuleflaten er (2 , 2 , 1).

a Avstanden fra sentrum i kula til planet er $D = \dfrac{|2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 1-18|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{|-9|}{\sqrt{9}} = 3$.

Det er det samme som radien i kula, som betyr at planet tangerer, men ikke skjærer, kuleflaten.

b Avstanden fra sentrum i kula til planet er $D = \dfrac{|2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{|3|}{\sqrt{9}} = 1$.

Det er mindre enn kulas radius, så planet skjærer kula slik at det oppstår en skjæringssirkel. Skjæringssirkelen har radius $r = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Linja som går gjennom sentrum i kula og har retningsvektor lik normalvektoren for planet, kommer også til å gå gjennom sentrum i skjæringssirkelen. En parameterframstilling for denne linja er $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Når vi setter koordinatene til linja inn i likningen til planet, får vi $2(2 + 2t) + 2(2 + 2t) + 1(1 + t) - 6 = 0$. Dette kan vi forenkle til $9t = -3$, med løsningen $t = -\dfrac{1}{3}$. Når vi setter verdien inn i parameterframstillingen ovenfor, finner vi at sentrum i skjæringssirkelen er $\left(2 + 2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right), 2 + 2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right), 1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

c Avstanden fra sentrum i kula til planet er $D = \dfrac{|2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 - 20|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{|-11|}{\sqrt{9}} = \dfrac{11}{3}$.

Dette er større enn radien i sirkelen, som er $\sqrt{9} = 3$.

Planet skjærer altså ikke kuleflaten, så det fins ingen skjæringssirkel.

5.115

Avstanden fra sentrum i kuleflaten til planet $\dfrac{|1\cdot 3 - 2\cdot(-2) + 2\cdot 4 + 49|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \dfrac{|64|}{\sqrt{9}} = \dfrac{64}{3}$.

Siden planet tangerer kuleflaten, vil denne avstanden tilsvare radius.

Med sentrum i (3 , –2 , 4) og radius $\dfrac{64}{3}$ blir likningen til kuleflaten

$$(x-3)^2 + \big(y-(-2)\big)^2 + (z-4)^2 = \left(\frac{64}{3}\right)^2$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = \frac{4096}{9}$$

5.116

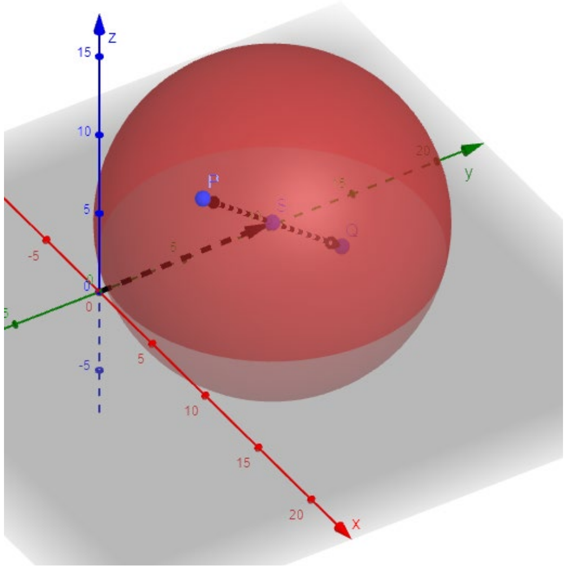
a Sentrum i kuleflaten er $S(2, 9, 2)$, og planet tangerer i $P(5, 3, 8)$. Vektoren $\overrightarrow{SP} = [3, -6, 6]$ står derfor vinkelrett på planet. Den er parallell med [1 , –2 , 2] som vi velger å bruke som normalvektor for planet. Siden planet i tillegg går gjennom punktet (5 , 3 , 8), blir likningen til α

$$1(x-5) - 2(y-3) + 2(z-8) = 0$$

$$x - 5 - 2y + 6 + 2z - 16 = 0$$

$$x - 2y + 2z = 15$$

b Hvis også β tangerer kuleflaten, må dette skje «på motsatt side» av sentrum i forhold til α dersom de to planene er parallelle, men ikke tangerer kuleflaten i samme punkt.



De to tangeringspunktene *P* og *Q* ligger symmetriske om *S*.
Vi finner *P* ved å bestemme $\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP}$. Vi kan derfor bestemme *Q* ved å finne $\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{SP}$, som vist til høyre.

Q har $\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{SP} = [2, 9, 2] - [3, -6, 6] = [-1, 15, -4]$ som posisjonsvektor. Altså er *Q*(–1 , 15 , –4). Planet β tangerer kuleflaten i *Q* og er parallell med α, slik at en normalvektor er [1 , –2 , 2]. Dermed blir likningen til β

$$1(x-(-1)) - 2(y-15) + 2(z-(-4)) = 0$$
$$x + 1 - 2y + 30 + 2z + 8 = 0$$
$$x - 2y + 2z = -39$$

5.117

a Vi setter koordinatene til et vilkårlig punkt på ℓ inn i likningen til α.

$$(2+2t-2)^2 + (-1+3t+1)^2 + (4-6t-4)^2 = 49$$
$$4t^2 + 9t^2 + 36t^2 = 49$$
$$49t^2 = 49$$
$$t = \pm 1$$

ℓ skjærer α for $t = \pm 1$. Vi setter inn $t = -1$ i parameterframstillingen for linja. Det ene skjæringspunktet er altså (0 , –4 , 10). Så setter vi inn $t = 1$. Det andre skjæringspunktet (4 , 2 , –2).

b Vi starter med å gi skjæringspunktene navn: *P*(0 , –4 , 10) og *Q*(4 , 2 , –2).
Sentrum i kula er $S(2, -1, 4)$.

Vektoren $\overrightarrow{SP} = [-2, -3, 6]$ står nødvendigvis vinkelrett på planet som tangerer kuleflaten i *P*. Derfor kan vi bruke den som normalvektor for planet. Planet inneholder altså punktet *P*(0 , –4 , 10) og har normalvektor [–2 , –3 , 6]:

$$-2(x-0) - 3(y-(-4)) + 6(z-10) = 0$$
$$-2x + 0 - 3y - 12 + 6z - 60 = 0$$
$$-2x - 3y + 6z = 72$$
$$2x + 3y - 6z = -72$$

Vi gjør tilsvarende for *Q*. Vektoren $\overrightarrow{SQ} = [2, 3, -6]$ står vinkelrett på planet som tangerer kuleflaten i *Q*. Altså inneholder planet punktet *Q*(4 , 2 , –2) og har normalvektor [2 , 3 , –6]:

$$2(x-4) + 3(y-2) - 6(z-(-2)) = 0$$
$$2x - 8 + 3y - 6 - 6z - 12 = 0$$
$$2x + 3y - 6z = 26$$

5.118
Parameterverdiene for Lindesnes er $B = 57{,}98°$ og $L = 7{,}05°$.
Parameterverdiene for Nordkapp er $B = 71{,}17°$ og $L = 25{,}80°$.

Med CAS:

1
Lindesnes := Vektor((6400 cos(57.98°) cos(7.05°), 6400 cos(57.98°) sin(7.05°), 6400 sin(57.98°)))
$\approx$ **Lindesnes :=** $\begin{pmatrix} 3367.72 \\ 416.49 \\ 5426.32 \end{pmatrix}$

2
Nordkapp := Vektor((6400 cos(71.17°) cos(25.8°), 6400 cos(71.17°) sin(25.8°), 6400 sin(71.17°)))
$\approx$ **Nordkapp :=** $\begin{pmatrix} 1859.76 \\ 899.04 \\ 6057.47 \end{pmatrix}$

3
LON := Vinkel(Lindesnes, Nordkapp)
$\approx$ **LON := 0.27**

4
LN = LON · 6400
$\approx$ **LN = 1709.53**

I rad 1 bestemmer vi vektoren fra jordas sentrum til Lindesnes (*L*). I rad 2 bestemmer vi vektoren fra jordas sentrum til Nordkapp (*N*) på tilsvarende måte. Vinkelen *LON* er vinkelen mellom Lindesnes og Nordkapp. Ved å multiplisere den med jordas radius (ca. 6400 km) får vi avstanden mellom Lindesnes og Nordkapp langs jordoverflaten. Avstanden er omtrent 1710 km.

Med Python:

```
from pylab import *

def r(B, L):
  # Vi gjør bredde- og lengdegrad om til radianer.
  B_rad = radians(B)
  L_rad = radians(L)

  # Vi regner så ut koordinatene til posisjonsvektoren.
  x = 6400*cos(B_rad)*cos(L_rad)
  y = 6400*cos(B_rad)*sin(L_rad)
  z = 6400*sin(B_rad)

  # Vi returnerer posisjonsvektoren som en liste med de tre koordinatene.
  posisjonsvektor = [x, y, z]
  return posisjonsvektor

# Vi lager posisjonsvektorene for Lindesnes og Nordkapp.
lindesnes = r(57.98, 7.05)
nordkapp = r(71.17, 25.8)

# Vi beregner så vinkelen LON ved hjelp av skalarproduktet.
lengde_lindesnes = sqrt(dot(lindesnes,lindesnes))
lengde_nordkapp = sqrt(dot(nordkapp,nordkapp))
vinkel = arccos(dot(lindesnes,nordkapp)/(lengde_lindesnes*lengde_nordkapp))

# Til slutt beregner lengden av buen LN og skriver ut resultatet.
buelengde = vinkel*6400
print("Avstanden mellom Lindesnes og Nordkapp er ", int(round(buelengde)), " km.")
```

5.119

a Vi skriver K_1 på en form der vi lettere kan lese ut sentrum og radius ved hjelp av Algebrafeltet i GeoGebra. Sentrum er $P(2\ ,\ 1\ ,\ 3)$, og radius er $\sqrt{25} = 5$.

$K_1 : x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 - 6z = 11$

$\rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$

I K_2 er sentrum $Q(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ fordi den er skrevet på formen for kuler med sentrum i origo. Radius er 2.

b Vi finner avstanden fra $R(5\ ,\ 1\ ,\ 1)$ til hver av kulenes sentrum ved å bestemme $\left|\overrightarrow{PR}\right|$ og $\left|\overrightarrow{QR}\right|$.

$\left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|[3\ ,0\ ,-2]\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. Avstanden mellom P (som er sentrum i K_1) og $R(5\ ,\ 1\ ,\ 1)$ er $\sqrt{13}$, mens radius i sirkelen er 5. Altså ligger R innenfor kuleflaten.

$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|[5\ ,1\ ,1]\right| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Avstanden mellom Q (som er sentrum i K_2) og $R(5\ ,\ 1\ ,\ 1)$ er $3\sqrt{3}$, mens radius i sirkelen er 2. Altså ligger R utenfor kuleflaten.

c Vi setter koordinatene til m inn i likningen for K_1 og finner at linja skjærer K_1 for $t = -\frac{7}{17} \vee t = 1$.
Når vi setter disse t-verdiene inn i parameterframstillingen for linja, ser vi at linja skjærer K_1 i to punkter: $\left(-2\ ,-\frac{7}{17}\ ,\frac{6}{17}\right)$ og $(-2\ ,1\ ,6)$.

1 $(-2-2)^2 + (t-1)^2 + (2+4t-3)^2 = 25$

Løs: $\left\{\mathbf{t = \frac{-7}{17}, t = 1}\right\}$

2 ByttUt$\left((-2, t, 2+4t),\ t,\ -\frac{7}{17}\right)$

$\rightarrow \left(\mathbf{-2, \frac{-7}{17}, \frac{6}{17}}\right)$

3 ByttUt$((-2, t, 2+4t), t, 1)$

$\rightarrow \mathbf{(-2, 1, 6)}$

Vi skriver først K_2 på likningsform.
Kuleflaten har sentrum i origo og radius 4, slik at likningen for K_2 er $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Vi setter nå koordinatene til m inn i likningen til K_2 for å finne t-verdiene til eventuelle skjæringspunkter. Men når vi bruker CAS til å løse likningen, finner vi ingen løsning.

1 $(-2)^2 + t^2 + (2+4t)^2 = 4$

Løs: $\{\}$

Det betyr at det ikke fins noen t-verdi slik at m skjærer K_2. Altså fins det ingen skjæringspunkter mellom dem.

d Vi ser først på K_1. Avstanden mellom *xy*-planet med likning $z = 0$ og sentrum i denne sirkelen, $P(2, 1, 3)$, er $\frac{|0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3$. Pytagorassetningen gir nå at radius i skjæringssirkelen er $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Linja gjennom sentrum i K_1 og med retningsvektor lik normalvektoren til *xy*-planet skjærer planet i sentrum av skjæringssirkelen. Denne linja går altså gjennom (2 , 1 , 3) og har retningsvektor [0 , 0 , 1], slik at en parameterframstilling for denne linja er $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 + t \end{cases}$. Vi finner *t*-verdien for sentrum i skjæringssirkelen ved å sette disse koordinatene inn i likningen for *xy*-planet: $3 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3$.

Det tilsvarer punktet (2 , 1 , 0). Skjæringssirkelen mellom K_1 og *xy*-planet har altså sentrum i (2 , 1 , 0) og radius 4.

Avstanden fra sentrum i K_2 til *xy*-planet er $\frac{|0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{1}} = 0$. Dermed er radius i skjæringssirkelen den samme som radius i K_2, altså 2.

Linja gjennom sentrum i K_2 og med retningsvektor lik normalvektoren til *xy*-planet skjærer planet i sentrum av skjæringssirkelen. Denne linja går altså gjennom (0 , 0 , 0) og har retningsvektor [0 , 0 , 1], slik at en parameterframstilling for denne linja er $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

Vi finner *t*-verdien for sentrum i skjæringssirkelen ved å sette disse koordinatene inn i likningen for *xy*-planet: $t = 0$. Altså er sentrum i skjæringssirkelen (0 , 0 , 0). Radius er 2.

5.120

Avstanden fra sentrum, det vil si punktet (1 , *b* , 0), til planet som tangerer kuleflaten, er 5, fordi radien i sirkelen er 5. Derfor gjelder sammenhengen $\frac{|3 \cdot 1 + 12 \cdot b - 4 \cdot 0 - 329|}{\sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2}} = 5$.

Dette er en likning med *b* som ukjent. Vi bruker CAS og ser at $b = \frac{87}{4} \quad \vee \quad b = \frac{391}{12}$.

1 $\frac{|3 \cdot 1 + 12 \cdot b - 4 \cdot 0 - 329|}{\sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2}} = 5$

Løs: $\left\{ \mathbf{b} = \frac{87}{4}, \mathbf{b} = \frac{391}{12} \right\}$

5.121

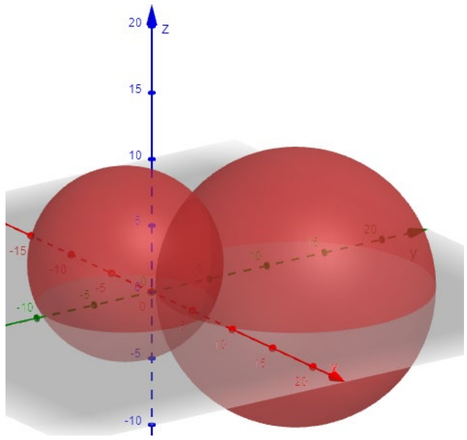
a Vi bruker algebrafeltet i GeoGebra til å skrive likningene på en form der vi lettere kan se både sentrum og radius. Vi ser at den første kula har radius $\sqrt{49} = 7$, mens den andre kula har radius $\sqrt{100} = 10$.

eq1 : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6z - 30 = 0$
$\rightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 49$

eq2 : $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 18y + 6 = 0$
$\rightarrow (x - 5)^2 + (y - 9)^2 + z^2 = 100$

b Linja gjennom sentrum $A(1\,,-3\,,3)$ i den første kuleflaten og sentrum $B(5\,,9\,,0)$ i den andre har retningsvektor $\overrightarrow{AB} = [5-1\,,9-(-3)\,,0-3] = [4\,,12\,,-3]$. Denne linja går også gjennom sentrum i skjæringssirkelen.

Av bildet kan vi se at det fins et punkt på skjæringssirkelen som har z-koordinat lik 0. Hvis vi løser likningssettet som består av $z = 0$ og likningene til de to kuleflatene, kan vi finne et punkt på skjæringssirkelen. Det gjør vi ved hjelp av CAS.



Vi får to løsninger og velger den første:

Punktet $Q\left(\dfrac{-3\sqrt{39}+9}{4}\,,\dfrac{\sqrt{39}+3}{4}\,,0\right)$

ligger på skjæringssirkelen.

1 $eq1:\ (x-1)^2+(y+3)^2+(z-3)^2 = 49$

→ $\mathbf{eq1:\ (x-1)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=49}$

2 $eq2:\ (x-5)^2+(y-9)^2+z^2 = 100$

→ $\mathbf{eq2:\ z^2+(x-5)^2+(y-9)^2=100}$

3 $z = 0$

→ $\mathbf{z=0}$

4 $\{eq1, eq2, \$3\}$

Løs: $\left\{\left\{x=\dfrac{-3\sqrt{39}+9}{4}, y=\dfrac{\sqrt{39}+3}{4}, z=0\right\}, \left\{x=\dfrac{3\sqrt{39}+9}{4}, y=\dfrac{-\sqrt{39}+3}{4}, z=0\right\}\right\}$

Radius i skjæringssirkelen tilsvarer avstanden fra linja gjennom A og B (fordi denne går gjennom sentrum i skjæringssirkelen) til punktet Q, som ligger på sirkelperiferien. Et punkt på linja gjennom A og B er $A(1\,,-3\,,3)$.

Derfor er radius i skjæringssirkelen $\dfrac{\left|\overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{40\sqrt{3}}{13}$.

1 $A := (1, -3, 3)$

→ $\mathbf{A := (1, -3, 3)}$

2 $B := (5, 9, 0)$

→ $\mathbf{B := (5, 9, 0)}$

3 $Q := \left(\dfrac{-3\sqrt{39}+9}{4}, \dfrac{\sqrt{39}+3}{4}, 0\right)$

→ $\mathbf{Q := \left(\dfrac{-3\sqrt{39}+9}{4}, \dfrac{\sqrt{39}+3}{4}, 0\right)}$

4 $\dfrac{|\text{Vektor}(A, Q) \otimes \text{Vektor}(A, B)|}{|\text{Vektor}(A, B)|}$

→ $\mathbf{\dfrac{40}{13}\sqrt{3}}$

Vi lar S være sentrum i skjæringssirkelen. Siden S ligger på linja gjennom A og B, er $S(1 + 4t\,, -3 + 12t\,, 3 - 3t)$.

For å finne t bruker vi at $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{7^2 - \left(\dfrac{40\sqrt{3}}{13}\right)^2}$.

Vi skriver opp og løser denne likningen i CAS. Merk at vi bare bruker den positive verdien for *t*, fordi det er denne som ligger mellom *A* og *B*. Når vi setter denne verdien for *t* inn i punktet *S*, får vi $\left(\frac{405}{169}, \frac{201}{169}, \frac{330}{169}\right)$.

1 $A := (1, -3, 3)$

$\rightarrow$ $A := (1, -3, 3)$

2 $S := (1 + 4t, -3 + 12t, 3 - 3t)$

$\rightarrow$ $S := (4t + 1, 12t - 3, -3t + 3)$

3 $|\text{Vektor}(A, S)| = \sqrt{7^2 - \left(\frac{40\sqrt{3}}{13}\right)^2}$

Løs: $\left\{t = \frac{-59}{169}, t = \frac{59}{169}\right\}$

4 $\text{ByttUt}\left(S, t = \frac{59}{169}\right)$

$\rightarrow$ $\left(\frac{405}{169}, \frac{201}{169}, \frac{330}{169}\right)$

Altså har skjæringssirkelen radius $\frac{40\sqrt{3}}{13}$ og sentrum i $\left(\frac{405}{169}, \frac{201}{169}, \frac{330}{169}\right)$.

Vi kunne ha funnet tilnærmingsverdier ved å bruke Algebrafeltet:

Kjeglesnitt

c : SkjæringKjeglesnitt(eq1, eq2)

$\rightarrow$ X = (2.4, 1.19, 1.95) + (-5.06 cos(t) + 0.39 sin(t), 1.69 cos(t) + 1.17 sin(t), 5.19 sin(t))

Kule

eq1: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 49$

eq2: $(x - 5)^2 + (y - 9)^2 + z^2 = 100$

Punkt

A = Sentrum(c)

$\rightarrow$ (2.4, 1.19, 1.95)

Tall

a = Radius(c)

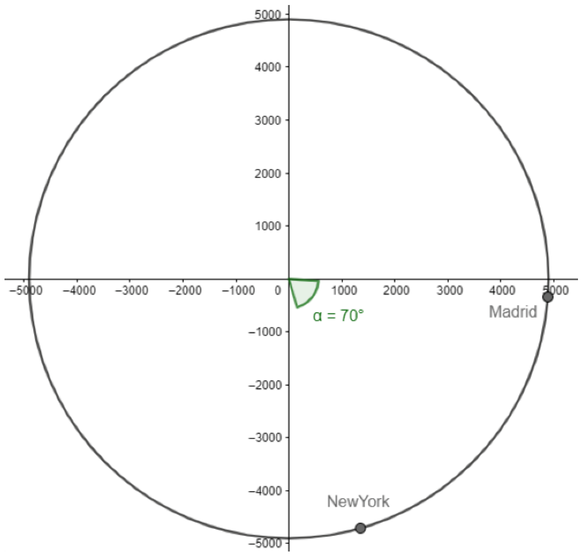
$\rightarrow$ 5.33

5.122

a-1 Vi finner posisjonsvektorene til de to byene i rad 1 og 2. Deretter finner vi vinkelen mellom dem, som vi i rad 4 bruker til å beregne avstanden. Langs en storsirkel er altså avstanden 5823 km.

1	Madrid := Vektor((6400 cos(40°) cos(−4°), 6400 cos(40°) sin(−4°), 6400 sin(40°))) $\approx \begin{pmatrix} 4890.74 \\ -341.99 \\ 4113.84 \end{pmatrix}$
2	NewYork := Vektor((6400 cos(40°) cos(−74°), 6400 cos(40°) sin(−74°), 6400 sin(40°))) $\approx \begin{pmatrix} 1351.36 \\ -4712.76 \\ 4113.84 \end{pmatrix}$
3	MON := Vinkel(Madrid, NewYork) $\approx$ **0.91**
4	MN = 6400 · MON $\approx$ **MN = 5822.9**

a-2 Langs breddesirkelen gjennom de to stedene opererer vi bare i to dimensjoner. Sirkelen har radius $r = 6400 \cdot \cos 40°$ siden vi befinner oss på den 40. breddegrad.



Det er 70 lengdegrader mellom de to stedene, så vi skal bare finne lengden langs 70° av de totale 360° av sirkelbuen. Derfor blir avstanden
$\frac{70°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6400 \text{ km} \cdot \cos 40° = 5990 \text{ km}$.

b Avstanden regnet langs breddesirkelen er større enn avstanden langs storsirkelen. Dette viser at det er ulike måter å måle avstander langs jordoverflaten på, og at det er viktig å være obs på at de kan gi ulike resultater. Den korteste reiseruten mellom byene vil altså ligge litt lenger nord, langs en storsirkel.

5.123

a To punkter som ligger symmetrisk om origo, har motsatte fortegn på alle koordinatene (men samme tallverdi). Basert på dette ser vi at *A* ligger symmetrisk av *B*, og at *D* ligger symmetrisk av *E*.

b Punkter som ligger symmetrisk om *xz*-planet, har samme *x*- og *z*-verdi, men motsatt *y*-verdi. Her ser vi at både *C* og *E* har $x = 2$ og $z = 3$. *C* har $y = 1$, mens *E* har $y = -1$. Altså er *C* og *E* symmetriske om *xz*-planet.

c Punkter som ligger symmetrisk om *x*-aksen, har samme *x*-koordinat, men *y*- og *z*-koordinater med motsatt fortegn. Her ligger *B* og *C* symmetriske om *x*-aksen.

d Trekanten spennes ut av $\overrightarrow{AB} = [-4\,,-2\,,-6]$ og $\overrightarrow{AC} = [-4\,,0\,,0]$, og har derfor arealet $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 4\sqrt{10}$.

1 $\frac{1}{2}\left|\text{Vektor}((-4,-2,-6)) \otimes \text{Vektor}((-4,0,0))\right|$

$\rightarrow$ $\mathbf{4\sqrt{10}}$

e Tetraedret spennes ut av $\overrightarrow{AB} = [-4\,,-2\,,-6]$, $\overrightarrow{AC} = [-4\,,0\,,0]$ og $\overrightarrow{AD} = [0\,,0\,,-6]$. Det har derfor volumet $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = 8$.

1 $\frac{1}{6}\left|\left(\text{Vektor}((-4,-2,-6)) \otimes \text{Vektor}((-4,0,0))\right) \text{Vektor}((0,0,-6))\right|$

$\rightarrow$ $\mathbf{8}$

f Vi ser på ABC som grunnflaten i tetraedret. Vi setter så inn volumet av tetraedret og grunnflatens areal i formelen $V = \frac{1}{3}Gh$. Det gir $8 = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{10} \cdot h$, som har løsningen $h = \frac{6\sqrt{10}}{10}$.

5.124

a Når de ligger like høyt over *xy*-planet, har punktene samme *z*-verdi, så $2t - 3 = t + 1$. Løsningen på likningen er $t = 4$. Vi setter inn $t = 4$ i begge vektorene og finner ved hjelp av CAS ut at avstanden er $2\sqrt{5}$.

1 $|\text{Vektor}((t, t+2, 2t-3), (t-4, 2t, t+1))|$

ByttUt: $\mathbf{2\sqrt{5}}$

b Avstanden mellom *xz*-planet (som har likning $y = 0$ og normalvektor $[0\,,1\,,0]$) og det første punktet er $\frac{\left|0 \cdot t + 1 \cdot (t+2) + 0 \cdot (2t-3)\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = |t+2|$.

På samme måte er avstanden mellom *xz*-planet og det andre punktet $\frac{\left|0 \cdot (t-4) + 1 \cdot 2t + 0 \cdot (t+1)\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = |2t|$.

Siden de skal være like, får vi en likning som vi løser i CAS.

1 $|t+2| = |2t|$

Løs: $\left\{\mathbf{t = \frac{-2}{3}, t = 2}\right\}$

Vi får to ulike verdier for t. Vi setter dem inn en av gangen og ser hva avstanden mellom punktene er for de to ulike verdiene.

For $t = -\frac{2}{3}$ er avstanden mellom punktene $\frac{2}{3}\sqrt{101}$, og for $t = 2$ er avstanden $2\sqrt{5}$.

1 $|\text{Vektor}((t, t+2, 2t-3), (t-4, 2t, t+1))|$

ByttUt: $\mathbf{\frac{2}{3}\sqrt{101}}$

2 $|\text{Vektor}((t, t+2, 2t-3), (t-4, 2t, t+1))|$

ByttUt: $\mathbf{2\sqrt{5}}$

c Avstanden mellom punktene er
$\left|[t-4-t\ ,\ 2t-(t+2)\ ,\ t+1-(2t-3)]\right| = \left|[-4\ ,\ t-2\ ,\ 4-t]\right|$.
Vi definerer en funksjon f i CAS som er lik lengden av vektoren. Vi setter den deriverte lik null og ser at vi har et stasjonært punkt for $t = 3$. Siden den andrederiverte er positiv her, kan vi være sikker på at dette er et bunnpunkt.

Vi finner så at $f(3) = 3\sqrt{2}$.

Den minste mulige avstanden mellom punktene er altså $3\sqrt{2}$.

1	$f(t) := \lvert\text{Vektor}((-4, t-2, t-4))\rvert$ $\rightarrow\ f(t) := \sqrt{2}\sqrt{t^2-6t+18}$
2	$f'(t) = 0$ Løs: $\{t = 3\}$
3	$f''(3) > 0$ $\rightarrow$ **true**
4	$f(3)$ $\rightarrow\ 3\sqrt{2}$

d Ovenfor så vi at vektoren mellom punktene er $[-4\ ,\ t-2\ ,\ 4-t]$. Derfor vil dette være en retningsvektor for linja gjennom dem. Dessuten ligger punktet (t , t + 2 , 2t – 3) på linja.

Vi må nå innføre noe annet enn t som parameter. I denne sammenhengen er nemlig t en konstant, og symbolet t er opptatt. Vi bruker derfor s som parameter.

Det gir parameterframstillingen $\begin{cases} x = t-4s \\ y = t+2+(t-2)s \\ z = 2t-3+(4-t)s \end{cases}$.

e Vi setter hver av koordinatene til linja lik koordinatene til punktet. Da får vi tre likninger, men bare to ukjente.

CAS-vinduet viser at likningssystemet ikke har noen løsning. Det fins altså ingen par av s og t slik at linja går gjennom (2 , 1 , 0).

1	$t-4s = 2$ $\rightarrow\ -4s+t = 2$
2	$t+2+(t-2)s = 1$ $\rightarrow\ s(t-2)+t+2 = 1$
3	$2t-3+(4-t)s = 0$ $\rightarrow\ s(-t+4)+2t-3 = 0$
4	$\{\$1, \$2, \$3\}$ Løs: $\{\}$

5.125

Merk at $\vec{c} = s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b}$ gir et likningssystem med to ukjente, s og t. Likningssystemet består av tre likninger – én for hver komponent av vektorene.

a Løsningen på likningssystemet $7 = s\cdot 1 + t\cdot(-2)\ \wedge\ 7 = s\cdot 3 + t\cdot 1\ \wedge\ -4 = s\cdot 2 + t\cdot 5$ er $s = 3\ \wedge\ t = -2$, så $\vec{c}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

1	Vektor((7, 7, –4)) = s Vektor((1, 3, 2)) + t Vektor((–2, 1, 5)) Løs: $\{\{s = 3, t = -2\}\}$

b Løsningen på likningssystemet $-9 = s\cdot 1 + t\cdot(-2)\ \wedge\ 1 = s\cdot 3 + t\cdot 1\ \wedge\ 18 = s\cdot 2 + t\cdot 5$ er $s = -1\ \wedge\ t = 4$, så $\vec{c}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

1	Vektor((–9, 1, 18)) = s Vektor((1, 3, 2)) + t Vektor((–2, 1, 5)) Løs: $\{\{s = -1, t = 4\}\}$

c Likningssystemet $15 = s \cdot 1 + t \cdot (-2) \quad \wedge \quad 10 = s \cdot 3 + t \cdot 1 \quad \wedge \quad -13 = s \cdot 2 + t \cdot 5$ har ingen løsning, så det eksisterer ingen s og t slik at $\vec{c} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$.

1 $\text{Vektor}((15, 10, -13)) = s\ \text{Vektor}((1, 3, 2)) + t\ \text{Vektor}((-2, 1, 5))$

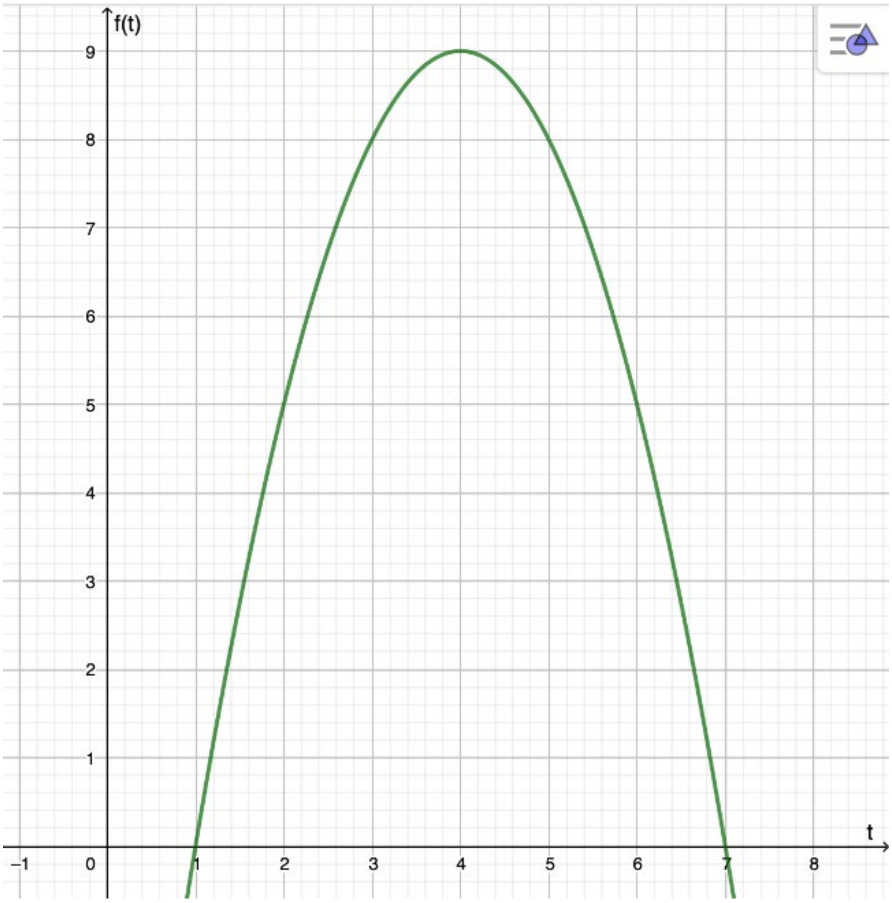
Løs: $\{\}$

5.126

a

1 $f(t) := \text{Vektor}((2t - 2, t, 1)) \cdot \text{Vektor}((3 - t, t, -1))$

$\rightarrow\ f(t) := -t^2 + 8t - 7$



b Vi bruker at $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$, der v er vinkelen mellom de to vektorene.

Vi ser her at fortegnet til $\vec{a} \cdot \vec{b}$ avhenger helt av fortegnet til $\cos v$.

Cosinusfunksjonen er positiv når $v < 90°$, null når $v = 90°$ og negativ når $v > 90°$.

Grafen ovenfor ligger over null når $t \in \langle 1, 7 \rangle$, som altså er området der vinkelen mellom vektorene er mindre enn 90°.

Vinkelen er nøyaktig 90° for $t = 1$ og $t = 7$, og den er større enn 90° når $t < 1$ eller $t > 7$.

c

1 $f(t) := \text{Vektor}((2t-2, t, 1)) \cdot \text{Vektor}((3-t, t, -1))$

$\rightarrow\ \mathbf{f(t) := -t^2 + 8\,t - 7}$

2 $g(t) := \dfrac{f(t)}{|\text{Vektor}((2t-2,t,1))| \cdot |\text{Vektor}((3-t,t,-1))|}$

$\rightarrow\ \mathbf{g(t) := \dfrac{-t^2+8\,t-7}{\sqrt{t^2+(-t+3)^2+1}\,\sqrt{t^2+(2\,t-2)^2+1}}}$

d Vi ser at $g(t) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \cos v$.

Når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, er $v = 0° \quad \vee \quad v = 180°$, slik at $\cos v = 1 \quad \vee \quad \cos v = -1$.
Det er klart av grafen ovenfor at $g(t)$ aldri er lik 1. Det er imidlertid vanskeligere å se om $g(t) = -1$, så vi løser denne likningen i CAS. Vi får ingen løsning, så $g(t)$ er heller aldri -1.

Altså fins det ingen verdi av t som er slik at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ blir parallelle.

e Siden $g(t) = \cos v$, er
$v = \arccos g(t)$.
Vi definerer denne funksjonen i CAS.

3 $v(t) := \cos^{-1}(g(t))$

$\rightarrow\ \mathbf{v(t) := \cos^{-1}\left(\dfrac{-t^2+8\,t-7}{\sqrt{t^2+(-t+3)^2+1}\,\sqrt{t^2+(2\,t-2)^2+1}}\right)}$

Når vi setter den deriverte lik null, ser vi at grafen har to stasjonære punkter. De viser at den største verdien v kan få, er 172,4°, mens den minste er 47,1°.

4 $v'(t) = 0$

Løs: $\{t = -0.06, t = 1.97\}$

5 $\underset{\circ}{v(-0.06)}$

$\approx$ **172.41**

6 $\underset{\circ}{v(1.97)}$

$\approx$ **47.09**

5.127

a Vi ser på x-aksen som en linje med retningsvektor $\vec{r} = [1, 0, 0]$. Vinkelen mellom $\vec{p} = [a, b, c]$ og $\vec{r} = [1, 0, 0]$ finner vi ved hjelp av skalarproduktet. På koordinatform får vi $\vec{p} \cdot \vec{r} = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = a$.

Videre er $\vec{p} \cdot \vec{r} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \cos u$, der u er vinkelen mellom $\vec{p}$ og $\vec{r}$.

Vi setter de to uttrykkene lik hverandre:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \cos u = a$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot 1 \cdot \cos u = a$$

$$\cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

b På samme måte som ovenfor vil $\cos v = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ og $\cos w = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Det gir

$$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)^2$$

Når parentesene er oppløst, trekker vi sammen brøkene, slik:

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

5.128

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}(-\vec{v} + \vec{w}) = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w} - \vec{u})$$

5.129

Vi skriver $\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OB}$, osv.:

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} = (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OD})$$

Vi erstatter så $\overrightarrow{TO}$ med $-\vec{t}$, siden $\vec{t} = \overrightarrow{OT}$ fordi $\vec{t}$ er posisjonsvektoren til T. Dessuten skriver vi $\vec{a}$ for $\overrightarrow{OA}$, osv.:

$$(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OD}) = -\vec{t} + \vec{a} - \vec{t} + \vec{b} - \vec{t} + \vec{c} - \vec{t} + \vec{d} = -4\vec{t} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

Vi kan så erstatte $\vec{t}$ med $\frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$.

Dermed kan vi forenkle uttrykket videre: $-4 \cdot \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right) + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

5.130

a Tetraedret utspennes av vektorene $\overrightarrow{AB} = [5\,, -2\,, -2]$, $\overrightarrow{AC} = [2\,, -1\,, -1]$ og $\overrightarrow{AD}$. Et vilkårlig punkt på ℓ har koordinatene (t + 2 , t , 5 – t), så $\overrightarrow{AD} = [t+2-(-3)\,, t-2\,, 5-t-(-1)] = [t+5\,, t-2\,, -t+6]$. Vi regner ut volumet V i GeoGebra og finner at
$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|2t-8| = \frac{1}{3}|t-4|$.

1 AB := Vektor((5, −2, −2))
$\rightarrow$ **AB** := $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2 AC := Vektor((2, −1, −1))
$\rightarrow$ **AC** := $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3 AD := Vektor((t + 5, t − 2, −t + 6))
$\rightarrow$ **AD** := $\begin{pmatrix} t+5 \\ t-2 \\ -t+6 \end{pmatrix}$

4 $\frac{1}{6}\left|\left(AB \otimes AC\right)\cdot AD\right|$
$\rightarrow \frac{1}{6}|2t-8|$

b Vi løser likningen $\frac{1}{3}|t-4| = 7$ med CAS.
Når volumet er 7, er $t = -17 \quad \vee \quad t = 25$.

1 $\frac{1}{3}|t-4| = 7$
Løs: $\{t = -17, t = 25\}$

c Dersom volumet av *ABCD* er 0, er det ikke lenger å regne som et tetraeder.
Vi må altså ha $\frac{1}{3}|t-4| = 0$, som er tilfelle for t = 4.

5.131

a Formelen for volumet V av et tetraeder gir at $V(t) = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = \frac{1}{6}|6t-10| = \frac{1}{3}|3t-5|$.

1 $V(t) := \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\text{Vektor}((4,2,0)) \otimes \text{Vektor}((5,-1,2))\right)\cdot\text{Vektor}((4,t-2,3-t))\right|$
$\rightarrow$ **V(t) :=** $\frac{1}{6}|6t-10|$

b Vi setter $V(t) = 5$ og løser for t.
Når volumet er 5, er $t = -\frac{10}{3} \quad \vee \quad t = \frac{20}{3}$.

2 $V(t) = 5$
Løs: $\left\{t = \frac{-10}{3}, t = \frac{20}{3}\right\}$

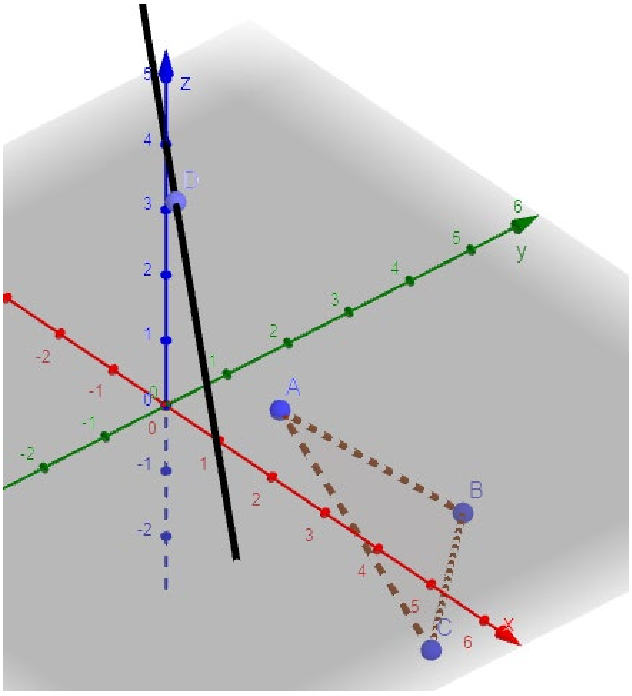
c At vi fikk to ulike verdier for t, betyr at det er to ulike punkter på ℓ som oppfyller kravet om at volumet av tetraedret er 5.

d Når volumet av tetraedret er 0, er det egentlig ikke lenger å regne som et tetraeder. Som vi fant ovenfor, er volumet av tetraedret gitt ved $V(t) = \frac{1}{3}|3t-5|$. V har et nullpunkt for $t = \frac{5}{3}$, som altså er t-verdien som gjør at vektorene ikke spenner ut et tetraeder.

e Vektorlikningen $\vec{c} = p \cdot \vec{a} + q \cdot \vec{b}$ gjelder hvis hver av koordinatene på hver side av likningen er den samme. Det vil si hvis *x*-koordinaten til $\vec{c}$ er den samme som *x*-koordinaten til $p \cdot \vec{a} + q \cdot \vec{b}$, og det samme for *y*- og *z*-koordinatene. Altså får vi én likning for *x*-komponentene, én for *y*-komponentene og én for *z*-komponentene. Vi har derfor tre likninger. Vi har også tre ukjente. Det er *p* og *q* som vi ser ovenfor, og *t* som bestemmer hvilket punkt $\vec{c}$ slutter i (langs linja ℓ).

Vi lar *A* være punktet $\vec{a}$ slutter i, *B* være punktet $\vec{b}$ slutter i og *C* være punktet $\vec{c}$ slutter i. Hvis vi hadde løst likningssystemet, ville vi fått verdier slik at *C* ville ligget i planet som går gjennom origo, *A* og *B*. Dermed ville figuren utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ hatt volum 0, og altså ikke vært et tetraeder. Siden det bare er én verdi som gjør dette, måtte det vært den samme *t*-verdien som i oppgave d.

5.132
a–d



l : Linje((0, 0, 4), Vektor((4, −3, 1)))
→ X = (0, 0, 4) + λ (4, -3, 1)

A = (1, 1, 0)

B = (1, 4, -3)

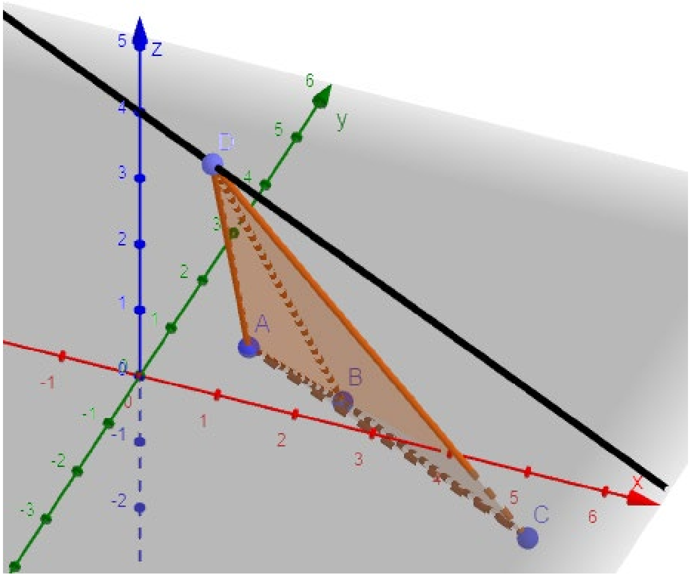
C = (5, 0, -1)

D = Punkt(l)
→ (1.34, -1.01, 4.34)

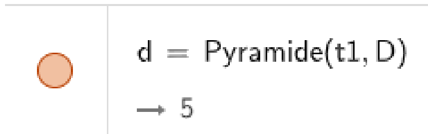
e Etter å ha laget trekanten *ABC* leser vi ut av algebrafeltet at arealet er 9.

t1 = Mangekant(A, B, C)
→ 9

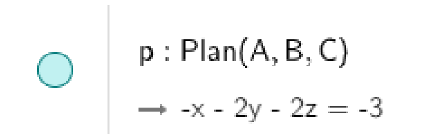
f



g Volumet av pyramiden er 5.



h Vi kan bruke formelen $V = \frac{1}{3}Gh$ for å bestemme volumet av tetraedret. Her ser vi på ABC som grunnflaten. Denne trekanten ligger i planet $-x - 2y - 2z = -3$, slik at høyden i tetraedret er avstanden mellom dette planet og punktet D. En normalvektor for planet er $[-1\ ,\ -2\ ,\ -2]$, og en retningsvektor for linja som D beveger seg langs, er $[4\ ,\ -3\ ,\ 1]$. Skalarproduktet mellom dem er $-1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -4 + 6 - 2 = 0$. Siden normalvektoren til planet gjennom ABC står vinkelrett på retningsvektoren til linja, er ABC parallelt med linja. Derfor er høyden i tetraedret konstant, slik at volumet også er konstant.



i Volumet av tetraedret er 5, og arealet av grunnflaten ABC er 9. Dermed vil sammenhengen $V = \frac{1}{3}Gh$ gi høyden h:

$$5 = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{5}{3}$$

Høyden i tetraedret er $\frac{5}{3}$.

5.133

a Alle punktene *A*, *B*, *C* og *D* har samme *z*-koordinat, så planet gjennom dem er parallelt med *xy*-planet. Siden *z*-koordinaten er 2, ligger planet 2 meter over bakken. Derfor er likningen til planet $z = 2$.

b Å finne vinkelen mellom scenen og skråningen er det samme som å finne vinkelen mellom $z = 2$ og $x + 3z - 6 = 0$. De to planene har normalvektorer $[0\ ,\ 0\ ,\ 1]$ og $[1\ ,\ 0\ ,\ 3]$.
Vinkelen mellom normalvektorene er 18,4°.
Da er vinkelen mellom planene, og derfor også mellom skråningen og scenen, 18,4°.

1 Vinkel(Vektor((0, 0, 1)), Vektor((1, 0, 3)))
≈ **18.4**

c Vi vet at $[1\ ,\ 0\ ,\ 3]$ er en normalvektor for β. Siden *BE* står vinkelrett på β, kan vi derfor bruke den samme vektoren som retningsvektor for linja gjennom *B* og *E*. Linja går gjennom $B = (5\ ,\ 0\ ,\ 2)$ og har retningsvektor $[1\ ,\ 0\ ,\ 3]$, slik at en parameterframstilling for den blir $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

d *E* er skjæringspunktet mellom linja beskrevet ovenfor og planet β.
Vi setter koordinatene for *x*, *y* og *z* inn i likningen til β og får en likning med *t* som ukjent:

$$(5 + t) + 3 \cdot (2 + 3t) - 6 = 0$$
$$5 + t + 6 + 9t - 6 = 0$$
$$t = -\frac{1}{2}$$

Vi setter så $t = -\frac{1}{2}$ inn i parameterframstillingen for linja. Det gir

$$E = \left(5 + \left(-\frac{1}{2}\right), 0\ ,\ 2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{9}{2}, 0\ ,\ \frac{1}{2}\right).$$

e $$\left|\overrightarrow{EB}\right| = \left|\left[5 - \frac{9}{2}, 0 - 0\ ,\ 2 - \frac{1}{2}\right]\right| = 1{,}6$$
Lengden av bjelken *EB* er 1,6 m.

5.134

Vi setter opp en likning der avstanden mellom planet og punktet er $\frac{2}{3}$ og løser den i CAS. Merk at vi først flytter 6 over på venstresiden av likhetstegnet, så vi setter –6 inn i avstandsformelen. Avstanden mellom planet og punktet er $\frac{2}{3}$ når $a = 2 \quad \vee \quad a = 4$.

1 $\frac{|2 \cdot a - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{3}$
Løs: $\{a = 2, a = 4\}$

5.135

a To vektorer som er parallelle med β, er $[3-0\,,\,1-0\,,\,7-0]=[3\,,\,1\,,\,7]$ og $[6-0\,,\,0-0\,,\,14-0]=[6\,,\,0\,,\,14]$. Vektorproduktet av dem er $[14\,,\,0\,,\,-6]$, så vi bruker vektoren $[7\,,\,0\,,\,-3]\parallel[14\,,\,0\,,\,-6]$ som normalvektor for β. Planet går gjennom punktet $(0\,,\,0\,,\,0)$, så likningen er

β: $7x-3z=0$

b Bredden av fasadegrunnflaten er avstanden fra origo til skjæringspunktet mellom α og *xy*-planet. Dette skjæringspunktet finner vi ved å sette $z = 0$. Det gir likningen $7x = 210$, med løsningen $x = 30$. Bredden av fasadegrunnflaten er altså 30 m.

c Skjæringslinja står vinkelrett på både α og β. Vektorproduktet mellom normalvektorene til de to planene er $[7\,,\,0\,,\,3]\times[7\,,\,0\,,\,-3]=[0\,,\,42\,,\,0]\parallel[0\,,\,1\,,\,0]$. Vi bruker $[0\,,\,1\,,\,0]$ som retningsvektor for skjæringslinja.

Siden ingen av de to planlikningene er avhengige av y, har vi allerede et likningssystem med to ukjente, x og z. Vi løser dette i CAS og finner at $x = 15$ og $z = 35$. Alle punkter $(15\,,\,y\,,\,35)$ ligger derfor på skjæringslinja. Vi tar utgangspunkt i $(15\,,\,0\,,\,35)$ og ser at en parameterframstilling for linja blir $\begin{cases} x=15 \\ y=t \\ z=35 \end{cases}$.

1	$7x+3z=210$ $\rightarrow\ \mathbf{7\,x+3\,z=210}$
2	$7x-3z=0$ $\rightarrow\ \mathbf{7\,x-3\,z=0}$
3	{\$1, \$2} Løs: $\{\{\mathbf{x=15, z=35}\}\}$

d Skjæringslinja mellom planene α og β er toppen av fasaden. Som vi ser av parameterframstillingen ovenfor, er *z*-verdien her 35. Høyden av fasaden til Ishavskatedralen er derfor 35 m.

5.136
Vi gir planet som inneholder $P(2\,,-5\,,1)$, navnet α, og planet som inneholder $Q(-2\,,1\,,0)$ navnet β.
Punktene $A(0\,,0\,,0)$ og $B(1\,,0\,,0)$ ligger i både α og β, siden de ligger på x-aksen (som er skjæringslinja for planene). To vektorer som er parallelle med α, er derfor $\overrightarrow{AP}=[2\,,-5\,,1]$ og $\overrightarrow{BP}=[1\,,-5\,,1]$. På samme måte er $\overrightarrow{AQ}=[-2\,,1\,,0]$ og $\overrightarrow{BQ}=[-3\,,1\,,0]$ parallelle med β. Vi bruker dette til å finne normalvektorene for planene $\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{BP}=[0\,,-1\,,-5]$ og $\vec{n}_\beta=\overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{BQ}=[0\,,0\,,1]$.

1 Vektor((2, −5, 1)) ⊗ Vektor((1, −5, 1))
$\rightarrow \begin{pmatrix}0\\-1\\-5\end{pmatrix}$

1 Vektor((−2, 1, 0)) ⊗ Vektor((−3, 1, 0))
$\rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Videre finner vi vinkelen mellom normalvektorene ved hjelp av Vinkel(<Vektor>,<Vektor>)-kommandoen i CAS:

Vinkelen er større enn 90°, så vi trekker den fra 180°.
Vinkelen mellom planene er altså 180° – 168,7° = 11,3°.

1 Vinkel(Vektor((0, −1, −5)), Vektor((0, 0, 1)))
≈ **168.7**
2 180 − $1
≈ **11.3**

5.137
Punktet ligger på linja for $t=-3$. Vi setter koordinatene til punktet inn i likningen til planet og løser likningen for a.
Vi ser at planet inneholder punktet for $a=2$. Siden punktet også ligger på linja, blir det skjæringspunktet mellom linja og planet.

1 $2\cdot(-6)-a\cdot6-3\cdot(-10)=6$
Løs: $\{a=2\}$

5.138
Et punkt på linja er $(-1\,,0\,,-2)$. Vektoren fra dette punktet til $(2\,,k\,,1)$ er $[2-(-1)\,,k-0\,,1-(-2)]=[3\,,k\,,3]$.
En retningsvektor til linja er $[2\,,1\,,2]$. Formelen for avstanden mellom punkt og linje gir følgende likning:

$$\frac{|[3\,,k\,,3]\times[2\,,1\,,2]|}{|[2\,,1\,,2]|}=\sqrt{2}$$

Vi løser den i CAS, og finner at avstanden fra linja til $(2\,,k\,,1)$ er $\sqrt{2}$ når $k=0 \vee k=3$.

1 $\dfrac{|\text{Vektor}((3,k,3))\otimes\text{Vektor}((2,1,2))|}{|\text{Vektor}((2,1,2))|}=\sqrt{2}$
Løs: $\{k=0, k=3\}$

5.139
a $[2\,,-2\,,-1]$ er en normalvektor for begge planene, så de er parallelle. Derfor er avstanden fra et punkt på α, for eksempel $(0\,,0\,-3)$, til β, det samme som avstanden mellom planene.

Avstanden mellom β og $(0\,,0\,,-3)$ er 12, så likningen $\dfrac{|2\cdot0-2\cdot0-1\cdot(-3)-d|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=12$ må holde.
Vi løser den og ser at $d=39$. Vi forkaster $d=-33$ siden en forutsetning i oppgaveteksten er at $d>0$.

1 $\dfrac{|2\cdot0-2\cdot0-1\cdot(-3)-d|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=12$
Løs: $\{d=-33, d=39\}$

b Vi setter $x = 1$, $y = 1$ og $z = -3$ inn i likningen til α. Da blir venstresiden lik $2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) - 3 = 0$. Høyresiden er også 0. Siden venstre og høyre side stemmer overens, ligger $(1, 1, -3)$ i α.

Vi setter $x = 4$, $y = -10$ og $z = -11$ inn i likningen til β. Da blir venstresiden lik $2 \cdot 4 - 2 \cdot (-10) - (-11) - d = 39 - d$. Vi fant ovenfor at $d = 39$, så venstresiden blir $39 - d = 39 - 39 = 0$. Det stemmer med høyresiden, som viser at $(4, -10, -11)$ ligger i β.

c En retningsvektor for m er $\vec{r} = [4-1, -10-1, -11-(-3)] = [3, -11, -8]$, og m går gjennom punktet $A = (1, 1, -3)$, slik at en parameterframstilling for linja er $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 11t \\ z = -3 - 8t \end{cases}$.

d Vi setter koordinatene til et vilkårlig punkt på m inn i likningen til α. Det gir en likning for t, som vi løser i CAS. Linja skjærer α for $t = 0$. Skjæringspunktet finner vi ved å sette $t = 0$ inn i parameterframstillingen ovenfor. Skjæringspunktet S mellom linja og α er altså $(1, 1, -3)$.

1 $2 \cdot (1 + 3t) - 2 \cdot (1 - 11t) - (-3 - 8t) - 3 = 0$

Løs: $\{t = 0\}$

5.140

a Det geometriske stedet for disse punktene er de to planene som er parallelle med det opprinnelige planet og som har den gitte avstanden fra det.

b Hvis vi bruker det vi fant ovenfor, ser vi at de to planene også har $[1, 2, 2]$ som en av sine normalvektorer. De to planene må også ha avstand 6 til α. Hvis vi nå forsøker å finne avstanden fra α til et punkt (a, b, c), ser vi at vi har 3 ukjente: $\dfrac{|1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 6$.
Vi velger $b = c = 0$ og ser etter å ha løst likningen i CAS at $a = -9 \quad \vee \quad a = 27$.

1 $\dfrac{|1 \cdot a + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 6$

Løs: $\{a = -9, a = 27\}$

Et av planene går altså gjennom $(-9, 0, 0)$ og har normalvektor $[1, 2, 2]$.

$$1(x - (-9)) + 2(y - 0) + 2(z - 0) = 0$$
$$x + 9 + 2y - 0 + 2z - 0 = 0$$
$$x + 2y + 2z = -9$$

Likningen til det første planet er altså $x + 2y + 2z = -9$.

Det andre planet går gjennom $(27, 0, 0)$ og har også normalvektor $[1, 2, 2]$.

$$1(x - 27) + 2(y - 0) + 2(z - 0) = 0$$
$$x - 27 + 2y - 0 + 2z - 0 = 0$$
$$x + 2y + 2z = 27$$

Likningen til det andre planet er $x + 2y + 2z = 27$.

5.141

a Her er det viktig å merke seg forskjellen på høyden og avstanden til taket. Når vi finner høyden, kan vi nemlig bare «bevege oss» parallelt med *z*-aksen. I stedet for å finne avstanden fra (2 , 2 , 0) til taket må vi altså se når linja som går gjennom (2 , 2 , 0) og er parallell med *z*-aksen, skjærer planet som taket ligger i.

En retningsvektor for denne linja er [0 , 0 , 1], og den går gjennom (2 , 2 , 0).

Derfor er $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$ en parameterframstilling for linja.

Vi setter koordinatene til et vilkårlig punkt inn i likningen til planet som taket ligger i, og løser likningen.

1 $2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot t + 9 = 0$
Løs: $\left\{ t = \frac{7}{3} \right\}$

Linja skjærer planet for $t = \frac{7}{3}$. Når vi setter verdien inn i parameterframstillingen ovenfor, får vi punktet $\left(2\,,2\,,\frac{7}{3}\right)$.

Høyden fra (2 , 2 , 0) til taket er altså omtrent 2,3 m.

b Uttrykket for avstanden fra (2 , *k* , 0) til taket er
$\frac{|1\cdot 2 - 2\cdot k - 3\cdot 0 + 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{|11 - 2k|}{\sqrt{14}}$.

Vi setter dette uttrykket lik $\frac{\sqrt{14}}{2}$ slik at vi får en likning.

1 $\frac{|11 - 2k|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$
Løs: $\{k = 2, k = 9\}$

Løsningen er $k = 2 \quad \vee \quad k = 9$.

5.142

Vi har $\overrightarrow{BA} = [3\,,-6\,,-6]$ og $\overrightarrow{BP} = [0\,,-6\,,t-8]$.

Vi bruker skalarproduktet til å finne vinkelen som en funksjon av *t*:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right| \cdot \cos v$$

$$\cos v = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|}$$

$$v = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|}\right)$$

1 BA := Vektor((3, −6, −6))
$\rightarrow$ **BA** := $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

2 BP := Vektor((0, −6, t − 8))
$\rightarrow$ **BP** := $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ t-8 \end{pmatrix}$

3 $v(t) := \cos^{-1}\left(\frac{BA\ BP}{|BA|\ |BP|}\right)$
$\rightarrow v(t) := \cos^{-1}\left(\frac{1}{9} \cdot \frac{-6\,(t-8) + 36}{\sqrt{(t-8)^2 + 36}}\right)$

4 $v'(t) = 0$
Løs: $\{t = 2\}$

5 $v''(2) > 0$
$\rightarrow$ **true**

6 $\frac{v(2)}{°}$
$\approx$ **19.5**

Denne funksjonen definerer vi i rad 3 i CAS, og i rad 4 og 5 viser vi at den har sitt bunnpunkt for *t* = 2. Når *t* = 2, er vinkelen mellom $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BP}$ omtrent 19,5°. Dermed er $\angle ABP$ omtrent 19,5° på sitt minste.

Merk: Hvis vi for eksempel i stedet så på vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AP}$, ville vi heller funnet $\angle BAP$.

5.143

a Vi setter koordinatene til punktet inn i likningen til kuleflaten, og ser at venstre og høyre side stemmer overens: $4^2 + 2^2 + 0^2 - 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16 + 4 + 0 - 8 + 8 = 20$. Det betyr at *P* ligger på kuleflaten.

b Et punkt på ℓ er $Q(-4\,,\,8\,,\,2{,}5)$, og en retningsvektor for ℓ er $\vec{r} = [-4\,,\,3\,,\,-3]$. Avstanden fra P til ℓ er $\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{r}\right|}{|\vec{r}|} = \dfrac{5\sqrt{34}}{4}$.

PQ := Vektor((4, 2, 0), (−4, 8, 2.5))

1 $\rightarrow\ \mathbf{PQ} := \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

r := Vektor((−4, 3, −3))

2 $\rightarrow\ \mathbf{r} := \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

3 $\dfrac{|PQ \otimes r|}{|r|}$

$\rightarrow\ \frac{5}{4}\sqrt{34}$

c Hvis ℓ ligger i planet, er $\vec{r}$ parallelt med det.
Det er også $\overrightarrow{PQ}$, siden både P og Q da ligger i planet.
Vektorproduktet mellom dem er
$\left[\frac{51}{2}\,,\,34\,,\,0\right] \parallel [51\,,\,68\,,\,0]$. Vi bruker derfor
$[51\,,\,68\,,\,0]$ som normalvektor for planet.
Siden planet går gjennom $P(4\,,\,2\,,\,0)$, blir likningen

Vektor((−4, 3, −3)) ⊗ Vektor((4, 2, 0), (−4, 8, 2.5))

1 $\rightarrow\ \begin{pmatrix} \frac{51}{2} \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 51(x-4)+68(y-2)+0(z-0)&=0\\ 51x-204+68y-136&=0\\ 51x+68y&=340\\ 3x+4y&=20 \end{aligned}$$

d Vi bruker algebrafeltet i GeoGebra til å skrive likningen for kuleflaten på en form der vi lettere kan lese ut radius og sentrum. Vi ser at sentrum i kula er $S(1\,,\,-2\,,\,0)$, og at radius er $r=\sqrt{25}=5$.

$\text{eq1}: x^2+y^2+z^2-2x+4y = 20$

$\rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 25$

Vi undersøker så avstanden fra sentrum i kuleflaten til planet α.
Vi viste ovenfor at likningen til α er $3x+4y=20$, slik at avstanden D mellom S og α er

$$D = \frac{|3\cdot 1+4\cdot(-2)+0\cdot 0-20|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = 5.$$

Siden avstanden mellom α og sentrum i kula tilsvarer radien i kula, er α et tangentplan.

5.144

a Vi bruker algebrafeltet i GeoGebra til å skrive likningen for kula på en form der vi lettere kan lese ut radius og sentrum. Sentrum er $S(2\,,\,-2\,,\,4)$, og radius er $R=\sqrt{25}=5$.

$\text{eq1}: x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z = 1$

$\rightarrow (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 = 25$

b Dersom avstanden fra sentrum i kula til planet er D og radius i skjæringssirkelen er r, følger det fra pytagorassetningen at $D=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. Vi setter så avstanden mellom kulas sentrum og planet lik 3, og løser likningen i CAS. Vi finner at $k=\pm 6\sqrt{3}$.

1 $\dfrac{|2\cdot 2-2\cdot(-2)-2\cdot 4-k|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 3$

Løs: $\left\{\mathbf{k = -6\sqrt{3},\ k = 6\sqrt{3}}\right\}$

5.145

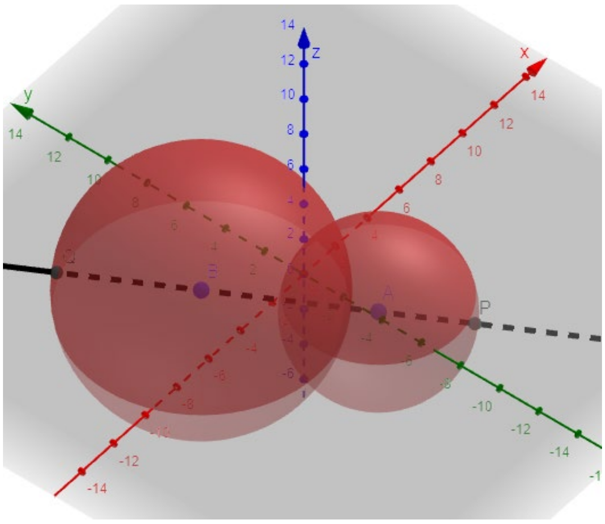
Vi skriver likningene på en lettere form ved hjelp av algebrafeltet i GeoGebra. Kuleflatene har sentrum i $A(1\,,-3\,,-1)$ og $B(-4\,,2\,,1)$.

eq1 : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z = 5$
$\rightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 16$

eq2 : $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 2z = 15$
$\rightarrow (x + 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 36$

Avstanden mellom sentrene i kuleflatene er
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|[-5\,,5\,,2]\right| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Når P og Q står så langt unna skjæringssirkelen som mulig, er også avstanden mellom dem størst. Når dette er tilfelle, befinner de seg på hver sin side av $\overline{AB}$.
Avstanden D blir da $D = R + \left|\overrightarrow{AB}\right| + r = 6 + 3\sqrt{6} + 4 = 10 + 3\sqrt{6}$.

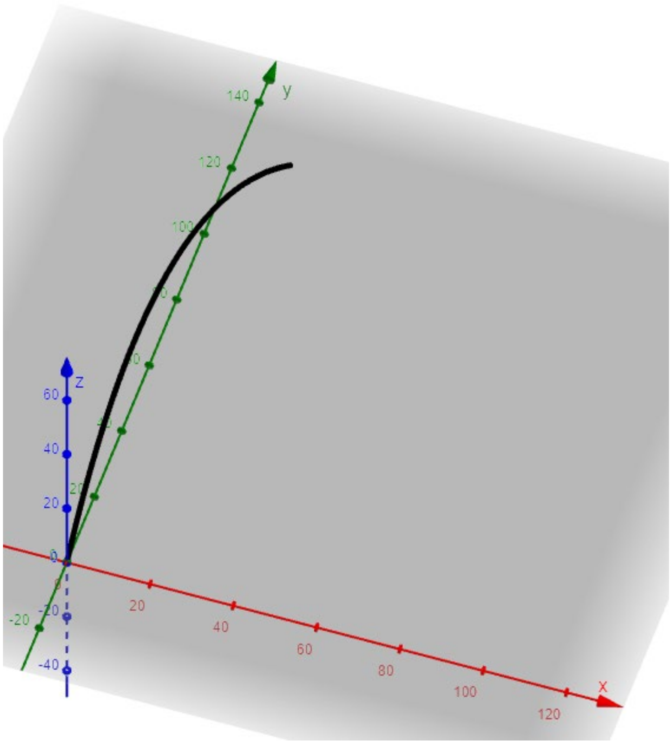


5.146

a Fartsvektoren er $\vec{v}(0) = [0\,,25\,,25]$, så startfarten er $v = \left|\vec{v}(0)\right| = \sqrt{0^2 + 25^2 + 25^2}$ m/s $= 35{,}4$ m/s.

b Akselerasjonsvektoren er $\vec{a}(t) = [1\,,0\,,-10]$, så akselerasjonen er $a = \left|\vec{a}(t)\right| = 10{,}0$ m/s^2.

c



d Vi finner fartsvektoren ved å integrere akselerasjonsvektoren: $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t = [t + C_1\,,\,C_2\,,\,-10t + C_3]$.
Siden vi kjenner $\vec{v}(0)$, kan vi bestemme konstantene: $\vec{v}(0) = [C_1\,,\,C_2\,,\,C_3] = [0\,,\,25\,,\,25]$.
Når vi setter inn verdiene for de tre konstantene, får vi at $\vec{v}(t) = [t\,,\,25\,,\,25 - 10t]$.

e Vi finner posisjonsvektoren ved å integrere fartsvektoren:
$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 + C_4\,,\,25t + C_5\,,\,-5t^2 + 25t + C_6\right]$.
Siden den starter i origo, er $C_4 = C_5 = C_6 = 0$.
Derfor er $\vec{r}(t) = \left[\frac{1}{2}t^2\,,\,25t\,,\,-5t^2 + 25t\right]$.

f Når ballen igjen lander, er z-koordinaten til posisjonsvektoren lik 0. Altså er $-5t^2 + 25t = 0$.
Denne likningen har løsningen $t = 0 \quad \vee \quad t = 5$.
Vi forkaster den første løsningen, for det er da ballen blir *skutt*.
Den lander altså etter 5 sekunder. Vi setter $t = 5$ inn i både $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$:

$$\vec{r}(5) = \left[\frac{1}{2}\cdot 5^2\,,\,25\cdot 5\,,\,-5\cdot 5^2 + 25\cdot 5\right] = \left[\frac{25}{2}\,,\,125\,,\,0\right]$$

$$\vec{v}(5) = [5\,,\,25\,,\,-10\cdot 5 + 25] = [5\,,\,25\,,\,-25]$$

Ballen lander i punktet $\left(\frac{25}{2}\,,\,125\,,\,0\right)$, dvs. 12,5 m øst og 125 m nord for origo, med fartsvektoren $[5\,,\,25\,,\,-25]$. Farten ved landing er derfor $|[5\,,\,25\,,\,-25]| = 35{,}7$ m/s.

5.147
La $\vec{u} = [a\,,\,b\,,\,c]$, $\vec{v} = [p\,,\,q\,,\,r]$ og $\vec{w} = [x\,,\,y\,,\,z]$.

Hvis skalarproduktet er assosiativt, er $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Venstresiden blir $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = [a\,,\,b\,,\,c]\cdot(px + qy + rz) = [a(px + qy + rz)\,,\,b(px + qy + rz)\,,\,c(px + qy + rz)]$.

Høyresiden blir $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = (ap + bq + cr)\cdot[x\,,\,y\,,\,z] = [x(ap + bq + cr)\,,\,y(ap + bq + cr)\,,\,z(ap + bq + cr)]$.

De to uttrykkene på høyre og venstre side er ikke nødvendigvis like, så skalarproduktet er ikke assosiativt.

Vi sjekker så om vektorproduktet er assosiativt. Vi definerer de tre vektorene i rad 1–3. I rad 4 og 5 regner vi ut henholdsvis $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ og $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$. Vi ser at de ikke er like. For eksempel inngår a i x-koordinaten til vektoren i rad 5, men ikke i vektoren i rad 5.

Merk også at GeoGebra faktisk viser teksten $\vec{u}\times\vec{v}\times\vec{w}$, selv om vi skrev inn uttrykket med riktig parentessetting.

Det fins altså verken en assosiativ lov for skalar- eller vektorproduktet.

4	$u \otimes (v \otimes w)$ $\rightarrow \begin{pmatrix} b\,(p\,y - q\,x) - c\,(-p\,z + r\,x) \\ -a\,(p\,y - q\,x) + c\,(q\,z - r\,y) \\ a\,(-p\,z + r\,x) - b\,(q\,z - r\,y) \end{pmatrix}$
5	$u \otimes v \otimes w$ $\rightarrow \begin{pmatrix} -a\,q\,y - a\,r\,z + b\,p\,y + c\,p\,z \\ a\,q\,x - b\,p\,x - b\,r\,z + c\,q\,z \\ a\,r\,x + b\,r\,y - c\,p\,x - c\,q\,y \end{pmatrix}$

5.148

a Vi plasserer A i origo og B i (1 , 0 , 0). Dermed ligger grunnflaten $ABCD$ i xy-planet, så vi kan plassere T i punktet (0 , 0 , 1). Hvis vi plasserer D i (–1 , 1 , 0), er $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ samtidig som vinkelen BAD er 90° + 45° = 135°. Da gjenstår bare $C(x , y , z)$, som vi finner slik:

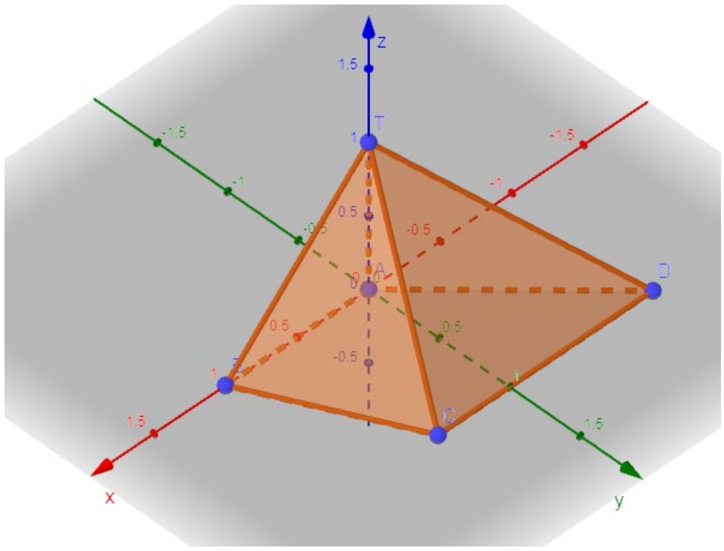
$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

$$[x-1 , y-0 , z-0] = \frac{1}{2}\cdot[1 , 0 , 0] + [-1 , 1 , 0]$$

$$[x-1 , y , z] = \left[-\frac{1}{2} , 1 , 0\right]$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y = 1 \quad \wedge \quad z = 0$$

Altså er $C\left(\frac{1}{2} , 1 , 0\right)$. Dermed har vi alle fire punkter, slik at vi kan tegne tetraedret.



b Som vi ser av tegningen ovenfor, er ikke grunnflaten $ABCD$ et parallellogram. Uttrykket $\frac{1}{3}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$ gir bare volumet til pyramider som har parallellogrammer som grunnflate.
Altså kan vi ikke bruke det i denne sammenhengen.

c

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = [1 , 0 , 0]\cdot[-1 , 1 , 0] = 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = -1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AT} = [1 , 0 , 0]\cdot[0 , 0 , 1] = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AT} = [-1 , 1 , 0]\cdot[0 , 0 , 1] = -1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

d

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) - \vec{a} + \vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AT} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AT} = -\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) - \vec{a} + \vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

e

$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|[-1-1 , 1-0 , 0-0]\right| = \left|[-1 , 0 , 1]\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\left[-1-\frac{1}{2} , 1-1 , 0-0\right]\right| = \left|\left[-\frac{3}{2} , 0 , 0\right]\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{3}{2}$$

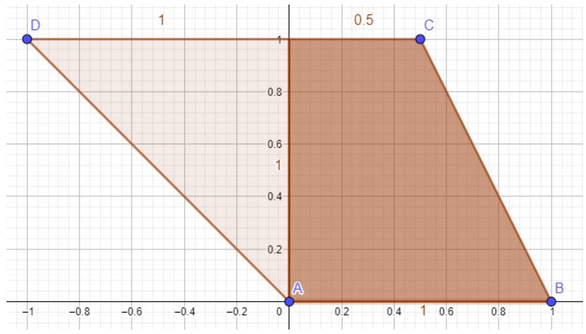
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\left[\frac{1}{2}-1 , 1-0 , 0-0\right]\right| = \left|\left[-\frac{1}{2} , 1 , 0\right]\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

f Volumet av pyramiden er $V = \frac{1}{3}Gh$. Arealet av grunnflaten kan vi se på som summen av arealene av trapeset med hjørner i A, B, C og (0 , 1 , 0), og trekanten med hjørner i A, D og (0 , 1 , 0). Dermed blir

$$G = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 1}{2} + \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Høyden er 1, siden T ligger 1 over grunnflaten $ABCD$.

Dermed er $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot 1 = \frac{5}{12}$.



g $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CT}$

Ovenfor viste vi at $\overrightarrow{CT} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. Derfor er

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CT} = \vec{a} + \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

Dette viser at $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

h Vi setter først inn tall i vektorene:

$$\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AT} = [1\,,0\,,0] + \frac{2}{3}[-1\,,1\,,0] + \frac{1}{3}[0\,,0\,,1] = \left[\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{1}{3}\right]$$

$$\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -[1\,,0\,,0] + [-1\,,1\,,0] = [-2\,,1\,,0]$$

$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AT} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AT} = -[1\,,0\,,0] + [0\,,0\,,1] = [-1\,,0\,,1]$$

Skalarproduktene blir

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD} = \left[\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{1}{3}\right]\cdot[-2\,,1\,,0] = \frac{1}{3}\cdot(-2) + \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 0 = 0 \quad \text{og}$$

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BT} = \left[\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{1}{3}\right]\cdot[-1\,,0\,,1] = \frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 0.$$

i Når skalarproduktet mellom to vektorer er null, står de to vektorene vinkelrett på hverandre.
I oppgave h så vi altså at $\overrightarrow{AE}$ står vinkelrett på både $\overrightarrow{BD}$ og $\overrightarrow{BT}$.

De to vektorene $\overrightarrow{BD}$ og $\overrightarrow{BT}$ er parallelle med α, siden B, D og T ligger i planet.
$\overrightarrow{AE}$ står altså vinkelrett på to vektorer som ligger i planet, og står derfor også vinkelrett på selve planet.

KAPITTELTEST

Oppgave 1

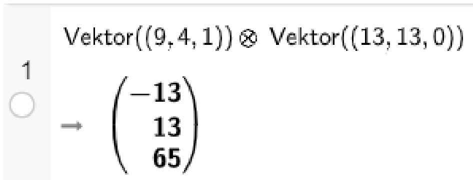
a I en rombe er to og to sider parallelle, og alle sider er like lange.
For figuren $ABCD$ har vi at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [9\,,4\,,1]$. Videre er $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [4\,,9\,,-1]$.
Vi har nå vist at to og to sider er parallelle: $AB \parallel CD$ og $AD \parallel BC$.
Dessuten ser vi at alle vektorene har lengde $\sqrt{81+16+1} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.
Siden alle sidene har samme lengde, og to og to er parallelle, er $ABCD$ en rombe.

b To vektorer som er parallelle med planet som $ABCD$ ligger i, er $\overrightarrow{AB} = [9\,,4\,,1]$ og $\overrightarrow{AD} = [4\,,9\,,-1]$.

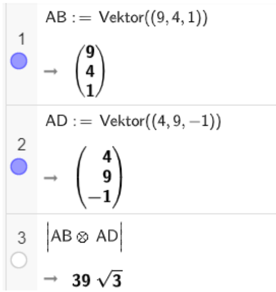
Siden punktet $A(-3\,,0\,,2)$ ligger i planet, er $\alpha : \begin{cases} x = -3 + 9t + 4s \\ y = 4t + 9s \\ z = 2 + t - s \end{cases}$ en mulig parameterframstilling.

Når vi skal skrive opp likningen til α, trenger vi en normalvektor.
Vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-13\,,13\,,65]$ står vinkelrett på α. Vi bruker $[-1\,,1\,,5]$ som normalvektor. Den er parallell med $[-13\,,13\,,65]$ og er lettere å håndtere. α går gjennom punktet $A(-3\,,0\,,2)$.
Likningen til planet blir

$$\begin{aligned} -1(x-(-3)) + 1(y-0) + 5(z-2) &= 0 \\ -x - 3 + y - 0 + 5z - 10 &= 0 \\ x - y - 5z + 13 &= 0 \end{aligned}$$



c Siden grunnflaten er en rombe, kan vi bruke formelen for arealet av parallellogrammer (en rombe er bare et spesialtilfelle) til å regne ut arealet.
Hvis $\overrightarrow{AB} = [9\,,4\,,1]$ og $\overrightarrow{AD} = [4\,,9\,,-1]$ spenner ut grunnflaten, er arealet lik $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = 39\sqrt{3}$.

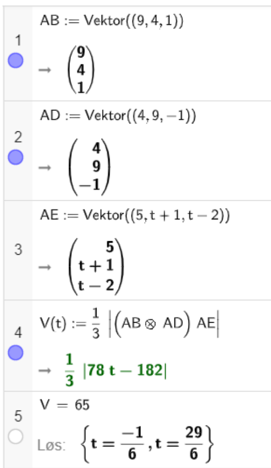


d Vi finner først at $\overrightarrow{AE} = [2-(-3)\,,t+1-0\,,t-2] = [5\,,t+1\,,t-2]$.

Et uttrykk for volumet V av pyramiden er $V(t) = \frac{1}{3}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{3}|78t - 182|$.

Deretter setter vi $V(t) = 65$ og løser likningen for t.

Vi finner at $t = -\frac{1}{6} \;\vee\; t = \frac{29}{6}$.



e Vi finner først høyden ved å bruke sammenhengen $V = \frac{1}{3}Gh$.

Når vi setter inn $V = 65$ og $G = 39\sqrt{3}$, får vi $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

1
$$65 = \frac{1}{3} \cdot 39\sqrt{3} \cdot h$$
Løs: $\left\{ \mathbf{h = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \right\}$

En annen måte å finne høyden i pyramiden på er å finne avstanden mellom E og grunnflaten.

Denne avstanden er den samme som avstanden mellom $E\left(2\,,\frac{5}{6}\,,-\frac{1}{6}\right)$ og $\alpha:\ x - y - 5z + 13 = 0$.

Avstanden mellom α og E er $\dfrac{\left|1\cdot 2 - 1\cdot\frac{5}{6} - 5\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) + 13\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Siden høyden i pyramiden er den samme som avstanden fra grunnflaten til det øverste punktet, er også $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

1
$$\frac{\left|2 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 13\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-5)^2}}$$
$\rightarrow \mathbf{\frac{5}{3}\sqrt{3}}$

f En normalvektor for α (som inneholder grunnflaten) er [1 , –1 , –5].
Vi legger normalvektoren for α inn i rad 1 i CAS.
En normalvektor for planet som inneholder sideflaten ABE, er $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}$, som vi finner i rad 2 i CAS-vinduet til høyre.
Vinkelen mellom vektorene er 79,1° < 90°.
Derfor er vinkelen mellom grunnflaten og sideflaten ABE 79,1°.

1 $n_\alpha := \text{Vektor}((1, -1, -5))$
$\rightarrow n_\alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

2 $n_{ABE} := \text{Vektor}((9, 4, 1)) \otimes \text{Vektor}\left(\left(5, \frac{5}{6}, -\frac{13}{6}\right)\right)$
$\rightarrow n_{ABE} := \begin{pmatrix} -\frac{19}{2} \\ \frac{49}{2} \\ -\frac{25}{2} \end{pmatrix}$

3 $\dfrac{\text{Vinkel}(n_\alpha, n_{ABE})}{°}$
$\approx \mathbf{79.1}$

g $\overrightarrow{AE} = \left[5\,,\frac{5}{6}\,,-\frac{13}{6}\right]$ er en retningsvektor for linja gjennom A og E.

Vi bruker fortsatt [1 , –1 , –5] som normalvektor for α, og finner vinkelen mellom den og $\overrightarrow{AE}$. Vinkelen mellom vektorene er 58,4° < 90°.
Derfor er vinkelen mellom sidekanten AE og grunnflaten 90° – 58,4° = 31,6°.

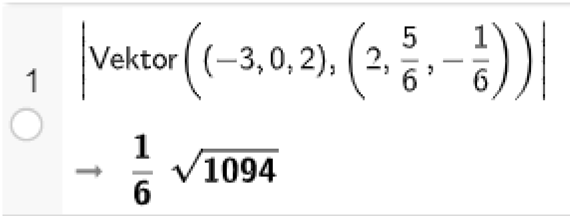
1 $n_\alpha := \text{Vektor}((1, -1, -5))$
$\rightarrow n_\alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

2 $n_{ABE} := \text{Vektor}\left(\left(5, \frac{5}{6}, -\frac{13}{6}\right)\right)$
$\rightarrow n_{ABE} := \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{13}{6} \end{pmatrix}$

3 $\dfrac{\text{Vinkel}(n_\alpha, n_{ABE})}{°}$
$\approx \mathbf{58.4}$

h Kuleflaten har radius $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{6}\sqrt{1094}$. Med sentrum i $E\left(2\,,\frac{5}{6}\,,-\frac{1}{6}\right)$ blir likningen til kula

$$\begin{aligned}(x-2)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\left(z-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 &= \left(\frac{1}{6}\sqrt{1094}\right)^2\\ (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\left(z+\frac{1}{6}\right)^2 &= \frac{1}{36}\cdot 1094\\ (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\left(z+\frac{1}{6}\right)^2 &= \frac{547}{18}\end{aligned}$$



Oppgave 2

a B har koordinatene $(5-t\,,\,t+3\,,\,3)$, så $\overrightarrow{AB} = [5-t-3\,,\,t+3-(-1)\,,\,3-5] = [2-t\,,\,t+4\,,\,-2]$.

b $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-t)^2+(t+4)^2+(-2)^2} = \sqrt{4-4t+t^2+t^2+8t+16+4} = \sqrt{2t^2+4t+24} = \sqrt{f(t)}$

c $f'(t) = 4t+4$, så den deriverte er 0 for $t = -1$. Videre er $f''(t) = 4 > 0$, som viser at $t = -1$ er et minimalpunkt (og ikke et maksimalpunkt).

d

$$\begin{aligned}[2-t\,,\,t+4\,,\,-2]\cdot[-1\,,\,1\,,\,0] &= 0\\ (2-t)\cdot(-1)+(t+4)\cdot 1+(-2)\cdot 0 &= 0\\ t-2+t+4+0 &= 0\\ t &= -1\end{aligned}$$

e Vi ser at -1 både er minimalpunktet til f (verdien som gir den korteste lengden av $\overrightarrow{AB}$) og løsningen på likningen $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{r} = 0$. Det er fordi avstanden fra et punkt til en linje er definert som lengden av en normal fra punktet ned på linja, og dette er samtidig den korteste lengden av $\overrightarrow{AB}$.

f Som forklart ovenfor er avstanden kortest når $t = -1$. Vi setter denne verdien inn i uttrykket for avstanden mellom A og B. Den kortest mulige avstanden er $\sqrt{2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+24} = \sqrt{2-4+24} = \sqrt{22}$.

Oppgave 3

a Vi ser at punktene må ligge på linja ℓ som går gjennom sentrene i kulene. Denne linja har retningsvektor $\vec{r} = [12-0\,,\,6-0\,,\,4-0] = [12\,,\,6\,,\,4]$ og går gjennom $A(0\,,\,0\,,\,0)$, slik at en parameterframstilling er

$$\ell : \begin{cases} x = 12t \\ y = 6t \\ z = 4t \end{cases}$$

ℓ skjærer hver av kuleflatene i to punkter. Et par av disse punktene gir den minste mulige avstanden mellom A og B. For å finne skjæringspunktene setter vi koordinatene til ℓ inn i likningen til hver av kuleflatene.

1: $(12t)^2 + (6t)^2 + (4t)^2 = 16$
Løs: $\left\{ t = \frac{-2}{7}, t = \frac{2}{7} \right\}$

2: $(12t-12)^2 + (6t-6)^2 + (4t-4)^2 = 49$
Løs: $\left\{ t = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{2} \right\}$

Vi ser fra CAS-vinduet at A har koordinatene $\left(-\frac{24}{7}, -\frac{12}{7}, -\frac{8}{7}\right)$ eller $\left(\frac{24}{7}, \frac{12}{7}, \frac{8}{7}\right)$ når vi setter de to t-verdiene i rad 1 inn i parameterframstillingen for ℓ.

På samme måte er koordinatene til B $(6\,,\,3\,,\,2)$ eller $(18\,,\,9\,,\,6)$. Vi kan nå se at $A\left(\frac{24}{7}, \frac{12}{7}, \frac{8}{7}\right)$ og $B(6\,,\,3\,,\,2)$ gir den minste mulige avstanden (man kan eventuelt sjekke dette ved å undersøke lengden av hver av de fire mulige $\overrightarrow{AB}$).

b Vi bruker kommandoen Vektor(<Startpunkt>,<Sluttpunkt>) for å definere $\overrightarrow{AB}$ med de punktene vi fant ga lavest avstand.
Den minste mulige avstanden mellom A og B er lengden av denne vektoren, som altså er 3.

1: $AB := \text{Vektor}\left(\left(\frac{24}{7}, \frac{12}{7}, \frac{8}{7}\right), (6, 3, 2)\right)$
$\rightarrow AB := \begin{pmatrix} \frac{18}{7} \\ \frac{9}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

2: $|AB|$
$\rightarrow 3$

Oppgave 4

a $$D = \frac{|2\cdot(-2) - 1\cdot 6 + 1\cdot 7 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-4-6+7-3|}{\sqrt{6}} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

b Vi setter avstanden mellom Q og α lik $\sqrt{6}$, slik at vi får en likning som vi løser med CAS.
Avstanden er $\sqrt{6}$ når $z = -13$ eller når $z = -1$.

1: $\frac{|2\cdot 3 - 1\cdot(-4) + 1\cdot z - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$
Løs: $\{z = -13, z = -1\}$

c Vi setter $x = 3$, $y = -4$ og $z = c$ inn i likningen til α slik at c blir eneste ukjent. Vi løser likningen med CAS og finner at $c = -7$.

Siden avstanden mellom R og S er 9, er $\left|\overrightarrow{RS}\right| = 9$.

Vi definerer $\overrightarrow{RS}$ i rad 2 og finner i rad 3 at avstanden mellom R og S er 9 når $z = -11 \;\vee\; z = -3$.

1 $2 \cdot 3 + 4 + c - 3 = 0$

Løs: $\{c = -7\}$

2 RS := Vektor((2, 4, z), (3, −4, −7))

$\rightarrow \; \mathbf{RS} := \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -7 - z \end{pmatrix}$

3 $|RS| = 9$

Løs: $\{z = -11, z = -3\}$

Oppgave 5

Fordi x-koordinaten inneholder $\cos(3{,}7 \cdot 10^{10} t)$ og y-koordinaten inneholder $\sin(3{,}7 \cdot 10^{10} t)$, beveger positronet seg i en sirkel i forhold til xy-planet (se for eksempel for deg hvordan kurven $[\cos t, \sin t]$ ser ut). Sirkelen har radius $1{,}9 \cdot 10^{-4}$ m (konstanten foran cosinus- og sinusfunksjonen).

Positronet beveger seg én gang rundt denne sirkelen $\frac{3{,}7 \cdot 10^{10}}{2\pi} = 5{,}9 \cdot 10^{9}$ ganger per sekund.

I vertikal retning har positronet en fart på $1{,}1 \cdot 10^{6}$ m/s.
Fartsvektoren er den deriverte av posisjonsvektoren.

1 r := Kurve$(1.9 \cdot 10^{-4} \cos(3.7 \cdot 10^{10}\, t), 1.9 \cdot 10^{-4} \sin(3.7 \cdot 10^{10}\, t), 1.1 \cdot 10^{6}\, t, t, 0, 1)$

$\rightarrow \; \mathbf{r} := \begin{pmatrix} \frac{19}{100000} \cos(37000000000\, t) \\ \frac{19}{100000} \sin(37000000000\, t) \\ 1100000\, t \end{pmatrix}$

2 v := Derivert(r)

$\rightarrow \; \mathbf{v} := \begin{pmatrix} -7030000 \sin(37000000000\, t) \\ 7030000 \cos(37000000000\, t) \\ 1100000 \end{pmatrix}$

Lengden av fartsvektoren er

$$\begin{aligned} |\vec{v}(t)| &= \sqrt{\left(-7{,}03 \cdot 10^{6} \cdot \sin 3{,}7 \cdot 10^{10} t\right)^2 + \left(7{,}03 \cdot 10^{6} \cdot \sin 3{,}7 \cdot 10^{10} t\right)^2 + \left(1{,}1 \cdot 10^{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-7{,}03 \cdot 10^{6}\right)^2 \cdot \left(\cos 3{,}7 \cdot 10^{10} t\right)^2 + \left(7{,}03 \cdot 10^{6}\right)^2 \cdot \left(\sin 3{,}7 \cdot 10^{10} t\right) + \left(1{,}1 \cdot 10^{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(7{,}03 \cdot 10^{6}\right)^2 \cdot \left(\cos^2 3{,}7 \cdot 10^{10} t + \sin^2 3{,}7 \cdot 10^{10} t\right) + \left(1{,}1 \cdot 10^{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(7{,}03 \cdot 10^{6}\right)^2 \cdot 1 + \left(1{,}1 \cdot 10^{6}\right)^2} \end{aligned}$$

Vi regner ut uttrykket for lengden i CAS.

Farten til positronet er $7{,}1 \cdot 10^{6}$ m/s.

1 $\sqrt{(7.03 \cdot 10^{6})^2 \cdot 1 + (1.1 \cdot 10^{6})^2}$

$\approx \mathbf{7115539.33}$

2 Standardform($1, 2)

$\approx \mathbf{7.1 \cdot 10^{6}}$