

理科高等代数串讲



leoxwang@buaa.edu.cn

目录

1 数域	3
2 线性方程组的求解	3
3 线性空间的概念	4
4 线性组合与相关性	5
5 向量组的秩	6
6 线性空间的基	7
7 同态与同构	7
8 子空间的交与和	8
9 行列式	9
10 展开定理	10
11 Cramer 法则	11
12 数域上的矩阵	12
13 初等矩阵与矩阵变换	14
14 秩的第二种定义, 秩不等式	14
15 数域上的多项式	15
16 有理系数多项式	17
17 多项式理论的应用	18

18 线性映射/变换的概念	18
19 线性变换的矩阵	19
20 线性变换在不同基下的矩阵	20
21 像与核	22
22 特征值与特征向量	24
23 特征子空间与对角化, 不变子空间与准对角化	26
24 零化多项式与最小多项式	27
25 Jordan 形简介	29
26 二次型及其矩阵	31
27 二次型的标准形与规范形	31
28 正定/半正定/负定/半负定/不定二次型及其矩阵	33
29 内积与欧氏空间	36
30 正交矩阵与正交变换	39
31 实对称矩阵的正交相似对角化, 对称变换	41
32 特征值专题	43

1 数域

定义. (数域) 集合 $F \subseteq \mathbb{C}$, 如果它满足

(1) $0, 1 \in F$;

(2) F 对于加、减、乘除封闭

则称 F 是一个数域

常见的例子: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$, 其中 \mathbb{Q} 是最小的数域。

高等代数中的许多问题都和数域的性质有关, 例如多项式理论, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上的因式分解差别很大。

2 线性方程组的求解

Gauss 消元法/矩阵消元法, 它们的本质都是通过初等行变换得到最简阶梯形, 然后读出解

例 1 在数域 F 上求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

定理 2.1 (解存在的条件, 结构定理) 将 n 元方程组的增广矩阵化为最简阶梯形, 记系数矩阵非零行个数为 r , 增广矩阵非零行个数为 \tilde{r}

(1) 如果 $r < \tilde{r}$, 则有矛盾方程, 此时方程组无解;

(2) 如果 $r = \tilde{r}$, 则方程组有解, 而且通解中有 $n - r$ 个独立取值的参数

推论 2.2 齐次线性方程组总是有解, 而且

(1) 如果 $r = n$, 方程组只有零解;

(2) 如果 $r < n$, 方程组有无穷多组解

推论 2.3 如果齐次线性方程组的未知数个数多于方程个数, 那么一定有无穷组解

例 2 齐次线性方程组 $AX = 0, A \in M_{m \times n}(F)$ 有非零解的充要条件是_____

例 3 【20 期末. 一、1】数域 F 上的线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有解的充分必要条件是_____

定理 2.4 数域 F 上的 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$, 它的解集构成一个线性空间, 一组基被称为方程组的基础解系, 而且满足维数公式

$$\dim V_A = n - \text{rank } A$$

定理 2.5 数域 F 上的 n 元非齐次线性方程组 $AX = B$, 设 γ 是一个特解, 导出组 $AX = 0$ 的一个基础解系是 X_1, \dots, X_{n-r} , 则它的通解为

$$X = \gamma + k_1 X_1 + \dots + k_{n-r} X_{n-r}$$

例 4 【18 期末. 八】设 $A \in M_{n \times (n+1)}(F)$, $\text{rank } A = n$, 且 A 每一行的元素之和为 0, 求证 A 的任意 n 阶子式不为 0

例 5 【19 期末. 一、2】设 $A \in M_{m \times n}(F)$, 则非齐次线性方程组 $AX = B$ 至多有_____个线性无关的解

例 6 【19 期末. 二、3】设 α_1, α_2 是含有三个未知数的线性方程组 $AX = \beta$ 的两个不同的解, 且 $\text{rank } A = 2$, 则 $AX = B$ 的通解为_____

(A) $\alpha_1 + k\alpha_2$;

(C) $2\alpha_1 + k(\alpha_1 - \alpha_2)$;

(B) $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + k(\alpha_1 - \alpha_2)$;

(D) $k_1\alpha_2 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2)$

例 7 线性方程组 $AX = B$ 的系数矩阵 $A \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R})$, 且 A 的行向量组线性无关, 则下列命题错误的是_____

(A) 齐次线性方程组 $A^T Y = 0$ 只有零解;

(B) 齐次线性方程组 $A^T A X = 0$ 必有非零解;

(C) $\forall B \in \mathbb{R}^4$, 方程组 $AX = B$ 必有无穷多解;

(D) $\forall B \in \mathbb{R}^5$, 方程组 $A^T X = B$ 必有唯一解

例 8 【21 期末. 二、1】考虑数域 F 上的非齐次线性方程组 $AX = B$, 其中 $A \in M_{4 \times 6}(F)$, $B \neq 0 \in F^4$. 已知 $\text{rank } A = 3$, 则该线性方程组的解集生成的子空间维数为_____

例 9 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 则下列向量组也可作为 $AX = 0$ 基础解系的是_____

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$;

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$;

(C) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$;

(D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1$

例 10 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 证明 $\text{rank } A = \text{rank } A^T A$

3 线性空间的概念

定义. (线性空间) V 是一个非空集合, F 是一个数域, 如果在 V 中定义加法和数乘 $(+, \cdot)$, 满足以下运算律

(1) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(5) $\forall k, l \in F, \alpha \in V, k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

(2) 存在零元 $0, \forall \alpha \in V, \alpha + 0 = \alpha$;

(6) $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(3) $\forall \alpha \in V, \exists \beta \in V, \alpha + \beta = 0$;

(7) $\forall k \in F, \alpha, \beta \in V, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

(4) $\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(8) $\forall \alpha \in V, 1\alpha = \alpha$

则称 V 是 F 上的线性空间

定义. (子空间) 设 W 是 $(V, +, \cdot)$ 的非空子集, 若 $(W, +, \cdot)$ 是线性空间, 则称 W 是 V 的子空间, 记作 $W \leq V$

以下总用 V 表示某个数域 F 上的线性空间, 它的元素被称为向量
常见的线性空间:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| (1) F^n ; | (5) $C(\mathbb{R})$; |
| (2) $M_{m \times n}(F)$; | (6) $C_b(\mathbb{R})$; |
| (3) $F[x]$; | (7) $C^k(\mathbb{R})$; |
| (4) $F[x]_n$; | (8) $R(\mathbb{R})$ |

例 11 【19 期末. 二、4】设集合 $W = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 | y_1 + y_2 + y_3 = a\}$, 且 W 继承了 \mathbb{R}^3 中的加法和数乘, 则下列说法中一定成立的是_____

- (A) 对任意 a , W 都是线性空间;
(B) 对任意 a , W 都不是线性空间;
(C) 只有当 $a = 0$ 时, W 才是线性空间;
(D) 只有当 $a \neq 0$ 时, W 才是线性空间

4 线性组合与相关性

定义. (线性等价) 设 $S, T \subseteq V$, 如果它们互为线性组合, 则称它们线性等价, 记作 $S \cong T$

定义. (线性相关性) 设向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, 如果存在不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 使得 $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_k \alpha_k = 0$, 则称这一向量组线性相关, 否则称线性无关

例 12 【17 期末. 二、4】设 n 元非齐次线性方程组 $AX = B$ 的系数矩阵的秩为 r , 且解集非空, 则其解集中至多有_____个线性无关的向量

例 13 【20 期末. 二、2】下列向量组中线性无关的是_____

- (A) $(1, 2, 3, 4)^T, (2, 3, 4, 5)^T, (0, 0, 0, 0)^T, (1, 2, 3, 4)^T$;
(B) $(1, 2, -1)^T, (3, 5, 6)^T, (0, 7, 9)^T, (1, 0, 2)^T$;
(C) $(a, 1, 2, 3)^T, (b, 1, 2, 3)^T, (c, 3, 4, 5)^T, (d, 0, 0, 0)^T$;
(D) $(a, 1, b, 0, 0), (c, 0, d, 6, 0), (a, 0, c, 5, 6)$;

例 14 在 $V = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ 中, 定义加法和数乘分别为

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d + ac)$$

$$k \otimes (a, b) = \left(ka, kb + \frac{2}{3}k(k-1)a^2 \right), k \in \mathbb{R}$$

则 V 是 \mathbb{R} 上的线性空间。设 $p \in \mathbb{R}$, 若 $(1, 1)$ 和 $(2, p)$ 线性相关, 则 $p =$ _____

例 15 设非零矩阵 A, B 满足 $AB = 0$, 则必有

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;
- (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关;
- (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;
- (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

例 16 设 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ 而且互不相同, 证明 $\{e^{a_1 x}, \dots, e^{a_n x}\}$ 是 $C(\mathbb{R})$ 中的线性无关向量组

例 17 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$ 线性无关, $\beta \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 证明 $\{\alpha_1 \beta^T, \dots, \alpha_p \beta^T\} \subseteq M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 同样线性无关

5 向量组的秩

定义. (极大线性无关组) 设 $S \subseteq V$, 如果 $M \subseteq S$ 线性无关, 而且添加 S 中任何向量就线性相关, 则称 M 是 S 的一个极大线性无关组

定义. (等价定义) 设 $S \subseteq V$, 如果 $M \subseteq S$ 线性无关, 而且可以线性表出 S 中的所有向量, 则称 M 是 S 的一个极大线性无关组

定理 5.1 设 $S_1, S_2 \subseteq V$, 而且 $\#S_1 < \#S_2$, 如果 S_2 是 S_1 的线性组合, 则 S_2 线性相关

定义. (向量组的秩) 如果向量组 $S \subseteq V$ 的一个极大线性无关组含有向量的个数为 r , 则称 S 的秩为 r , 记作 $\text{rank } A = r$

例 18 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ 的秩为 4, 那么从该向量组中任取 3 个向量组成的向量组的秩最小可能为_____

例 19 【17 期末. 一、3】以下命题中正确的有_____个

- (1) 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与向量组 β_1, \dots, β_s 等价, 则它们的秩相等;
- (2) 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与向量组 β_1, \dots, β_s 的秩相等, 则它们等价;
- (3) 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与向量组 β_1, \dots, β_s 的秩相等, 且前者可由后者线性表出则它们等价;
- (4) 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与向量组 β_1, \dots, β_s 不等价, 则它们的秩不相等

(A) 0;

(B) 1;

(C) 2;

(D) 3

例 20 【19 期末. 八】设 $A \in M_n(F)$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $\text{rank } A^k = \text{rank } A^{k+1}$, 证明存在 $B \in M_n(F)$, 使得 $A^k = BA^{k+1}$

例 21 【22 期末. 七】设 $A \in M_n(F)$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $\text{rank } A^k = \text{rank } A^{k+1}$, 证明存在 $B \in M_n(F)$, 使得 $A^k = A^{k+1}B$

6 线性空间的基

定义. (线性空间的基和维数) 如果存在线性无关向量组 $W \subseteq V$, 使得 W 可以线性表出 V 中任意向量, 则称 W 是 V 的一组基, 称 W 中元素的个数 $\#W$ 为 V 的维数, 记作 $\dim V$

例 22 【19 期末. 一、4】设 V 是 \mathbb{R} 上所有 4 阶反对称矩阵构成的集合, 若将 V 看作 $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ 的子空间, 则 $\dim V = \underline{\hspace{2cm}}$

例 23 【18 期末. 六】在数域 F 上, 设 E 为 2 阶单位阵, $I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}$

(1) 试证明: E, I, J, K 是 $M_n(F)$ 的一组基;

(2) 求 I^2, JK 在这组基下的坐标

例 24 给定数域 F 上两个 n 元齐次线性方程组 $AX = 0, BY = 0$, 给出它们有相同解空间的充要条件

7 同态与同构

定义. (线性同态) 设 V_1, V_2 是 F 上的线性空间, 如果映射 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ 满足

(1) $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \forall \alpha, \beta \in V_1$;

(2) $\varphi(\lambda\alpha) = \lambda\varphi(\alpha), \forall \lambda \in F, \alpha \in V_1$

则称 φ 是从 V_1 到 V_2 的同态映射

定义. (线性同构) 设 V_1, V_2 是 F 上的线性空间, 如果映射 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ 满足

(1) φ 是同态映射;

(2) φ 是一一映射

则称 φ 是从 V_1 到 V_2 的同构映射, 并且称 V_1 和 V_2 同构, 记作 $V_1 \cong V_2$

定理 7.1

(1) 如果 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ 是线性同态, 则 $S \subseteq V$ 线性相关 $\Rightarrow \varphi(S)$ 线性相关;

(2) 如果 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ 是线性同构, 则 $S \subseteq V$ 线性相关 $\Leftrightarrow \varphi(S)$ 线性相关

定理 7.2 F 上任意一个 n 维线性空间都和 F^n 同构

例 25 【19 期末. 二、5】设 X_1, \dots, X_s 为 n 维列向量, $A \in M_{m \times n}(F)$, 则下列说法正确的是_____

- (A) 若 X_1, \dots, X_s 线性相关, 则 AX_1, \dots, AX_s 线性相关;
- (B) 若 X_1, \dots, X_s 线性相关, 则 AX_1, \dots, AX_s 线性无关;
- (C) 若 X_1, \dots, X_s 线性无关, 则 AX_1, \dots, AX_s 线性相关;
- (D) 若 X_1, \dots, X_s 线性无关, 则 AX_1, \dots, AX_s 线性无关

例 26 任取 $c \in \mathbb{R}$

- (1) 证明在 $\mathbb{R}[x]_n$ 中, $\{1, x - c, \dots, (x - c)^{n-1}\}$ 构成一组基;
- (2) 求 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ 在这组基下的坐标

例 27 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 是 F^m 的一组基, $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 是 F^n 的一组基, 证明 $\{\alpha_i \beta_j^T | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 是 $M_{m \times n}(F)$ 的一组基

8 子空间的交与和

定义. (两个子空间的交与和) 设 $W_1, W_2 \subseteq V$ 是子空间

- (1) 称 $W_1 \cap W_2 = \{\alpha \in V | \alpha \in W_1, \alpha \in W_2\}$ 为它们的交;
- (2) 称 $W_1 + W_2 = \{\alpha + \beta \in V | \alpha \in W_1, \beta \in W_2\}$ 为它们的和

定理 8.1 $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ 都是线性空间, 而且

- (1) $W_1 \cap W_2$ 是含于 W_1, W_2 的最大的线性空间;
- (2) $W_1 + W_2$ 是包含 W_1, W_2 的最小的线性空间

从两个子空间的交与和可以 (归纳地) 定义更多空间的交与和, 以上定理依然成立

定理 8.2 设 $W_1, W_2 \subseteq V$ 是子空间, 则有

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

例 28 给定 F^4 的子空间 W_1 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和子空间 W_2 的基 $\{\beta_1, \beta_2\}$, 其中

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1, 0), \beta_1 = (1, 2, 3, 4), \beta_2 = (0, 1, 2, 2)$$

分别求 $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ 的维数并各求出一组基

定义. (两个子空间的直和) 设 $W_1, W_2 \subseteq V$ 是子空间, 若在 $W = W_1 + W_2$ 中, 每个向量的分解式

$$w = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$$

唯一, 则称 W 是它们的直和, 记作 $W = W_1 \oplus W_2$

定理 8.3 设 $W_1, W_2 \subseteq V$ 是子空间, $W = W_1 + W_2$, 则以下条件等价

- (1) W 是直和;
- (2) W 中每个向量的分解式唯一;
- (3) W 中零向量的分解式唯一;
- (4) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$;
- (5) $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$;
- (6) 取 W_1, W_2 的极大线性无关组 S, T , 则 $S \cup T$ 构成 W 的一个极大线性无关组

例 29 【18 期末. 七】设 $A \in M_n(F), A^2 = -A$, 设 $V_1 = \{X \in F^n | AX = 0\}, V_2 = \{X \in F^n | (A + I)X = 0\}$

- (1) 证明 $V_1 \oplus V_2 = F^n$;
- (2) 证明 $\text{rank } A + \text{rank}(A + I) = n$

例 30 设 $A \in M_n(F), \text{rank } A = n - 1$, 记 A 的伴随矩阵为 A^* , 记齐次线性方程组 $AX = 0, A^*X = 0$ 的解空间分别为 V_A, V_{A^*} , 试证明 $F^n = V_A \oplus V_{A^*} \iff \text{tr } A^* \neq 0$

9 行列式

需要知道排序、逆序的概念, 会计算逆序数, 以及根据定义求行列式

定理 9.1 设 $A \in M_m(F), B \in M_n(F)$, 则 $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

例 1 【23 期中. 二、2】6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中项 $a_{23}a_{42}a_{31}a_{56}a_{14}a_{65}$ 前的符号为_____

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

定理 9.2

- (1) $|A| = |A^T|$;
- (2) 如果行列式的某一行 (列) 有公因数 k , 则 k 可以提到行列式外;
- (3) 互换行列式的两行 (列), 行列式的值改变符号;
- (4) 如果行列式中两行 (列) 对应元素成比例, 那么行列式的值为 0;

(5) 如果行列式某行（列）元素可以写成两数之和，那么行列式可以拆分为两个行列式之和；

(6) 将某一行（列）的元素同时乘 k 并加到另一行（列），行列式的值不改变

例 3 【20 期末. 一、5】（判断）奇数阶反对称矩阵不可逆；

例 4 【20 期末. 一、5】（判断） $n(n \geq 2)$ 阶行列式中若所有元素都是 ± 1 ，那么行列式值不可能取 ± 1

例 5 【20 期末. 二、4】四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值为_____

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$;

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$;

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$;

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

例 6 【22 期末. 二、1】

设 $A \in M_n(F)$ ，并且 $A \xrightarrow{(2,3)} B \xrightarrow{-3(4)+(1)} C \xrightarrow{\frac{1}{2}(3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，则 $|A| =$ _____

(A) 3;

(B) -3;

(C) 12;

(D) -12

例 7 【19 期末. 四】计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$$

例 8 【20 期末. 三】计算 n 阶行列式的值

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

10 展开定理

定理 10.1 (1) 行列式的值等于它的任意一行（列）各元素与其对应的代数余子式乘积之和；

(2) 行列式中某一行（列）与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和为 0

以上两条即 $\sum_{i=k}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A|, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, $\sum_{i=k}^n a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} |A|, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

例 9 【17 期末. 二、2】设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$, 用 A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式, 则 $\sum_{k=1}^n k A_{k1} = \underline{\hspace{2cm}}$

例 10 【18 期末. 三】求行列式 D_n 的值, 其中

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

11 Cramer 法则

定理 11.1 (Cramer 法则) 设数域 F 上线性方程组 $AX = B$ 满足 $A \in M_n(F)$ 而且 $D = |A| \neq 0$, 则这一方程组有唯一解, 并且可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 D_i 是将 D 的第 i 列替换为 B 所得的行列式

推论 11.2 设 $A \in M_n(F)$, 则下列论断等价

- (1) $|A| \neq 0$;
- (2) A 的列向量组线性无关;
- (3) A 的行向量组线性无关;
- (4) $\text{rank } A = n$

例 11 【17 期末. 一、1】设矩阵 $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{n \times m}(F)$, 则_____

- (A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$;
- (B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$;
- (C) 当 $m < n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$;
- (D) 当 $m < n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$

例 12 【19 期末. 二、1】设 $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{n \times m}(F), m > n$, 则下列结论正确的是_____

- (A) $|AB| > 0$;
- (B) $|AB| = 0$;
- (C) $|AB| < 0$;
- (D) $|AB|$ 不存在;

例 13 【22 期末. 八】是否存在区间 $[2022, 2023]$ 上的四个实连续函数 $a_{ij}(t)$, 同时满足

$$(1) \text{ 对于任意 } t \in [2022, 2023], A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \text{ 可逆;}$$

$$(2) A(2022) = \begin{pmatrix} \sin 2022 & \cos 2022 \\ -\cos 2022 & \sin 2022 \end{pmatrix}, A(2023) = \begin{pmatrix} -\sin 2023 & \cos 2023 \\ \cos 2023 & \sin 2023 \end{pmatrix}$$

例 14 设 $A \in M_n(F)$, $|A| = d \neq 0$, 并且每行元素之和为 c , 试计算所有代数余子式之和 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$

12 数域上的矩阵

熟悉矩阵的加法、数乘、乘法运算, 看清矩阵的形状

定理 12.1 设 $A, B \in M_n(F)$, 则 $|AB| = |A||B|$

例 15 【21 期末. 四】回答下列问题

(1) 是否存在实二阶方阵 A , 使得 $A^2 = -I$?

(2) 是否存在 5 阶方阵 A , 使得 $A^3 = 0, A^2 \neq 0$?

(3) 设 A 为方阵, 若存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $A^k = 0$, 则称 A 为幂零方阵。两个同阶幂零方阵的乘积是否是幂零方阵?

学会从线性组合的角度理解矩阵乘法

例 16 【19 期末. 八】设 $A \in M_n(F)$, $\exists k \in \mathbb{N}^*, \text{rank } A^k = \text{rank } A^{k+1}$, 证明存在 $B \in M_n(F)$, 使得 $A^k = BA^{k+1}$

例 17 【22 期末. 七】设 $A \in M_n(F)$, $\exists k \in \mathbb{N}^*, \text{rank } A^k = \text{rank } A^{k+1}$, 证明存在 $B \in M_n(F)$, 使得 $A^k = A^{k+1}B$

熟悉分块矩阵的运算, 注意分块要保证乘法的合理性

例 18 【21 期末. 二、3】设 $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{p \times q}(F), M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, 则下列说法正确的有_____

(1) 如果 $C = 0$, 则 $\text{rank } M = \text{rank } A + \text{rank } B$;

(2) 对于一般的矩阵 C , 有 $\text{rank } M = \text{rank } A + \text{rank } B$;

(3) 对于一般的矩阵 C , 有 $\text{rank } M \leq \text{rank } A + \text{rank } B$;

(4) 对于一般的矩阵 C , 有 $\text{rank } M \geq \text{rank } A + \text{rank } B$;

(A) (1)(2);

(B) (1)(3);

(C) (1)(4);

(D) (1)

例 19 【19 期末. 六】设 $A, B \in M_n(F)$, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

熟悉可逆矩阵的定义, 掌握计算方法

定义. (逆矩阵) 设 $A \in M_n(F)$, 若存在 $B \in M_n(F)$, 使得 $AB = BA = I$, 则称 B 为 A 的逆矩阵, 此时 A 称为可逆矩阵

例 20 【20 期末. 一、5】(判断) 若矩阵 A, B 的乘积 $AB = I_n$, 那么 A, B 互为逆矩阵;

例 21 【22 期末. 二、2】下列四个关于矩阵的逆的说法正确的有_____

(1) 可逆对称矩阵的逆还是对称矩阵;

(2) 可逆上三角矩阵的逆还是上三角矩阵;

(3) 初等矩阵的逆还是初等矩阵;

(4) 反对称矩阵一定不可逆

(A) (1)(3);

(B) (1)(2)(3);

(C) (1)(3)(4);

(D) (1)(2)(3)(4);

例 22 【22 期末. 一、5】设 $A, B, C \in M_n(F)$, $B = I + AB$, $C = A + CA$, 则 $B - C =$ _____

例 23 【19 期末. 一、3】设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, A, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $(AP)^{-1} = -(PB)^{-1}$, 则 $|A| =$ _____

例 24 设 $A, B \in M_n(F)$, 而且 $I - AB$ 可逆, 证明 $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$

定义. (伴随矩阵) 设 $A \in M_n(F)$, 则 $A^* := (A_{ji})$

定理 12.2 $A^*A = AA^* = |A|I$, 并且如果 A 可逆, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, $A^* = |A|A^{-1}$

例 25 设 $A \in M_n(F)$, 则 $\text{rank } A^* = \begin{cases} n, & \text{rank } A = n \\ 1, & \text{rank } A = n - 1 \\ 0, & \text{rank } A < n - 1 \end{cases}$

例 26 【17 期末. 二、3】设 $A, B, C \in M_n(F)$, $ABC = I$, 则 $C^*B^*A^* =$ _____

例 27 【20 期末. 二、3】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$, 若 $\text{rank } A^* = 1$, 则 $a =$ _____

(A) 1 或 $-\frac{1}{3}$;

(B) 1;

(C) $-\frac{1}{3}$;

(D) 3

例 28 【22 期末. 一、2】设 $A \in M_n(F)$, $n > 2$, 则 $(A^*)^* =$ _____

例 29 【22 期末. 三】设 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 求 A ;

(2) 当 $|A| < 0$ 时, 求解矩阵方程 $A^{-1}XA = XA + I$

13 初等矩阵与矩阵变换

熟悉三类初等矩阵，掌握它们的计算，用它们来表示初等行（列）变换

熟悉矩阵的相抵标准形，掌握它的性质和计算方法

定理 13.1 设 $A \in M_{m \times n}(F)$ ，则 A 可以经过有限次初等变换化为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，其中 $r = \text{rank } A$

推论 13.2 设 $A \in M_{m \times n}(F)$ ，则存在可逆矩阵 $P \in M_m(F), Q \in M_n(F)$ ，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

掌握分块矩阵的初等变换，用矩阵的乘法进行描述

例 30 【课本例题】设 $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{n \times m}(F)$ ，证明 $|I_m - AB| = |I_n - BA|$

【提示：注意到 $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$ 即可】

例 31 【17 期末. 一、5】设 $A \in M_3(F)$ ，将矩阵 A 的第一行加到第二行得到矩阵 B ，再交换矩阵 B 的第二行与

第三行得单位矩阵。若记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 则矩阵 $A = \underline{\hspace{2cm}}$

(A) $P_1^{-1}P_2$;

(B) P_1P_2 ;

(C) $P_1P_2^{-1}$;

(D) $P_2P_1^{-1}$;

例 32 【20 期末. 一、4】若 $\alpha = (1, 2, \dots, 2021)$ ，则行列式 $|I_{2021} - \alpha^T \alpha|$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

例 33 用初等行变换将矩阵 A 化作相抵标准形 S ，并求出使 $PAQ = S$ 的可逆矩阵 P, Q ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

例 34 【21 期末. 七】设 $A \in M_{m \times n}(F), \text{rank } A = r$ ，证明存在秩为 r 的 $P \in M_{m \times r}(F)$ 和秩为 r 的 $Q \in M_{r \times n}(F)$ ，使得 $A = PQ$

14 秩的第二种定义，秩不等式

定义. (秩的子式定义) 设 $A \in M_{m \times n}(F)$ ，如果存在一个非零 r 阶子式，并且所有 $r+1$ 阶子式（若存在）都为零，则称 r 为 A 的秩，记作 $\text{rank } A = r$

定理 14.1 初等行列变换不改变矩阵的秩

熟悉通过子式定义的秩，掌握重要的秩不等式（注意使用条件）

如果时间充足，建议学会它们的证明

定理 14.2 (一些重要的秩不等式)

(1) $A \in M_{n \times s}(F), B \in M_{n \times t}(F)$ ，则 $\max\{\text{rank } A, \text{rank } B\} \leq \text{rank} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq \text{rank } A + \text{rank } B$

(2) $A, B \in M_{m \times n}(F)$, 则 $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$;

(3) $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{n \times l}(F)$, 则 $\text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$;

(4) $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{n \times l}(F)$, 则 $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n + \text{rank } AB$

例 35 【18 期末. 八】已知矩阵 $A \in M_{n \times (n+1)}(F)$, $\text{rank } A = n$, 且 A 每一行的元素之和为 0, 求证 A 的任意 n 阶子式不为 0

例 36 【20 期末. 一、5】(判断) 存在两个 3×3 秩为 2 的矩阵 A, B 使得 $AB = 0$

例 37 【20 期末. 四】设 $A, B \in M_n(F)$, 证明

(1) 若 $AB = 0$, 则 $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$;

(2) 若 $|A+B| \neq 0$, 则 $\text{rank } A + \text{rank } B \geq n$

例 38 【17 期末. 七】设 $A \in M_n(F)$, 证明存在 $m \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\text{rank } A^m = \text{rank } A^{m+1}$

例 39 【18 期末. 七】设 $A \in M_n(F), A^2 = -A$, 设 $V_1 = \{X \in F^n | AX = 0\}, V_2 = \{X \in F^n | (A+I)X = 0\}$

(1) 证明 $V_1 \oplus V_2 = F^n$;

(2) 证明 $\text{rank } A + \text{rank}(A+I) = n$

例 40 设 $A \in M_n(F), A^2 = I$, 证明 $\text{rank}(A+I) + \text{rank}(A-I) = n$

例 41 【20 期末. 七】设 $a, b, c, d \in \mathbb{C}, A \in M_n(\mathbb{C}), ac \neq 0, ad \neq bc$, 若 $(aA+bI)(cA+dI) = 0$, 则 $\text{rank}(aA+bI) + \text{rank}(cA+dI) = n$

【提示: 令 $B = \frac{2ac}{bc-ad}A + \frac{bc+ad}{bc-ad}I$, 则有 $(B+I)(B-I) = 0$, 使用上一例题结果即可】

例 42 设 $A \in M_n(F), k \in \mathbb{N}$, 证明 $\text{rank } A^k - \text{rank } A^{k+1} \geq \text{rank } A^{k+1} - \text{rank } A^{k+2}$

例 43 设 $A \in M_n(F)$, 若存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $\text{rank } A^m = \text{rank } A^{m+1}$, 证明 $\forall k \in \mathbb{N}, \text{rank } A^m = \text{rank } A^{m+k}$

例 44 设 $A, B \in M_{m \times n}(F)$, 证明 $\text{rank } A + \text{rank } B + \text{rank}(A+B) \geq \text{rank} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} + \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

15 数域上的多项式

掌握基本运算, 熟悉带余除法的计算

从线性空间的角度理解多项式的相等

定理 15.1 $F[x]$ 是数域 F 上的无穷维线性空间, $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ 构成它的一组基

推论 15.2 两个多项式相等 \iff 相同次数项的系数相同

定理 15.3 (带余除法) 设 $f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0$, 则存在唯一的 $q(x), r(x) \in F[x]$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x)$$

例 45 【22 期末. 一、3】设 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg g(x)$, $g(x) \neq 0$, $h(x) \neq 0$, 则 $f(x)h(x)$ 除以 $g(x)h(x)$ 所得的商为____, 余式为____

例 46 【21 期末. 五】设 $a \neq b$, 证明多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得的余式为 $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x + f(a) - a\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

例 47 给定 $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, 求所有 $f(x) \neq 0 \in \mathbb{R}[x]$, 使得 $f(x^k) = (f(x))^k$

熟悉最大公因式的定义 (($f(x), g(x)$) 要求首一)、计算方法 (辗转相除法)

特别的, 熟悉多项式互素的定义和性质

定理 15.4 设 $f(x), g(x) \in F[x], d(x) = (f(x), g(x))$, 则存在 $u(x), v(x) \in F[x]$, 使得 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$

例 48 【21 期末. 二、4】(判断) 设 $f(x), g(x)$ 是数域 F 上的多项式, 如果存在 $u(x), v(x) \in F[x]$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, 则 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式;

例 49 【21 期末. 二、4】(判断) 如果 $f(x), g(x)$ 互素, 那么 $f(x^m), g(x^m)$ 互素, 这里 $m \in \mathbb{N}^*$;

例 50 【21 期末. 二、4】(判断) 如果 $f_1(x), \dots, f_s(x)$ 互素, 则 $f_1(x), \dots, f_s(x)$ 两两互素;

例 51 设 $(f(x), g(x)) = 1$, 则下列论断不对的是____

(A) $(f(x), f(x) - g(x)) = 1$;

(B) $(f(x) + g(x), f(x) - g(x)) = 1$;

(C) $((f(x))^2, (g(x))^2) = 1$;

(D) $(xf(x) - g(x), f(x) - g(x)) = 1$;

例 52 【22 期末. 四】已知 $f(x) = 3x^3 - 4x + 5, g(x) = x^2 - 2x - 1$

(1) 求 $(f(x), g(x))$;

(2) 求多项式 $u(x), v(x)$, 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$

熟悉不可约多项式的定义 (次数 ≥ 1) 和性质

定义. 设 $f(x) \in F[x], \deg f(x) \geq 1$, 如果 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $g(x), h(x) \in F[x], \deg g(x), \deg h(x) \geq 1$, 则称 $f(x)$ 在数域 F 上可约, 否则称 $f(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式

定理 15.5 (因式分解的存在和唯一性) 设 $f(x) \in F[x], \deg f(x) \geq 1$, 则它可以分解为 $F[x]$ 中有限个不可约多项式的乘积, 并且分解式在不计次序和相差不为零常数倍的意义下是唯一的

例 53 【22 期末. 二、5】(判断) 设 $p(x), f(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \mathbb{Q}$, 若 $p(x)$ 不可约且和 $f(x)$ 有公共复根, 则 $p(x) \mid f(x)$

例 54 多项式 $f(x) = x^4 - x^2 - 2$ 在 \mathbb{R} 上的标准分解式为____

了解重根的定义和判别方法

定理 15.6 设 $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, $p(x)$ 是不可约多项式, 则 $p(x)$ 是 $(f(x), f'(x))$ 的 k 重因式 $\iff p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式

例 55 【21 期末. 一、4】已知多项式 $f(x) = x^3 - 3x^2 + tx - 1$ 有重根, 则 $t =$ _____

例 56 【21 期末. 二、5】(判断) 在 $F[x]$ 中, 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 k 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式

例 57 【21 期末. 二、5】(判断) 设 $p(x)$ 是数域 F 上次数 ≥ 1 的多项式, 如果在 $F[x]$ 中 $p(x)$ 的因式只有非零常数和 $p(x)$ 的非零常数倍, 那么 $p(x)$ 是 F 上的不可约多项式

例 58 【21 期末. 二、5】(判断) 设数域 K 包含数域 $F, f(x) \in F[x]$, 如果 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中没有重因式, 则 $f(x)$ 在 $K[x]$ 中可能有重因式

熟悉 \mathbb{C} 和 \mathbb{R} 上因式分解的特点

定理 15.7

(1) 设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 则 $f(x)$ 可以唯一分解为 $\mathbb{C}[x]$ 中一次因式的乘积;

(2) 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 则 $f(x)$ 可以唯一分解为 $\mathbb{R}[x]$ 中一次因式或二次不可约因式的乘积

例 59 【22 期末. 二、5】(判断) $x^4 - 3x^3 + 9x - 21$ 在 \mathbb{R} 上不可约

16 有理系数多项式

$\mathbb{Q}[x]$ 上的因式分解实际上可以归结到 $\mathbb{Z}[x]$ 上, 这是 Gauss 引理的推论

定理 16.1 (有理根定理) 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, 如果有理数 $c = \frac{s}{t}$ 是 $f(x)$ 的根, 其中 $s, t \in \mathbb{Z}, t \neq 0, (s, t) = 1$, 则 $t \mid a_n, s \mid a_0$

例 60 (判断) 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 而且首项系数为 1, 则 $f(x)$ 的有理根必为整数

例 61 证明 $f(x) = x^3 - 6x - 1$ 在 \mathbb{Q} 上不可约

学会使用 Eisenstein 判别法

定理 16.2 (Eisenstein 判别法) 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, 如果存在素数 p 满足

(1) $p \nmid a_n$;

(2) $p \mid a_i, \forall 0 \leq i \leq n-1$;

(3) $p^2 \nmid a_0$

则 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约

例 62 【22 期末. 二、5】(判断) $x^4 - 3x^3 + 9x - 21$ 在 \mathbb{Q} 上不可约;

例 63 【21 期末. 六】证明多项式 $f(x) = x^4 + 4kx + 1, k \in \mathbb{N}$ 在有理数域上不可约

例 64 证明多项式 $f(x) = x^p + px + 1, k \in \mathbb{N}$ 在有理数域上不可约, 其中 p 是奇素数

17 多项式理论的应用

例 65 用多项式理论证明包含 $\sqrt[3]{3}$ 的最小数域是 $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}] = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

以下问题使用“摄动法”解决

例 66 【课本例题】设 $A, B, C, D \in M_n(F)$, 且 $AC = CA$, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

【提示：如果 A 可逆，对 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 进行分块变换即可，如果 A 不可逆，考虑 $\lambda I + A$ ，上式两端都是 λ 的多项式】

例 67 【21 期末. 八】设 $A \in M_n(F), B \in M_{1 \times n}(F), C \in M_{n \times 1}(F)$, 证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & B \\ C & A \end{vmatrix} = -BA^*C$$

例 68 设 $A, B \in M_n(F), AB = BA$, 证明 $AB^* = B^*A$

如果没有特别说明，总假定数域为 F , U, V 等是 F 上的有限维线性空间。另外，从第 2 小节开始，我们总考虑线性变换（而非线性映射）。

18 线性映射/变换的概念

定义. (线性映射和线性变换) 设 $\sigma: U \rightarrow V$ 是一个映射，如果它具有线性性，即

(1) 加法：任意 $\alpha, \beta \in U$, 都有 $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$;

(2) 数乘：任意 $k \in F, \alpha \in U$, 都有 $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$

则称 σ 是从 U 到 V 的一个**线性映射**。特别的，如果 $U = V$, 即 σ 是从 U 到 U 的一个线性映射，则称 σ 是 U 上的一个**线性变换**。

例 1 【22 期中. 二、3】考虑 $F[x]_n, n \geq 1$ 上的变换 $\sigma: \sigma(f(x)) = f(x+3)$, σ 是否是线性变换？

线性映射的定义与上学期所学线性空间之间的同态是相同的，它具有以下性质

定理 18.1 (线性映射与线性相关性)

我们将从 U 到 V 的所有线性映射放到一起，这样可以得到一个集合，记作 $L(U, V)$ 或者 $\text{Hom}_F(U, V)$ 。如果 $U = V$, 那么也简记为 $L(U)$ 或者 $\text{End}_F(U)$ 。赋予 $L(U, V)$ 以下三种运算，可以验证 $(L(U, V), +, \cdot)$ 构成一个 F 上的线性空间。

定义. ($L(U, V)$ 上的运算)

(1) 加法 $+$: $(\sigma + \tau)(\alpha) := \sigma(\alpha) + \tau(\alpha)$;

(2) 数乘 \cdot : $(k \cdot \sigma)(\alpha) := k(\sigma(\alpha))$;

(3) 复合 \circ : $(\sigma \circ \tau)(\alpha) := \sigma(\tau(\alpha))$ 。

以上运算和矩阵非常相似, 这启发我们通过矩阵研究线性映射。

19 线性变换的矩阵

以下总设 U 是 F 上的 n 维线性空间, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 是 U 的一组基。

定理 19.1 (线性变换与基)

(1) (一组基的像可以决定一个线性变换) 设任意 n 个向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in U$, 则存在一个线性变换 σ , 它满足

$$\sigma(\varepsilon_1) = \alpha_1, \dots, \sigma(\varepsilon_n) = \alpha_n;$$

(2) (以上关系的唯一性) 设 $\sigma, \tau \in L(U)$, 如果

$$\sigma(\varepsilon_1) = \tau(\varepsilon_1), \dots, \sigma(\varepsilon_n) = \tau(\varepsilon_n)$$

那么便有 $\sigma = \tau$ 。

例 2 考虑 n 维线性空间 $F[x]_n$, 它有一组基 $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$, 对于 $c \in F$, 定义映射 $\sigma: \{1, x, \dots, x^{n-1}\} \rightarrow F[x]_n$

$$\sigma_c(x^m) = (x+c)^m \in F[x]_n, 0 \leq m \leq n-1$$

(1) 可以补充定义, 使得 σ_c 成为 $F[x]_n$ 上的线性变换, 并且

$$\sigma_c(f(x)) = f(x+c) \in F[x]_n, f(x) \in F[x]_n$$

(2) 如果 $c_1 \neq c_2$, 那么 $\sigma_{c_1} \neq \sigma_{c_2}$ 。

定义. (线性变换的矩阵) 用 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 线性表出 $\{\sigma(\varepsilon_1), \dots, \sigma(\varepsilon_n)\}$

$$\sigma(\varepsilon_1) = a_{11}\varepsilon_1 + \dots + a_{n1}\varepsilon_n$$

.....

$$\sigma(\varepsilon_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + \dots + a_{nn}\varepsilon_n$$

形式上可以记作 $\sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (\sigma(\varepsilon_1), \cdots, \sigma(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)A$, 这里的矩阵 $A = (a_{ij})$ 被称为 σ 在一组基 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 下的矩阵。

例 3 【22 期中. 二、1】写出平面 \mathbb{R}^2 上列线性变换在自然基下的矩阵

(1) 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$;

(2) 关于直线 $y = 2x$ 的反射。

从定理 2.1 可以证明, 取定一组基后一个线性变换和它的矩阵可以唯一地互相决定, 由此我们可以通过矩阵来描述一个线性变换。作为最初步的性质, 我们有

定理 19.2 (线性变换与矩阵的关系) 设 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 是 U 的一组基, 对于任意 $\sigma \in L(U)$, 记 $M(\sigma)$ 为 σ 在 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 下的矩阵。则 $M: L(U) \rightarrow M_n(F)$ 有以下性质

(1) 双射: 任意 $A \in M_n(F)$, 存在 (满的) 唯一 (单的) $\sigma \in L(U)$, 使得 $M(\sigma) = A$;

(2) 加法: 任意 $\sigma, \tau \in L(U)$, 都有 $M(\sigma + \tau) = M(\sigma) + M(\tau)$;

(3) 数乘: 任意 $k \in F, \sigma \in L(U)$, 都有 $M(k\sigma) = kM(\sigma)$;

(4) 乘法: 任意 $\sigma, \tau \in L(U)$, 都有 $M(\sigma \circ \tau) = M(\sigma)M(\tau)$;

(5) 作为 (4) 的推论, σ 可逆 $\iff M(\sigma)$ 可逆, 并且 $M(\sigma^{-1}) = (M(\sigma))^{-1}$

以上 (1)(2)(3) 说明 $M: L(U) \rightarrow M_n(F)$ 是线性空间之间的同构。结合 (4)(5) 说明 M 是 F -代数同构, 这比线性空间的同构更强。

例 4 【21 期中. 二、1】在 F^3 中, 线性变换 $T: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)$ 在基 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 下的矩阵为_____。

例 5 【20 期中. 一、3】定义 $M_2(F)$ 上的线性变换 σ 如下:

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

则 σ 在 $M_2(F)$ 的自然基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为_____。

20 线性变换在不同基下的矩阵

定义. (不同基之间的过渡矩阵) 设 U 是 F 上的 n 维线性空间, $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, T = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 是 U 的两组基, 用 S 线性表出 T 如下

$$\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + \cdots + p_{n1}\alpha_n$$

.....

$$\beta_n = p_{1n}\alpha_1 + \cdots + p_{nn}\alpha_n$$

形式上可以记作 $(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)P$, 这里的矩阵 $P = (p_{ij})$ 被称为从 S 到 T 的过渡矩阵。

注记. 这里的顺序不能颠倒! 从 S 到 T 的过渡矩阵是 P , 可以粗略地理解为 S 通过右乘 P 得到 T 。

定理 20.1 (过渡矩阵) 以上定义地从 S 到 T 的过渡矩阵是唯一的, 并且是可逆的, 此外从 T 到 S 的过渡矩阵是 P^{-1} 。

定理 20.2 (过渡矩阵和向量坐标的关系) 设 U 是 F 上的 n 维线性空间, $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, T = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 是 U 的两组基, P 是从 S 到 T 的过渡矩阵。对于向量 $\alpha \in U$, 如果 α 在 S 下的坐标为 $X = (x_i)$, 在 T 下的坐标为 $Y = (y_j)$, 则我们有 $X = PY$ 。

注记. 一定要区分一个向量和它的坐标! 在这个定理中, 一个向量在不同基下对应于不同的坐标, 它们的关系是

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X = (\beta_1, \cdots, \beta_n)Y$$

下面的例子(非数组向量)有助于理解。

例 6 在 $F[x]_3$ 中, $S = \{1, x, x^2\}, T = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ 是两组基, 向量 $\alpha = 1 + x + 2x^2$

$$(1) (1, x-1, (x-1)^2) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 是从 } S \text{ 到 } T \text{ 的过渡矩阵;}$$

(2) α 在两组基下的坐标为 $X = (1, 1, 2)^T$ 和 $Y = (4, 5, 2)^T$, 这可以通过配方或者求导计算出来, 所以有

$$1 + x + 2x^2 = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1, x-1, (x-1)^2) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ 不难验证 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ 此即 } X = PY.$$

例 7 【20 期中. 五】设 σ 是 \mathbb{R}^3 上的线性变换。已知 $\sigma((2, -2, 1)^T) = (4, -2, 2)^T, \sigma((1, 1, -2)^T) = (5, -7, 2)^T$

(1) 求 $\sigma((-1, 3, -3)^T)$;

(2) 若 $\sigma((1, 1, 1)^T) = (15, -9, 6)^T$, 求 σ 在基 $(2, -2, 1)^T, (1, 1, -2)^T, (1, 1, 1)^T$ 下的矩阵 A , 并判断 σ 是否可逆。

定理 20.3 (线性变换在不同基下矩阵的关系) 设 U 是 F 上的 n 维线性空间, $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, T = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 是 U 的两组基, P 是从 S 到 T 的过渡矩阵。若 U 上线性变换 σ 在 S 和 T 下的矩阵分别为 A 和 B , 则我们有 $B = P^{-1}AP$ 。

注记. 从形式上可以这样理解:

$$\begin{aligned}(\beta_1, \cdots, \beta_n)B &= \sigma(\beta_1, \cdots, \beta_n) \\ &= \sigma((\alpha_1, \cdots, \alpha_n)P) = \sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)P \\ &= (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)AP = (\beta_1, \cdots, \beta_n)P^{-1}AP\end{aligned}$$

定义. (矩阵的相似) 设 $A, B \in M_n(F)$ 如果存在可逆矩阵 $P \in M_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 相似, 记作 $A \sim B$.

利用矩阵的运算和性质, 可以证明相似矩阵具有以下性质

定理 20.4 (相似矩阵的性质) 设 $A, B \in M_n(F), A \sim B$, 则有

- (1) $\text{rank } A = \text{rank } B$;
- (2) $\text{tr } A = \text{tr } B$;
- (3) $|A| = |B|$;
- (4) 若 A 可逆, 则 B 也可逆, 而且有 $A^{-1} \sim B^{-1}$;
- (5) 设 $f(x) \in F[x]$, 则有 $f(A) \sim f(B)$.

例 8 【20 期中. 二、4】 设 $A \in M_n(F)$, 且 A 可逆, 则下列结论正确的是_____。

- | | |
|-------------------|--------------------------|
| (A) A 与 B 相似; | (C) AB 与 BA 相似且等价; |
| (B) A 与 B 等价; | (D) AB 与 BA 等价却不一定相似 |

例 9 【21 期中. 一、3】 从下列矩阵中, 选出与 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 相似的矩阵_____。

- | | |
|---|---|
| (A) $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 3 & & \end{pmatrix}$; | (C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; | (D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |

21 像与核

定义. (像与核) 设 σ 是 U 上的线性变换

- (1) 定义 $\text{Im } \sigma = \{\sigma(\alpha) \in U | \alpha \in U\}$;

(2) 定义 $\text{Ker } \sigma = \{\alpha \in U | \sigma(\alpha) = 0\}$ 。

容易验证以下性质

定理 21.1 (像与核都是子空间) 对于 U 上的线性变换 σ , $\text{Ker } \sigma, \text{Im } \sigma$ 都是 U 的子空间。

正是因为这一点, 我们可以谈论它们的维数, 并且利用线性相关性的理论来研究像与核。

定理 21.2 (像与核的维数公式) 设 σ 是 U 上的线性变换, 则有

$$\dim U = \dim \text{Im } \sigma + \dim \text{Ker } \sigma$$

定义. (线性变换的秩) 我们定义 U 上线性变换 σ 的秩 $\text{rank } \sigma = \dim \text{Im } \sigma$ 。以上维数关系可以写成 $\dim U = \text{rank } \sigma + \dim \text{Ker } \sigma$ 。

通过以下定理, 我们能更好地理解线性变换和矩阵的对应关系。

定理 21.3 (线性变换和矩阵的秩) 设 σ 是 U 上的线性变换, A 是 σ 在某组基下的矩阵, 则我们有

(1) $\text{rank } A = \text{rank } \sigma$;

(2) $\dim V_A = \dim \text{Ker } \sigma$ 。

注记. 以上关系 $\dim V_A = \dim \text{Ker } \sigma$ 并不表示 $V_A = \text{Ker } \sigma$! 它们实际上处于两个截然不同的空间之中, 只是因为维数相同而线性同构。

定理 21.4 (单射与满射等价) 设 σ 是有限维线性空间 U 上的线性变换, 则以下几条等价

(1) σ 是可逆线性变换;

(2) $\text{Ker } \sigma = \{0\}$, 即 σ 是单射;

(3) $\text{Im } \sigma = U$, 即 σ 是满射。

例 10 【21 期中. 三】定义 $M_2(\mathbb{R})$ 上的线性变换如下:

$$\sigma(X) = AX - XA, \forall X \in M_2(\mathbb{R}), \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

分别求 $\text{Im } \sigma$ 和 $\text{Ker } \sigma$ 的维数和一组基。

例 11 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 上的线性变换, $\text{rank } \sigma = n-1$, 并且存在 $k \in \mathbb{N}_*$, 使得 $\sigma^k = 0$ 。

证明: 存在 $\alpha \in V$, 使得

$$V = L\{\alpha, \sigma(\alpha), \dots, \sigma^{n-1}(\alpha)\}$$

例 12 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 上的线性变换。证明以下几条等价:

(1) $V = \text{Ker } \sigma \oplus \text{Im } \sigma$;

$$(2) \operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Ker} \sigma^2;$$

$$(3) \operatorname{Im} \sigma = \operatorname{Im} \sigma^2.$$

例 13 设 V 是 n 维线性空间, σ, τ 是 V 上的线性变换, 并且 $\sigma\tau = \sigma$, 证明 $\operatorname{Ker} \sigma \cap \operatorname{Im} \tau = \{0\} \iff \operatorname{rank} \sigma = \operatorname{rank} \tau$.

22 特征值与特征向量

一个矩阵能否相似对角化是非常重要的问题, 我们正是以此为动机提出特征值和特征向量的概念。

定义. (特征值和特征向量)

(1) 设 $\sigma \in L(U)$ 是 U 上的线性变换, 如果存在 $\lambda \in F, \alpha \neq 0 \in U$, 使得

$$\sigma(\alpha) = \lambda\alpha$$

则称 λ 是 σ 的一个特征值, 并称 α 是属于 λ 的一个特征向量;

(2) 设 $A \in M_n(F)$ 是 F 上的 n 阶方阵, 如果存在 $\lambda \in F, X \neq 0 \in F^n$, 使得

$$AX = \lambda X$$

则称 λ 是 A 的一个特征值, 并称 X 是属于 λ 的一个特征向量。

出于方便, 以下这些性质均以矩阵为例进行叙述, 这些结论对于线性变换往往也是成立的。

定理 22.1 (特征值和特征向量的初步性质) 设 $A \in M_n(F)$

(1) 设 λ 是 A 的特征值, $X_1 \neq X_2$ 是属于 λ 的特征向量, 则

- $X_1 - X_2$ 是属于 λ 的特征向量;
- 任意 $k \neq 0 \in F$, 都有 kX_1 是属于 λ 的特征向量

(2) 由 (1) 可知, $V_\lambda = \{X \in F^n | X \text{ 是 } A \text{ 的特征向量}\} \cup \{0\}$ 是 F^n 的一个子空间, 称为属于 λ 的特征子空间;

(3) 设 $f(x) \in F[x], \lambda$ 是 A 的特征值, X 是属于 λ 的特征向量, 则

- $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值;
- X 是 $f(A)$ 的属于 $f(\lambda)$ 的特征向量

注记. 以上定理的 (3) 反过来并不成立, 即 $f(\lambda)$ 是 A 的特征值 $\nRightarrow \lambda$ 是 A 的特征值; X 是 $f(A)$ 的特征向量 $\nRightarrow X$ 是 A 的特征向量, 因此它们往往具有不同的特征子空间。

例 14 【21 期中. 一、5】设 A 是 \mathbb{R} 上的 n 阶矩阵, 则下列说法与 “ A 可逆” 等价的为_____。

(1) A 的列向量组线性无关;

- (2) $\text{Ker } A = \{0\}$;
- (3) $\text{Im } A = \mathbb{R}^n$;
- (4) $\text{rank } A = n$;
- (5) $|A| \neq 0$;
- (6) 0 不是 A 的特征值。

例 15 【21 期中. 一、2】设 U 是 \mathbb{R} 上的 3 维线性空间, σ 是 U 上的线性变换, 则下列关于 σ 的特征值和特征向量的说法, 错误的是_____

- (A) σ 可能没有特征值;
- (B) 如果 α 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 则 $k\alpha, k \neq 0 \in \mathbb{R}$ 也是 σ 的属于 λ_0 的特征向量;
- (C) 设 λ_1, λ_2 是 σ 的两个不同的特征值, α_1, α_2 分别为属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 σ 的特征向量;
- (D) 如果 λ_0 是 σ 的特征值, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(\sigma)$ 的特征值。

例 16 【20 期中. 七】证明

- (1) 若 α, β 分别是属于特征值 λ, μ 的特征向量, 且 $\lambda \neq \mu$, 则 $\alpha + \beta$ 不是特征向量;
- (2) 若线性空间 V 上的线性变换 σ 以所有非零向量为特征向量, 则 σ 必是 V 上的数乘变换。

例 17 【21 期中. 二、2】设 $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ b & 1 & -2 \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个特征值 $0, 1, -2$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

例 18 【21 期中. 二、4】设 $A \in M_3(F)$, 且 A 为对称矩阵, 特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。若 A 的一个属于 -1 的特征向量为 $\alpha = (0, 1, 1)^T$, 则 $A = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

例 19 【21 期中. 六】设 σ 为 n 维线性空间 U 上的线性变换, 满足 $\sigma^2 = \sigma$ 。证明

- (1) σ 的特征值只可能为 $0, 1$;
- (2) 记 V_0, V_1 分别为特征值 $0, 1$ 的特征子空间, 则

$$\dim V_0 + \dim V_1 = n$$

(3) σ 在 U 的某组基下的矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ 。

定理 22.2 (特征向量和可对角化)

(1) 设 $\sigma \in L(U)$, 其中 U 是 F 上的 n 维线性空间, 则 σ 可对角化 $\iff \sigma$ 有 n 个线性无关的特征向量;

(2) 设 $A \in M_n(F)$, 则 A 可对角化 $\iff A$ 有 n 个线性无关的特征向量。

定义. (特征多项式) 设 $A \in M_n(F)$, 称 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 为 A 的特征多项式, 为了区分, 有时也记作 $f_A(\lambda)$ 。

定理 22.3 (特征多项式的性质) 设 $A \in M_n(F)$, $f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ 为 A 的特征多项式。

(1) λ_0 是 $f_A(\lambda)$ 的根 $\iff \lambda_0$ 是 A 的特征值;

(2) 由 (1) 可知, 做分解 $f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, 则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值;

(3) 由 (2) 结合 Vieta 定理可知

- $|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$;
- $\text{tr } A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

(4) 若 $A \sim B$ 则 $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$ 。

例 20 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$, 并且 $\beta^T A \alpha \neq 0$ 。设 $B = A \alpha \beta^T \in M_n(\mathbb{C})$, 证明矩阵 B 可对角化。

23 特征子空间与对角化, 不变子空间与准对角化

定义. (特征子空间)

(1) 设 $A \in M_n(F)$, $\lambda \in F$ 是 A 的特征值, 则 $V_\lambda = \{X \in F^n | AX = \lambda X\} = V_{A - \lambda I}$ 称为 A 的属于特征值 λ 的特征子空间;

(2) 设 U 是数域 F 上的线性空间, $\sigma \in L(U)$, λ 是 σ 的特征值, 则 $V_\lambda = \{\alpha \in U | \sigma(\alpha) = \lambda \alpha\} = \text{Ker}(\sigma - \lambda I)$ 称为 σ 的属于 λ 的特征子空间。

例 21 【22 期中. 一、3】给定方阵 A , 下列关于 A 的那些性质在相似变换下保持不变_____。

- | | |
|------------|----------|
| (1) 特征多项式; | (4) 像空间; |
| (2) 特征子空间; | (5) 核空间。 |
| (3) 最小多项式; | |

下面的定理是进行子空间分解的依据。

定理 23.1 (特征子空间的直和) 设 U 是数域 F 上的线性空间, $\sigma \in L(U)$, 则对于 σ 属于不同特征值 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} , 它们的和为直和。

以下定义代数重数与几何重数, 并且给出矩阵可对角化的一个等价条件。

定义. (代数重数与几何重数) 设 $A \in M_n(F)$, 它的特征多项式为 $f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{n_t}$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t \in \mathbb{C}$ 是 A 的全部不同的特征值

- (1) 称 n_i 为特征值 λ_i 的代数重数;
- (2) 称 $m_i = \dim V_{\lambda_i}$ 为特征值 λ_i 的几何重数。

定理 23.2 (几何重数与代数重数)

- (1) 几何重数不超过代数重数, 即 $1 \leq m_i \leq n_i, 1 \leq i \leq t$;
- (2) 矩阵 A 可对角化 $\iff m_1 + \cdots + m_t = n \iff m_i = n_i, 1 \leq i \leq t$;
- (3) 作为 (2) 的推论, 如果 A 的所有特征值都是单根, 则 A 在 \mathbb{C} 上可对角化。

例 22 【20 期中. 一、5】(判断) 设 $A \in M_n(F)$, 则 A 可对角化当且仅当 A 的特征多项式在 F 中有 n 个根 (计重数)。

例 23 设 $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c & & & a \end{pmatrix} \in M_n(F)$, 求 A 可对角化的充要条件。

引入不变子空间的概念, 它比特征子空间更加广泛, 并且可以给出矩阵可准对角化的条件。

定义. (不变子空间) 设 U 是数域 F 上的线性空间, $\sigma \in L(U)$ 。若 V 是 U 的子空间, 并且满足 $\sigma(V) \subseteq V$, 则称 V 是一个 σ 的不变子空间。

定理 23.3 (可交换的线性变换与不变子空间) 设 U 是数域 F 上的线性空间, $\sigma, \tau \in L(U)$ 。若 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 则 $\text{Im } \tau, \text{Ker } \tau$ 都是 σ 的不变子空间; $\text{Im } \sigma, \text{Ker } \sigma$ 都是 τ 的不变子空间。

如果 $U = V \oplus W$, 其中 V, W 是 σ 的不变子空间, 则 σ 在某组基下的矩阵是准对角阵。进行推广就能得到

定理 23.4 (准对角化的条件) 设 U 是数域 F 上的线性空间, $\sigma \in L(U)$, 则 σ 在某组基下的矩阵为准对角阵 $\iff U$ 可以分解成一些 σ 的不变子空间的直和。

例 24 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ, τ 是 V 上的线性变换, $\sigma\tau = \tau\sigma$, 并且 σ 可对角化。证明存在 V 的一组基, 使得 σ, τ 在这组基下的矩阵均为准对角矩阵。

24 零化多项式与最小多项式

定义. (零化多项式与最小多项式)

- (1) 设 $A \in M_n(F)$, 如果 $f(x) \neq 0 \in F[x]$ 满足 $f(A) = 0$, 则称 $f(x)$ 是 A 的一个零化多项式。我们称 A 所有零化多项式中次数最低的首一多项式为 A 的最小多项式。
- (2) 设 U 是数域 F 上的线性空间, $\sigma \in L(U)$, 如果 $f(x) \neq 0 \in F[x]$ 满足 $f(\sigma) = 0$, 则称 $f(x)$ 是 σ 的一个零化多项式。我们称 σ 所有零化多项式中次数最低的首一多项式为 σ 的最小多项式。

定理 24.1 (零化多项式与最小多项式)

- (1) (存在性) 任意 $A \in M_n(F)$ 都存在零化多项式;
- (2) (Hamilton-Caley) 对于任意 $A \in M_n(F)$, 它的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 是一个零化多项式;
- (3) (最小多项式是零化多项式的因式) 设 $A \in M_n(F)$, $f(x)$ 是它的一个零化多项式, $d(x)$ 是它的一个最小多项式, 则 $d(x) \mid f(x)$;
- (4) (最小多项式的唯一性) 由 (3) 可知, 最小多项式存在且唯一;
- (5) (和矩阵相似的关系) 相似的矩阵具有相同的零化多项式, 因此具有相同的最小多项式;
- (6) (与特征值的关系 I) 设 $A \in M_n(F)$, $f(x)$ 是它的一个零化多项式, 则 A 的任意特征值都是 $f(x)$ 的根;
- (7) (与特征值的关系 II) 设 $A \in M_n(F)$, $d(x)$ 是它的最小多项式, 则 $d(x)$ 的任意根都是 A 的特征值。

例 25 (判断) 如果矩阵 $A, B \in M_n(F)$ 有相同的特征多项式、最小多项式, 则它们相似。

定理 24.2 (最小多项式与可对角化) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 可对角化 $\iff A$ 的最小多项式没有重根。

例 26 【21 期中. 一、4】下列说法错误的是_____。

- (A) 如果 $A \in M_4(\mathbb{R})$ 满足 $A^3 - A^2 - 4A + 4I = 0$, 则 A 在 \mathbb{R} 上一定可对角化;
- (B) 如果 $B \in M_n(F)$ 满足 $B^5 = 0$, 则 B 只有一个特征值 0;
- (C) 属于 F 上的矩阵的最小多项式和特征多项式在 F 中有相同的根;
- (D) 有相同特征多项式和最小多项式的两个矩阵一定相似。

例 27 【21 期中. 二、5】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的最小多项式为_____。

例 28 【21 期中. 五】设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 证明

- (1) A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 是 A 的任一个零化多项式 $\varphi(\lambda)$ 的因式;
- (2) 若 λ_0 是 A 的特征值, 则 $d(\lambda_0) = 0$ 。

例 29 设 $A \in M_n(F)$, 证明

- (1) A 是幂零矩阵, 即存在 $k \in \mathbb{N}_*$, 使得 $A^k = 0 \iff A$ 的特征值都为 0;
- (2) 若 $\text{rank } A = 1$, 则 A 是幂零矩阵 $\iff \text{tr } A = 0$;

现在我们可以给出判断一个矩阵在 \mathbb{C} 上可对角化的种种条件。需要注意, 即使一个矩阵在 \mathbb{C} 上可对角化, 在更小的数域 F 上也不一定可以对角化。

定理 24.3 (\mathbb{C} 上可对角化的条件) 设矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 在 \mathbb{C} 上可对角化有如下

➤ 充分必要条件

- (1) 存在 n 个线性无关的特征向量;
- (2) 所有特征子空间的直和为 \mathbb{C}^n ;
- (3) 所有特征子空间的维数之和为 n ;
- (4) 所有特征值的代数重数都等于几何重数;
- (5) A 的最小多项式 $d(x)$ 没有重根。

➤ 充分条件

- (1) 所有特征值的代数重数都为 1;
- (2) 如果矩阵 A 可对角化, $f(x) \in F[x]$, 则 $f(A)$ 也可对角化。

注记. 设 $A \in M_n(F)$, 则 A 在数域 F 上可对角化意味着:

- (1) A 的全部特征值都在 F 中, 或者说特征多项式 $f_A(\lambda)$ 可以在 F 上分解为 1 次因式的乘积;
- (2) A 满足以上在 \mathbb{C} 上可对角化的任一条件, 即作为 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是可对角化的。

例 30 【20 期中. 二、5】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 可相似对角化, 求 b 。

例 31 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 可对角化, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 证明 $B = \begin{pmatrix} A & f(A) \\ f(A) & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$ 也可对角化。

例 32 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, 试证明以下结论

- (1) 若 $A \in M_n(F)$ 满足 $A^2 = A$, 则 $\text{tr } A = \text{rank } A$;
- (2) 设 σ 是 V 上的线性变换, 满足 $\sigma^m = \text{id}_V$, 证明 σ 在 \mathbb{C} 上可对角化;
- (3) 对于 (2) 中的 σ , 设 V_1 为特征值 1 的特征子空间, 并且定义 V 上的线性变换 $\tau = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \sigma^i$, 则有

$$\text{tr } \tau = \dim V_1.$$

例 33 设 $A \in M_n(F)$, A 可对角化。定义 $M_n(F)$ 上的线性变换 $\sigma: X \rightarrow AXA^T$ 。证明 σ 可对角化。

例 34 设 $A \in M_n(F)$, A 可对角化。定义 $M_n(F)$ 上的线性变换 $\sigma: X \rightarrow AX^T A^T$ 。证明 σ 可对角化。

25 Jordan 形简介

定理 25.1 (相似上三角化) 设矩阵 $A \in M_n(F)$, 则 A 在 \mathbb{C} 上相似于一个上三角形矩阵。

作为更强的结论,任何矩阵都在 \mathbb{C} 上相似于一个 Jordan 形矩阵。我们并不打算给出这一结论的证明,而是打算给出一些例子,这能帮助大家理解可对角化矩阵的性质,也有助于构造反例。

定义. (Jordan 块和 Jordan 形矩阵)

(1) 设 $a \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}_*$, 则矩阵
$$\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{C})$$
 被称为一个 m 阶 Jordan 块, 记作 $J_m(a)$;

(2) 形如
$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(a_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(a_k) \end{pmatrix},$$
 其中 $a_i \in \mathbb{C}, m_i \in \mathbb{N}_*, 1 \leq i \leq k$ 的矩阵被称为 Jordan 形矩阵。

例 35 以下矩阵都是 Jordan 形矩阵

(1) 任意对角形矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$;

$$(2) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{pmatrix};$$

$$(3) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 25.2 (Jordan 形的主定理) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 一定相似于一个 Jordan 形矩阵 J , 并且矩阵 J 的各个 Jordan 块在不计顺序的意义下是唯一的。

注记. 这一定理的结论可以记住, 但是因为课本并没有给出证明, 在考试的解答题中不能使用它!

例 36 证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 不相似。

例 37 证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 相似。

例 38 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 上的线性变换, $(\sigma - \text{id}_V)^n = 0, (\sigma - \text{id}_V)^{n-1} \neq 0$ 。证明存在

V 的一组基, 使得 σ 在这组基下的矩阵为
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

例 39 对 $a \neq 0$ 证明

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & a & & & \\ & a & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & a \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

26 二次型及其矩阵

在本节中，数域总设为 F 。

定义. (n 元二次型及其矩阵)

- (1) 称 F 上的 n 元二次多项式 $f = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$ 为 F 上的一个 n 元二次型。如果 $F = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} ，则称它为一个实二次型或复二次型；
- (2) 对于 $i > j$ ，令 $a_{ij} = a_{ji}$ ，由此得到一个**对称矩阵** $A = (a_{ij})$ ，如果令 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ，则有 $f = X^T A X$ 。称 A 为二次型 f 的矩阵， A 的秩为二次型 f 的秩。

注记. 不难发现， F 上的 n 元二次型和 n 阶对称矩阵形成一一对应。

例 1 【21 期末. 一、1】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2$ 的矩阵为_____。

例 2 【17 期末. 一、1】设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2，则 $c =$ _____。

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4

27 二次型的标准形与规范形

定义. (可逆线性替换) 设 $X = (x_1, \dots, x_n)^T, Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ 。如果可逆矩阵 $C \in M_n(F)$ 满足 $X = CY$ ，则称 C 是从变元 x_1, \dots, x_n 到变元 y_1, \dots, y_n 的一个可逆线性替换。

注意到 $f = X^T A X = (CY)^T A Y = Y^T C^T A C Y$ ，如果将 f 视为关于 Y 的二次型，那么 f 的矩阵变为 $C^T A C$ 。这启发我们定义矩阵的相合关系。

定义. (矩阵的相合) 设 $A, B \in M_n(F)$ ，如果存在可逆矩阵 $C \in M_n(F)$ 使得 $B = C^T A C$ ，则称 A 与 B 相合，记作 $A \simeq B$ 。

例 3 【18 期末. 二、4】设 A, B 是 n 阶实对称方阵，以下 4 个断言正确的个数是_____。

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (1) 若 A 与 B 相合，则 A 与 B 相似； | (3) 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 相合； |
| (2) 若 A 与 B 相抵，则 A 与 B 相合； | (4) 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 相抵； |

(A) 1 个;

(B) 2 个;

(C) 3 个;

(D) 4 个

定理 27.1 (二次型的可逆线性替换和矩阵相合的关系) 数域 F 上的二次型 f 可以通过可逆线性替换化为二次型 g 当且仅当 f 的矩阵 A 和 g 的矩阵 B 相合。

定义. (二次型的标准形) 称只含平方项的二次型 $\sum_{i=1}^n d_i x_i^2$ 为标准二次型。如果二次型 f 通过可逆线性替换变为标准二次型 $g = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$, 则称 g 为 f 的一个标准形。

定理 27.2 (标准形的存在性) 数域 F 上的任意一个二次型 f 都可以通过可逆线性替换化为标准形。

例 4 【21 期末. 一、2】实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的标准形为____, 规范形为____。

例 5 求二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \max\{i, j\} x_i x_j$ 的标准形。

定理 27.3 (\mathbb{C} 上的规范形) 任意一个复 n 元二次型 f 可以通过 \mathbb{C} 上的可逆线性替换化为 $z_1^2 + \dots + z_r^2$ 的形式, 这称为 f 在 \mathbb{C} 上的规范形, 其中 r 为 f 的秩。

注记. 上述 \mathbb{C} 上的规范形是唯一的, 并且完全由二次型的秩决定。

定理 27.4 (\mathbb{R} 上的规范形) (1) 任意一个实二次型 f 可以通过 \mathbb{R} 上的可逆线性替换化为 $z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$ 的形式, 这称为 f 在 \mathbb{R} 上的规范形, 其中 r 为 f 的秩;

(2) 一个实二次型的在 \mathbb{R} 上的规范形是唯一的。

例 6 【20 期末. 一、3】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在实数域上的规范形为____。

定义. (惯性指数)

(1) 称实二次型 f 的规范形中正平方项的个数 p 为 f 的正惯性指数, 负平方项的个数 $q = r - p$ 为 f 的负惯性指数, $p - q = 2p - r$ 为 f 的符号差;

(2) 设 A 是实对称矩阵, 称二次型 $f = X^T A X$ 的正惯性指数、负惯性指数、符号差为矩阵 A 的正惯性指数、负惯性指数、符号差。

定理 27.5 (实对称矩阵的相合标准形)

(1) 设 A 是实对称矩阵, 则 A 和矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 相合, 其中 $p, r - p$ 分别是 A 的正、负惯性指数;

(2) 作为 (1) 的推论, 两个 n 阶实对称矩阵相合当且仅当它们有相同的秩和正惯性指数;

(3) 作为 (2) 的推论, n 阶实对称矩阵按照相合的等价关系可以划分为 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类。

例 7 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与 A 在实数域上相合的是____, 在复数域上相合的是____。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 8 【21 期末. 二、1】将所有 4 阶实对称矩阵按实数域范围内的相合关系分类, 彼此相合的矩阵属于同一类, 不相合的矩阵属于不同类, 则一共有_____类。

- (A) 4; (B) 5; (C) 10; (D) 15

例 9 设 A 为实 n 阶非奇异矩阵, 若 A 与 $-A$ 在实数域上相合, 则 n 的奇偶性为_____。

例 10 对于实对称矩阵 A , 记 $p(A), q(A)$ 为它的正、负惯性指数。设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 证明

$$p \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = p(A) + p(B), \quad q \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = q(A) + q(B)$$

例 11 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 证明

$$p(A) + p(B) \geq p(A + B), \quad q(A) + q(B) \geq q(A + B)$$

28 正定/半正定/负定/半负定/不定二次型及其矩阵

从本节开始, 如果不特别说明, 数域总设为 \mathbb{R} 。

定义. (正定/半正定/负定/半负定/不定二次型及其矩阵) 设 $f(X) = X^T A X$ 为 n 元实二次型, A 为实对称矩阵

- (1) 如果对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 都有 $f(X) > 0$, 则称 f 为正定二次型, 称 A 为正定矩阵, 记作 $A > 0$;
- (2) 如果对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 都有 $f(X) \geq 0$, 则称 f 为半正定二次型, 称 A 为半正定矩阵, 记作 $A \geq 0$;
- (3) 如果对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 都有 $f(X) < 0$, 则称 f 为负定二次型, 称 A 为负定矩阵, 记作 $A < 0$;
- (4) 如果对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 都有 $f(X) \leq 0$, 则称 f 为半负定二次型, 称 A 为半负定矩阵, 记作 $A \leq 0$;
- (5) 如果 f 不是半正定也不是半负定二次型, 则称 f 为不定二次型, 称 A 为不定矩阵。

定理 28.1 (正定性与负定性, 半正定性与半负定性) 设 A 是实对称矩阵,

- (1) A 是正定矩阵当且仅当 $-A$ 是负定矩阵;
- (2) A 是半正定矩阵当且仅当 $-A$ 是半负定矩阵。

注记. 这条性质说明只需要研究正定和半正定矩阵即可。

定理 28.2 (正定矩阵的等价条件) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 是正定矩阵当且仅当

- (1) 对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 都有 $X^T A X > 0$;
- (2) A 与单位矩阵 I 相合;
- (3) A 的正惯性指数为 n ;
- (4) 存在可逆矩阵 $C \in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $A = C^T C$;
- (5) A 的所有顺序主子式都大于 0。

定理 28.3 (正定矩阵的简单性质) 设 A, B 是 n 阶正定矩阵,

- (1) $A^{-1}, A^*, A^k, k \in \mathbb{N}_*$ 都是正定矩阵。
- (2) $A + B$ 是正定矩阵。

例 12 【22 期末. 一、1】设 A, B 是正定矩阵, 则下列说法正确的是_____。

- (A) $A + B, AB$ 都是正定矩阵;
- (B) AB 是正定矩阵, $A + B$ 不是正定矩阵;
- (C) $A + B$ 是正定矩阵, AB 不一定是正定矩阵;
- (D) $A + B$ 是正定矩阵, AB 不是正定矩阵

注记. 注意, 正定矩阵的乘积往往不是正定矩阵, 它甚至往往不是实对称矩阵。

例 13 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 是半正定的, k_0 为正实数。证明: $k_0 I + A$ 是正定的。

例 14 设 $A \in M_n(F)$ 且 $\text{rank } A = n$ 。证明: $A^T A$ 是正定矩阵。

例 15 【19 期末. 六】设 A 是实反对称矩阵, 试证: $I - A^2$ 是正定矩阵。

例 16 【18 期末. 二、5】已知 $\begin{pmatrix} 5 & x \\ 2-x & x+y \\ & & x-y^2 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$ 是正定矩阵, 则 y 的取值范围是_____。

- (A) $-\frac{4}{5} < y < 1$; (B) $-\sqrt{|x|} < y < \sqrt{|x|}$; (C) $y < -1$; (D) $-1 < y < 1$

例 17 【18 期末. 二、2】 n 元实二次型 $Q(X) = X^T A X$ 负定的充要条件是_____。

- (A) $|A| < 0$;
- (B) 任给 n 维非零实向量 X , 都有 $X^T A X < 0$;
- (C) A 的各阶顺序主子式均为负数;
- (D) $Q(X)$ 的正惯性指数 $p = 0$

例 18 【20 期末. 二、5】已知 A 为 n 阶实对称矩阵, 则下列论断能保证 A 为正定矩阵的有_____。

- (1) A 能表示为一个正定矩阵的平方;
 (2) A 的正惯性指数等于 A 的秩;
 (3) A 的特征值均大于 0;
 (4) A 与单位矩阵相合

(A) 1 个; (B) 2 个; (C) 3 个; (D) 4 个

例 19 设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明实二次型 $f(X) = \begin{vmatrix} A & X \\ X^T & 0 \end{vmatrix}$ 是负定二次型。

下面几个问题需要使用 \mathbb{R}^n 中的 **Cauchy-Schwarz 不等式**。

例 20 设 A 是 n 阶正定矩阵, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, 证明: $\alpha^T \beta \leq (\alpha^T A \alpha)(\beta^T A^{-1} \beta)$, 等号成立当且仅当 $A\alpha$ 与 β 成比例。

例 21 设 A 是 n 阶正定矩阵, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha^T \beta > 0$, 证明: $B = A - \frac{A\beta\beta^T A}{\beta^T A \beta} + \frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T \beta}$ 是正定矩阵。

例 22 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha^T \beta > 0$,

- (1) 证明 $A = I - \frac{\beta\beta^T}{\beta^T \beta} + \frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T \beta}$ 是正定矩阵;
 (2) 证明 $\alpha = A\beta$ 。

定理 28.4 (半正定矩阵的等价条件) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 是半正定矩阵当且仅当

- (1) 对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 都有 $X^T A X \geq 0$;
 (2) A 与矩阵 $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ 相合, 其中 $d_1, \dots, d_n \geq 0$;
 (3) A 的负惯性指数为 0;
 (4) 存在矩阵 $C \in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $A = C^T C$;
 (5) A 的所有主子式都大于等于 0。

例 23 【20 期末. 二、3】设 $f(X) = X^T A X$ 是实数域上的半正定 n 元二次型, 下列论断中正确的是_____。

- (1) f 的正惯性指数是 n ;
 (2) f 的标准形中, 所有平方项的系数都大于等于 0;
 (3) A 的所有顺序主子式都大于等于 0;
 (4) A 的所有特征值都大于等于 0

(A) (2)(3)(4); (B) (1)(2)(3)(4); (C) (2)(4); (D) (2)

例 24 (很实用!) 设 A 是 n 阶半正定矩阵, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha^T A \alpha = 0$, 证明 $A\alpha = 0$ 。

例 25 设 A 是 n 阶半正定矩阵, B 是 n 阶反对称矩阵, 证明:

(1) 对于 $X \in \mathbb{R}^n$, $(A+B)X=0$ 当且仅当 $AX=BX=0$;

(2) $\text{rank}(A+B) = \text{rank} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ 。

例 26 设 A 是 n 阶实对称矩阵, B 为 n 阶半正定矩阵, 并且 $|A+iB|=0$ 。证明: 存在 $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $A\alpha = B\alpha = 0$ 。

例 27 设 A 是 n 阶半正定矩阵, 将 A 分块为 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $A_{11} \in M_r(\mathbb{R}), A_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{R})$ 。证明

(1) A_{11}, A_{22} 也是半正定矩阵;

(2) $\text{rank } A_{11} = \text{rank} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$, 因此存在矩阵 $B \in M_{r \times (n-r)}$, 使得 $A_{11}B = A_{12}$;

(3) 如果 $A_{11} = O$, 那么 $A_{12} = O$ 。

例 28 设 A, B 是 n 阶半正定矩阵, 证明: AB 可对角化。

例 29 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $A^2 = A$, 证明: 如果对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\alpha^T A^T A \alpha \leq \alpha^T \alpha$, 那么 $A = A^T A$ 。

29 内积与欧氏空间

定义. (内积与欧氏空间) 设 V 是 \mathbb{R} 上的一个线性空间, 如果映射 $(\bullet, \bullet): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下性质

(1) 对称性: 任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;

(2) 线性性: 任意 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in V$, 都有 $(k_1\alpha + k_2\beta, \gamma) = k_1(\alpha, \gamma) + k_2(\beta, \gamma)$;

(3) 正定性: 任意 $\alpha \in V$, 都有 $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 并且 $(\alpha, \alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$

则称 (\bullet, \bullet) 是 V 上的一个内积, 称 $(V, (\bullet, \bullet))$ 是一个欧氏空间。

定理 29.1 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 V 是欧氏空间, 则对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $|(\alpha, \beta)|^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$, 等号成立当且仅当 α, β 线性相关。

定义. (长度和夹角)

(1) 设 $\alpha \in V$, 称 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 为 α 的长度, 记作 $|\alpha|$;

(2) 设 $\alpha, \beta \in V$, 称 $\theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \in [0, \pi]$ 为 α, β 的夹角。

例 30 【18 期末. 一、5】设 V 是欧氏空间, $v_1, v_2, v_3 \in V$ 。已知 $|v_1| = 1, |v_2| = 2, |v_3| = 3, (v_1, v_2) = 0, (v_2, v_3) = 6$, 则向量组 v_1, v_2, v_3 的秩是_____。

例 31 【21 期末. 一、3】在标准内积欧氏空间 \mathbb{R}^4 中, 向量 $\alpha = (1, 2, 2, 3)$ 与向量 $\beta = (3, 1, 5, 1)$ 的夹角为_____。

定义. (单位向量, 向量的正交)

(1) 设 $\alpha \in V$, 如果 $|\alpha| = 1$, 则称 α 为单位向量;

(2) 设 $\alpha, \beta \in V$, 如果 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α, β 相互正交, 记作 $\alpha \perp \beta$ 。

例 32 在 \mathbb{R}^3 中定义内积 $\forall \alpha = (x_1, x_2, x_3), \beta = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

则以下向量中与向量 $(1, 2, 3)$ 正交的是_____。

(A) $(1, 2, -1)$;

(C) $(1, 1, -1)$;

(B) $(0, 1, 0)$;

(D) $(1, -1, 0)$

定理 29.2 (勾股定理) 设 $\alpha, \beta \in V$ 满足 $\alpha \perp \beta$, 则 $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ 。

例 33 【17 期末. 一、5】设 α, β 为 n 维实正交向量, 则下列说法错误的是_____。

(A) $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$;

(B) $|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta|$;

(C) $|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$;

(D) $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

例 34 设 V 是 n 维欧氏空间, $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in V$ 满足任意两个元素之间的距离为 $d > 0$ 。令 $\beta_i = \alpha_i - \alpha_0, 1 \leq i \leq n$, 证明:

$$(1) (\beta_i, \beta_j) = \frac{d^2}{2}, 1 \leq i < j \leq n;$$

(2) $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 是 V 的一组基。

如何在一个 n 维线性空间上定义内积? 或者说 n 维线性空间上的内积取决于什么? 为了回答这些问题, 我们需要给出度量矩阵的概念。

定义. (度量矩阵) 设 $(V, (\bullet, \bullet))$ 是一个欧氏空间, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 是一组基。记 $a_{ij} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$, 并且令 $A = (a_{ij})$, 这称为 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 关于内积 (\bullet, \bullet) 的度量矩阵。

例 35 【17 期末. 三】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 定义 \mathbb{R}^3 上的内积: $(X, Y) = X^T A Y$ 。求此内积在 \mathbb{R}^3 的基 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 下的度量矩阵。

对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 设 $\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)X, \beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)Y$, 其中 $X = (x_1, \dots, x_n)^T, Y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 那么有

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^n (x_i \varepsilon_i, y_j \varepsilon_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = X^T A Y$$

上式说明, 取定一组基 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 后, 内积 (\bullet, \bullet) 完全由度量矩阵 A 决定。

度量矩阵一定是正定的:

- 由于内积的对称性, $a_{ij} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (\varepsilon_j, \varepsilon_i) = a_{ji}$, 这说明 A 是对称矩阵;
- 由于内积的正定性, 对于 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 令 $\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)X \neq 0 \in V$, 则有 $X^T A X = (\alpha, \alpha) > 0$, 这说明 A 是正定矩阵。

反过来, 任意一个正定矩阵 A 可以决定 V 上的一个内积 (\bullet, \bullet) : 取 V 的一组基 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, 定义 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = a_{ij}$, 通过线性组合将这一定义拓展到 V 上。不难验证 (\bullet, \bullet) 是 V 上的一个内积, 并且 A 是 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 关于 (\bullet, \bullet) 的度量矩阵。

上述两条总结起来就是下面的定理。

定理 29.3 (内积和正定矩阵一一对应) 设 V 是 n 维欧氏空间, 取定 V 的一组基 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, 则 V 上的内积 (\bullet, \bullet) 和 n 阶正定矩阵 A 形成一一对应。

定理 29.4 (内积在不同基下度量矩阵的关系) 设 $(V, (\bullet, \bullet))$ 是 n 维欧氏空间, $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, T = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 是 V 的两组基, P 是从 S 到 T 的过渡矩阵。若 (\bullet, \bullet) 在 S 和 T 下的度量矩阵分别为 A 和 B , 则我们有 $B = P^T A P$ 。

注记. 可以这么理解: 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)X_1 = (\beta_1, \dots, \beta_n)Y_1, \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)X_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)Y_2$, 那么有

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= Y_1^T B Y_2 \\ &= X_1^T A X_2 = Y_1^T P^T A P Y_2 \end{aligned}$$

最后一步使用了坐标的变换。

上述相合关系启发我们选取 V 的一组更合适的基, 使得度量矩阵 A 更加简单。

定义. (正交向量组, 标准正交基) 设 V 是 n 维欧氏空间,

- (1) V 中正一组两两交的非零向量称为一个正交向量组;
- (2) V 中有两两正交并且长度为 1 的向量组构成的基称为一个标准正交基。

注记. 不难证明, 正交向量组一定是线性无关向量组, 因此它至多含有 n 个向量。

定理 29.5 (Gram-Schmidt 正交化) 设 V 是 n 维欧氏空间, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 是 V 中一个线性无关组, 则存在向量组 $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, 满足以下性质

- (1) $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ 是标准正交向量组;
- (2) $\beta_i \in L\{\alpha_1, \dots, \alpha_i\}, 1 \leq i \leq m$ 。

注记. Gram-Schmidt 正交化的过程如下:

- (1) 令 $\gamma_1 = \alpha_1$;

(2) 如果已经得到 $\gamma_1, \dots, \gamma_i$, 则令

$$\gamma_{i+1} = \alpha_{i+1} - \frac{(\alpha_{i+1}, \gamma_1)}{(\gamma_1, \gamma_1)} \gamma_1 - \dots - \frac{(\alpha_{i+1}, \gamma_i)}{(\gamma_i, \gamma_i)} \gamma_i$$

(3) 继续以上过程, 得到 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, 然后令 $\beta_i = \frac{1}{|\gamma_i|} \gamma_i$, 得到 $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ 。

注记. 性质 (2) 说明, 存在上三角形矩阵 $P \in M_m(\mathbb{R})$ 使得 $(\beta_1, \dots, \beta_m) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)P$, 从保持线性无关可以看出 P 是 m 阶可逆矩阵。

例 36 【18 期末. 四】在 \mathbb{R}^4 中, 用 Gram-Schmidt 方法将下列向量组正交化:

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)^T, v_2 = (2, 2, 2, -2)^T, v_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$$

例 37 【22 期末. 二、2】设 V 是一个 3 维欧氏空间, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一组基。已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 。用 Schmidt 正交化给出 V 的一组标准正交基: $\eta_1 = \underline{\hspace{2cm}}, \eta_2 = \underline{\hspace{2cm}}, \eta_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 38 设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明: 存在可逆上三角矩阵 $C \in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $A = C^T C$ 。

例 39 设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的可逆线性变换, 证明: φ 保持向量的夹角不变当且仅当 φ 保持向量的正交关系 (即如果 $\alpha \perp \beta$, 那么 $\varphi(\alpha) \perp \varphi(\beta)$)。

30 正交矩阵与正交变换

定义. (正交矩阵与正交变换)

(1) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 如果 A 满足 $AA^T = A^T A = I$, 则称 A 为正交矩阵;

(2) 设 V 是欧氏空间, $\sigma \in L(V)$, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$, 则称 σ 为正交变换。

例 40 设 α 是一个非零的实数列向量, $A = I - 2\alpha\alpha^T$ 。若 A 是正交矩阵, 证明: α 是标准内积下的单位向量。

定理 30.1 (正交矩阵的初步性质) 设 A, B 是 n 阶正交矩阵

(1) A 的行 (列) 向量组构成 \mathbb{R}^n 的一个标准正交基;

(2) $A^{-1} = A^T$;

(3) $|A| = \pm 1$;

(4) $A^{-1}, A^*, A^T, A^k, k \in \mathbb{N}_*$ 都是正交矩阵;

(5) AB 是正交矩阵。

例 41 【17 期末. 二、5】若矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & a & b \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$

例 42 【19 期末. 七】设 A 是 n 阶正交矩阵, X_0, Y_0 是实 n 维列向量。已知在 \mathbb{R}^n 的标准内积下, X_0 与 AY_0 的长度分别是 6 与 3。

(1) 求 $A^{-1}X_0 + Y_0$ 的长度的最大值与最小值;

(2) 若 $|X_0 - AY_0| = 3\sqrt{3}$, 求 AX_0 与 A^2Y_0 的夹角。

定义. (正交补) 设 V 是欧氏空间, W 是 V 的子空间, 令 $W^\perp = \{\beta \in V \mid \forall \alpha \in W, (\alpha, \beta) = 0\}$, 这称为 W 在 V 中的正交补。

定理 30.2 (不变子空间的正交补) 设 V 是欧氏空间, $\sigma \in L(V)$ 是正交变换。如果 W 是 σ 的不变子空间, 那么 W^\perp 也是 σ 的不变子空间。

定理 30.3 (正交变换的等价条件) 设 V 是 n 维欧氏空间, $\sigma \in L(V)$, 则 σ 是正交变换当且仅当

(1) 保持长度: 对于任意 $\alpha \in V$, 都有 $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$;

(2) 将标准正交基变为标准正交基;

(3) 在任意一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

注记. (3) 说明正交变换具有正交矩阵的各条性质, 它可以这么理解: 设 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组**标准正交基**, 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)X, \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)Y$, 那么有

$$(\alpha, \beta) = X^T I Y = X^T Y$$

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (AX)^T I (AY) = X^T A^T A Y$$

例 43 【17 期末. 一、2】已知 (I): $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 和 (II): $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ 为 n 维欧氏空间的两组基, 且满足

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)A$$

则下列说法中错误的是_____。

(A) 若 (I)(II) 都是标准正交基, 则 A 是正交矩阵;

(B) 若 (I) 是标准正交基, A 是正交矩阵, 则 (II) 是标准正交基;

(C) 若 (II) 是标准正交基, A 是正交矩阵, 则 (I) 是标准正交基;

(D) 若 A 是正交矩阵, 则 (I)(II) 都是标准正交基

例 44 【22 期末. 五】设 V 是有限维欧氏空间, σ 是 V 上的线性变换。

(1) 若 σ 是 V 上的正交变换, 证明: σ 在 V 的任意一组标准正交基下的矩阵 A 为正交矩阵;

(2) 若 σ 在 V 的某一组标准正交基下的矩阵 A 为正交矩阵, 证明: σ 是 V 上的正交变换。

例 45 【18 期末. 六】设 V 是实数域上的有限维线性空间, σ 是 V 上的线性变换且满足 $\forall v \in V, \sigma^2(v) + v = 0$ 。

(1) 证明: σ 没有实特征值;

(2) 进一步假设 V 是欧氏空间且 σ 是一个正交变换, 证明: 对于任意 $\alpha \in V$, 都有 $\alpha \perp \sigma(\alpha)$ 。

正交相似具有很好的性质, 非常幸运的是, 正交矩阵在正交相似之下可以化为更加简单的形式。

定理 30.4 (正交矩阵的特征值和正交相似标准形) 设 A 是 n 阶正交矩阵,

(1) A 的特征值模长都为 1, 实特征值只可能为 ± 1 , 复特征值为共轭成对出现的单位复数;

(2) 设 A 的全部特征值为 1 (出现 s 次), -1 (出现 t 次) 和 $\cos \theta_i \pm i \sin \theta_i, 1 \leq i \leq k$ (这里应有 $s+t+2k=n$),

则 A 正交相似于矩阵 $\begin{pmatrix} I_s & & & \\ & -I_t & & \\ & & A_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & A_k \end{pmatrix}$, 其中 $A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq k$;

(3) 作为 (2) 的推论, 如果 n 是奇数, 那么 A 一定有实特征值。

例 46 【21 期末. 二、3】设 A 是正交矩阵, 则下列关于 A 的特征值的说法, 错误的是_____。

(A) 如果 $|A| = 1$, 则 1 一定是 A 的特征值;

(B) 如果 $|A| = -1$, 则 -1 一定是 A 的特征值;

(C) A 有可能没有实特征值;

(D) A 的复特征值的模长等于 1

例 47 【21 期末. 一、5】设 A, B 是 n 阶正交矩阵, 且 $|AB| = -1$, 那么 $|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 48 【20 期末. 四】求正交矩阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 的正交相似标准形。

例 49 【20 期末. 八】欧氏空间 V 的一个保持内积不变的线性同构变换称为 V 的一个同构变换。请问欧氏空间 (含无穷维) 的同构变换和正交变换是同一个概念吗? 【提示: 关键在于是否同构】

31 实对称矩阵的正交相似对角化, 对称变换

定义. (对称变换) 设 V 是欧氏空间, $\sigma \in L(V)$, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$, 则称 σ 为 V 上的对称变换。

例 50 设 σ 是欧氏空间 V 上的对称变换, 则对任意 $\alpha, \beta \in V$, 下面论断正确的是_____。

$$(A) (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta);$$

$$(C) (\alpha, \beta) = (\sigma(\beta), \alpha);$$

$$(B) (\alpha, \sigma(\beta)) = (\sigma(\beta), \sigma(\alpha));$$

$$(D) (\alpha, \sigma^2(\beta)) = (\sigma(\beta), \sigma(\alpha))$$

定理 31.1 (对称变换和实对称矩阵的关系) 设 V 是欧氏空间, $\sigma \in L(V)$, 则 σ 是对称变换当且仅当 σ 在任意一组标准正交基下的矩阵是实对称矩阵。

例 51 设 A 是实对称矩阵, 证明 $A^2 = 0$ 的充分必要条件是 $A = 0$ 。

例 52 【17 期末. 七】设 σ 是 n 维欧氏空间上的对称变换, 若 $\sigma^2 = 0$, 证明 $\sigma = 0$ 。

定理 31.2 (特征子空间彼此正交) 设 V 是欧氏空间, $\sigma \in L(V)$ 是对称变换, 如果 λ, μ 是 σ 的两个不同特征值, 则 $V_\lambda \perp V_\mu$ 。

定理 31.3 (不变子空间的正交补) 设 V 是欧氏空间, $\sigma \in L(V)$ 是对称变换。如果 W 是 σ 的不变子空间, 那么 W^\perp 也是 σ 的不变子空间。

现在我们来本学期最深刻且最重要的定理。

定理 31.4 (实对称矩阵的特征值和正交相似标准形) 设 A 是 n 阶实对称矩阵,

(1) A 的特征值都为实数;

(2) 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则 A 正交相似于矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$;

(3) 作为 (2) 的推论, 实二次型 $f(X) = X^T A X$ 可以通过可逆线性变换化为 $f(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, 这称为 f 的主轴形式。

例 53 【20 期末. 六】设 V 欧氏空间, $\sigma \in L(V)$, 称 σ 为反对称的, 如果对任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(\sigma(\alpha), \beta) = -(\alpha, \sigma(\beta))$ 。证明

(1) σ 是反对称的当且仅当 σ 在一组标准正交基下的矩阵为反对称矩阵;

(2) 如果 W 是反对称线性变换 σ 的不变子空间, 那么它的正交补空间 W^\perp 也是。

现在我们来看实对称矩阵正交相似对角化定理的若干应用。

计算正交相似标准形

例 54 【21 期末. 四】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵。

例 55 【22 期末. 三】设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 。

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵;

(2) 用正交的线性替换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形。

研究矩阵的性质

例 56 设 n 阶实对称方阵 A 只有一个特征值, 则其特征子空间的维数是_____。

例 57 【22 期末. 一、5】设 A 是 4 阶实对称矩阵, $(A^2 - A)(A^2 + I) = 0$ 。若 A 的秩为 3, 则 A 相似于_____。

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & 0 \end{pmatrix}; \quad (B) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & 1 & \\ & & -i & \\ & & & 0 \end{pmatrix}; \quad (C) \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad (D) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

例 58 (判断) 两个 n 阶实对称矩阵正交相似的充要条件是它们相似。

例 59 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 是正定矩阵当且仅当存在 n 阶正定矩阵 B 使得 $A = B^2$ 。

32 特征值专题

同时相合对角化技巧

例 60 【20 期末. 七】设 A 是 n 阶实对称正定矩阵, B 是 n 阶实对称矩阵, 证明:

- (1) 存在实可逆矩阵 P 使得 $P^T A P = I, P^T B P$ 为对角形;
- (2) 若矩阵 AB 的特征值都是正实数, 则 B 是正定矩阵。

例 61 设 A, B 是 n 阶正定矩阵, 证明: 如果 $A - B$ 是正定矩阵, 则 $B^{-1} - A^{-1}$ 也是正定矩阵。

其他有关特征值的问题

例 62 【18 期末. 一、2】设 $A \in M_4(\mathbb{R})$ 既是正交方阵又是正定方阵, 那么 $|5A - 3I| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 63 设 Q 是 n 阶正交矩阵, $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$, $m = \min\{|a_i|\}$, $M = \max\{|a_i|\}$ 。证明: 矩阵 QA 的任意特征值 λ 都满足 $m \leq |\lambda| \leq M$ 。

例 64 设 A, B 是 n 阶半正定矩阵

- (1) 如果 $\text{tr} A = 0$, 证明 $A = O$;
- (2) 如果 $\text{tr}(AB) = 0$, 证明 $AB = O$ 。

例 65 设 A, B 是 n 阶半正定矩阵, 证明: AB 的所有特征值都是非负实数。进一步地, 如果 A, B 都是 n 阶正定矩阵, 证明: AB 的所有特征值都是正实数。

例 66 【22 期末. 七】设 A 是 n 阶实对称矩阵, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ 是 A 的从小到大的全体特征值。证明

$$\lambda_n = \max_{0 \neq X \in \mathbb{R}^n} \frac{X^T A X}{X^T X}, \lambda_1 = \min_{0 \neq X \in \mathbb{R}^n} \frac{X^T A X}{X^T X}$$

例 67 【21 期末. 五】设 A 是实矩阵, $\lambda = a + bi, b \neq 0$ 为 A 的一个虚特征值, $X = X_1 + X_2i$ 为 λ 的复特征向量, X_1, X_2 分别为其实部和虚部。证明 X_1, X_2 在复数域上线性无关。

理科高等代数