Løsning REA3056 Matematikk R1 eksempelsett høst 2021

Del 1 – ingen hjelpemidler

Oppgave 1

Bestem grenseverdien:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}$$

Vi observerer at vi får 0 i både telleren og nevneren. Da må vi faktorisere uttrykket før vi kan sette inn 1 for *x*:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} &= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi har gitt vektorene $\vec{a} = [2,-5]$, $\vec{b} = [1,-4]$, $\vec{c} = [-2,10]$ og $\vec{d} = [4,1]$.

a) Avgjør om noen av vektorene har lik lengde.

Vi regner ut lengden til alle vektorene:

$$\left|\vec{a}\right| = \left|[2,-5]\right| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \left|[1,-4]\right| = \sqrt{1^2+(-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \left|[-2,10]\right| = \sqrt{(-2)^2+10^2} = \sqrt{104}$$

$$\left|\vec{d}\right| = \left|[4,1]\right| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$$

Vi ser at $\vec{b}$ og $\vec{d}$ har lik lengde.

b) Avgjør om noen av vektorene står normalt på hverandre.

Her må vi regne ut skalarproduktene og sjekke om de blir 0:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=[2,-5]\cdot[1,-4]=2\cdot 1+(-5)\cdot(-4)=22\neq 0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=[2,-5]\cdot[-2,10]=2\cdot(-2)+(-5)\cdot 10=-54\neq 0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{d}=[2,-5]\cdot[4,1]=2\cdot 4+(-5)\cdot 1=3\neq 0$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=[1,-4]\cdot[-2,10]=1\cdot(-2)+(-4)\cdot 10=-42\neq 0$$
$$\vec{b}\cdot\vec{d}=[1,-4]\cdot[4,1]=1\cdot 4+(-4)\cdot 1=0$$
$$\vec{c}\cdot\vec{d}=[-2,10]\cdot[4,1]=-2\cdot 4+10\cdot 1=2\neq 0$$

Vi ser at skalarproduktet mellom $\vec{b}$ og $\vec{d}$ er 0, altså står disse vinkelrett på hverandre.

c) Avgjør om noen av vektorene er parallelle.

Vi vet allerede at $\vec{b}$ og $\vec{d}$ står vinkelrett på hverandre, så disse er ikke parallelle. Vi sjekker de andre kombinasjonene ved å undersøke om forholdet mellom *x*-koordinatene og *y*-koordinatene er det samme:

$$\frac{2}{1}\neq\frac{-5}{-4}\Rightarrow\vec{a}\nparallel\vec{b}$$
$$\frac{-2}{2}\neq\frac{10}{-5}\Rightarrow\vec{a}\nparallel\vec{c}$$
$$\frac{4}{2}\neq\frac{1}{-5}\Rightarrow\vec{a}\nparallel\vec{d}$$
$$\frac{4}{-2}\neq\frac{1}{10}\Rightarrow\vec{b}\nparallel\vec{c}$$
$$\frac{4}{-2}\neq\frac{1}{10}\Rightarrow\vec{c}\nparallel\vec{d}$$

Ingen av vektorene er parallelle med hverandre.

Oppgave 3

```
def f(x):
    return x/(1+x**2)

h = 0.0001
x=0
while (f(x+h)-f(x))/h > 0
     x = x + 0.01
```

```
print(«x=»,x)
```

En elev har skrevet programkoden ovenfor.

a) Hva ønsker eleven å finne ut?

Eleven leter etter et toppunkt for funksjonen når x er større enn 0.

b) Forklar hva som skjer når programmet kjøres. Hva blir resultatet?

Først defineres funksjonen $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, variabelen h settes til 0,000 1 og x til 0.
Programmet fortsetter med å finne en tilnærming til den deriverte der x er lik 0. Så lar programmet x bli gradvis litt større så lenge tilnærmingen til den deriverte holder seg større enn 0. Når tilnærmingen blir negativ, stopper programmet og skriver ut den siste x-verdien.
For å finne resultatet må vi derivere funksjonen og sette den deriverte lik 0. Vi deriverer ved hjelp av brøkregel:

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

$$u=x$$

$$u'=1$$

$$v=1+x^2$$

$$v'=2x$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{u'v-uv'}{v^2}\\&=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\\&=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

$$1-x^2=0$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

Programmet skriver altså ut x = 1.

Oppgave 4

Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til punktet vi får når vi speiler punktet $P(6,1)$ om linjen $y=2x+4$.

For å speile et punkt om ei linje, finner vi linja fra punktet som står normalt på linja. Vi finner så punktet på normalen som ligger like langt fra linja på den andre sida, dette er det speilede punktet. Vi kaller dette for P_1. Vi kaller fotpunktet til normalen fra P til y for F. Da har vi at posisjonsvektoren $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PF}$.

Vi må altså finne F. Dette kan vi gjøre ved å finne et uttrykk for et generelt punkt på linja ved hjelp av parameterframstillingen. Vi vet at punktet (0,4) er på linja ved å sette inn 0 for x. Retningsvektoren leser vi fra stigningstallet, den er [1,2]. (Husk at du alltid kan finne en retningsvektor for ei rett linje ved å la x-koordinaten være 1 og y-koordinaten være stigningstallet). Vi får da følgende parameterframstilling:

$$l:\begin{cases} x = t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$$

Så kan vi bruke dette uttrykket: $\overrightarrow{PF} = [t-6, 4+2t-1] = [t-6, 2t+3]$

Vi vet at skalarproduktet mellom to vinkelrette vektorer skal være lik 0:

$$\begin{aligned}
[1,2]\cdot[t-6, 2t+3] &= 0 \\
1\cdot(t-6) + 2(2t+3) &= 0 \\
t - 6 + 4t + 6 &= 0 \\
3t &= 0 \\
t &= 0 \\
\overrightarrow{PF} &= [-6, 2\cdot 0 + 3] \\
&= [-6, 3] \\
\overrightarrow{OP_1} &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PF} \\
&= [6,1] + 2\cdot[-6,3] \\
&= [-6, 7]
\end{aligned}$$

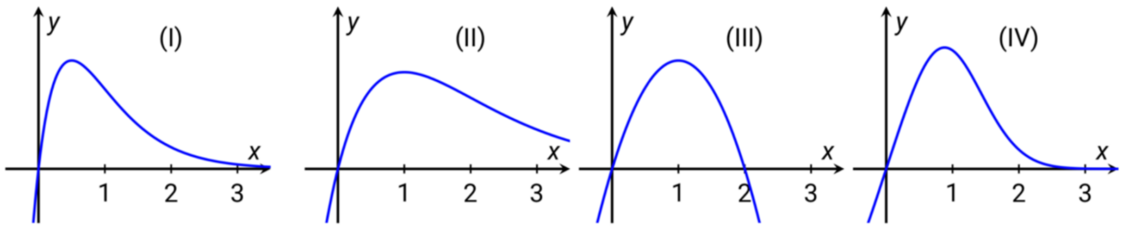
Dette betyr at punktet P_1 er (-6, 7).

Oppgave 5

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 4x\cdot e^{-x}$$

En av grafene nedenfor er grafen til f.
Begrunn hvilken av grafene nedenfor som er grafen til f.



Vi observerer først at alle grafene utenom (I) har et toppunkt der $x = 1$. Vi kan begynne med å sjekke hvor den deriverte er 0 for å enten utelukke (I) eller utelukke alle de andre. Vi deriverer funksjonen ved hjelp av produktregelen og setter den deriverte lik 0:

$$
\begin{aligned}
u &= 4x \qquad & u' &= 4 \\
v &= e^{-x} \qquad & v' &= -e^{-x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= u'v + uv' \\
&= 4e^{-x} + 4x \cdot \left(-e^{-x}\right) \\
&= 4e^{-x}(1-x) \\
f'(x) &= 0 \\
4e^{-x}(1-x) &= 0 \qquad \qquad | \, 4e^{-x} > 0 \\
1-x &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Vi kan altså utelukke graf (I). (Legg merke til at vi ikke har vist at *f har* et toppunkt i $x = 1$, men vi har vist at den *kan* ha det.)

Vi observerer så at graf (III) skiller seg fra de andre ved at den har et nullpunkt der $x = 2$. Vi setter inn $x = 2$ i f.

$$f(2) = 4 \cdot 2 \cdot e^{-2} \neq 0$$

Vi kan altså utelukke graf (III).

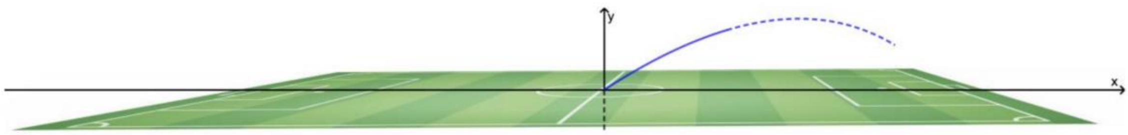
For å avgjøre hvilken av de to gjenværende grafene som er grafen til f, kan vi for eksempel se på hvor grafen har et vendepunkt. Graf (II) ser ut til å ha et vendepunkt i $x = 2$, mens graf (IV) ser ut til å ha et der $x \approx 1{,}5$. Vi deriverer en gang til og setter den dobbeltderiverte lik 0.

$$u = 4e^{-x} \qquad u' = -4e^{-x}$$
$$v = 1 - x \qquad v' = -1$$
$$f''(x) = -4e^{-x}(1-x) + 4e^{-x}\cdot(-1)$$
$$= -4e^{-x}(1-x+1)$$
$$= -4e^{-x}(2-x)$$
$$f''(x) = 0$$
$$-4e^{-x}(2-x) = 0$$
$$x = 2$$

Den dobbelderiverte har et nullpunkt der $x = 2$ og ikke der $x = 1{,}5$, så nå kan vi konkludere med at det må være graf (II) som hører til *f*.

Del 2 – med hjelpemidler

Oppgave 1



En fotballspiller tok et frispark. Han sparket ballen i retning av motstanderens mål. Ballens posisjon *t* sekunder etter at frisparket ble tatt, er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[28t - 3t^2, 10t - 5t^2\right]$$

Enheten langs aksene er meter.

a) Bestem banefarten ballen fikk da den ble sparket.

Banefarten finner vi ved å regne ut lengden til fartsvektoren, som er den deriverte til posisjonsvektoren. Da ballen ble sparket, var $t = 0$.

$$\vec{r}(t) = \left[28t - 3t^2, 10t - 5t^2\right]$$
$$\vec{r}\,'(t) = [28 - 6t, 10 - 10t]$$
$$\vec{r}\,'(0) = [28, 10]$$
$$\left|\vec{r}(0)\right| = \left|[28, 10]\right|$$
$$= \sqrt{28^2 + 10^2} = 29{,}73 \approx 29{,}7$$

Dette betyr at banefarten er 29,7m/s idet ballen ble sparket.

Løsning i CAS:

1. $r(t) := \text{Vektor}((28\,t - 3\,t^2, 10\,t - 5\,t^2))$
   $\rightarrow\ \mathbf{r(t)\ :=\ (-3\,t^2 + 28\,t, -5\,t^2 + 10\,t)}$
2. $\text{Lengde}(r'(0))$
   $\rightarrow\ \mathbf{2\sqrt{221}}$
3. $\$2$
   $\approx\ \mathbf{29.73}$

b) Hvor lang tid tok det fra ballen ble sparket til den traff bakken?

Ballen treffer bakken når $x = 0$:

$$10t - 5t^2 = 0$$
$$5t(2-t) = 0$$
$$5t = 0 \vee 2 - t = 0$$
$$t = 0 \vee t = 2$$

4. $y(r(t)) = 0$
   Løs: $\mathbf{\{t = 0, t = 2\}}$

Vi ser at ballen traff bakken etter 2 sekunder.

c) Bestem ballens banefart da den var i sitt høyeste punkt.

Det høyeste punktet finner vi ved å se på når den deriverte av y-koordinaten er 0:

$$10 - 10t = 0$$
$$10t = 10$$
$$t = 1$$

Så må vi finne lengden av fartsvektoren når $t = 1$:

$$|r'(1)| = |[28-6, 10-10]|$$
$$= |[22, 0]|$$
$$= 22$$

Farten var altså 22 m/s i det høyeste punktet.
Løsning i CAS:

5 $y(r'(t)) = 0$

Løs: $\{t = 1\}$

6 Lengde(r'(1))

$\rightarrow$ **22**

Oppgave 2

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = x^4 - b \cdot x^3 + 2, \qquad D_f = [-3, \rightarrow\rangle$$

For hvilke verdier av *b* har *f* en omvendt funksjon?

Dersom en funksjon er strengt voksende eller strengt avtagende i hele sitt definisjonsområde, er den en én-entydig funksjon, og dermed har den en omvendt funksjon. Vi trenger å finne ut for hvilken verdi av *b* dette er gjeldende. Da kan vi se på den deriverte av *f* og finne ut for hvilke verdier av *b* denne er enten positiv eller negativ i hele definisjonsområdet til *f*. Vi har at den deriverte er gitt ved $f'(x) = 4x^3 - 3bx^2$. Vi vet at en polynomfunksjon kun kan skifte fortegn i nullpunktene, så vi finner disse:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^3 - 3bx^2 &= 0 \\ x^2(4x - 3b) &= 0 \\ x = 0 \vee x &= \frac{3b}{4} \end{aligned}$$

Siden $x = 0$ er et dobbelt nullpunkt, vet vi at den deriverte ikke skifter fortegn her. Det er det siste nullpunktet som er kritisk for skifte av fortegn.

Vi må sette *b* slik at funksjonen skifter fortegn for $x \le -3$, altså at nullpunktet må være mindre enn eller lik –3:

$$\frac{3b}{4} \le -3 \qquad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$b \le -4$$

f har en omvendt funksjon så lenge $b \le -4$.

Oppgave 3

En sirkel *C* kan beskrives ved å oppgi sentrum $S(a,b)$ og radius *r*.

a) Beskriv en algoritme som du kan bruke til å avgjøre om et gitt punkt $P(s,t)$ ligger på, inni eller utenfor sirkelen *C*.

En sirkel med sentrum i S og radius r har likningen $(x-a)^2-(y-b)^2=r^2$. Når vi setter inn koordinatene til P, vil venstre side av likningen være mindre enn r^2 hvis punktet ligger inni sirkelen, lik r^2 dersom punktet ligger på sirkelen, og større enn r^2 dersom punktet ligger utenfor sirkelen.

1. Vi definerer en funksjon i Python som regner ut differansen mellom venstre side av likningen med koordinatene til P satt inn og r^2. Denne funksjonen blir `(s-a)**2+(t-b)**2-r**2`. Fortegnet til resultatet viser om punktet ligger *innenfor*, *på* eller *utenfor* sirkelen.
2. Vi må hente inn eller tilordne verdier for *a, b, r, s* og *t.*
3. Hvis (if) absoluttverdien på funksjonen er mindre enn eller lik 0,01, ligger punktet på sirkelen. (Vi legger inn ei toleransegrense slik at programmet kan finne punkter på sirkelen ved avrundede verdier på koordinatene *s* og *t*.)
4. Ellers hvis (elif) verdien på funksjonen er større enn 0,01, ligger punktet utenfor sirkelen.
5. Ellers (else) ligger punktet innenfor sirkelen.

b) Skriv en kode basert på algoritmen fra oppgave a). Input skal være *a, b, r, s* og *t*. Output skal være en av følgende tekster:

- Punktet ligger innenfor sirkelen.
- Punktet ligger på sirkelen.
- Punktet ligger utenfor sirkelen.

Vi kan få et program som ser slik ut:

```
def sirkel(a,b,r,s,t)
    return (s-a)**2+(t-b)**2-r**2

a = float(input(«Hva er x-koordinaten til sentrum i sirkelen?»)
b = float(input(«Hva er y-koordinaten til sentrum i sirkelen?»)
r = float(input(«Hva er radius i sirkelen?»)
s = float(input(«Hva er x-koordinaten til punktet du vil undersøke?»)
t = float(input(«Hva er y-koordinaten til punktet du vil undersøke?»)

if sirkel(a,b,r,s,t) < 0:
    print(«Punktet ligger innenfor sirkelen.»)
```

```
elif sirkel(a,b,r,s,t) == 0:
    print(«Punktet ligger på sirkelen.»)
else:
    print(«Punktet ligger utenfor sirkelen.»)
```

Vi kan også velge å bestemme *S* og *r* og bare hente inn punktet fra brukeren:

```
def sirkel(a,b,r,s,t)
    return (s-a)**2+(t-b)**2-r**2

a,b,r = 2,3,5
s = float(input(«Hva er x-koordinaten til punktet du vil undersøke?»)
t = float(input(«Hva er y-koordinaten til punktet du vil undersøke?»)

if sirkel(a,b,r,s,t) < 0:
    print(«Punktet ligger innenfor sirkelen.»)
elif sirkel(a,b,r,s,t) == 0:
    print(«Punktet ligger på sirkelen.»)
else:
    print(«Punktet ligger utenfor sirkelen.»)
```

Oppgave 4

Temperaturen i en kopp kaffe blir målt hvert fjerde minutt. Temperaturen i rommet der koppen står, er 21,2°C. Resultatet av målingene er vist i tabellen nedenfor.

Tid (minutt)	0	4	8	12	16
Temperatur (°C)	70	53	42	35	30

En elev har brukt et digitalt verktøy og kommet fram til følgende regresjonsmodeller ut fra tallene i tabellen:

$$f(x) = -2{,}45x + 65{,}6$$

$$g(x) = 0{,}13x^2 - 4{,}45x + 70$$

$$h(x) = 21{,}2 + 49 \cdot e^{-0{,}11x}$$

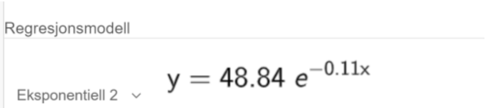
a) Vis hvordan eleven kan ha kommet fram til modellen *h*.

Vi viser framgangsmåte i GeoGebra.

Vi vet at regresjon i GeoGebra gir funksjoner på formen $y = a \cdot e^{bx}$. Eleven har tatt høyde for at starttemperaturen i rommet er 21,2°C og har trukket denne temperaturen fra alle temperaturene. Da blir tabellen slik:

Tid (minutt)	0	4	8	12	16
Temperatur (°C)	48,8	31,8	20,8	13,8	8,8

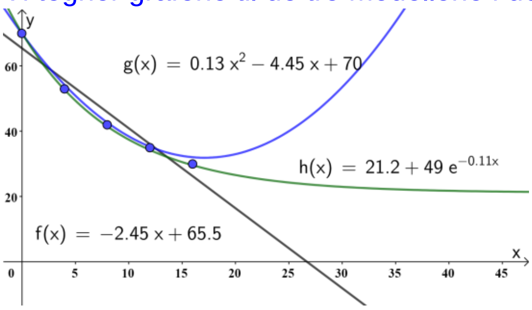
Hvis vi fører disse tallene inn i regnearket i GeoGebra og velger «Eksponentiell 2», får vi det følgende resultatet:



Vi kan runde av og legge til de 21,2°C som er i rommet, og vi får modellen *h*.

b) Vurder gyldighetsområdene til de ulike modellene ut fra den praktiske situasjonen.

Vi tegner grafene til de tre modellene i det samme koordinatsystemet for å sammenligne:



Vi ser at i området fra 0 til cirka 15 minutter er modell *g* og *h* omtrent like nøyaktige, mens modell *f* ikke ligger langt unna. Etter cirka 16 minutter vil temperaturen stige igjen ifølge modell *g*, dette er ikke særlig logisk. Modell *g* sitt gyldighetsområde vil kun være fra 0 til 16 minutter, altså vil ikke modellen kunne si noe fornuftig om utviklingen videre. Hvis vi følger modell *f,* vil temperaturen fortsette å falle. Allerede etter 19 minutter har temperaturen falt til under temperaturen som er i rommet. Også denne modellen har kun gyldighet i det området vi har målinger fra. Ifølge modell *h* vil temperaturen nærme seg 21,2°C, altså temperaturen i rommet. Denne modellen har et gyldighetsområde som strekker seg veldig langt. På et eller annet tidspunkt vil temperaturen i virkeligheten være den samme i kaffen som i rommet. Det vil den aldri bli, ifølge modellen, men det vil bli veldig nært.

Oppgave 5

En funksjon *f* er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + a, & x < 1 \\ -2x^2 + b \cdot x, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Bestem *a* og *b* slik at *f* blir deriverbar i *x* = 1.

Vi starter med å finne et uttrykk for den deriverte som vi vet stemmer for alle andre punkter enn *x* = 1:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+3, & x<1 \\ -4x+b, & x>1 \end{cases}$$

Når vi nå skal sørge for at *f* er deriverbar i *x* = 1, vet vi at vi må ha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} f'(x)$$

Dette gir oss det følgende likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + a = -2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 3 = -4 \cdot 1 + b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 + a = b - 2 \\ 7 = -4 + b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 + a = b - 2 \\ 11 = b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 + a = 11 - 2 \\ 11 = b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a = 4 \\ 11 = b \end{bmatrix}$$

b) Avgjør om grafen til *f* har vendepunkt.

Vi tar utgangspunkt i de verdiene vi fant i a). Vi ser at *f* består av et annengradspolynom med positivt annengradsledd når *x* < 1, og et annengradspolynom med negativt annengradsledd når *x* ≥ 1. Vi har allerede vist at funksjonen er kontinuerlig og deriverbar i dette punktet for *a* = 4 og *b* = 11. Det betyr at funksjonen må ha et vendepunkt for *x* = 1.

Oppgave 6

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + C}$$

der *C* er en konstant.

a) Finnes det noen verdier for *C* som gjør at grafen til *f* har et topp- eller bunnpunkt?

Hvis *f* skal ha et ekstremalpunkt, må vi finne ut om den deriverte til *f* kan bli 0, og om den kan skifte fortegn i det eventuelle nullpunktet. Vi deriverer:

1	$f(x) := \frac{e^x}{e^x + C}$
	$\rightarrow \mathbf{f(x) := \frac{e^x}{e^x + C}}$
2	$f'(x)$
	$\rightarrow \mathbf{C \frac{e^x}{2 C e^x + C^2 + (e^x)^2}}$
3	$\$2$
	Faktoriser: $\mathbf{e^x \cdot \frac{C}{(C + e^x)^2}}$

Vi ser at funksjonen ikke kan skifte fortegn noe sted. Den deriverte vil være positiv hvis *C* er positiv, og den vil være negativ hvis *C* er negativ. Dersom *C* = 0, er den deriverte 0 over hele grafen, altså har vi en konstant funksjon. *f* kan altså ikke ha noe ekstremalpunkt uansett hva vi setter *C* til å være.

b) Undersøk og bestem hvilke verdier for *C* som gjør at grafen til *f* har et vendepunkt.

Vi finner den dobbeltderiverte med CAS.

4	$f''(x)$
	$\rightarrow \mathbf{\frac{-C (e^x)^2 + C^2 e^x}{3 C (e^x)^2 + 3 C^2 e^x + C^3 + (e^x)^3}}$
5	$\$4$
	Faktoriser: $\mathbf{e^x C \frac{C - e^x}{(C + e^x)^3}}$

Dersom $C = 0$, blir den dobbeltderiverte lik 0, og vi har ingen vendepunkter.
$C > 0$: Både nevneren og faktorene C og e^x er større enn null. Vi undersøker telleren:

$$C - e^x \geq 0$$
$$e^x \leq C$$
$$x \leq \ln C$$

Telleren skifter fortegn for $x = \ln C$, så da har vi et vendepunkt der.
$C < 0$: Her er det bare nevneren som kan skifte fortegn siden $C - e^x < 0$ for alle *x*. Den dobbeltderiverte eksisterer ikke der nevneren er null. Det gjør heller ikke selve

funksjonen, siden nevneren vil ha samme nullpunkt som nevneren i den dobbeltderiverte, nemlig når $C+e^x=0$. Da kan ikke funksjonen ha et vendepunkt når $C<0$.

c) Anta $C > 0$. Vis at $f\left(x+\ln C\right)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Beskriv hvordan grafen til f påvirkes når verdien til C endres.

$$\begin{aligned} f\left(x+\ln C\right) &= \frac{e^{x+\ln C}}{e^{x+\ln C}+C} \\ &= \frac{e^x\cdot e^{\ln C}}{e^x\cdot e^{\ln C}+C} \\ &= \frac{Ce^x}{Ce^{\ln x}+C} \\ &= \frac{Ce^x}{C\left(e^x+1\right)} \\ &= \frac{e^x}{e^x+1} \end{aligned}$$

Hvis vi starter med $C=1$, vil $f(x+\ln C)=f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. Når C økes, vil $f(x+\ln C)$ ha samme verdi som $f(x)$ har når $C=1$. Det betyr at grafen forskyves mot høyre når C økes, men har ellers samme form.

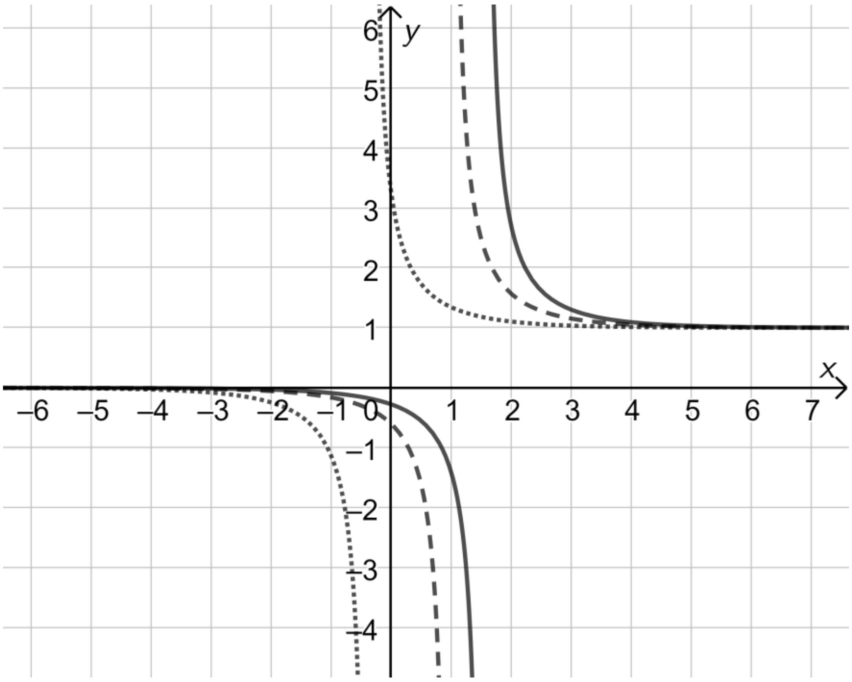
d) Anta $C < 0$. Beskriv hvordan grafen til f påvirkes når verdien til C endres.

Vi prøver tilsvarende utregning som i c).

$$\begin{aligned} f\left(x+\ln(-C)\right) &= \frac{e^{x+\ln(-C)}}{e^{x+\ln(-C)}+C} \\ &= \frac{e^x\cdot e^{\ln(-C)}}{e^x\cdot e^{\ln(-C)}+C} \\ &= \frac{-Ce^x}{-Ce^{\ln x}+C} \\ &= \frac{-Ce^x}{-C\left(e^x-1\right)} \\ &= \frac{e^x}{e^x-1} \end{aligned}$$

Ved å bruke tilsvarende argumentasjon som i c), får vi at grafen bare forskyves når C endres, den endrer ikke form. Her vil $\ln(-C)$ øke når C minker, som betyr at grafen forskyves mot høyre når C minker.

Alternativt kan vi tegne grafer for ulike verdier av C når $C < 0$ og se at grafen har samme form, bare forskjøvet vannrett.



Oppgave 7

Vi har følgende resultat:

Anta at grafen til en tredjegradsfunksjon *f* skjærer en linje *l* i tre punkter med *x*-koordinater x_1, x_2, og x_3. La $m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Da vil tangenten til grafen til *f* i punktet $\left(m, f(m)\right)$ gå gjennom punktet $\left(x_3, f\left(x_3\right)\right)$.

a) Vis at resultatet stemmer for funksjonen *f* gitt ved
$f\left(x\right) = x^3 - x^2 - 2x + 3$
og linjen $y = 2x - 1$ når $x_1 = -2, x_2 = 1$ og $x_3 = 2$.
Vi løser i GeoGebra:

1. $f(x) := x^3 - x^2 - 2x + 3$
   $\rightarrow \ x^3 - x^2 - 2x + 3$
2. $b(x) := 2x - 1$
   $\rightarrow \ 2x - 1$
3. $f = b$
   Løs: $\{x = -2, x = 1, x = 2\}$
4. $m := \frac{-2+1}{2}$
   $\rightarrow \ \frac{-1}{2}$
5. $a(x) := \text{Tangent}(m, f)$
   $\rightarrow \ \frac{-1}{4}x + \frac{7}{2}$
6. $a = f$
   Løs: $\left\{x = \frac{-1}{2}, x = 2\right\}$

Linje 1 og 2: Vi definerer funksjonen og linja.

Linje 3: Vi setter de to uttrykkene lik hverandre og ser at de krysser hverandre i de oppgitte punktene.

Linje 4: Vi regner ut *m*.

Linje 5: Vi finner tangenten til *f* i punktet *m*.

Linje 6: Vi setter tangenten og *f* lik hverandre og ser at de krysser hverandre i $x = 2$, slik vi skulle vise.

La *g* være en tredjegradsfunksjon. Anta at en linje $y = ax + b$ skjærer grafen til *g* i $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ og $(x_3, f(x_3))$.

b) Forklar at vi kan skrive *g* på formen
$g(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (ax + b),\ k \in \mathbb{R}$

Dersom vi setter $g(x) = y$, får vi de tre løsningene $x = x_1$, $x = x_2$ og $x = x_3$. Vi vet da at en funksjon $h(x) = g(x) - y$ vil ha nullpunktene x_1, x_2 og x_3. Vi vet da at $h(x)$ kan skrives på formen $k \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Vi har da

$$g(x) - y = h(x)$$
$$g(x) - (ax + b) = k \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$g(x) = k \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (ax + b)$$

c) Vis at tangenten til g i $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ går gjennom $\left(x_3, f\left(x_3\right)\right)$.

Vi følger malen fra a) i CAS:

1	$g(x) := k\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) + a\,x + b$ $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := k\,(-x_1 + x)\,(-x_2 + x)\,(-x_3 + x) + a\,x + b}$
2	$m := \frac{x_1 + x_2}{2}$ $\rightarrow$ $\mathbf{m := \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2)}$
3	$t(x) := \mathrm{Tangent}(m, g)$ $\rightarrow$ $\mathbf{t(x) := \frac{1}{4}\,k\,x_1^2\,x_3 - \frac{1}{4}\,k\,x_1^2\,x + \frac{1}{4}\,k\,x_2^2\,x_3 - \frac{1}{4}\,k\,x_2^2\,x - \frac{1}{2}\,k\,x_1\,x_2\,x_3 + \frac{1}{2}\,k\,x_1\,x_2\,x + a\,x + b}$
4	$t = g$ Løs: $\left\{x = x_3, x = \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2\right\}$

Linje 1: Vi definerer funksjonen slik den er oppgitt i b).
Linje 2: Vi regner ut *m*.
Linje 3: Vi finner tangenten til *g* i *m*.
Linje 4: Vi setter tangenten lik *g* og finner at de skjærer hverandre i $x = x_3$, slik vi skulle vise.

Gitt funksjonen $h\left(x\right) = x^3 - 2x + 1$ og punktet $P(2,5)$. Vi ønsker å tegne en tangent til grafen til *h* som går gjennom *P*.

d) Forklar hvordan vi kan bruke linjen $y = 2x + 1$til å bestemme tangeringspunktet.

Her må vi først merke oss at det ikke er tangenten i (2,5) vi er ute etter, men en annen tangent som også krysser grafen her.
Vi bruker det vi har gjort tidligere i oppgaven og setter $x_3 = 2$.
Vi finner de andre nullpunktene til *h* og bruker dem til å finne *m*, som da er tangeringspunktet:

$$x^3 - 2x + 1 = 2x + 1$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x\left(x - 2\right)\left(x + 2\right) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ &= \frac{0 + \left(-2\right)}{2} = -1 \end{aligned}$$

Tangeringspunktet er altså $x = -1$.

Kilder for bilder, tegninger osv.

Utdanningsdirektoratet eller NDLA matematikk