Eksamen MAT3056 matematikk R1 vår 2023

Del 1 – uten hjelpemidler – 1 time

Oppgave 1

Deriver funksjonen

$f(x) = e^x + \ln x$

Oppgave 2

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

Oppgave 3

Gitt tre punkt $A(1, 3)$, $B(4, 0)$ og $C(9, 4)$.

a) Bruk vektorregning til å avgjøre om $\angle CBA$ er mindre enn, lik eller større enn $90°$.

Et punkt P ligger på linjen som går gjennom B og C.

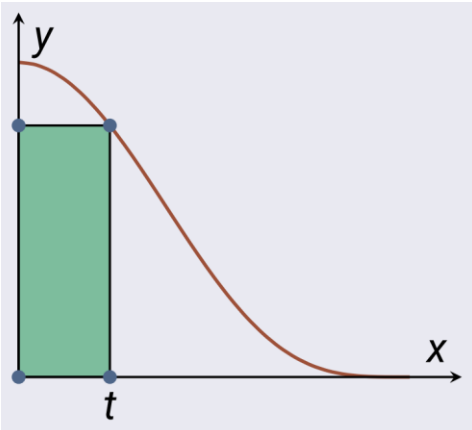
b) Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til punktet P slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$.

Oppgave 4

En elev har fått følgende oppgave:

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = (x^2 - 9)^4, \quad x \in \langle 0,3 \rangle$.

Et rektangel R har hjørner i $(0,0)$, $(t, 0)$, $\big(t, f(t)\big)$ og $\big(0, f(t)\big)$.



Bestem den verdien av t som gjør at R har størst areal.

For å løse oppgaven har eleven laget følgende program:

```
def A(x):
    return x*(x**2-9)**4

t = 0
d = 0.01

while A(t) < A(t+d):
    t = t + d

print(t)
```

a) Forklar strategien eleven har brukt for å løse oppgaven.

b) Løs oppgaven eleven har fått.

Del 2 – med hjelpemidler – 2 timer

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser timelønnen til en yrkesgruppe for noen år i perioden 2008–2022.

Årstall	2008	2010	2013	2015	2019	2022
Timelønn	272,55	285,50	307,30	314,00	327,60	340,10

a) Hva har den gjennomsnittlige årlige prosentvise veksten i lønn vært i årene 2008–2022?

b) Bruk tallene i tabell til å lage en eksponentialfunksjon g som er en modell for timelønnen til denne yrkesgruppen x år etter 2008.

Per og Amalie hadde begge en timelønn på 272,55 kroner i 2008. Per har hatt en lønnsutvikling tilsvarende tabellen i starten av oppgaven, mens Amalies lønn har steget med 2,3 prosent per år. De har begge jobbet 1700 timer per år.

c) Bestem den samlede lønnen til Amalie i årene 2008 til 2022. Bestem også den samlede lønnen til Per i disse årene.

Fagforeningen til Per krever at han i 2025 skal ha samme timelønn som Amalie. Vi går ut fra at Amalie fortsatt vil ha en lønnsvekst på 2,3 prosent per år.

d) Hvor mange prosent må lønnen til Per gå opp hvert år dersom dette kravet skal innfris?

Oppgave 2

Vi har gitt punktet $A(3, 2)$. Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$\vec{u} = [4, 3] \text{ og } \vec{v} = [2t, 5t]$$

Et parallellogram $ABCD$ er bestemt ved at $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

a) Bestem koordinatene til B og koordinatene til C og D uttrykt ved t.

b) Bestem t slik at skjæringspunktet mellom diagonalene i parallellogrammet blir $P(8, 11)$.

Oppgave 3

Nedenfor ser du tre påstander. Avgjør i hvert tilfelle om påstanden er sann eller usann. Husk å vise tydelig hvordan du argumenterer og resonnerer.

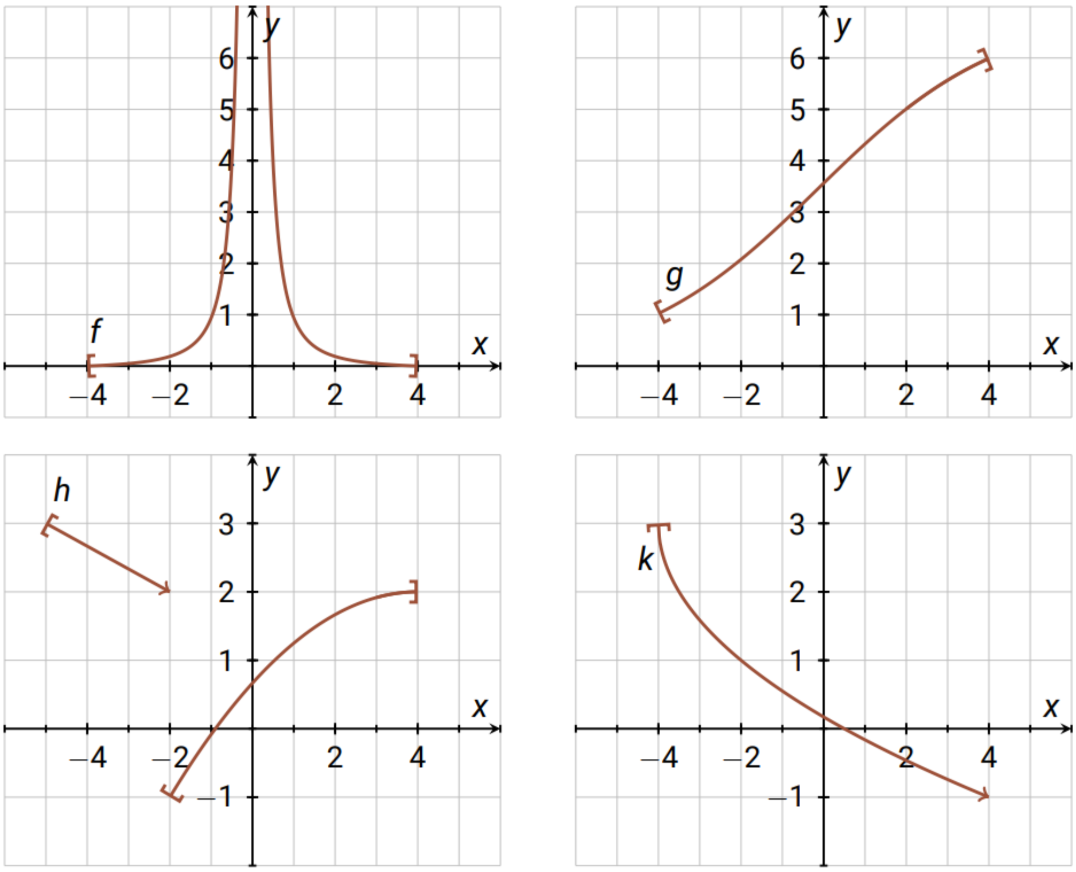
a) Hvis $x > 0$, så er $(\ln x)^4 = 4\ln x$.

b) Alle fjerdegradsfunksjoner må ha minst ett ekstremalpunkt.

c) For at en funksjon skal ha en omvendt funksjon, må funksjonen være enten strengt voksende eller strengt avtakende.

Oppgave 4

Nedenfor har vi tegnet grafene til fire funksjoner f, g, h og k.



a) Avgjør og begrunn i hvert tilfelle om funksjonen har en omvendt funksjon.

b) Bestem definisjonsmengden til den omvendte funksjonen i de tilfellene der den finnes.

Oppgave 5

Sammenhengen mellom lydstyrken L (målt i dB) og lydintensiteten I (målt i $\mathrm{W/m^2}$) er gitt ved

$$L = 120 + 10 \cdot \lg I$$

Menneskets øre har en smertegrense for lydstyrke som ligger omkring 130 dB.

a) Bestem lydintensiteten når lydstyrken er 130 dB.

b) Hvor mange prosent øker lydintensiteten dersom lydstyrken øker med 2 dB?

Dersom effekten til lyden som sendes ut fra en lydkilde er E, vil lydintensiteten I på en avstand r (målt i m) fra denne lydkilden være

$$I = \frac{E}{4\pi r^2}$$

Lydstyrken fra et fly er 140 dB dersom du er 50 m fra flyet.

c) Bestem den minste avstanden til dette flyet der lydstyrken er lavere enn 130 dB.

Oppgave 6

En linje ℓ går gjennom punktene $A(4, -2)$ og $B(6, 6)$.

a) Bestem den eksakte avstanden fra punktet $P(2, 8)$ til linjen ℓ.

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x$$

b) Bestem den eksakte verdien for den minste avstanden mellom grafen til f og linjen ℓ.

Oppgave 7

I denne oppgaven skal du bruke algoritmen nedenfor til å finne en tilnærmet verdi for gjennomsnittet til en funksjon i et intervall $[a, b]$.

> Algoritme:
>
> Velg $N + 1$ tall jevnt fordelt i intervallet $[a, b]$.
>
> La $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ være disse tallene.
>
> Avstanden mellom et av tallene og det neste er da $\frac{b-a}{N}$.
>
> Regn ut gjennomsnittet g av tallene $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$.
>
> Da er g en god tilnærmet verdi for gjennomsnittet til f i $[a, b]$.
>
> Denne tilnærmingen blir bedre dess større N er.

Lag et program som du kan bruke til å bestemme gjennomsnittet til funksjonen g gitt ved

$f(x) = \sqrt{x}$

i intervallet $[0, 1]$. Hva blir dette gjennomsnittet?

Kilder for bilder, tegninger osv.

Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet