Eksamen REA3056 matematikk R1 vår 2022

Del 1 – uten hjelpemidler – 1 time

Oppgave 1

Deriver funksjonene.

a) $f(x) = x^3 + \ln x$

b) $g(x) = x \cdot e^{2x}$

Oppgave 2

Løs likningen

$e^{2x} - e^x = 2$

Oppgave 3

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 + x - 12}$$

Oppgave 4

Vi har tre punkter $A(1,2), B(-1,5)$ og $C(t,4)$ der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem t slik at $\angle BAC = 90°$.

b) Bestem t slik at A, B og C ligger på en rett linje.

Oppgave 5

En elev har skrevet programkoden nedenfor.

```
def f(x):
    return x/(1+x**2)    #Definerer funksjonen f(x)=x/(1+x^2)

x = 0
h = 0.001
while f(x) <= f(x+h):
    x = x+h

print(x)
```

a) Forklar hva som skjer når programmet kjøres. Hva ønsker eleven å finne ut?

b) Gjør nødvendige beregninger, og bestem svaret som eleven ønsker å finne.

Del 2 – med hjelpemidler – 4 timer

Oppgave 1

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 2 \\ x - t, \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Bestem tallet t slik at f blir en kontinuerlig funksjon. Husk å begrunne svaret.

b) Avgjør om f er deriverbar i $x = 2$ for den verdien av t du fant i oppgave a).

Oppgave 2

For vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$.

Vi lar $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{v} = \vec{a} - 6\vec{b}$.

a) Bestem lengden av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

b) Bestem vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Oppgave 3

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x$$

Bestem det største intervallet $I = [a, b]$ slik at $1 \in I$ og f har en omvendt funksjon når I er definisjonsmengden til f.

Oppgave 4

Ifølge Newtons avkjølingslov vil temperaturen T til et objekt etter t minutter være gitt ved

$$\ln(T - T_0) = -k \cdot t + r$$

hvor T_0 er romtemperaturen, og der k og r er konstanter.

I et rom med temperatur 22 °C setter vi en kopp med kaffe. Ved tidspunktet $t = 0$ er temperaturen i kaffen 82 °C. Etter 2 minutter er temperaturen 66 °C.

Hvor lang tid tar det før temperaturen i kaffen er mindre enn 40 °C?

Oppgave 5

Gitt tre punkter $A(a, b), B(c, d)$ og $C(e, f)$.

a) Beskriv en algoritme som du kan bruke til å avgjøre om ΔABD er en rettvinklet trekant.

b) Skriv en kode basert på algoritmen du beskrev i oppgave a). Input skal være koordinatene a, b, c, d, e og f. Output skal være en av følgende tekster:
- Punktene danner en rettvinklet trekant.
- Punktene danner ikke en rettvinklet trekant.

Oppgave 6

En funksjon g er gitt ved

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

Et punkt $P(s, g(s))$ ligger på grafen til g, der $s \in \langle 1,5 \rangle$.

Punktene $A(1,0), B(s, 0)$ og $P(s, g(s))$ danner en trekant ABP.

Bestem den eksakte verdien av s som gir det største arealet til trekanten.

Hvor stort er dette arealet?

Oppgave 7

Båten til en pirat kjører med konstant fart. Posisjonen $\overrightarrow{r_1}$ til båten etter t timer er

$$\overrightarrow{r_1}(t) = [2 + 24t, 4 + 20t]$$

Enhetene langs aksene er kilometer.

a) Hvor stor er banefarten til båten?

Politiet ønsker å stoppe piraten. Samtidig som piraten er i punktet $(2,4)$, starter en politibåt sin jakt. Politibåten starter i punktet $(0,10)$ og holder konstant fart langs en rett linje. Posisjonen $\overrightarrow{r_2}$ til politibåten er

$\overrightarrow{r_2}(t) = [26t, 10 - 22t]$

b) Undersøk om politiet vil møte piraten.

En annen politibåt starter også i $(0,10)$. Denne båten holder også konstant fart.

c) Hvor stor må banefarten til denne båten være dersom de skal treffe piraten i punktet $(8,9)$?

Oppgave 8

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 3$$

$$g(x) = 2x + 3$$

a) Vis at grafene til de to funksjonene tangerer hverandre i ett punkt og skjærer hverandre i et annet punkt.

Einar og Lise har jobbet med slike funksjoner. De påstår å ha funnet en sammenheng:

Dersom $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ og $G(x) = cx + d$, så vil grafene til F og G tangere hverandre.

b) Avgjør om det Einar og Lise har kommet fram til, kan stemme.

Lise har funnet en sammenheng mellom x-koordinaten til vendepunktet til F og x-koordinaten til skjæringspunktet mellom grafene til F og G.

c) Hvilken sammenheng kan Lise ha funnet?
Begrunn at denne sammenhengen stemmer.

Kilder for bilder, tegninger osv.

Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet