Eksamen MAT3056 matematikk R1 vår 2023

Del 1 – uten hjelpemidler – 1 time

Oppgave 1

Deriver funksjonen

$f(x) = e^x + \ln x$

Løsning

$f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

Oppgave 2

Bestem grenseverdien

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

Løsning

Når $x \to 2$, går både telleren og nevneren mot 0. Vi må faktorisere for å finne grenseverdien. Nevneren kan faktoriseres ved hjelp av konjugatsetningen, og vi ser at $(x-2)$ er en faktor av telleren siden $x = 2$ gjør at telleren blir 0.

$$
\begin{array}{l}
\quad x^3 - 8 : (x-2) = x^2 + 2x + 4 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 8 \\
\quad\ \ \underline{-(2x^2 - 4x)} \\
\qquad\qquad\quad 4x - 8 \\
\qquad\qquad \underline{-(4x - 8)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)} = \frac{(2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}{(2+2)} = \frac{12}{4} = 3$$

Grenseverdien er 3.

Oppgave 3

Gitt tre punkt $A(1,3), B(4,0)$ og $C(9,4)$.

a) Bruk vektorregning til å avgjøre om $\angle CBA$ er mindre enn, lik eller større enn $90°$.

Løsning

Vi kan avgjøre om en vinkel er 90° ved hjelp av skalarproduktet av vektorene som danner vinkelen. Hvis skalarproduktet er lik 0, er vinkelen 90°. Hvis skalarproduktet er negativt, er vinkelen større enn 90°. Hvis skalarproduktet er positivt, er vinkelen mindre enn 90°.

$\overrightarrow{BC} = [9-4\,,4-0] = [5\,,4]$

$\overrightarrow{BA} = [1-4\,,3-0] = [-3\,,3]$

$[5\,,4] \cdot [-3\,,3] = 5 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 = -15 + 12 = -3.$

Skalarproduktet kan også skrives som $\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \cos(\angle CBA)$. Siden skalarproduktet er negativt, må cosinus være negativ, noe som betyr at $\angle CBA$ er større enn 90°.

Et punkt P ligger på linjen som går gjennom B og C.

b) Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til punktet P slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$.

Løsning

Hvis punktet P ligger på linja som går gjennom B og C, kan punktet P uttrykkes ved hjelp av parameterframstillingen til denne linja, som vi kaller ℓ.

Vi bruker punktet $B(4,0)$ og $\vec{r} = \overrightarrow{BC} = [5\,,4]$ og finner parameterframstillingen for linja:

$\ell\colon \begin{cases} 4+5t \\ 4t \end{cases}$

Dette gir at $P = (4+5t\,,4t)$.

Hvis $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$, må $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

$\overrightarrow{AB} = [4-1\,,0-3] = [3\,,-3]$

$\overrightarrow{AP} = [4+5t-1\,,4t-3] = [3+5t\,,4t-3]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$[3\,,-3] \cdot [3+5t\,,4t-3] = 0$

$9 + 15t - 12t + 9 = 0$

$3t = -18$

$t = -6$

Hvis $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$, blir koordinatene til punktet P som følger:

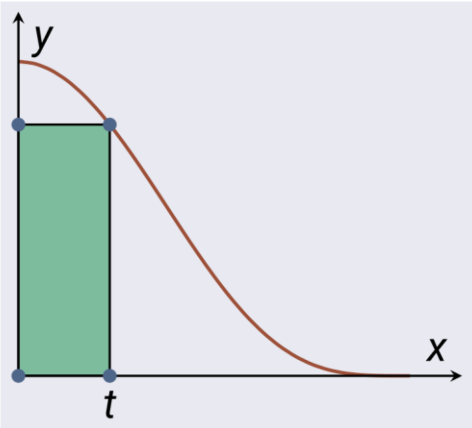
$P = (4+5t\,,4t) = (4+5\cdot(-6), 4\cdot(-6)) = (-26,\ -24)$

Oppgave 4

En elev har fått følgende oppgave:

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = (x^2 - 9)^4, \quad x \in \langle 0,3 \rangle$.

Et rektangel R har hjørner i $(0,0)$, $(t,0)$, $\big(t, f(t)\big)$ og $\big(0, f(t)\big)$.



Bestem den verdien av t som gjør at R har størst areal.

For å løse oppgaven har eleven laget følgende program:

```
def A(x):
    return x*(x**2-9)**4

t = 0
d = 0.01

while A(t) < A(t+d):
    t = t + d

print(t)
```

a) Forklar strategien eleven har brukt for å løse oppgaven.

Løsning

Funksjonen $f(x) = (x^2 - 9)^4$ er en funksjon der x angir bredden i et rektangel, mens $f(x)$ angir høyden i det samme rektangelet. Eleven definerer en funksjon $A(x) = x \cdot f(x)$ i starten av programmet. Denne funksjonen gir arealet av rektangelet ut fra det vi har sagt om at x angir bredden og $f(x)$ angir høyden. Deretter settes variabelen `t` lik 0 og variabelen `d` lik 0,01.

Strategien er at programmet skal beregne arealer for ulike verdier av `x`, og at `x` øker med 0,01 for hver «runde» i while-løkka. Løkka gjentas så lenge $A(t) < A(t + d)$. Når denne betingelsen er oppnådd, har t den verdien som gir størst areal, det vil si at vi har passert toppunktet for grafen til A.

b) Løs oppgaven eleven har fått.

Løsning

En funksjon har sin største verdi når den deriverte er lik 0. Vi deriverer $A(x)$ ved å bruke kjerneregelen.

$$A(x) = x \cdot (x^2 - 9)^4$$

$A'(x) = 1 \cdot (x^2 - 9)^4 + x \cdot 4(x^2 - 9)^3 \cdot 2x$

$= (x^2 - 9)^4 + 8x^2(x^2 - 9)^3$

$= (x^2 - 9)^3(x^2 - 9 + 8x^2)$

$= (x^2 - 9)^3(9x^2 - 9)$

$= 9(x^2 - 9)^3(x^2 - 1)$

$A'(x) = 0$

$9(x^2 - 9)^3(x^2 - 1) = 0$

$9(x^2 - 9)^3 = 0$ eller $(x^2 - 1) = 0$

$x = 3$ eller $x = -3$ eller $x = 1$ eller $x = -1$.

Siden x angir bredden av rektangelet, er det kun de positive verdiene som er gyldige. $x = 3$ er heller ikke gyldig, da denne verdien er utenfor definisjonsområdet.

Den verdien av t som gjør at R har størst areal, er $t = 1$.

Del 2 – med hjelpemidler – 2 timer

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser timelønnen til en yrkesgruppe for noen år i perioden 2008–2022.

Årstall	2008	2010	2013	2015	2019	2022
Timelønn	272,55	285,50	307,30	314,00	327,60	340,10

a) Hva har den gjennomsnittlige årlige prosentvise veksten i lønn vært i årene 2008–2022?

Løsning

Fra 2008 til 2022 er en periode på 14 år. I denne perioden endrer timelønna seg fra 272,55 kr til 340,10 kr. For å bestemme gjennomsnittlig prosentvis vekst per år bestemmer vi først vekstfaktoren ut fra følgende likning:

$$272{,}55 \cdot x^{14} = 340{,}10$$

Vi løser likningen i CAS:

1 $272.55 \cdot x^{14} = 340.10$

NLøs: $\{x = -1.0159, x = 1.0159\}$

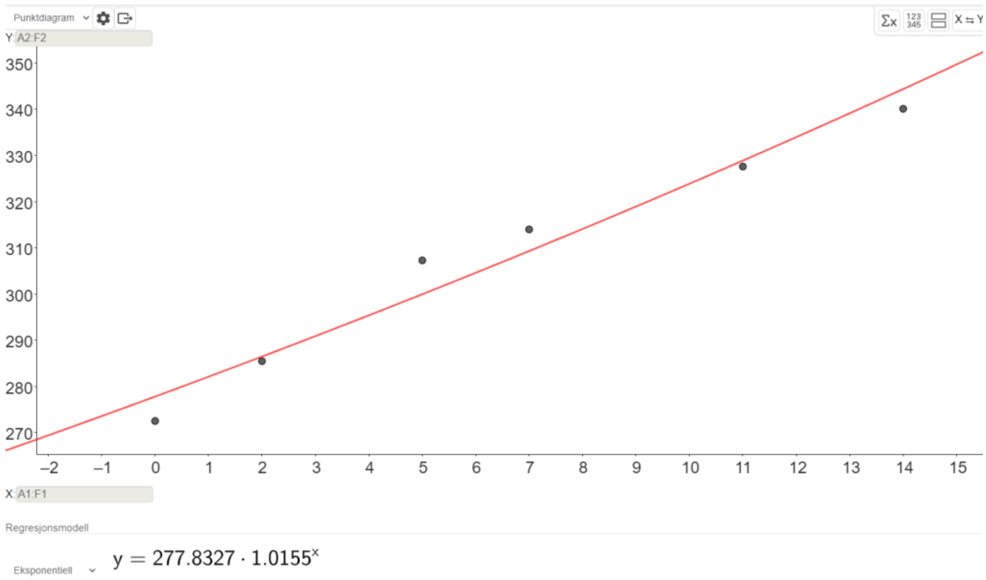
En vekstfaktor på 1,015 9 tilsvarer en årlig prosentvis vekst i lønn på 1,59 %.

b) Bruk tallene i tabell til å lage en eksponentialfunksjon g som er en modell for timelønnen til denne yrkesgruppen x år etter 2008.

Løsning

Vi gjennomfører eksponentiell regresjon i GeoGebra. Vi skriver inn alle tallene i tabellen i regnearket, og vi får eksponentialfunksjonen under:

0	2	5	7	11	14
272.55	285.5	307.3	314	327.6	340.1



Vi ser at eksponentiell regresjon i GeoGebra gir tilnærmet samme funksjonsuttrykk:

$g(x) = 277{,}83 \cdot 1.0155^x$

Per og Amalie hadde begge en timelønn på 272,55 kroner i 2008. Per har hatt en lønnsutvikling tilsvarende tabellen i starten av oppgaven, mens Amalies lønn har steget med 2,3 prosent per år. De har begge jobbet 1700 timer per år.

c) Bestem den samlede lønnen til Amalie i årene 2008 til 2022. Bestem også den samlede lønnen til Per i disse årene.

Løsning

Amalies lønn stiger med 2,3 % hvert år. Dette tilsvarer en vekstfaktor på 1,023. Amalies samlede lønn vil være uttrykt ved

$1700 \cdot (272{,}55) + 1700 \cdot (272{,}55 \cdot 1{,}023^1) + \cdots + 1700 \cdot (272{,}55 \cdot 1{,}023^{14})$

Dette uttrykket skrives enklere slik:

$1700 \cdot 272{,}55 \cdot (1{,}023^0 + 1{,}023^1 + 1{,}023^2 + \cdots + 1{,}023^{14})$

Vi gjør beregningen ved hjelp av programmering i Python:

```
1  sum = 0
2
3  for i in range(0,15):
4      vf = 1.023**i
5      sum = sum + vf
6
7  samlet = 1700*272.55*sum
8  print("Samlet lønn:",round(samlet))
```

Alternativ kode i linje 8:

```
8  print(f"Samlet lønn: {samlet:.0f}")
```

Resultat etter kjøring: «Samlet lønn: 8 188 601»

Amalie har ei samlet lønn på 8 188 601 kroner i årene 2008 til 2016.

For å beregne Pers samlede lønn i årene 2008 til 2022 går vi ut fra den oppgitte tabellen og benytter regneark:

	A	B	C
1	År	Timelønn	Årslønn
2	2008	kr 272,55	kr 463 335,00
3	2009	kr 272,55	kr 463 335,00
4	2010	kr 285,50	kr 485 350,00
5	2011	kr 285,50	kr 485 350,00
6	2012	kr 285,50	kr 485 350,00
7	2013	kr 307,30	kr 522 410,00
8	2014	kr 307,30	kr 522 410,00
9	2015	kr 314,00	kr 533 800,00
10	2016	kr 314,00	kr 533 800,00
11	2017	kr 314,00	kr 533 800,00
12	2018	kr 314,00	kr 533 800,00
13	2019	kr 327,60	kr 556 920,00
14	2020	kr 327,60	kr 556 920,00
15	2021	kr 327,60	kr 556 920,00
16	2022	kr 340,10	kr 578 170,00
17		Total årslønn	kr 7 811 670,00

C
Årslønn
=1700*B2
=1700*B3
=1700*B4
=1700*B5
=1700*B6
=1700*B7
=1700*B8
=1700*B9
=1700*B10
=1700*B11
=1700*B12
=1700*B13
=1700*B14
=1700*B15
=1700*B16
=SUMMER(C2:C16)

Samlet lønn for Per i årene 2008 til 2012 er 7 811 670 kroner.

Fagforeningen til Per krever at han i 2025 skal ha samme timelønn som Amalie. Vi går ut fra at Amalie fortsatt vil ha en lønnsvekst på 2,3 prosent per år.

d) Hvor mange prosent må lønnen til Per gå opp hvert år dersom dette kravet skal innfris?

Løsning

Vi beregner Amalies timelønn i 2025 ved hjelp av CAS:

2 $272.55 \cdot 1.023^{17}$

$\approx$ **401.1732**

Amalies timelønn i 2025 er 401,17 kr.

Pers lønn i 2022 er ut fra tabellen over 340,10 kroner. Pers lønn skal stige hvert år fram til år 2025, og han skal da ha samme timelønn som Amalie. Vi løser likning i CAS for å bestemme vekstfaktoren:

3 $340.10 \cdot x^3 = 401.17$

NLøs: $\{x = 1.0566\}$

Pers lønn må gå opp 5,66 % hvert år dersom han skal ha samme timelønn som Amalie i 2025.

Oppgave 2

Vi har gitt punktet $A(3,2)$. Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$\vec{u} = [4,3] \text{ og } \vec{v} = [2t, 5t]$$

Et parallellogram $ABCD$ er bestemt ved at $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

a) Bestem koordinatene til B og koordinatene til C og D uttrykt ved t.

Løsning

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = [3,2] + [4,3] = [7,5] \Leftrightarrow B = (7,5)$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = [7,5] + [2t, 5t] = [7+2t, 5+5t] \Leftrightarrow C = (7+2t, 5+5t)$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = [3,2] + [2t, 5t] = [3+2t, 2+5t] \Leftrightarrow D = (3+2t, 2+5t)$

b) Bestem t slik at skjæringspunktet mellom diagonalene i parallellogrammet blir $P(8,11)$.

Løsning

Den ene diagonalen går fra punkt A til punkt C, den andre diagonalen går fra punkt B til punkt D.

Punktet P skal ligge i skjæringspunktet mellom diagonalene, noe som betyr at P ligger midt på begge linjene.

En parameterframstilling for linja fra A til D:

$\overrightarrow{AC} = [7+2t-3, 5+5t-2] = [4+2t, 3+5t]$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \cdot [4+2t, 3+5t] = \left[2+t, \frac{3}{2} + \frac{5}{2}t\right]$

$\overrightarrow{OP} = [8,11]$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

$[8,11] = \left[3+2+t, 2+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}t\right] = \left[5+t, \frac{7}{2}+\frac{5}{2}t\right]$

$8 = 5+t$ og $11 = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}t$

$t = 3$ og $t = 3$

Hvis $t = 3$, blir skjæringspunktet mellom diagonalene i parallellogrammet $P(8,11)$.

Oppgave 3

Nedenfor ser du tre påstander. Avgjør i hvert tilfelle om påstanden er sann eller usann. Husk å vise tydelig hvordan du argumenterer og resonnerer.

a) Hvis $x > 0$, så er $(\ln x)^4 = 4 \ln x$.

Løsning

$\ln x$ er definert for positive x-verdier. Hvis $0 < x < 1$, er $\ln x$ negativ. $4 \cdot \ln \frac{1}{2}$ vil derfor være et negativt tall, mens $\left(\ln \frac{1}{2}\right)^4$ vil være et positivt tall.

Påstanden er usann.

b) Alle fjerdegradsfunksjoner må ha minst ett ekstremalpunkt.

Løsning

Når den deriverte til en funksjon er lik 0, har en funksjon enten et ekstremalpunkt (topp- eller bunnpunkt) eller et terrassepunkt.

Den deriverte til en fjerdegradsfunksjon er en tredjegradsfunksjon. Siden alle tredjegradsfunksjoner har alle reelle tall som verdimengde, har de minst ett nullpunkt der grafen går fra å ligge under x-aksen til å ligge over x-aksen eller omvendt. Det betyr at den deriverte til en fjerdegradsfunksjon må ha minst ett nullpunkt der den deriverte skifter fortegn. Da må alle fjerdegradsfunksjoner ha minst ett ekstremalpunkt.

Påstanden er sann.

c) For at en funksjon skal ha en omvendt funksjon, må funksjonen være enten strengt voksende eller strengt avtakende.

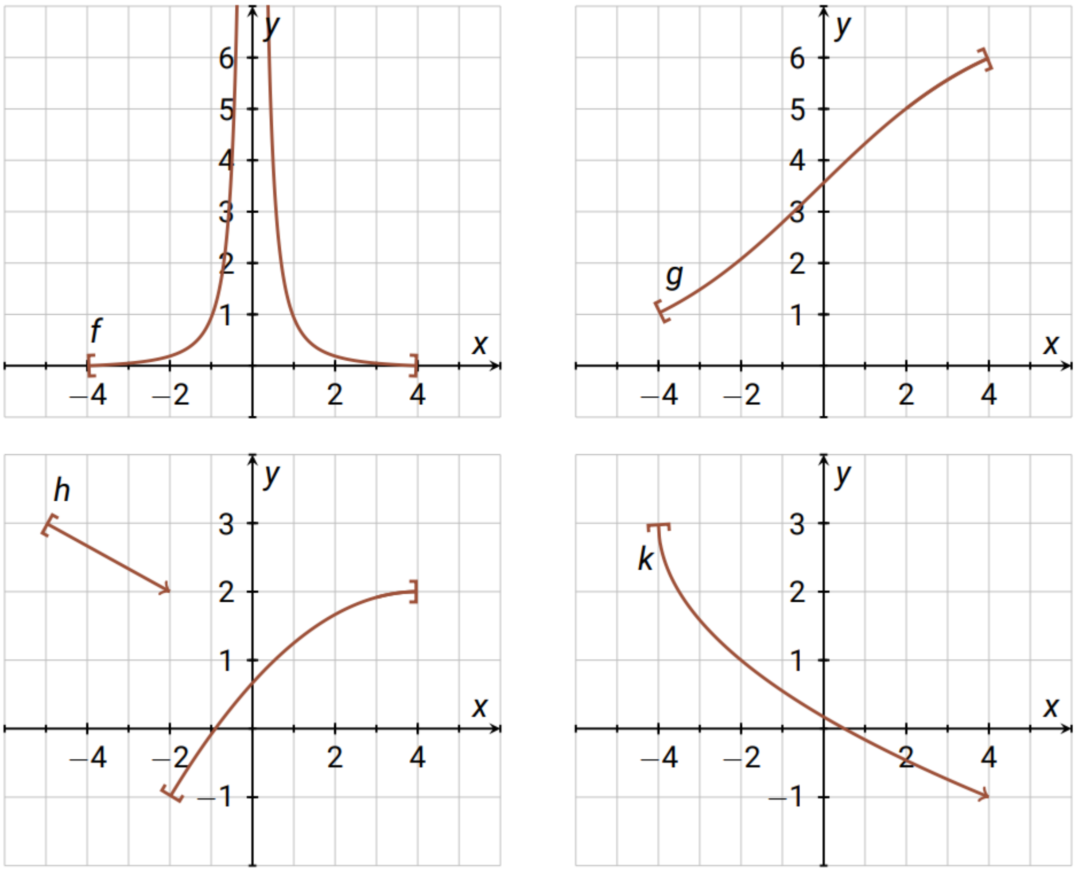
Løsning

En funksjon har en omvendt funksjon hvis og bare hvis den er én-entydig. En funksjon med delt forskrift kan være én-entydig og voksende i den ene delen og avtakende i den andre delen, og likevel kan den ha en omvendt funksjon.

Påstanden er usann.

Oppgave 4

Nedenfor har vi tegnet grafene til fire funksjoner f, g, h og k.



a) Avgjør og begrunn i hvert tilfelle om funksjonen har en omvendt funksjon.

Løsning

Funksjonen f er ikke én-entydig. Hver verdi av x gir én og bare én y-verdi, men det finnes y-verdier som gir to x-verdier.

Funksjonen f har ikke en omvendt funksjon.

Funksjonen g er én-entydig, siden hver verdi av x gir én og bare én y-verdi, og hver y-verdi gir én og bare én x-verdi.

Funksjonen g har en omvendt funksjon.

Funksjonen h har delt forskrift. Den er lineær for $x \in [-5, -2\rangle$ og har en buet graf for $x \in [-2{,}4]$. I begge områdene er funksjonen én-entydig. Siden y-verdiene ikke overlapper mellom de to delene, er funksjonen én-entydig.

Funksjonen h har en omvendt funksjon.

Funksjonen k er avtakende i hele definisjonsområdet, og den er derfor én-entydig.

Funksjonen k har en omvendt funksjon.

b) Bestem definisjonsmengden til den omvendte funksjonen i de tilfellene der den finnes.

Løsning

$D_{g^{-1}} = V_g = [1{,}6]$

$D_{h^{-1}} = V_h = [-1{,}3]$

$D_{k^{-1}} = V_k = \langle -1, 3]$

Oppgave 5

Sammenhengen mellom lydstyrken L (målt i dB) og lydintensiteten I (målt i $\mathrm{W/m^2}$) er gitt ved

$$L = 120 + 10 \cdot \lg I$$

Menneskets øre har en smertegrense for lydstyrke som ligger omkring 130 dB.

a) Bestem lydintensiteten når lydstyrken er 130 dB.

Løsning

Vi skriver inn funksjonen $L(I)$ i CAS og løser likningen $L(I) = 130$ dB:

1 $\mathrm{L(I)} := 120 + 10\ \log_{10}(\mathrm{I})$

$\rightarrow\ \mathbf{L(I)} := 10 \cdot \dfrac{\ln(\mathrm{I})}{\ln(10)} + 120$

2 $\mathrm{L(I)} = 130$

Løs: $\{\mathrm{I} = 10\}$

Når lydstyrken er 130 dB, er lydintensiteten $10\ \mathrm{W/m^2}$.

b) Hvor mange prosent øker lydintensiteten dersom lydstyrken øker med 2 dB?

Løsning

Vi bruker CAS til å beregne lydintensiteten når lydstyrken er L_1, og når lydstyrken øker til $L_1 + 2$. Så regner vi ut vekstfaktoren.

3 $L(I) = L_1$

Løs: $\left\{ I = \dfrac{1}{10^{\frac{-1}{10}L_1+12}} \right\}$

4 $L(I) = L_1 + 2$

Løs: $\left\{ I = \dfrac{1}{10^{\frac{59}{5}-\frac{1}{10}L_1}} \right\}$

5 $\dfrac{\text{HøyreSide}(\$4)}{\text{HøyreSide}(\$3)}$

$\approx \{1.585\}$

Vekstfaktoren er 1,585. Når lydstyrken øker med 2 dB, øker lydintensiteten med 58,5 %.

Dersom effekten til lyden som sendes ut fra en lydkilde er E, vil lydintensiteten I på en avstand r (målt i m) fra denne lydkilden være

$$I = \frac{E}{4\pi r^2}$$

Lydstyrken fra et fly er 140 dB dersom du er 50 m fra flyet.

c) Bestem den minste avstanden til dette flyet der lydstyrken er lavere enn 130 dB.

Løsning

Vi beregner først lydintensiteten I ut fra formelen for lydstyrke, deretter beregner vi effekten E og til slutt radius r ved å bruke resultatet i a).

6 $L(I) = 140$

Løs: $\{I = 100\}$

7 $100 = \dfrac{E}{4\text{pi} \cdot 50^2}$

Løs: $\{E = 1000000\ \pi\}$

8 $\dfrac{1000000\text{pi}}{4\text{pi} \cdot r^2} = 10$

Løs: $\left\{ r = -50\ \sqrt{10}, r = 50\ \sqrt{10} \right\}$

9 $\$8$

$\approx \{r = -158.114, r = 158.114\}$

Den minste avstanden til dette flyet der lydstyrken er lavere enn 130 dB, er 158,11 meter.

Oppgave 6

En linje ℓ går gjennom punktene $A(4, -2)$ og $B(6, 6)$.

a) Bestem den eksakte avstanden fra punktet $P(2, 8)$ til linjen ℓ.

Løsning

For å finne avstanden fra punktet P til linja ℓ finner vi et uttrykk for linja ved hjelp av CAS, og deretter bruker vi «Avstand(Punkt,Objekt)».

1 A := (4, −2)
→ **A := (4, −2)**

2 B := (6, 6)
→ **B := (6, 6)**

3 l := Linje(A, B)
→ **l : y = 4 x − 18**

4 P := (2, 8)
→ **P := (2, 8)**

5 Avstand(P, l)
→ $\mathbf{18 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17}}$

Den eksakte avstanden fra punktet til linja ℓ er $18 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17}$.

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x$$

b) Bestem den eksakte verdien for den minste avstanden mellom grafen til f og linjen ℓ.

Løsning

Vi definerer funksjonen $f(x)$ og et generelt punkt, Q, på grafen til f. Deretter bruker vi «Avstand(punkt,objekt)» for å lage en funksjon for avstanden. Dette blir en andregradsfunksjon med positivt andregradsledd, noe som betyr at funksjonen har bunnpunkt. Vi finner x-verdien til bunnpunktet ved å sette den deriverte lik 0 og løse likningen.

6 $f(x) := x^2 + 2x$

$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := x^2 + 2x}$

7 $Q := (x, f(x))$

$\rightarrow\ \mathbf{Q := (x, x^2 + 2x)}$

8 $g(x) := \text{Avstand}(Q, l)$

$\rightarrow\ \mathbf{g(x) := \sqrt{\frac{1}{17}(x^2 - 2x + 18)}}$

9 $g'(x) = 0$

Løs: $\{x = 1\}$

10 $g(1)$

$\rightarrow\ \mathbf{\sqrt{17}}$

Den eksakte verdien for den minste avstanden mellom grafen til f og linja ℓ er $\sqrt{17}$.

Oppgave 7

I denne oppgaven skal du bruke algoritmen nedenfor til å finne en tilnærmet verdi for gjennomsnittet til en funksjon i et intervall $[a, b]$.

Algoritme: Velg $N + 1$ tall jevnt fordelt i intervallet $[a, b]$. La $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ være disse tallene. Avstanden mellom et av tallene og det neste er da $\frac{b-a}{N}$. Regn ut gjennomsnittet g av tallene $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$. Da er g en god tilnærmet verdi for gjennomsnittet til f i $[a, b]$. Denne tilnærmingen blir bedre dess større N er.

Lag et program som du kan bruke til å bestemme gjennomsnittet til funksjonen g gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$

i intervallet $[0, 1]$. Hva blir dette gjennomsnittet?

Løsning

```
import math

# Definerer funksjonen
def f(x):
    return math.sqrt(x)

```

```
7  a = 0    # øvre grense
8  b = 1    # nedre grense
9
10 N = 10000000  # antall tall fra a til og med b
11 avstand = (b-a)/N
12
13 # startverdi for x settes lik nedre grense
14 xVerdi = a
15
16 # startverdi for sum av funksjonsverdier settes lik 0
17 summen = 0
18
19 # løkke som beregner funksjonsverdier og summerer etter hvert
20 while xVerdi < b:
21     summen = summen + f(xVerdi)
22
23     # beregner neste x-verdi
24     xVerdi = xVerdi + avstand
25
26 snitt = summen/N
27 print("Gjennomsnittet av funksjonen er", snitt, ".")
```

Alternativ kode for linje 27:

```
27 print(f"Gjennomsnittet av funksjonen er {snitt}.")
```

Utskrift etter kjøring av programmet: «Gjennomsnittet av funksjonen er 0.6666667166303378.»

Gjennomsnittet av funksjonen er 0,667.

Kilder for bilder, tegninger osv.

Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet eller NDLA