Eksamen REA3056 matematikk R1 vår 2022

Del 1 – uten hjelpemidler – 1 time

Oppgave 1

Deriver funksjonene.

a) $f(x) = x^3 + \ln x$

Løsning

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

b) $g(x) = x \cdot e^{2x}$

Løsning

Her bruker vi kjerneregelen for derivasjon kombinert med produktregelen.

Vi setter $u = 2x$ og får $u' = 2$.

$$g'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(1 + 2x)$$

Oppgave 2

Løs likningen

$$e^{2x} - e^x = 2$$

Løsning

$$(e^x)^2 - (e^x) - 2 = 0$$

$$e^x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$e^x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$e^x = 2 \quad \vee \quad e^x = -1$ (ingen løsning)

$$\ln(e^x) = \ln 2$$

$$x = \ln 2$$

Oppgave 3

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2+x-12}$$

Løsning

Når x går mot 3, går både telleren og nevneren mot 0. Dette betyr at vi kan faktorisere og forkorte, og vi får

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2+x-12} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{3+4} = \frac{1}{7}$$

Oppgave 4

Vi har tre punkter $A(1{,}2), B(-1{,}5)$ og $C(t, 4)$ der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem t slik at $\angle BAC = 90°$.

Løsning

Hvis $\angle BAC = 90°$, må $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{BA} = [1-(-1), 2-5] = [2, -3]$

$\overrightarrow{AC} = [t-1{,}4-2] = [t-1{,}2]$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ [2, -3] \cdot [t-1{,}2] &= 0 \\ 2(t-1) + (-3) \cdot 2 &= 0 \\ 2t - 2 - 6 &= 0 \\ 2t &= 8 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

Hvis $t = 4$, er $\angle BAC = 90°$.

b) Bestem t slik at A, B og C ligger på en rett linje.

Løsning

Hvis A, B og C skal ligge på ei rett linje, må det finnes et tall, k, slik at $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$

$[-1-1{,}5-2] = k[t-(-1), 4-5]$

$[-2, 3] = k[t+1, -1]$

$-2 = k(t+1)$ og $3 = k \cdot (-1)$

$k = -3$

$-2 = -3(t+1)$

$-2 = -3t - 3$

$3t = -1$

$t = -\frac{1}{3}$

Dersom $t = -\frac{1}{3}$, vil A, B og C ligge på ei rett linje.

Oppgave 5

En elev har skrevet programkoden nedenfor.

```
def f(x):
    return x/(1+x**2)    #Definerer funksjonen f(x)=x/(1+x^2)

x = 0
h = 0.001
while f(x) <= f(x+h):
    x = x+h

print(x)
```

a) Forklar hva som skjer når programmet kjøres. Hva ønsker eleven å finne ut?

Løsning

Når programmet kjøres, vil en funksjon $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ defineres fra start. Deretter settes variabelen x lik 0 og variabelen $h = 0{,}001$. Så kjøres ei while-løkke som for hver gjennomgang øker verdien av x med verdien av h, det vil si med 0,001. Løkka kjører så lenge $f(x)$ er mindre enn eller lik $f(x+h)$. Til slutt skrives den endelige verdien av x på skjermen.

Programmet øker x-verdien jevnt, og eleven ønsker med dette å finne ut hvilken x-verdi som gjør at en funksjonsverdi ikke lenger er mindre enn eller lik den funksjonsverdien vi får hvis vi setter inn en x-verdi som er litt større. Dette vil gi x-verdien til det punktet der grafen går fra å være stigende til enten å flate ut eller bli synkende. Eleven ønsker altså å finne en tilnærmet x-verdi til funksjonens toppunkt.

b) Gjør nødvendige beregninger, og bestem svaret som eleven ønsker å finne.

Løsning

Den deriverte i toppunktet er lik 0. Vi kan derfor finne x-verdien til toppunktet ved å løse en likning:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

$$1-x^2=0$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

Vi ser at $f(x)$ har ekstremalpunkter for $x=-1$ og for $x=1$. $f(-1)=-\frac{1}{2}$ og $f(1)=\frac{1}{2}$, noe som betyr at f har toppunkt for $x=1$. Dette kan vi si siden funksjonen eksisterer og er kontinuerlig for alle x-verdiene mellom de to ekstremalpunktene. Programmet vil derfor gi 1 som resultat og skrive dette ved programslutt.

Del 2 – med hjelpemidler – 4 timer

Oppgave 1

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 2 \\ x - t, \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Bestem tallet t slik at f blir en kontinuerlig funksjon. Husk å begrunne svaret.

Løsning

f er en funksjon med delt forskrift. Dette betyr at funksjonsuttrykket $x^2 + 1$ gjelder når $x < 2$, mens funksjonsuttrykket $x - t$ gjelder når $x \geq 2$. Hvis f skal være en kontinuerlig funksjon, må grenseverdiene til de to delene av funksjonen gå mot samme verdi der funksjonen skifter uttrykk, det vil si når x går mot 2.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$$

Hvis f skal være en kontinuerlig funksjon, må også $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$.

$2 - t = 5$

$t = -3$

Hvis tallet $t = -3$, er f en kontinuerlig funksjon. Funksjonen f vil da være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 2 \\ x + 3, \quad x \geq 2 \end{cases}$$

b) Avgjør om f er deriverbar i $x = 2$ for den verdien av t du fant i oppgave a).

Løsning

Hvis f skal være deriverbar, må $f'(x)$ eksistere i punktet $x = 2$, og vi må derfor ha at

$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} f'(x)$

$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x = 2 \cdot 2 = 4$

$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$

f er ikke deriverbar i $x = 2$ når $t = -3$.

Oppgave 2

For vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$.

Vi lar $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{v} = \vec{a} - 6\vec{b}$.

a) Bestem lengden av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Løsning

Vi bruker CAS og lager variablene a for $|\vec{a}|$, b for $|\vec{b}|$ og ab for $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Vi har at

$$|\vec{u}| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{a} - 6\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - 6\vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2 \cdot 6 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + (-6|\vec{b}|)^2}$$

1 $a := 2$
→ $a := 2$
2 $b := 3$
→ $b := 3$
3 $ab := -3$
→ $ab := -3$
4 $u := \sqrt{a^2 + 2\,ab + b^2}$
→ $u := \sqrt{7}$
5 $v := \sqrt{a^2 - 2 \cdot 6\,ab + (-6\,b)^2}$
→ $v := 2\sqrt{91}$

Vi får at $|\vec{u}| = \sqrt{7}$, og $|\vec{v}| = 2\sqrt{91}$.

b) Bestem vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Løsning

Vi har at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 6\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} - 6 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 6 \cdot |\vec{b}|^2$$

Da kan vi sette opp skalarproduktet mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som en likning i CAS og løse for vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$$uv := a^2 - 6\,ab + ab - 6\,b^2$$
$$\rightarrow\ \mathbf{uv := -35}$$

$$\text{Løs}(uv\ = u\ v\ \cos(x^\circ), 0 \le x \le 180)$$
$$\rightarrow \left\{ x = \frac{90\,\pi + 180\,\sin^{-1}\left(5 \cdot \frac{\sqrt{13}}{26}\right)}{\pi} \right\}$$

$$\$7$$
$$\approx \{x = 133.9\}$$

Vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er 133,9°.

Oppgave 3

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x$$

Bestem det største intervallet $I = [a, b]$ slik at $1 \in I$ og f har en omvendt funksjon når I er definisjonsmengden til f.

Løsning

En funksjon har en omvendt funksjon hvis den vokser i hele sitt definisjonsområde, eller at den avtar i hele sitt definisjonsområde.

Alternativ 1: Vi finner de stasjonære punktene og avgjør hva slags type stasjonære punkter det er.

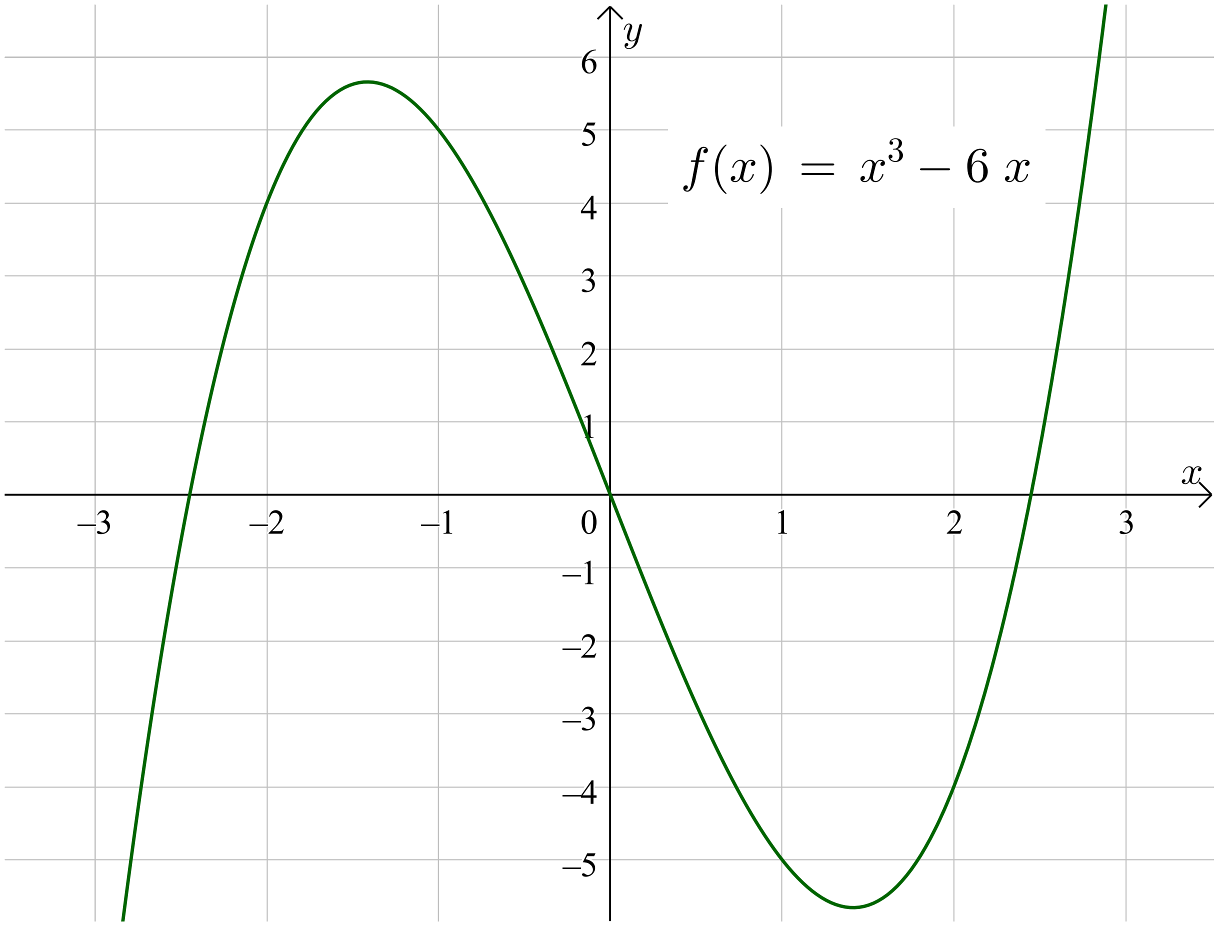
$$f(x) := x^3 - 6\,x$$
$$\rightarrow\ f(x) := x^3 - 6\,x$$

$$f'(x)\ = 0$$
$$\text{Løs: } \left\{x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}\right\}$$

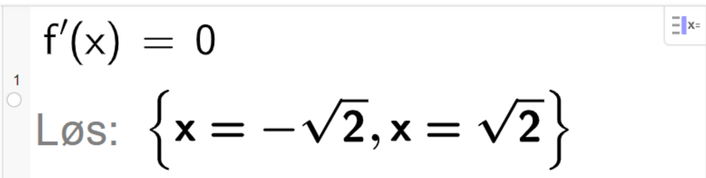
$$\{f'(-2), f'(0), f'(2)\}$$
$$\rightarrow\ \{6, -6, 6\}$$

Vi har stasjonære punkter i $-\sqrt{2}$ og $\sqrt{2}$. Intervallet mellom disse to inneholder 1. Den deriverte skifter ikke fortegn mellom punktene. Derfor er det største intervallet som inneholder 1 f kan ha for å ha en omvendt funksjon, intervallet $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Alternativ 2: Funksjonen f er en tredjegradsfunksjon, og hvis vi tegner grafen til f, ser vi at den har et toppunkt og et bunnpunkt, noe som betyr at den vokser, avtar og vokser.



Hvis f likevel skal ha en omvendt funksjon, må vi velge et definisjonsområde som gjør at f enten kun vokser eller kun avtar i hele definisjonsområdet. Siden det er et krav at $x = 1$ skal være element i definisjonsmengden til f, ser vi ut fra grafen at definisjonsområdet må være mellom x-verdien til toppunktet og x-verdien til bunnpunktet. Vi må derfor finne disse x-verdiene, og vi bruker da at den deriverte i topp- og bunnpunkt er lik 0.



Det største intervallet $I = [a, b]$ som er slik at $1 \in I$ og f har en omvendt funksjon når I er definisjonsmengden til f, vil være $I = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Oppgave 4

Ifølge Newtons avkjølingslov vil temperaturen T til et objekt etter t minutter være gitt ved

$$\ln(T - T_0) = -k \cdot t + r$$

hvor T_0 er romtemperaturen, og der k og r er konstanter.

I et rom med temperatur 22 °C setter vi en kopp med kaffe. Ved tidspunktet $t = 0$ er temperaturen i kaffen 82 °C. Etter 2 minutter er temperaturen 66 °C.

Hvor lang tid tar det før temperaturen i kaffen er mindre enn 40 °C?

Løsning

Vi setter inn for $t = 0$ og finner konstanten r:

$$\ln(T - T_0) = -k \cdot t + r$$

$$\ln(82 - 22) = -k \cdot 0 + r$$

$$r = \ln 60$$

Vi setter inn for $t = 2$ og finner konstanten k:

$$\ln(T - T_0) = -k \cdot t + r$$

$$\ln(66 - 22) = -k \cdot 2 + \ln 60$$

$$2k = \ln 60 - \ln 44$$

$$k = \frac{1}{2}(\ln 60 - \ln 44)$$

Vi løser så likning i CAS for å finne ut hvor lang tid det tar før temperaturen i kaffen er 40 grader:

1 $\ln(40 - 22) = -\frac{1}{2}(\ln(60) - \ln(44))\, t + \ln(60)$

Løs: $\left\{ t = \frac{2\ \ln(3) - \ln(4) - 2\ \ln(5)}{\ln(11) - \ln(3) - \ln(5)} \right\}$

2 \$1

$\approx \{t = 7.764\}$

Det tar cirka 7,8 minutter før temperaturen i kaffen er under 40 grader.

Oppgave 5

Gitt tre punkter $A(a, b), B(c, d)$ og $C(e, f)$.

a) Beskriv en algoritme som du kan bruke til å avgjøre om ΔABD er en rettvinklet trekant.

Løsning

Vi kan bruke skalarprodukt for å avgjøre om en trekant er rettvinklet. Hvis skalarproduktet mellom to av vektorene som spenner ut trekanten, er lik 0, er trekanten rettvinklet.

Algoritme:

- Bestem koordinatene til $\overrightarrow{AB}$ ved $x_{AB} = c - a$ og $y_{AB} = d - b$.
- Bestem koordinatene til $\overrightarrow{BC}$ ved $x_{BC} = e - c$ og $y_{BC} = f - d$.
- Bestem koordinatene til $\overrightarrow{AC}$ ved $x_{AC} = e - a$ og $y_{AC} = e - b$.
- Beregn skalarproduktet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Beregn skalarproduktet $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- Beregn skalarproduktet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Test om ett av skalarproduktene er lik 0 ved hjelp av if-test.
- Hvis ett av skalarproduktene er lik 0, angir programmet at trekanten er rettvinklet.
- Hvis ingen av skalarproduktene er lik 0, angir programmet at trekanten ikke er rettvinklet.

b) Skriv en kode basert på algoritmen du beskrev i oppgave a). Input skal være koordinatene a, b, c, d, e og f. Output skal være en av følgende tekster:

- Punktene danner en rettvinklet trekant.
- Punktene danner ikke en rettvinklet trekant.

Løsning

```
a = 1
b = 1
c = 6
d = 1
e = 6
f = 5
            # regner ut vektorkoordinatene
xAB = c - a
yAB = d - b
xBC = e - c
yBC = f - d
xAC = e - a
yAC = f - b

            # beregner skalarproduktene
skalarABxBC = xAB*xBC + yAB*yBC
skalarBCxAC = xBC*xAC + yBC*yAC
skalarABxAC = xAB*xAC + yAB*yAC
            # tester om skalarproduktene er 0
if skalarABxBC == 0 or skalarBCxAC == 0 or skalarABxAC == 0:
    print("Punktene danner en rettvinklet trekant.")
else:
    print("Punktene danner ikke en rettvinklet trekant.")

```

Oppgave 6

En funksjon g er gitt ved

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

Et punkt $P(s, g(s))$ ligger på grafen til g, der $s \in \langle 1,5 \rangle$.

Punktene $A(1,0)$, $B(s, 0)$ og $P(s, g(s))$ danner en trekant ABP.

Bestem den eksakte verdien av s som gir det største arealet til trekanten.

Hvor stort er dette arealet?

Løsning

Vi ser at punkt A er endelig gitt, og at punktet ligger på x-aksen.

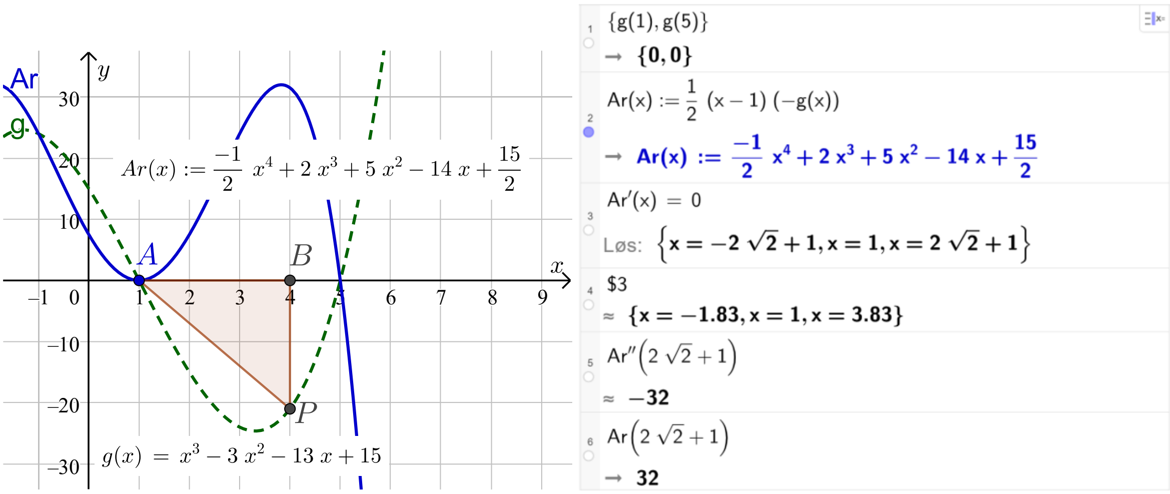
Punkt B har s som x-verdi, men dette punktet vil også alltid ligge på x-aksen, siden y-verdien er lik 0.

Punkt P har samme x-koordinat som punkt B, og siden y-koordinaten for punkt P er $g(s)$, vil punkt P følge grafen til g, og trekant ABP vil derfor alltid være en rettvinklet trekant med AB og BP som katetene i trekanten.

Alternativ 1

Vi starter med å skrive inn funksjon g(x) (den stiplede grafen på bildet nedenfor) og de tre punktene A, B og P i algebrafeltet. Vi har valgt $s = 4$. Det ser ut som $g(x) \leq 0$ i intervallet $[1,5]$, men vi kontrollerer det i linje 1 i CAS-utklippet. Så bruker vi formelen for arealet til en trekant og lager arealfunksjonen $Ar(x)$ (blå graf på bildet nedenfor) ut ifra at arealet av trekanten er $\frac{1}{2}AB \cdot BP$ der $AB = x - 1$ og $BP = -g(x)$. Punktet B har koordinatene $(x, 0)$. Vi finner de stasjonære punktene til arealfunksjonen i linje 3 og bruker dobbeltderiverttesten i linje 5 for å kontrollere at den tredje løsningen i linje 3 gir et toppunkt.

Trekanten BAP får størst areal når $s = 2\sqrt{2} + 1$, og da er arealet 32.



Alternativ 2

Vi starter med å definere funksjon g(x) i CAS. Deretter beregner vi vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BP}$ ut ifra at

$A = (1,0), B = (s, 0)$ og $P = (s, g(s))$.

Vi finner så en funksjon $Ar(x)$ for arealet av trekanten ved å multiplisere lengden av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BP}$ og dele på 2 (linje 4). Vi bruker funksjonen «abs» for å angi lengden av vektorene. Vi finner de stasjonære punktene til arealfunksjonen i linje 5 og bruker dobbeltderiverttesten i linje 6 for å kontrollere at den andre løsningen i linje 5 gir et toppunkt.

Trekanten BAP får størst areal når $s = 2\sqrt{2} + 1$, og da er arealet 32.

1 $g(x) := x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

$\rightarrow$ $g(x) := x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

2 $AB := \text{Vektor}((1, 0), (s, 0))$

$\rightarrow$ $AB := \begin{pmatrix} s - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 $BP := \text{Vektor}((s, 0), (s, g(s)))$

$\rightarrow$ $BP := \begin{pmatrix} 0 \\ s^3 - 3s^2 - 13s + 15 \end{pmatrix}$

4 $Ar(s) := \frac{1}{2} |AB| \, |BP|$

$\rightarrow$ $Ar(s) := \frac{1}{2} |s - 1| \, |s^3 - 3s^2 - 13s + 15|$

5 $Ar'(s) = 0$

Løs: $\left\{s = -2\sqrt{2} + 1, s = 2\sqrt{2} + 1\right\}$

6 $Ar''\left(2\sqrt{2} + 1\right)$

≈ -32

7 $Ar\left(2\sqrt{2} + 1\right)$

$\rightarrow$ 32

Oppgave 7

Båten til en pirat kjører med konstant fart. Posisjonen $\vec{r_1}$ til båten etter t timer er

$$\vec{r_1}(t) = [2 + 24t, 4 + 20t]$$

Enhetene langs aksene er kilometer.

a) Hvor stor er banefarten til båten?

Løsning

Vi finner fartsvektoren ved å derivere posisjonsvektoren:

$$\vec{v_1}(t) = \vec{r_1}'(t)$$

$$\vec{v_1}(t) = [24,20]$$

Vi finner banefarten ved å bestemme absoluttverdien av fartsvektoren:

1 $\text{Banefart} := \sqrt{24^2 + 20^2}$

$\rightarrow$ $\text{Banefart} := 4\sqrt{61}$

2 $\$1$

≈ 31.24

Eksakt verdi for banefarten er $4\sqrt{61}$ km/h, som gir en tilnærmet verdi på 31,24 km/h.

Politiet ønsker å stoppe piraten. Samtidig som piraten er i punktet $(2,4)$, starter en politibåt sin jakt. Politibåten starter i punktet $(0,10)$ og holder konstant fart langs en rett linje. Posisjonen $\vec{r_2}$ til politibåten er

$$\vec{r_2}(t) = [26t, 10 - 22t]$$

b) Undersøk om politiet vil møte piraten.

Løsning

Hvis politiet møter piraten, må politiet og piraten ha de samme koordinatene til samme tid.

3
$$26t = 2 + 24t$$
Løs: $\{t = 1\}$

4
$$10 - 22t = 4 + 20t$$
Løs: $\left\{t = \frac{1}{7}\right\}$

Vi ser at politiet og piraten ikke vil være i det samme punktet til samme tid, og politiet vil derfor ikke møte piraten.

En annen politibåt starter også i $(0,10)$. Denne båten holder også konstant fart.

c) Hvor stor må banefarten til denne båten være dersom de skal treffe piraten i punktet $(8,9)$?

Løsning

Denne politibåten har følgende posisjonsvektor: $\vec{r_3}(t) = [at, 10 - bt]$, der a og b vil være koordinatene til fartsvektoren til denne politibåten.

Vi finner først hvor lang tid det tar før piraten er i punktet (8,9):

5
$$2 + 24t = 8$$
Løs: $\left\{t = \frac{1}{4}\right\}$

6
$$4 + 20t = 9$$
Løs: $\left\{t = \frac{1}{4}\right\}$

Vi vet nå at piraten er i punkt (8,9) etter $\frac{1}{4}$ time, og vi kan finne hva a og b må være ved å sette inn $t = \frac{1}{4}$ i $\vec{r_3}(t) = [at, 10 - bt]$, sette $x = 8$ og $y = 9$ og løse likningssettet.

7
$$a \cdot \frac{1}{4} = 8$$
Løs: $\{a = 32\}$

8
$$10 - b \cdot \frac{1}{4} = 9$$
Løs: $\{b = 4\}$

Posisjonsvektoren til den andre politibåten blir ut fra dette $\vec{r_3}(t) = [32t, 10 - 4t]$, og vi kan finne fartsvektoren ved å derivere posisjonsvektoren:

$$\vec{v_3}(t) = \vec{r_3}'(t) = [32, -4]$$

Banefarten til den andre politibåten er absoluttverdien av fartsvektoren:

9 $\text{Banefart}_3 = \sqrt{32^2 + (-4)^2}$

$\rightarrow$ $\mathbf{Banefart_3 = 4\sqrt{65}}$

10 $9

$\approx$ $\mathbf{Banefart_3 = 32.25}$

Dersom den andre politibåten skal treffe piraten i punktet (8,9), må den eksakte banefarten være $4\sqrt{65}$ km/h, som tilnærmet er 32,25 km/h.

Oppgave 8

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 3$$

$$g(x) = 2x + 3$$

a) Vis at grafene til de to funksjonene tangerer hverandre i ett punkt og skjærer hverandre i et annet punkt.

Løsning

Vi finner først eventuelle felles punkter for grafene til f og g, og deretter undersøker vi om punktene eventuelt er tangeringspunkter.

1 $f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 2x + 3$

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 2x + 3}$

2 $g(x) := 2x + 3$

$\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := 2x + 3}$

3 $f(x) = g(x)$

Løs: $\{\mathbf{x = 0, x = 3}\}$

4 Tangent((0, f(0)), f)

$\rightarrow$ $\mathbf{y = 2x + 3}$

5 Tangent((3, f(3)), f)

$\rightarrow$ $\mathbf{y = 20x - 51}$

Vi ser at funksjonene har to felles punkter, $(0, g(0)) = (0{,}3)$ og $(3, g(0)) = (3{,}9)$. Punktet $(0{,}0)$ er et tangeringspunkt siden tangenten er lik $g(x)$, mens punktet $(3{,}9)$ er et skjæringspunkt siden tangenten ikke er lik $g(x)$.

Einar og Lise har jobbet med slike funksjoner. De påstår å ha funnet en sammenheng:

Dersom $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ og $G(x) = cx + d$, så vil grafene til F og G tangere hverandre.

b) Avgjør om det Einar og Lise har kommet fram til, kan stemme.

Løsning

$F(x)$ er en tredjegradsfunksjon, mens $G(x)$ er en lineær funksjon som har en rettlinjet graf. Hvis grafene til F og G tangerer hverandre, vil tangenten til F i dette punktet ha samme funksjonsuttrykk som $G(x)$, noe som betyr at tangenten til F er grafen til G i et gitt punkt.

I et tangeringspunkt eller skjæringspunkt er $F(x) = G(x)$:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = cx + d$$

$$ax^3 + bx^2 = 0$$

$$x^2(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x = -\frac{b}{a}$$

Vi bestemmer likningen til tangenten til F i punktet $\big(0, F(0)\big) = (0, d)$:

$$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$F'(0) = c$$

Stigningstallet til tangenten til F i punktet $(0, c)$ er c, og når vi har et punkt og stigningstallet, kan vi sette opp funksjonsuttrykket til tangenten:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y - d = c(x - 0)$$

$$y = cx + d$$

Vi har vist at likningen til tangenten til F i punktet $(0, F(0))$ er lik $G(x)$. Dette betyr at grafene tangerer hverandre.

Oppgaven kan også løses med CAS:

1. $F(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

   $\rightarrow \; \mathbf{F(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$

2. $G(x) := c\,x + d$

   $\rightarrow \; \mathbf{G(x) := c\,x + d}$

3. $F(x) = G(x)$

   Løs: $\left\{\mathbf{x = \frac{-b}{a}, x = 0}\right\}$

4. $\text{Tangent}(0, F)$

   $\rightarrow \; \mathbf{y = c\,x + d}$

5. $\text{Tangent}\left(-\frac{b}{a}, F\right)$

   $\rightarrow \; \mathbf{y = \frac{a^2\,c\,x + a^2\,d + a\,b^2\,x + b^3}{a^2}}$

Lise har funnet en sammenheng mellom x-koordinaten til vendepunktet til F og x-koordinaten til skjæringspunktet mellom grafene til F og G.

c) Hvilken sammenheng kan Lise ha funnet?
Begrunn at denne sammenhengen stemmer.

Løsning

Vendepunktet til en funksjon er for den x-verdien som gir $F''(x) = 0$.

$$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$F''(x) = 6ax + 2b$$

$$0 = 6ax + 2b$$

$$6ax = -2b$$

$$x = -\frac{2b}{6a}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)$$

Vi fant i b) to felles punkter for F og G, $\left(0, G(0)\right)$ og $\left(-\frac{b}{a}, G\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$. Det første punktet har vi vist er et tangeringspunkt. Da må det andre punktet være et skjæringspunkt der grafene krysser hverandre.

Vi ser at x-koordinaten til vendepunktet vil være $\frac{1}{3}$ av verdien til x-koordinaten til skjæringspunktet, og vi antar at det er denne sammenhengen Lise har funnet.

Kilder for bilder, tegninger osv.

Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet eller NDLA