Innlevering 1: Del 6-8

Skrevet av André Hansen

October 10, 2025

Abstract

Dette er det løsning for første innlevering som dekker del 6-8 i pensum. Jeg kommer til å behandle denne innleverigen på lik linje som selve eksamenen.

1 Uten hjelpemidler

1.1 Oppgave 1: I hvilket omløp og i hvilke kvadrant ligger vinkel $v = \frac{29\pi}{9}$?

vinkelen befinner seg i første kvadrant og er på sitt andre omløp

$$v = \frac{28\pi}{9} = 2\pi + \frac{\pi 10}{9}$$

1.2 Oppgave 2: Oppgi de nøaktige verdiene

1.2.1 $tan 45°$

$$\tan 45° = 1$$

1.2.2 $sin 120°$

$$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.2.3 $cos 240°$

$$\cos 240° = -\frac{1}{2}$$

1.3 Oppgave 3:

1.3.1 Hva er komplemtnvinkelen til $52°$

Komplementvinkelen kan finnes ved å løse ligningen:

$$52° + x° = 90° \rightarrow x = 38°$$

Komplementvinken er $38°$

1.3.2 Hva er supplementvinkelen til $\frac{\pi}{5}$, målt i grader?

Supplementvinkelen kan finnes ved å løse ligningen:

$$\frac{\pi}{5} + x = \pi \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{5} \rightarrow x = \frac{4\pi}{5} = 144°$$

Supplementvinkelen er $144°$

1.4 Oppgave 4:

1.4.1 $4(\sin x - \frac{3}{2}) = 2\sin x - 5, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
4(\sin x - \frac{3}{2}) &= 2\sin x - 5, \quad x \in \mathbb{R} \\
4\sin x - \frac{12}{2} &= 2\sin x - 5 \\
2\sin x &= 1 \\
\sin x &= \frac{1}{2} \\
x &= \frac{\pi}{6} \cdot 2\pi \cdot k \vee x = \frac{5\pi}{6} \cdot 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

1.4.2 $\sqrt{2}\tan 2x = \sqrt{6}, \quad x \in [-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\tan 2x &= \sqrt{6}, \quad x \in [-\pi, \pi) \\
\tan 2x &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Generell løsning

$$\begin{aligned}
2x &= \frac{\pi}{3} + \pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \\
x &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \cdot k}{2}
\end{aligned}$$

Prøver med forskjellige verdier for k

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}, \quad k = -2 \\
x &= -\frac{5\pi}{6} \\
x &= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}, \quad k = -1 \\
x &= -\frac{\pi}{2} \\
x &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \cdot k}{2}, \quad k = 0 \\
x &= \frac{\pi}{6} \\
x &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \cdot k}{2}, \quad k = 1 \\
x &= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Så løsningen blir da:

$$x \in \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\}$$

1.4.3 $3\sin(x+\frac{\pi}{12})-\sqrt{3}\cos(x+\frac{\pi}{12})=0, \quad x\in\mathbb{R}$

$$3\sin(x+\frac{\pi}{12})-\sqrt{3}\cos(x+\frac{\pi}{12})=0, \quad x\in\mathbb{R}$$

Omskriver til en sin funksjon på formen:

$$A\sin(x\cdot c+\phi)=0$$
$$A=\sqrt{3^2-\sqrt{3}^2}=2\cdot\sqrt{3}$$
$$c=1$$
$$\tan\phi=\frac{\sqrt{3}}{3}\to\phi=\frac{\pi}{6}\vee\frac{7\pi}{6}$$

ny formel

$$2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})=0\vee 2\sqrt{3}\sin(x+\frac{7\pi}{6})=0$$

løsnig

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})=0\vee\sin(x+\frac{7\pi}{6})=0$$
$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k\vee x+\frac{7\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k, \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot k\vee x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot k, \quad k\in\mathbb{Z}$$

1.4.4 $\cos 2x+\cos x=0, \quad x\in[0,2\pi)$

$$\cos 2x+\cos x=0, \quad x\in[0,2\pi)$$
$$\cos^2 x-\sin^2 x+\cos=0$$
$$\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$$
$$x=0$$

1.4.5 $\cos x-\sin x=\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$

$$\cos x-\sin x=\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$$
$$\cos x-\sin x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}$$
$$\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}$$
$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}$$
$$0=0$$
$$x\in\mathbb{R}$$

1.4.6 $\sin^2 x = (1 - \cos x)^2, \quad x \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= (1 - \cos x)^2, \quad x \in [0, 2\pi) \\
\sqrt{\sin x}^2 &= \sqrt{1 - \cos x}^2 \\
\sin x &= 1 - \cos x \\
\sin x + \cos x &= 1 \\
x = \frac{\pi}{2} &+ 2\pi \cdot k \vee x = 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \\
x &= 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{har ingen løsninger} \\
x &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

1.5 Oppgave 5: Gitt funksjonen $f(x) = 2sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 1, \quad x \in [-4\pi, 4\pi)$

1.5.1 hva er nullpunktene til $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 1 &= 0, \quad x \in [-4\pi, 4\pi) \\
2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) &= 1 \\
\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{2} \\
\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} &+ 2\pi \cdot k \vee \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \cdot 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \\
x + \pi = \frac{\pi}{3} &+ 4\pi \cdot k \vee x + \pi = \frac{\pi}{3} + 4\pi \cdot k \\
x = -\frac{2\pi}{3} &\cdot 4\pi \cdot k \vee x = \frac{4\pi}{3} + 4\pi \cdot k \\
x = -\frac{2\pi}{3} &+ 4\pi \cdot k \vee x = \frac{4\pi}{3} + 4\pi \cdot k, \quad k \in \{-1, 0, 1\} \\
L = \{-\frac{8\pi}{3}&, -\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\}
\end{aligned}$$

1.5.2 Skiser grafen

1.6 Oppgave 6: Deriver funksjoneen

1.6.1 $f(x) = x^3 \cdot \sin x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [x^3]' \cdot \sin x + x^3 \cdot [\sin x]' \\
&= 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x \\
&= x^2(3\sin x - x\cos x)
\end{aligned}$$

1.6.2 $g(x) = \frac{1}{2}\cos(2x^2)$

$$\begin{aligned}
g(x)' &= [\frac{1}{2}\cos(2x^2)]' \\
&= [\frac{1}{2}]' \cdot \cos(2x^2) + \frac{1}{2} \cdot [\cos(2x^2)] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [\cos(2x^2)]' \\
&= \frac{1}{2} \cdot -\sin(2x^2) \cdot 4x \\
&= -2x\sin(2x^2)
\end{aligned}$$

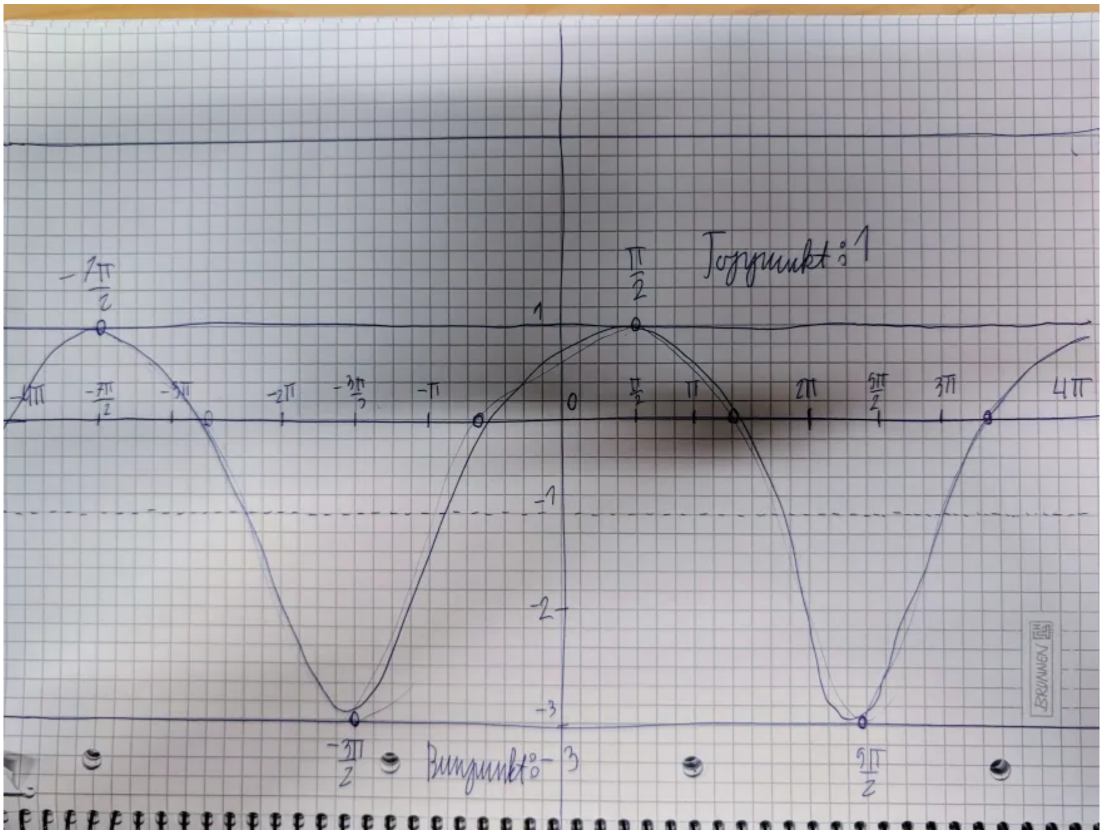

Figure 1: Skisse av grafen

1.7 Oppgave 7: Regn ut integralene

1.7.1 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx \\
&= [\sin x - \cos x]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \sin(\pi) - \cos(\pi) - (\sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3})) \\
&= \sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(\pi) - \cos(\frac{\pi}{3}) \\
&= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3 - \sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

1.7.2 $\int (x \cdot \sin 2x) dx$

$$\text{Bruker: } \int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\, dx \quad \text{setter } x = v \text{ og } \sin 2x = u'$$

$$\begin{aligned}
\int (x \cdot \sin 2x)\, dx &= x \int \sin 2x\, dx - \int (x' \cdot \int \sin 2x\, dx)\, dx \\
&= x \int \sin 2x\, dx - \iint \sin 2x\, dx \\
&= 2x \int \sin x \cos x\, dx - \int 2 \int \sin x \cos x\, dx\, dx \\
&= 2x \int \sin x \cos x - 2 \iint \sin x \cos x\, dx\, dx \\
&= \text{Det var så mye jeg klarte...}
\end{aligned}$$

2 Del 2: Med hjelpemidler

2.1 Oppgave 8: Et fly har resit 26,0 km. Finn lengden nord

$\sin(41° \cdot 26,0km) \approx 19.32km$

Flyet har reist ca $19,32km$ nord

2.2 Oppgave 9: Finn høyden av tårnet

Høyden av tårned kan finnes ved å definere to funksjoner for hver av vinkelene og finne kjæringspunktet

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \tan(16.7°) \quad g(x) = (x - 85.3) \tan(21.4°) \\
\text{Løser:}& \\
f(x) &= h(x) \\
x &\approx 363.82 \\
h \approx f(363.82) &\approx 109.15
\end{aligned}$$

Høyden til tårnet er ca $109.15m$

2.3 Oppgave 10:

2.3.1 Bruk formelene for sinus og cosinus til en differanse mellom to vinkler til å vise at $\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

Formelene til sinus og cosinus sier:

$$\begin{aligned}
sin(u - v) &= \sin u \cos v - \sin v \cos u \\
cos(u - v) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tan(u-v) &= \frac{\sin u - v}{\cos u - v} \\
&= \frac{\sin u \cos v - \sin v \cos u}{\cos u \cos v + \sin u \sin v} \\
&\text{Deler nevner og teller på: } \cos u \cos v \\
&= \frac{\frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} - \frac{\sin v \cos u}{\cos v \cos u}}{\frac{\cos u \cos v}{\cos u \cos v} + \frac{\sin u \sin v}{\cos u \cos v}} \\
&= \frac{\frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} - \frac{\sin v \cos u}{\cos v \cos u}}{1 + \frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} \cdot \frac{\sin v \cos u}{\cos u \cos v}} \\
&= \frac{\frac{\sin u}{\cos u} - \frac{\sin v}{\cos v}}{1 + \frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{\sin v}{\cos v}} \\
&= \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}
\end{aligned}
$$

2.3.2 Skriv $\sin 3x$ utrykt ved $\sin x$

$$
\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x + x) \\
&= \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\
&= 2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x \\
&= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + ((1 - \sin^2 x) - \sin^2 x) \sin x \\
&= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x \\
&= 3 \sin x - 4 \sin^3 x
\end{aligned}
$$

2.4 Opgpave 11:

2.4.1 Lag linære modeller f(x) og g(x) for henholdsvis antall bensinbiler og antall elbiler i Norge, der x er antall år etter 1.1.2016

Ved regresjonsanalyse i geogebra får man:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -60082.2x + 1198697.6 \\
h(x) &= 60664.9 + 85182.2
\end{aligned}
$$

2.4.2 Hvis vi antar at modellene er gyldige noen år framover, i hvilket år vil vi for første gang ha flere elbiler enn bensinbiler i Norge?

$$
\begin{aligned}
g(x) &= h(x) \\
x &\approx 9.22 \\
&\text{i løpet av det niende året vil det være flere elbiler en bensinbiler}
\end{aligned}
$$

2.5 Oppgave 12:

2.5.1 Lag en modell $f(x)$ for befolknings årlige vekstfart

Modellen etter regersjonsanalyse som polynomfunksjon er:

$$g(x) = 287.87x^2 - 4380.35x + 30391.35$$

2.5.2 Hvor mange innbyggere var det i Norge 1.1.1976 ifølge modellen?

Først defineres en funksjon for befolkningsvekst ved å løse differensialigningen:

$$y' = g(x)$$

Dette gir at befolkningsveksten $f(x) = 95.96x^3 - 2190.17x^2 + 30391.35x + 3917773$

$$f(4) \approx 4010437$$

2.5.3 Hvilket år passerte folketallet 4,2 millioner ifølge modellen?

$f(x) = 0 \rightarrow x = 14.84$
Ifølge funksjonen passerer folketallet $4,2$ 14.84 år etter 1972

2.6 Oppgave 13: En fabrikk sliper ved uhel 500 kg gift i et tjern som inneholder $2 \cdot 10^10$ liter vann. Hver time renner det ut og inn 10^7

Giften i tjernet kan moduleres ved å bruke differensialigningen : $y' = \frac{-y \cdot 10^7}{2 \cdot 10^{10}}, \quad y(0) = 500$
Løsningen CAS gir er :

$$\begin{aligned} y = 500 \cdot e^{\frac{-x}{2000}} &= f(x) \\ f(x) &= 100 \\ x &\approx 3219 timer \\ 3219\, timer \div 24\, timer &\approx 129\, dager \end{aligned}$$

det vil ta ca 129 dager før giften er redusert til 100 kg

References