



单位代码 10006

学 号 20377175

分 类 号 O174.12

北京航空航天大学

BEIHANG UNIVERSITY

毕业设计 (论文)

Takeya 问题及相关研究

学 院 名 称 数学科学学院

专 业 名 称 华罗庚数学班

学 生 姓 名 王旭

指 导 教 师 梁湘玉

2024 年 5 月

北京航空航天大学

本科生毕业设计（论文）任务书

I、毕业设计（论文）题目：

Kekeya 问题及相关研究

II、毕业设计（论文）使用的原始资料（数据）及设计技术要求：

资料包括和 Kekeya 问题相关的论文和书籍，本科生课程《实变函数》、
《拓扑学引论》、《泛函分析》、《傅里叶分析》所用的参考书等。

III、毕业设计（论文）工作内容：

广泛调研，了解 Kekeya 问题的相关概念、研究方向、重要结果；

学习 Besicovitch 集和 Kekeya 针集的构造方法，以及它们的几何意义；

阅读 C. Fefferman 关于圆盘猜想给出的反例，调查它的应用；

学习 Hausdorff 测度、维数理论，以及利用对偶方法构造 Besicovitch 集；

了解 Kekeya 猜想、Kekeya 极大函数猜想的内容和研究进展，学习二维情
形的证明，调查调和与分析领域与之的相关问题。

IV、主要参考资料：

BESICOVITCH A. The Kakeya problem[J].

FEFFERMAN C. The multiplier problem for the ball[J].

DUOANDIKOETXEA J. Fourier analysis: volume 29[M].

张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义. 上册 [M].

MATTILA P. Geometry of sets and measures in euclidean spaces[M].

FALCONER K. Fractal geometry[M].

WOLFF T H. Lectures on harmonic analysis[M].

TAO T. From rotating needles to stability of waves[J].

数学科学 学院 华罗庚数学班 专业类 200941 班

学生 王旭

毕业设计(论文)时间: 2024 年 1 月(日)日至 2024 年 5 月(日)日

答辩时间: 2024 年 (月) 月 (日) 日

成绩: _____

指导教师: _____

兼职教师或答疑教师(并指出所负责部分):

系(教研室)主任(签字): _____

注: 任务书应该附在已完成的毕业设计(论文)的首页。

本人声明

我声明，本论文及其研究工作是由本人在导师指导下独立完成的，在完成论文时所利用的一切资料均已在参考文献中列出。

作者：王旭

签字：

时间：2024 年 5 月



Kekeya 问题及相关研究

学 生：王旭

指导教师：梁湘玉

摘 要

Kekeya 问题是几何测度论和调和分析中的一个重要课题。1928 年, A. Besicovitch 给出了 Besicovitch 集和 Kekeya 针集的构造。在上世纪末, 有关 \mathbb{R}^n 中 Besicovitch 集维数的 Kekeya 猜想成为调和分析领域的一个研究热点。1999 年, J. Bourgain 定义了管道上的 Kekeya 极大函数, 指出了 Kekeya 极大函数的有界性和 Kekeya 猜想之间的关联, 并基于这一点证明了二维 Kekeya 猜想。此后, 算数组合、代数学等领域的方法也被引入 Kekeya 问题的研究中。目前, 有关 Kekeya 极大函数的最佳结果由 J. Hickman 等人得到。

本文基于有关 Kekeya 问题的研究论文、书籍等资料, 梳理了和该问题有关的一些研究方法和重要结论。介绍了 Kekeya 问题的背景、研究现状及其相关领域。具体内容包括介绍了 Besicovitch 集和 Kekeya 针集的构造方法及其应用、Hausdorff 维数及其计算方法、二维 Kekeya 猜想的一个几何证明、Kekeya 猜想和 Kekeya 极大函数等内容。此外, 本文还补充了一些必要的基础知识, 包括 Hausdorff 测度、Fourier 变换等, 并对一些结果进行了简要的讨论。

关键词: Besicovitch 集, Hausdorff 维数, Kekeya 猜想, Kekeya 极大函数



The Kakeya problem and related researches

Author: Wang Xu

Tutor: Liang Xiang-yu

Abstract

The Kakeya problem is an important topic in geometric measure theory and harmonic analysis. In 1928, A. Besicovitch introduced the construction of Besicovitch sets and Kakeya needle sets. By the end of the 20th century, the Kakeya conjecture regarding the dimension of Besicovitch sets in \mathbb{R}^n had become a focal point of research in harmonic analysis. In 1999, J. Bourgain defined the Kakeya maximal function for tubes, highlighting the relation between the boundedness of the Kakeya maximal function and the Kakeya conjecture, and used it to prove the two-dimensional Kakeya conjecture. Subsequently, methods from arithmetic combinatorics and algebra have also been introduced into the study of the Kakeya problem. Currently, the state-of-the-art results of the Kakeya maximal function have been obtained by J. Hickman et al.

This paper is based on research papers, books, and other resources related to the Kakeya problem. It organizes and summarizes the research methods and key conclusions associated with this problem. The paper introduces the background of the Kakeya problem, the current state of research, and its related fields. Specific content includes the construction and applications of Besicovitch sets and Kakeya needle sets, the concept and calculation methods of Hausdorff dimension, a geometric proof of the two-dimensional Kakeya conjecture, the Kakeya conjecture and the Kakeya maximal function. Additionally, the paper supplements some necessary preliminary knowledge, such as Hausdorff measure and Fourier transform, and provides brief discussions of certain results.

Key words: Besicovitch set, Hausdorff dimension, Kakeya conjecture, Kakeya maximal function



目 录

1 绪论	1
1.1 Kakeya 问题的简介	1
1.2 论文的主要内容	2
1.3 符号列表	3
2 Besicovitch 集和 Kakeya 针集的构造	4
2.1 Besicovitch 的构造	4
2.1.1 基本概念	4
2.1.2 构造方法	5
2.1.3 一些讨论	8
2.2 C. Fefferman 的反例	8
2.2.1 圆盘猜想	8
2.2.2 定理 2.1 的证明	9
2.3 使用 Baire 纲定理的构造	12
2.3.1 Baire 纲定理	12
2.3.2 集合间的 Hausdorff 距离	12
2.3.3 Besicovitch 集的构造	14
3 对偶方法	19
3.1 集合的 Hausdorff 维数	19
3.1.1 概念和性质	19
3.1.2 势能方法	24
3.2 正则集与非正则集	27
3.2.1 密度	27
3.2.2 s -集合的分解	31
3.3 \mathbb{R}^2 中的投影定理	32
3.3.1 \mathbb{R}^2 中投影定理	32



3.3.2 1- 集合的投影性质	34
3.4 Besicovitch 集的对偶构造	35
3.4.1 对偶方法	35
3.4.2 主要结果	36
4 Keakeya 极大函数	39
4.1 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换	39
4.2 Keakeya 极大函数	43
4.3 $n = 2$ 时的证明	47
4.4 一些讨论	48
结论	49
致谢	50
参考文献	51
附录 A 引理 2.3 的证明	54



1 绪论

1.1 Kakeya 问题的简介

1917 年, S. Kakeya 提出了 Kakeya 针集问题: 在平面中将一条单位长度的线段连续旋转 180° , 它扫过的面积至少是多少? S. Kakeya 认为这一面积至少为 $\frac{\pi}{8}$, 并且在 [1] 中给出了一个例子。1927 年, A. Besicovitch[2] 解决了这一问题, 他证明了上述旋转扫过的面积可以任意小。

最初, 这一问题并未引起广泛关注。A. Besicovitch 之所以考虑这一问题, 是出于研究 Riemann 积分性质的动机。他通过构造平面中一个面积为零但包含任意方向单位长度线段的集合(即所谓 Besicovitch 集), 给出了一个 Riemann 可积但二重积分不等于累次积分的函数^[3]。在随后的几十年里, 对 Kakeya 问题的研究主要是改进 A. Besicovitch 的构造, 以得到具有更好性质(例如紧致性、单连通性 [4-5] 等)的 Kakeya 针集或 Besicovitch 集。从存在性的角度来看, 只需构造平面中的 Kakeya 针集或者 Besicovitch 集, 就可以推广得到更高维度的集合, 因此人们主要关注平面问题。

1971 年, R. Davies[6] 利用几何测度论的投影方法, 对 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数进行了研究, 并证明了平面中 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数必为 2。在同一年, C. Fefferman[7] 应用平面中 Besicovitch 集的构造方法, 为调和分析中有关乘子有界性的圆盘猜想构造了一个反例。这两项工作促进了有关 Kakeya 问题的研究。随后的研究大致可分为两个方向, 即 Kakeya 针集或 Besicovitch 集的变体, 以及 Kakeya 猜想。

关于第一个部分, F. Cunningham 提出了圆弧版本的 Kakeya 问题, 即是否可将一段圆弧从一个位置连续地移动到另一个位置, 并且扫过的面积允许任意小? 这一问题对于圆心角较小的圆弧是成立的。M. Csörnyei 等人 [8] 将这种在任意给定两个位置之间进行移动, 扫过的面积允许任意小的性质称为 Kakeya 性质, 并证明了平面中满足这种性质的集合一定是线段、圆弧或单点集。J. Kinney[9] 利用 Cantor 集构造了平面中包含以 0 和 1 之间任意数字为半径的一个圆周, 但其面积为 0 的集合。具有这类性质的集合被称为 BRK 集^[10], 它也可以视为 Besicovitch 集的一种推广, 即要求一个集合包含对应于一个参数的一族一维物体。

关于第二个部分, Kakeya 猜想断言在 n 维空间中任意一个 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数都为 n 。在 R. Davies 之后, A. Córdoba[11] 和 J. Bourgain[12] 利用极大函数的方法



再次证明了二维的猜想。A. Córdoba 定义了平面矩形上的极大函数, 而 J. Bourgain 则考虑了 n 维空间中的“管道”, 即某一个方向上长度为 1, 在垂直方向上半径为 δ 的圆柱形, 由此定义了 **Keakeya** 极大函数。在 [12] 中, J. Bourgain 还证明了 **Keakeya** 极大函数和 **Keakeya** 猜想之间的关系, 即若 **Keakeya** 极大函数满足某种有界性, 则 **Keakeya** 猜想成立。这种有界性现在被称为 **Keakeya** 极大函数猜想。

Keakeya 极大函数具有很大的启发性。J. Bourgain 尝试通过研究管道之间的组合行为来研究 **Keakeya** 猜想。例如使用一些超平面与管道的相交来得到一些截面, 通过考虑这些截面的算数关系, 包括加法集和减法集等, 可以利用组合学中的结果来控制管道的相交和重叠行为^[3, 13]。在调和与分析领域, 人们关心许多算子的有界性。人们发现可以通过对一些震荡积分算子的估计得到 **Keakeya** 极大函数的估计。例如有关乘子有界性的 Bochner-Riesz 猜想和有关球面测度的震荡积分的限制性猜想都可以推出 **Keakeya** 极大函数猜想^[10, 14]。相反地, J. Bourgain 等人也尝试发展研究 **Keakeya** 极大函数猜想的新技术, 以此推动限制性猜想等问题的研究^[13]。T. Wolff 提出了有限域上的 **Keakeya** 猜想。有限域 \mathbb{F} 上的 Besicovitch 集是指 \mathbb{F}^n 中包含任意方向直线的集合, 而有限域上的 **Keakeya** 猜想则断言 Besicovitch 集的元素个数有下界^[10]。Z. Dvir[15] 通过研究在一个 Besicovitch 集上取值为零的多项式证明了这一猜想, 这一方法被称为多项式方法。2019 年, J. Hickman 等人 [16] 使用多项式方法研究了 **Keakeya** 极大函数猜想, 并给出了更好的结果。

1.2 论文的主要内容

本文主要由以下几个部分构成。第一部分主要介绍 Besicovitch 集和 **Keakeya** 针集的构造。在第二章中, 首先介绍了 A. Besicovitch 关于面积允许任意小的 **Keakeya** 针集的构造, 并简要讨论其性质。然后介绍了 C. Fefferman 应用这种构造方法给出的一个反例, 展示了 Besicovitch 集的一个重要应用。最后介绍了一种利用 Baire 纲定理构造 Besicovitch 集的方法, 说明了满足 Besicovitch 集性质的集合是非常普遍的。

第二个部分介绍了 Hausdorff 维数的概念, 并且构造了平面中的一类 Besicovitch 集。首先介绍了 Hausdorff 维数的概念和计算方法, 尤其是势能方法。然后介绍了正则集和非正则集的概念, 并讨论了平面中 1-集合的刻画。进一步地, 介绍了平面中的投影定理, 以及 1-集合的投影性质。最后综合以上结果, 介绍利用点与直线的对偶关系构造平面中一种 Besicovitch 集的方法, 并证明了它的 Hausdorff 维数一定是 2。对偶方法的优势是具有很强的几何意义, 但缺陷是不适用于更高维的问题。



第三部分主要介绍 *Keakeya* 极大函数。首先介绍了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换, 包括定义、Plancherel 定理和一些简单的例子。然后介绍了 *Keakeya* 极大函数的定义、性质和相关猜想, 包括它和 *Keakeya* 猜想之间的关系。最后介绍了利用 *Keakeya* 极大函数证明二维 *Keakeya* 猜想的方法, 并进行了简要的讨论。

1.3 符号列表

$\mathcal{L}^k(\cdot)$	k 维 Lebesgue 测度
\hat{f}	函数 f 的 Fourier 变换
\check{f}	函数 f 的 Fourier 逆变换
\bar{f}	函数 f 的共轭
χ_A	集合 A 的特征函数
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	\mathbb{R}^n 中的标准内积
$\text{sgn}(x)$	符号函数
$Hf(x)$	函数 f 的 Hilbert 变换
$\sup A$	集合 A 的上确界
$\inf A$	集合 A 的下确界
$B(x, r)$	以 x 为球心, 以 r 为半径的球
$\text{diam } E$	集合 E 的直径
$\mathcal{H}^s(\cdot)$	s 维 Hausdorff 测度
$\dim_H E$	集合 E 的 Hausdorff 维数
$\text{supp } f$	函数 f 的支集
$\text{supp } \mu$	测度 μ 的支集
$\mu \llcorner E$	测度 μ 在集合 E 上的限制
$\Theta^{*s}(F, x)$	集合 F 在点 x 处的 s - 上密度
$\Theta_*^s(F, x)$	集合 F 在点 x 处的 s - 下密度
$\text{Proj}_\theta F$	集合 F 在 θ 方向的正交投影
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$	紧支集光滑函数空间
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Schwartz 空间
$(L^p(\mathbb{R}^n), \ \cdot\ _p)$	p 次可积函数空间
$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$	局部可积函数空间

2 Besicovitch 集和 Kakeya 针集的构造

2.1 Besicovitch 的构造

1919 年, A. Besicovitch 给出了平面中面积为 0 的 Besicovitch 集的构造, 并使用这种集合研究 \mathbb{R}^2 中的 Riemann 积分^[3]。1928 年, 他在 [2] 中改进了最初的方法, 给出了面积允许任意小的 Kakeya 针集的构造。在这一部分, 我们介绍经过 I. Schoenberg 等人 [17-18] 改进的构造方法, 并简要讨论所得集合的性质。

2.1.1 基本概念

定义 2.1 (\mathbb{R}^2 中的 Besicovitch 集与 Kakeya 针集): 我们称 \mathbb{R}^2 中的一个集合为

- (1) *Besicovitch* 集, 如果它包含任意方向的单位长度线段;
- (2) *Kakeya* 针集, 如果在其中一根单位长度的线段可以通过一系列连续的变换(刚体运动), 反向地回到原始位置。

根据定义, 一个 Kakeya 针集一定是一个 Besicovitch 集。在本节中, 我们更加关心 Kakeya 针集, 特别是面积较小的 Kakeya 针集的构造。

注释 2.1: 在高维空间中, 可以类似地定义 *Besicovitch* 集和 *Kakeya* 针集。不难发现, 如果在 \mathbb{R}^2 中构造出一个 *Besicovitch* 集或 *Kakeya* 针集, 那么通过和 $[0, 1]^{n-2}$ 做乘积, 就可得到一个 \mathbb{R}^n 中的 *Besicovitch* 集或 *Kakeya* 针集。

例 2.1: 下面的图形都是 *Kakeya* 针集, 因此也是 *Besicovitch* 集。

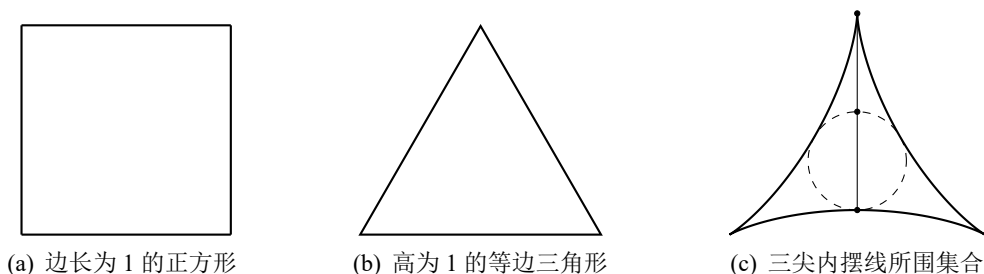


图 2.1 Kakeya 针集的例子

在 [1] 中, S. Kakeya 认为图2.1(b)是面积最小的凸的 Kakeya 针集, 而图2.1(c)是面积最小的 Kakeya 针集。关于第一点, J. Pál 给出了证明 [19], 关于第二点, A. Besicovitch 给出了一个反例 [2]。

2.1.2 构造方法

现在来构造 \mathbb{R}^2 中面积允许任意小的 Kakeya 针集。

首先取 \mathbb{R}^2 中一个边长为 2 的正方形 $ABCD$, 通过连接两条对角线将其划分成四个等腰直角三角形。如图2.2所示, 我们希望不断划分每个等腰直角三角形, 得到一些小的三角形, 并且通过沿着底边的平移来增大它们之间的重叠, 以此减小整个图形的面积。现在固定 $\varepsilon > 0$, 我们的目标是得到一个面积小于 ε 的 Kakeya 针集。

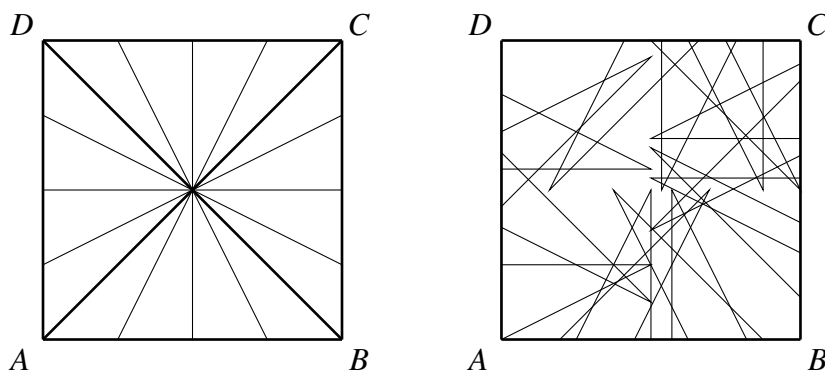


图 2.2 正方形和小三角形

现在介绍 **Pál's joins** 技巧, 通过这一技巧我们可以损失很小的面积, 以此将单位长度的线段从一个小三角形中连续地移动到相邻的小三角形中。

在图2.3中, 三角形 DEF 和 GHI 是原本相邻的两个三角形, 它们沿着底边进行平

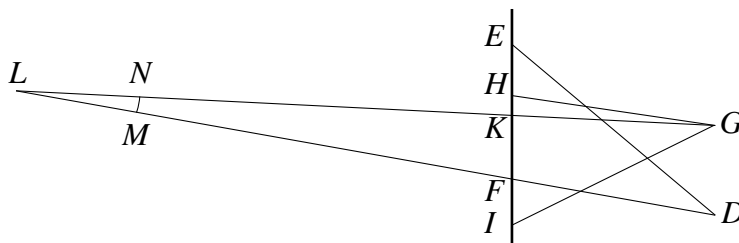


图 2.3 Pál's joins 技巧

移, 所以 GH 与 DF 是互相平行的。在边 HI 上取点 K , 满足 $\frac{\mathcal{L}^1(HK)}{\mathcal{L}^1(HI)} < \frac{\varepsilon}{8}$ 。现在延长线段 DI 与 GK , 设它们相交于点 L 。我们在 DF 和 GK 上分别取点 M 和 N , 满足

$\triangle LMN \cong \triangle GHK$, 因为边 GH 与 DL 互相平行, 这总是能做到的。

这时 $\mathcal{L}^2(LMN) = \mathcal{L}^2(GHK) < \frac{\varepsilon}{8} \mathcal{L}^2(GHI)$ 。由于三角形 DEF 的高为 1, 在其中单位长度的线段可以通过平移和旋转扫过整个 DEF 。此外, 可以将单位长度的线段沿着线段 DI 进行移动, 使得一个端点到达 L , 然后在三角形 LMN 内部绕着 L 进行旋转, 落在线段 LG 上。在此之后, 类似地, 可以通过平移和旋转扫过整个三角形 GHI 。以上过程说明, 可以通过线段 DL 和 LG , 以及三角形 LMN , 实现从三角形 DEF 到三角形 GHI 的转移, 这一过程是连续的, 符合 Kakeya 针集的要求。

注意到以上转移增加的面积小于 $\frac{\varepsilon}{8} \mathcal{L}^2(GHI)$, 因此对于全部的相邻三角形进行转移, 增加的面积不会超过 $\frac{\varepsilon}{8} \mathcal{L}^2(ABCD) = \frac{\varepsilon}{2}$ 。

然后来介绍 **Perron-Schoenberg 树** 的构造, 它能够非常直观地展现小三角形的平移和重叠方式。对于整数 $p \geq 2$, 令 $n = 2^{p-2}$, 我们将每个等腰直角三角形的底边进行 n 等分, 并且绘制 $p+1$ 条间距为 $\frac{1}{p}$ 的平行线, 如图2.4所示。从左到右依次绘制高度为 $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, 1$ 的等腰直角三角形, 并且从第 3 个图形开始, 每次对底边进行二等分。

现在我们从第 2 个三角形开始, 进行如下“扩张”操作: 对于每一次操作, 首先作

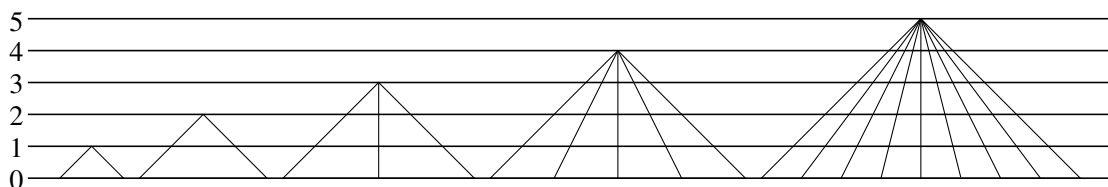


图 2.4 三角形的划分, $p = 5, n = 2^3$

三角形的中线, 然后延长它的两条侧边, 与上方的第一条横线相交, 接着从交点向底边作出和中线平行的线段, 如图2.5所示。这种扩张的优点在于, 较低层级的三角形经过一次扩张, 所得的三角形恰好能够拼成较高层级中的一个三角形, 如图2.5(a)和2.5(b)的最右端所示。因此通过对较低层级的三角形进行扩张, 所得的图形可以描述较高层级中三角形通过平移进行重叠的情况。

现在我们来考虑扩张过程中图形面积的改变。注意到图2.5(a)中, 经过扩张增大的面积恰好是 $2 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2$, 在图2.5(b)中, 将左右两个三角形增加的面积加起来, 也恰好得到 $2 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2$ 。和它们类似地, 每一步扩张都会增加相同的面积。我们一共需要进行 $p-2$ 次

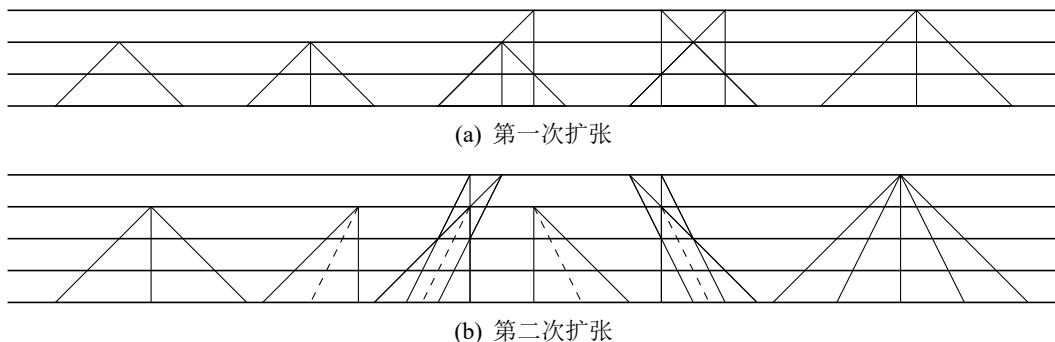


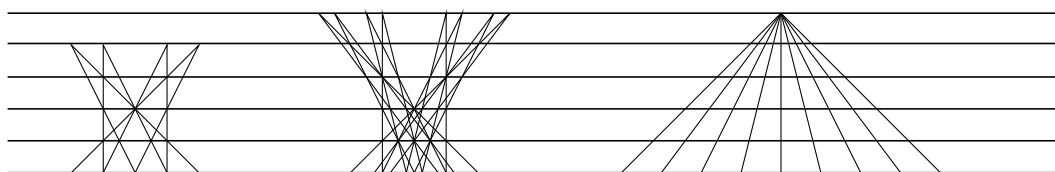
图 2.5 三角形的扩张

扩张，最终得到的图形如图2.6所示，它的面积为

$$\left(\frac{2}{p}\right)^2 + (p-2) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2}{p} \quad (2.1)$$

如果我们要求 $p > \frac{16}{\varepsilon}$ ，那么增加的面积就小于 $\frac{\varepsilon}{8}$ ，对四个等腰直角三角形进行同样的操作，整个图形增加的面积会小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 。

在扩张过程中，图形的轮廓不断变化，如图2.7所示。由于这一图形和一棵树分杈、生


图 2.6 扩张的结果， $p = 5, n = 2^3$

长的过程非常相似，我们将它称为 Perron-Schoenberg 树。最后将一些 Perron-Schoenberg

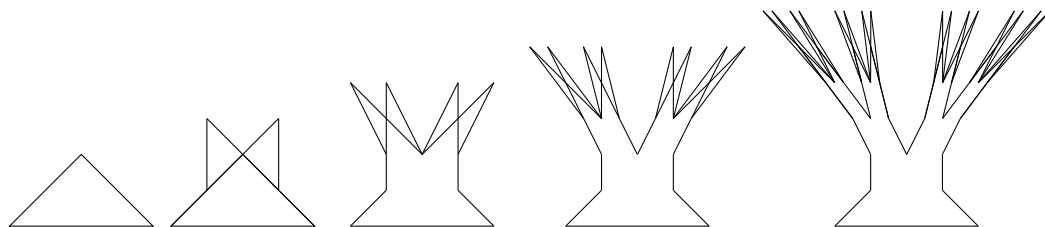


图 2.7 Perron-Schoenberg 树

树拼接起来，并且利用 Pál's joins 技巧实现相邻三角形之间的转移，就能得到一个 Kakeya 针集，它的面积小于 $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 。



2.1.3 一些讨论

通过 Pál's joins 和 Perron-Schoenberg 树构造的 Kakeya 针集, 虽然它的面积可以任意小, 但是它并不具有很好的几何性质。例如 Pál's joins 技巧虽然保证了连续的变换, 但是作为代价, 得到的集合往往不是凸的, 不是有界的, 并且不是单连通的。

关于有界性, A. van Alphen 在 [20] 中证明了对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个面积允许任意小, 并且包含在一个半径为 $2 + \varepsilon$ 的圆周以内的 Kakeya 针集。

关于单连通性, 在很长时间内人们都没有找到比三尖内摆线所围图形面积更小的 Kakeya 针集。1965 年, R. Walker 得到了更好的结果, 在同一年, I. Schoenberg[4] 构造了单连通的, 并且面积可以任意接近 $\frac{(5 - 2\sqrt{2})\pi}{24}$ 的 Kakeya 针集。I. Schoenberg 猜测这一常数(现在被称为 Bloom-Schoenberg 常数)就是单连通问题的最佳结果^[5]。这一结果并不正确, F. Cunningham[5] 证明了对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个面积小于 ε , 并且包含在一个半径为 1 的圆周以内的单连通的 Kakeya 针集。在 [5] 中, F. Cunningham 还证明了(非构造的)任意一个星形的 Kakeya 针集面积至少为 $\frac{\pi}{108}$, 但是我们依然不知道是否存在面积介于 $\frac{\pi}{108}$ 和 $\frac{(5 - 2\sqrt{2})\pi}{24}$ 之间的星形的 Kakeya 针集。

2.2 C. Fefferman 的反例

2.2.1 圆盘猜想

考虑 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的算子 T , 它由 Fourier 变换定义: $(Tf)\hat{f} = \chi_B \hat{f}$, 其中 B 是 \mathbb{R}^n 中的单位球。我们希望研究这种算子的有界性, 即在什么情况下 T 是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的(这种有界性常常简记为 $s\text{--}(p, p)$)。在很长一段时间内, 有以下猜想。

猜想 2.1 (圆盘猜想): 对于 $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$, T 是 $s\text{--}(p, p)$ 的。

人们最初只知道 $p = 2$ 时有界性成立, 直到 C. Fefferman 在 [7] 中给出一个反例, 这一问题才得到解决。实际上, 我们有下面的定理。

定理 2.1 (C. Fefferman): 在 $n \geq 2$ 时, T 是 $s\text{--}(p, p)$ 的当且仅当 $p = 2$ 。

对于乘子类型的算子, 如果它在 \mathbb{R}^{n+1} 中有界, 那么在 \mathbb{R}^n 中也是有界的^[21]。另外通过 Hölder 不等式, $p > 2$ 时的有界性可以说明 $p' = \frac{p}{p-1} < 2$ 时的有界性。因此对于 $p > 2, n = 2$ 给出反例即可, 这正是 C. Fefferman 所做的。

下面我们给出这一反例。为此先假设 T 是有界的, 我们希望得到矛盾。

2.2.2 定理2.1的证明

为了证明定理2.1，我们需要以下几个引理。

引理 2.1 (Y. Meyer^[22]): 假设 T 是 s -(p, p) 的。设 $\{v_j\}$ 是 \mathbb{R}^2 中的一列单位向量。令 $H_j = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_j \rangle \geq 0\}$ ，这是一列半平面。定义一系列算子 $T_j : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, $(T_j f)^\wedge = \chi_{H_j} \hat{f}$ ，那么对于 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 中任意函数列 $\{f_j\}$ ，都有

$$\left\| \left(\sum_j |T_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \lesssim \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \quad (2.2)$$

引理 2.2: 对于很小的 η ，存在 $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ，以及一些两两不交的矩形 R_j ，它们满足以下两个条件

- (1) $\mathcal{L}^2(E) \leq \eta \sum_j \mathcal{L}^2(R_j)$;
- (2) 如图2.8定义 \tilde{R}_j ，则 $\mathcal{L}^2(\tilde{R}_j \cap E) \geq \frac{1}{10} \mathcal{L}^2(\tilde{R}_j)$ 。

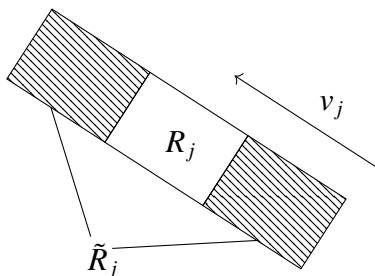


图 2.8 \tilde{R}_j 的定义

证明 选取一系列递增的数字 $h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right), \dots, h_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \dots + \frac{1}{n+1}\right) \dots$ 从一个高为 h_0 ，底边为 $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ 的三角形出发，类似于 *Perron-Schoenberg* 树的构造方法，将它的两条侧边延长，使得新的端点和底边的距离为 h_1 ，然后连接新的端点和底边的中点，如图2.9所示。对于所得图形，它包含左右两个小三角形，我们对它们再进行扩张，得到高为 h_2 的图形。像这样不断进行操作，在第 k 次操作以后，我们将得到 2^k 个高为 h_k 的三角形，每一个三角形的底边长度都为 2^{-k} 。*H. Busemann* 和 *W. Feller* 曾经研究这一图形，并且证明了即使 k 不断增大，这一图形的面积也不会超过 $17^{[23]}$ 。对于合适的 k ，我们记 E 为第 k 次操作所得的图形。

现在我们来构造 $\{R_j\}$ 。如图2.10所示，对于每一个底边长度为 2^{-k} ，高为 $h_k \sim \log k$

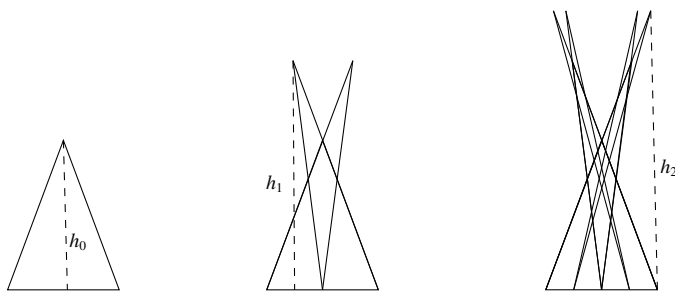


图 2.9 三角形的扩张

的小三角形，我们在它的下方选取一个两边长度近似于 $\log k$ 和 2^{-k} 的矩形 R ，以此得到 2^k 个矩形 $\{R_j\}$ 。在这时，如果我们假设 $\{R_j\}$ 两两不交，则有

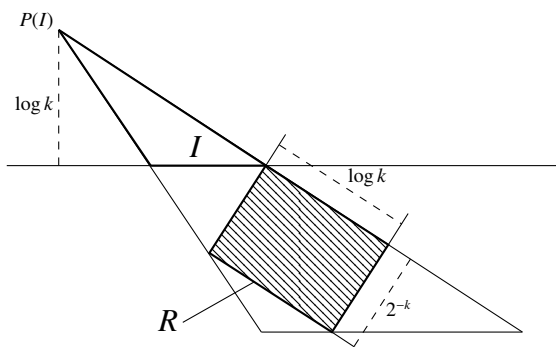
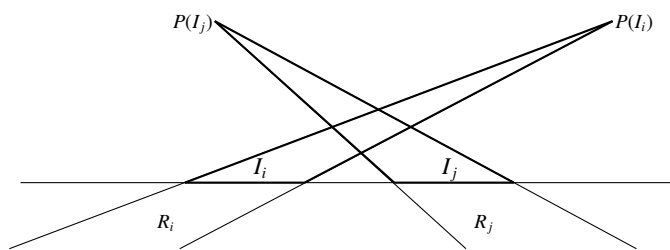


图 2.10 矩形的构造

- (1) $\sum_j \mathcal{L}^2(R_j) \sim \log k \cdot 2^k \cdot 2^{-k} = \log k$ ，由于 $\mathcal{L}^2(E) < 17$ ，对于足够大的 k ，一定可以满足 $\mathcal{L}^2(E) \leq \eta \sum_j \mathcal{L}^2(R_j)$ 。
- (2) 根据图2.10， $\tilde{R}_j \cap E$ 中包含一个底边与 R_j 的底边长度相同，而高不小于 R_j 高的 $\frac{1}{2}$ 的三角形。因此 $\mathcal{L}^2(\tilde{R}_j \cap E) \geq \frac{1}{10} \mathcal{L}^2(\tilde{R}_j)$ 。


图 2.11 I_i 与 I_j 的重叠方式

最后我们证明 $\{R_j\}$ 两两不交。根据以上构造，设 R_i 和 R_j 分别位于长度为 2^{-k} 的区间 I_i, I_j 的下方，我们记 $P(I_i), P(I_j)$ 分别为对应小三角形的顶点。根据 E 和小三角形的构造，



如果 I_i 位于 I_j 的左侧, 那么 $P(I_i)$ 一定位于 $P(I_j)$ 的右侧。因此小三角形的重叠情况如图2.11所示, 这说明在 I_i, I_j 下方它们并不会相交, 因此 $R_i \cap R_j = \emptyset$ 。□

现在根据引理2.1定义 T_j , 根据引理2.2选取集合 E 和矩形 $\{R_j\}$, 并且令 $f_j = \chi_{R_j}$, 我们先证明下面的引理。

引理 2.3: 存在 $c > 0$, 使得对于任意 j , 都有 $|T_j f_j| > c$ 在 \tilde{R}_j 上成立。

证明 见附录A。□

现在我们来导出矛盾。一方面, 利用引理2.3,

$$\begin{aligned} \int_E \sum_j |T_j f_j|^2 dx &= \sum_j \int_E |T_j f_j|^2 dx \\ &\geq c^2 \sum_j \mathcal{L}^2(E \cap \tilde{R}_j) \\ &\geq \frac{c^2}{10} \sum_j \mathcal{L}^2(\tilde{R}_j) = \frac{2c^2}{10} \sum_j \mathcal{L}^2(R_j) \end{aligned} \quad (2.3)$$

另一方面, 利用 Hölder 不等式和 (2.2),

$$\begin{aligned} \int_E \sum_j |T_j f_j|^2 dx &\leq \left(\int \chi_E dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int \left(\sum_j |T_j f_j|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{2}{p}} \\ &= (\mathcal{L}^2(E))^{\frac{p-2}{p}} \left\| \left(\sum_j |T_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \\ &\lesssim (\mathcal{L}^2(E))^{\frac{p-2}{p}} \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

由于 R_j 两两不相交, $f_j = \chi_{R_j}$ 的支集两两不交, 所以

$$\left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 = \left(\sum_j \mathcal{L}^2(R_j) \right)^{\frac{2}{p}} \quad (2.5)$$

结合 E 的构造就有

$$\int_E \sum_j |T_j f_j|^2 dx \lesssim \eta^{\frac{p-2}{p}} \sum_j \mathcal{L}^2(R_j) \quad (2.6)$$



公式 (2.3) 和 (2.6) 在 η 很小时是矛盾的。这一矛盾说明 Y. Meyer 引理的结果不能成立, 即 T 不是 s -(p, p) 的。

2.3 使用 Baire 纲定理的构造

2.3.1 Baire 纲定理

定义 2.2: 设 (X, d) 是一个度量空间, 集合 $E \subseteq X$,

- (1) 称 E 是无处稠密的 (或者疏朗的), 如果 $\text{Int } \overline{E} = \emptyset$;
- (2) 称 E 是第一纲的, 如果 $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, 其中 E_n 是一列无处稠密集;
- (3) 称 E 是第二纲的, 如果 E 不是第一纲集。

定理 2.2 (Baire 纲定理^[24]): 完备的度量空间是第二纲的。

2.3.2 集合间的 Hausdorff 距离

令 $\mathcal{K} = \{X \subseteq \mathbb{R}^2 \mid X \text{ 是一个紧集}\}$, 通过引入 Hausdorff 距离的概念, 可以将 \mathcal{K} 看作一个度量空间。

定义 2.3: 对于任意 $E, F \in \mathcal{K}$, 定义 $\rho(E, F) = \sup_{e \in E} \inf_{f \in F} |e - f|$, 这里的 $|\cdot|$ 表示 \mathbb{R}^2 中两点之间的距离。定义

$$d(E, F) = \rho(E, F) + \rho(F, E) \quad (2.7)$$

这被称为 E, F 之间的 Hausdorff 距离。

注释 2.2: 以上定义中的 $\rho(E, F) + \rho(F, E)$ 可以替换为 $\max\{\rho(E, F), \rho(F, E)\}$ 。

从 ρ 的定义可以验证 $d(\cdot, \cdot)$ 是一个距离, 实际上我们有

命题 2.1 (完备性^[25]): (\mathcal{K}, d) 是一个完备的度量空间。

为了方便使用, 我们先阐述 ρ 的一些性质。

命题 2.2 (函数 ρ 的性质): 设 $A, B, C, B_n \in \mathcal{K}$

- (1) $\rho(A, B) = s \iff \begin{cases} A \subseteq B(B, r) = \cup_{b \in B} B(b, r), \text{ 对于任意的 } r > s, \\ A \not\subseteq B(B, t), \text{ 对于任意的 } t < s \end{cases};$
- (2) $\rho(A, B \cup C) \leq \min\{\rho(A, B), \rho(A, C)\};$



- (3) $\rho(A \cup B, C) = \max\{\rho(A, C), \rho(B, C)\}$ 。
- (4) 如果 $\{\rho(A, B_n)\}$ 收敛到 0, 那么对于任意点 $a \in A$, 都存在点列 $\{b_n | b_n \in B_n\}$, 使得 $\{b_n\}$ 收敛到点 a 。
- (5) 如果 $\{d(A, B_n)\}$ 收敛到 0, 并且点列 $\{b_n | b_n \in B_n\}$ 收敛到 a , 那么 $a \in A$ 。

证明 (1) **必要性:** 由于 $s = \rho(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |a - b|$, 首先对于任意 $r > s, a \in A$, 都有 $\inf_{b \in B} |a - b| < r$, 所以 $a \in B(b, r) \subseteq B(B, r)$, 即 $A \subseteq B(B, r)$ 。其次对于任意 $t < s$, 都存在 $a \in A$ 使得 $\inf_{b \in B} \|a - b\| > t$, 所以对于任意 $b \in B$, 都有 $a \notin B(b, r)$, 即 $a \notin B(B, t)$, 因此 $A \not\subseteq B(B, t)$ 。

充分性:

- 对于任意 $r > s$, 都有 $A \subseteq B(B, r)$, 因此对于任意 $a \in A$ 都有 $a \in B(B, r)$, 即存在 $b \in B$, 使得 $a \in B(b, r)$, 这说明 $\inf_{b \in B} \|a - b\| < r$ 。对于 $a \in A$ 取上确界得到 $\rho(A, B) < r$, 再由 $r > s$ 的任意性可得 $\rho(A, B) \leq s$ 。
- 反之, 对于任意 $t < s$, 都有 $A \not\subseteq B(B, t)$ 。因此存在 $a \in A$ 使得 $a \notin B(B, t)$, 所以对于任意 $b \in B$ 都有 $a \notin B(b, t)$, 即 $\|a - b\| \geq t$, 这说明 $\inf_{b \in B} \|a - b\| \geq r$ 。对于 $a \in A$ 取上确界得到 $\rho(A, B) \geq t$, 再由 $t < s$ 的任意性可见 $\rho(A, B) \geq s$ 。

综合以上两点得到 $\rho(A, B) = s$ 。

- (2) 不妨设 $s = \rho(A, B) \leq \rho(A, C)$, 现在我们证明 $\rho(A, B) \leq s$ 。根据 (1), 对于任意 $r > s$, 都有 $A \subseteq B(B, r)$, 因此 $A \subseteq B(B \cup C, r)$ 。再根据 (1), 我们有 $\rho(A, B \cup C) \leq r$ 。由于 $r > s$ 的任意性, 得到 $\rho(A, B \cup C) \leq s$ 。
- (3) 不妨设 $\rho(A, C) \leq \rho(B, C) = s$, 现在我们证明 $\rho(A \cup B, C) = s$ 。
- 根据 (1), 对于任意 $r > s$, 都有 $A, B \subseteq B(C, r)$, 因此 $A \cup B \subseteq B(C, r)$ 。再根据 (1), 我们有 $\rho(A \cup B, C) \leq r$ 。由于 $r > s$ 的任意性, 得到 $\rho(A \cup B, C) \leq s$ 。
 - 根据 (1), 对于任意 $t < s$, 都有 $B \not\subseteq B(C, t)$, 因此 $A \cup B \not\subseteq B(C, t)$ 。再根据 (1), 我们有 $\rho(A \cup B) \geq t$ 。由于 $t < s$ 的任意性, 得到 $\rho(A \cup B, C) \geq s$ 。
- (4) 设 $s_n = \rho(A, B_n)$, 则 $\{s_n\}$ 收敛到 0。任意取一个严格单调减小, 并且收敛到 0 的正数列 $\{r_n\}$ (例如 $r_n = \frac{1}{n}$)。根据 (1), 我们有 $A \subseteq B(B_n, s_n + r_n)$, 因此 $a \in B(B_n, s_n + r_n)$ 。现在可以选取 $b_n \in B_n$, 使得 $|a_n - b_n| < s_n + r_n$, 以此得到点列 $\{b_n\}$ 。这样我们有

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + r_n = 0 \quad (2.8)$$



也即 $\{b_n\}$ 收敛到点 a 。

(5) 根据条件, $d(A, B_n)$ 收敛到 0, 由于

$$d(A, B_n) \geq \rho(B_n, A) = \sup_{s \in B_n} \inf_{t \in A} |s - t| \geq \inf_{t \in A} |b_n - t| \quad (2.9)$$

上式的最后一项同样收敛到 0, 因此可以选取 $a_n \in A$, 使得 $\{b_n - a_n\}$ 收敛到 0。因此结合 $\{b_n\}$ 收敛到 a ,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| + |b_n - a| = 0 \quad (2.10)$$

这说明 $\{a_n\}$ 收敛到 a 。又由于 $A \in \mathcal{K}$, 它是一个 \mathbb{R}^2 中的紧集, 所以 $a \in A$ 。□

2.3.3 Besicovitch 集的构造

现在我们定义 \mathcal{K} 的一个闭子集 \mathcal{P} (因此也是完备的度量空间), 并且证明在 \mathcal{P} 中 Lebesgue 测度为 0 的集合是第二纲的^[26]。

定义 2.4: 令 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}$ 是满足以下两条性质的集合 $P \subseteq [-1, 1] \times [0, 1]$ 所构成的集族:

- (1) P 是一些连接 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 1)$ 的线段之并, 这里 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$;
- (2) 对于任意 $v \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 都存在 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ 使得 $x_2 - x_1 = v$, 并且连接 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 1)$ 的线段包含在 P 之中。

命题 2.3: \mathcal{P} 是 (\mathcal{K}, d) 的一个闭子集, 因此也是一个完备度量空间。

证明 设 $\{P_n\} \subseteq \mathcal{P}, P \in \mathcal{K}$ 并且 $\{P_n\}$ 在距离 d 下收敛到 P , 我们证明 $P \in \mathcal{P}$ 。以下仅验证 (1), 因为 (2) 的证明是完全类似的。对于任意 $x \in P$, 由于 $d(P, P_n)$ 趋于 0, 我们有 $\rho(P, P_n)$ 也趋于 0。根据命题 2.2(4), 存在点列 $\{x_n | x_n \in P_n\}$, 使得 x_n 收敛到 x 。根据 \mathcal{P} 的定义, P_n 是一些线段之并, 因此存在 $x_n^1, x_n^2 \in [-1, 1]$, 使得 x_n 包含于连接 $(x_n^1, 0)$ 和 $(x_n^2, 1)$ 的线段 l_n , 并且线段 l_n 包含于 P_n 。这样 $\{x_n^1\}$ 和 $\{x_n^2\}$ 是 $[-1, 1]$ 中的两个有界点列, 因此存在收敛的子列 $\{x_{n_k}^1\}$ 和 $\{x_{n_k}^2\}$ 。设 $x^1 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^1, x^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^2$ 。

记连接 $(x^1, 0)$ 和 $(x^2, 1)$ 的线段为 l , 现在我们证明 $x \in l$, 并且 $l \subseteq P$ 。

- 由于 l_{n_k} 和 l 都是 $[-1, 1] \times [0, 1]$ 之间的线段, 不难发现 $d(l_{n_k}, l) \leq \max\{|x_{n_k}^1 - x^1|, |x_{n_k}^2 - x^2|\}$



$x^2\}$, 这告诉我们 $d(l_{n_k}, l)$ 趋于 0。这样因为

$$d(l_{n_k}, l) \geq \rho(l_{n_k}, l) = \sup_{s \in l_{n_k}} \inf_{t \in l} |s - t| \geq \inf_{y \in l} |x_{n_k} - y| \quad (2.11)$$

上式的最后一项同样收敛到 0。所以结合 $\{x_n\}$ 收敛到 x , 以及

$$\inf_{y \in l} |x - y| \leq |x - x_{n_k}| + \inf_{y \in l} |x_{n_k} - y| \quad (2.12)$$

可见 $\inf_{y \in l} \|x - y\| = 0$, 也即 $x \in l$ 。

- 对于任意 $y \in l$, 由于 $d(l_{n_k}, l)$ 趋于 0, 根据命题 2.2(4), 存在点列 $\{b_{n_k} | b_{n_k} \in l_{n_k}\}$, 使得 $\{b_{n_k}\}$ 收敛到 y 。注意到 $b_{n_k} \in l_{n_k} \subseteq P_{n_k}$, 而且 $d(P, P_{n_k})$ 趋于 0, 根据命题 2.2(5), 可得 $y \in P$ 。由于 $y \in l$ 的任意性, 得到 $l \subseteq P$ 。

综合以上两部分, 对于任意 $x \in P$, 存在连接两点 $(x^1, 0)$ 和 $(x^2, 1)$ 的线段 l , 满足 $x \in P \subseteq l$ 。这样 P 是一些这样的线段之并, 也即 (1) 成立。□

根据 Baire 纲定理, \mathcal{P} 是一个第二纲集, 这说明 \mathcal{P} 中的元素是非常多的。实际上, 在 \mathcal{P} 中 Lebesgue 零测集也是非常多的。

定理 2.3: \mathcal{P} 中 Lebesgue 测度为 0 的集合构成 \mathcal{P} 的一个第二纲子集。

为了证明这一定理, 我们需要以下引理。

引理 2.4: 对于 $v \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$, 令 $\mathcal{P}(v, \varepsilon) \subseteq \mathcal{P}$ 是满足以下性质的集合 P 构成的集族:

- (1) 存在有限多个两边与 x, y 轴平行的矩形 R_1, \dots, R_N , 使得对于任意 $y \in [0, 1] \cap [v - \varepsilon, v + \varepsilon]$, 都有

$$\{x | (x, y) \in P\} \subseteq \{x | (x, y) \in \cup_{i=1}^N R_i\} \quad (2.13)$$

- (2) 对于任意 $u \in [0, 1]$, 都有 $\{x | (x, u) \in \cup_{i=1}^N R_i\}$ 长度小于 100ε 。

则 $\mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 是 \mathcal{P} 中的一个稠密的开子集^[26]。

证明 • 先证明 $\mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 是 \mathcal{P} 中的一个开集。

对于 $P \in \mathcal{P}(v, \varepsilon)$, 根据 $\mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 的定义, 存在矩形 $\{R_i\}_{i=1}^N$ 满足上述性质 (1)(2)。取足够小的整数 η , 可以使得 $R'_i = R_i + [-\eta, \eta]^2, 1 \leq i \leq N$ 依然满足上述条件 (2)。

对于 $P' \in \mathcal{P}$ 满足 $d(P, P') < \eta$, 我们有 $\rho(P', P) < \eta$ 。根据 ρ 的性质 (命题 2.2(1)), 可得



$P' \subseteq B(P, \eta)$ 。这样对于任意 $y' \in [0, 1] \cap [v - \varepsilon, v + \varepsilon]$, 以及任意 $(x', y') \in P' \subseteq B(P, \eta)$, 都存在 $(x, y) \in P$, 满足 $|(x', y') - (x, y)| < \eta$ 。由于 $\{R_i\}_{i=1}^N$ 满足性质 (1), 我们有 $(x, y) \in \cup_{i=1}^N R_i$ 。现在设 $(x, y) \in R_i$, 则由 $|(x', y') - (x, y)| < \eta$ 和 R_i' 的定义, 可得 $(x', y') \in R_i'$ 。这说明 $\{R_i'\}_{i=1}^N$ 同样满足 (1)。

综上所述, 对于任意 $P \in \mathcal{P}(v, \varepsilon)$, 存在 $\eta > 0$, 使得对于任意 $P' \in \mathcal{P}$, 只要 $d(P, P') < \eta$, 便有 $P' \in \mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 。因此 $\mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 是 \mathcal{P} 中的一个开集。

- 再证明 $\mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 在 \mathcal{P} 中稠密。

对于任意 $P \in \mathcal{P}, r > 0$, 我们希望找到 $P' \in \mathcal{P}(v, \varepsilon)$, 使得 $d(P, P') < r$ 。

出于方便, 我们先对 \mathcal{P} 中的元素进行一个压缩的操作。令 $\eta = \frac{r}{4}$, 记 $l(x, \theta)$ 为 $[-1, 1] \times [0, 1]$ 中经过 (x, v) 并且与 y 轴夹角为 θ 的线段。定义

$$P_1 = (\cup\{l(x + \eta, \theta) \mid l(x, \theta) \subseteq P, x \leq 0\}) \cup (\cup\{l(x - \eta, \theta) \mid l(x, \theta) \subseteq P, x \geq 0\}) \quad (2.14)$$

它表示将 P 中的线段左右平移适当的距离, 使得 $P_1 \subseteq [-1 + \eta, 1 - \eta] \times [0, 1]$ 。由于平移前后线段互相平行, 可见 $d(P', P) = \rho(P, P') + \rho(P', P) \leq 2 \cdot \eta = \frac{r}{2}$ 。

现在我们用 $\mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 中的元素逼近 P_1 。总体的想法是构造 $P' = Q_1 \cup Q_2 \in \mathcal{P}(v, \varepsilon)$, 其中 $\rho(Q_1, P_1) < \frac{r}{4}$, 而 $Q_2 \subseteq P_1$ (因此 $\rho(Q_2, P_1) = 0$), 满足 $\rho(P_1, Q_2) < \frac{r}{4}$ 。这时根据命题 2.2(2) 和 (3), 我们有

$$\begin{aligned} d(P_1, P') &= \rho(P_1, Q_1 \cup Q_2) + \rho(Q_1 \cup Q_2, P_1) \\ &\leq \min\{\rho(P_1, Q_1), \rho(P_1, Q_2)\} + \max\{\rho(Q_1, P_1), \rho(Q_2, P_1)\} \\ &= \min\{\rho(P_1, Q_1), \rho(P_1, Q_2)\} + \max\{\rho(Q_1, P_1), 0\} \\ &\leq \rho(P_1, Q_2) + \rho(Q_1, P_1) < \frac{r}{2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

- 先来构造 Q_1 。通过选取足够小的 $\xi > 0$, 对于 $Q = \cup\{l(x, \phi) \mid |\phi - \theta| < \xi, l(x, \theta) \subseteq P_1\}$, 可以满足 $d(Q, P_1) < \frac{r}{4}$ 。注意到 P_1 中每条线段角度都落在有界闭区间 $[-\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2}]$ 中。利用它的紧性, 存在有限条线段 $l(x_i, \theta_i)$, 满足

$$[-\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2}] \subseteq \cup_{i=1}^n (\theta_i - \xi, \theta_i + \xi) \quad (2.16)$$

通过适当减小每个开区间的长度, 可以得到新的覆盖 $\{(\theta_i - \xi_i^1, \theta_i + \xi_i^2)\}$, 它满

足

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^1 + \xi_i^2) < 4\pi \quad (2.17)$$

现在我们令 $Q_1 = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\phi} \{l(x_i, \phi) \mid \theta_i - \xi_i^1 < \phi < \theta_i + \xi_i^2\}$ 。以上过程说明 $Q_1 \subseteq Q$ ，因此根据命题2.2(3)， $\rho(Q_1, P_1) \leq \rho(Q, P_1) < \frac{r}{4}$ 。

- 再来构造 Q_2 。注意到 $\mathcal{B} = \{B(l(x, \theta), \frac{r}{4}) \mid l(x, \theta) \subseteq P_1\}$ 是 P_1 的一个开覆盖，由于 P_1 的紧性，存在一个有限的子覆盖，记作 $\{B(l(x_j, \theta_j), \frac{r}{4})\}_{j=1}^m$ 。现在令 $Q_2 = \bigcup_{j=1}^m l(x_j, \theta_j)$ ，则 $Q_2 \subseteq P_1$ ，并且根据命题2.2(1)， $\rho(P_1, Q_2) < \frac{r}{4}$ 。
- 最后我们证明 $P' = Q_1 \cup Q_2 \in \mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 。根据以上构造， Q_1 是有限个锥形 $\bigcup \{l(x_i, \phi) \mid \theta_i - \xi_i^1 < \phi < \theta_i + \xi_i^2\}$ 的并集，而 Q_2 是有限条线段 $\{l(x_j, \theta_j)\}$ 的并集。

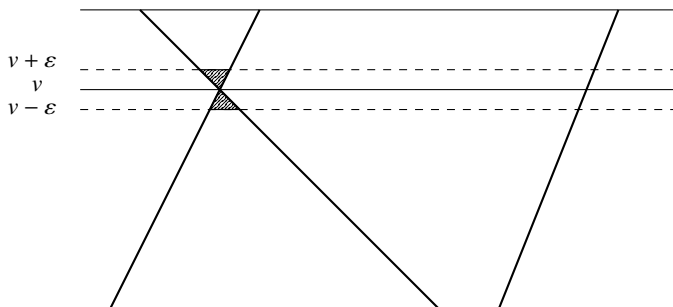


图 2.12 锥形和线段

对于锥形 $D_i = \bigcup_{\phi} \{l(x_i, \phi) \mid \theta_i - \xi_i^1 < \phi < \theta_i + \xi_i^2\}$ ，它的两边夹角为 $\xi_i^1 + \xi_i^2$ ，因此直线 $y = v \pm \varepsilon$ 与它所截线段（即图2.12阴影部分的上下底边）的长度不超过 $3\varepsilon(\xi_i^1 + \xi_i^2)$ 。根据 (2.17)，直线 $y = v \pm \varepsilon$ 和所有锥形所截线段的长度不超过 $3\varepsilon \sum_{i=1}^n (\xi_i^1 + \xi_i^2) < 12\pi\varepsilon$ 。这样我们可以选取矩形 $\{R_i\}_{i=1}^n$ ，满足 $(Q_1 \cap [-1, 1] \times [v - \varepsilon, v + \varepsilon]) \subseteq \bigcup_{i=1}^n R_i$ ，并且 $\{x \mid (x, y) \in \bigcup_{i=1}^n R_i\}$ 长度小于 $12\pi\varepsilon$ 。对于 Q_2 ，由于它是 m 的条线段的并集，它是 \mathcal{L}^2 零测的。所以可以选取有限多个矩形，记作 $\{R_i\}_{i=n+1}^N$ ，满足 $(Q_2 \cap [-1, 1] \times [v - \varepsilon, v + \varepsilon]) \subseteq \bigcup_{i=n+1}^N R_i$ ，并且 $\{x \mid (x, y) \in \bigcup_{i=n+1}^N R_i\}$ 长度小于 ε 。

这时矩形 $\{R_i\}_{i=1}^N$ 满足条件 (1)(2)，因此 $P' \in \mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 。

综合以上三点， $P' \in \mathcal{P}(v, \varepsilon)$ ，满足 $d(P_1, P') < \frac{r}{2}$ ，因此 $d(P, P') \leq d(P, P_1) + d(P_1, P') < r$ 。

由于 $P \in \mathcal{P}$ ， $r > 0$ 的任意性，可得 $\mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 在 \mathcal{P} 中稠密。

综上所述，对于任意的 $v \in [0, 1]$ ， $\varepsilon > 0$ ， $\mathcal{P}(v, \varepsilon)$ 是 \mathcal{P} 中的一个稠密的开子集。 \square

现在可以给出定理2.3的证明。



证明 (定理2.3) 根据引理2.4, 对于任意 $n \in \mathbb{N}_*$, $0 \leq r \leq n$, 都有 $\mathcal{P}\left(\frac{r}{n}, \frac{1}{n}\right)$ 是第二纲的。令 $\mathcal{P}_n = \bigcap_{r=0}^n \mathcal{P}\left(\frac{r}{n}, \frac{1}{n}\right)$, 它同样是第二纲的, 并且对于任意 $P \in \mathcal{P}_n$, $u \in [0, 1]$, 都有 $\{x | (x, u) \in P\}$ 的长度小于 $\frac{100}{n}$ 。再令 $\mathcal{P}_* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$, 它同样是第二纲的, 并且对于任意 $P \in \mathcal{P}_*$, $u \in [0, 1]$, 都有 $\{x | (x, u) \in P\}$ 的长度为 0。由 Fubini 定理^[27]

$$\mathcal{L}^2(P) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_P d\mathcal{L}^2 = \int_0^1 dy \int_{-1}^1 \chi_P(x, y) dx = \int_0^1 0 dy = 0 \quad (2.18)$$

因此对于任意 $P \in \mathcal{P}_*$, 都有 $\mathcal{L}^2(P) = 0$ 。由此可见 \mathcal{P}_* 是 \mathcal{P} 中的一个第二纲集, 并且其中元素都满足 Lebesgue 测度为 0。这说明 \mathcal{P} 中 Lebesgue 测度为 0 的集合构成一个第二纲子集。□

根据定义, \mathcal{P} 中的每一个元素 P 都是由很多线段取并得到的一个紧集, 并且对于任意 $\theta \in [-\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2}]$, P 中都包含一条与 y 轴夹角为 θ 的线段。因此将 Lebesgue 测度为 0 的集合 P 进行多次旋转, 并且对于旋转所得的集合取并 (例如每一次旋转 $\frac{\pi}{6}$, 一共旋转 11 次), 就能得到一个 Besicovitch 集, 而且它的 Lebesgue 测度同样为 0。由于 Lebesgue 测度为 0 的集合在 \mathcal{P} 中是第二纲的, 这种构造可以给出相当多的测度为 0 的 Besicovitch 集。



3 对偶方法

在这一章中我们通过平面中点和直线的对偶关系给出一种 Besicovitch 集的构造, 并且说明它的 Hausdorff 维数是满的。为此需要先介绍一些重要的概念和性质。

3.1 集合的 Hausdorff 维数

在本节中, 我们给出集合的 Hausdorff 维数的定义, 以及它的一些计算方法。

3.1.1 概念和性质

定义 3.1: 在 \mathbb{R}^n 中, 对于集合 F , 定义

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s \mid \text{diam } U_i \leq \delta, F \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i \right\} \quad (3.1)$$

根据上述定义, 当 δ 趋于 0 时, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ 不断增加, 因此可以给出以下定义。

定义 3.2 (Hausdorff 测度): 定义集合 F 的 s 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ 。

命题 3.1 (Borel 正则性^[28]): Hausdorff 测度是一个 Borel 测度, 并且是 Borel 正则的。

例 3.1 (两个特殊的 Hausdorff 测度): (1) 对于 $s = 0$, $\mathcal{H}^s(F) = \#F$, 也即计数测度。

(2) 对于 $s = n$, 我们有 $\alpha(n)\mathcal{H}^s(F) = 2^n \mathcal{L}^n(F)$, 其中 $\mathcal{L}^n(\cdot)$ 是 n 维 Lebesgue 测度, $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B(0, 1))$ 表示 \mathbb{R}^n 中单位球的体积。

命题 3.2 (Lipschitz 映射与 Hausdorff 测度): 设 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个参数为 c 的 Lipschitz 映射, 即

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad (3.2)$$

对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都成立。则对于 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F) \quad (3.3)$$



证明 对于任意 $\varepsilon, \delta > 0$, 根据 (3.1), 存在 $\{U_i\}$, 满足 $\text{diam } U_i \leq \delta$, $F \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i$, 并且

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s \quad (3.4)$$

这时 $F \subseteq f(\cup_{i=1}^{\infty} U_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f(U_i)$, 并且

$$\text{diam } f(U_i) = \sup_{x,y \in U_i} |f(x) - f(y)| \leq c \sup_{x,y \in U_i} |x - y| = c \text{diam } U_i \quad (3.5)$$

因此

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(f(F)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } f(U_i))^s \leq c^s \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s < c^s (\mathcal{H}_{\delta}^s(F) + \varepsilon) \quad (3.6)$$

令 δ 趋于 0, 由于 ε 的任意性, 可得 $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$ 。 \square

命题 3.3 (Hausdorff 测度的单调性): 对于 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < t \leq n$,

- (1) 如果 $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, 则 $\mathcal{H}^t(F) = 0$;
- (2) 如果 $\mathcal{H}^t(F) > 0$, 则 $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ 。

证明 注意到对于 $0 < \delta < 1$, 以及 $\{U_i\}$ 满足 $\text{diam } U_i \leq \delta$, $F \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^t = \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s \cdot (\text{diam } U_i)^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s \quad (3.7)$$

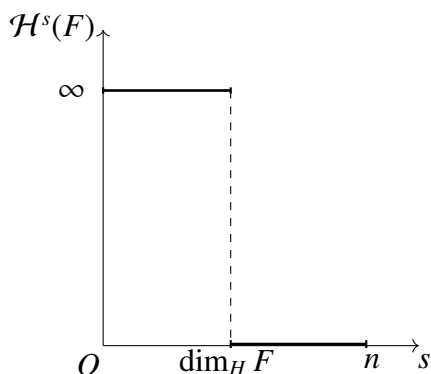
- (1) 如果 $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, 则 $\mathcal{H}_{\delta}^s(F) < \infty$ 。取 $\{U_i\}$ 满足 $\text{diam } U_i \leq \delta$, $F \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i$, 并且 $\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s < \mathcal{H}_{\delta}^s(F) + \varepsilon$ 。根据 (3.7),

$$\mathcal{H}_{\delta}^t(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s < \delta^{t-s} (\mathcal{H}_{\delta}^s(F) + \varepsilon) \quad (3.8)$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 得到 $\mathcal{H}^t(F) \leq 0$, 即 $\mathcal{H}^t(F) = 0$ 。

- (2) 同理可证。 \square

注释 3.1: 根据命题3.3, $\mathcal{H}^s(F)$ 关于 s 的变化关系如图3.1所示。其中, 在 $s = \dim_H F$ 处, $\mathcal{H}^s(F)$ 可能为 0, ∞ 或某个有限数。


图 3.1 $\mathcal{H}^s(F)$ 的变化关系

定义 3.3 (Hausdorff 维数): 定义集合 F 的 *Hausdorff* 维数 $\dim_H F = \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$ 。

注释 3.2: 根据命题 3.3, $\sup\{s \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\} = \inf\{s \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\}$, 因此也可以用后者进行定义。

注释 3.3: 对于许多集合, 它的 *Hausdorff* 维数可以大于拓扑维数, 文献 [29] 提供了许多这样的例子, 比如 *Cantor* 集等分形集和自相似集。粗略地说, *Hausdorff* 维数能够刻画一个集合里点的聚集情况。

结合命题 3.2 和 *Hausdorff* 维数的定义, 可以得到如下命题

命题 3.4 (Lipschitz 映射与 Hausdorff 维数): 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个 *Lipschitz* 映射, 则对于 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, 我们有 $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ 。

先来看一些较为简单的例子。

例 3.2: 在 \mathbb{R}^n 中,

- (1) 如果 $F = \mathbb{R}^n$, 则 $\dim_H F = n$;
- (2) 如果 F 由可数多个 (有限多或者可数无穷) 点构成, 则 $\dim_H F = 0$ 。

接下来我们计算 *Cantor* 三分集的 *Hausdorff* 维数。为了能够给出维数的下界, 我们先引入一个引理。

定义 3.4 (质量分布): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, μ 是 \mathbb{R}^n 上的一个测度。我们称 μ 为 F 上的一个质量分布, 如果它满足以下两条

- (1) $\text{supp } \mu \subseteq F$;



(2) $0 < \mu(F) < \infty$ 。

引理 3.1 (质量分布与 Hausdorff 维数): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, μ 是 F 上的一个质量分布。如果对于 $0 \leq s \leq n$, 存在 $c, \varepsilon > 0$, 使得对于任意 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足 $\text{diam } U \leq \varepsilon$, 都有

$$\mu(U) \leq c (\text{diam } U)^s, \quad (3.9)$$

则 $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{c} \mu(F)$ 。

证明 任取 $\{U_i\}$, 满足 $\text{diam } U_i < \varepsilon$, $F \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ 。根据 (3.9), 我们有

$$0 < \mu(F) \leq \mu(\cup_i U_i) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i (\text{diam } U_i)^s \quad (3.10)$$

在上式中关于 $\{U_i\}$ 取下确界, 根据 $\mathcal{H}_\delta^s(\cdot)$ 的定义, 对于任意 $\delta < \varepsilon$, 我们有 $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \frac{1}{c} \mu(F)$ 。令 δ 趋于 0, 得到 $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{c} \mu(F)$ 。□

推论 3.1: 如果集合 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq s \leq n$ 满足引理 3.1 的条件, 那么 $\dim_H F \geq s$ 。

注释 3.4: 满足 (3.9) 的测度 μ 被称为 *Frostman* 测度, 它在 *Hausdorff* 维数的计算中有很大的作用。一般条件下 *Frostman* 测度的存在性由 *O. Frostman* 证明。

例 3.3 (Cantor 三分集): *Cantor* 三分集^[27] 的定义如下: 记 $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ 。首先将 I 等分为三份, 每一份都是长度为 $\frac{1}{3}$ 的区间, 然后移除区间 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 记得到的集合为 C_1 。这样 $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ 。对于 C_1 中的两个闭区间重复以上操作, 即等分为三份然后移除中间的开区间, 得到 $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ 。不断重复这一过程, 可以得到一系列不断下降的集合 $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, 我们定义 *Cantor* 三分集为

$$C = \cap_{i=1}^{\infty} C_i \quad (3.11)$$

它是一个 \mathcal{L}^1 零测集。

现在我们来计算 *Cantor* 三分集的 *Hausdorff* 维数, 记 $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ 。



图 3.2 Cantor 三分集的构造过程

- 记 C_k 为第 k 次操作后留下的集合，则它由 2^k 个长度为 3^{-k} 的闭区间构成，它们形成 C 的一个覆盖。因此有

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 2^k (3^{-k})^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 1 \quad (3.12)$$

令 k 趋于正无穷，得到 $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ ，这说明 $\dim_H C \leq s$ 。

- 构造 C 上的一个质量分布 ([30] 称之为 *Cantor* 测度)。令 $\mathcal{S} = \{[0, 1], [0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1], \dots\}$ ，也即将所有 C_k 中的闭区间放在一起。定义集函数 $\mu_0 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 如下：

$$\mu_0([0, 1]) = 1, \mu_0([0, \frac{1}{3}]) = \mu_0([\frac{2}{3}, 1]) = \frac{1}{2}, \dots \quad (3.13)$$

也即对于第 k 次操作得到的 2^k 个闭区间， μ_0 的取值均为 2^{-k} 。

由于 \mathcal{S} 构成一个半环， μ_0 是其上的预测度，根据 *Carathéodory* 扩张理论^[27]，我们可以将 μ_0 扩张为区间 $[0, 1]$ 上的一个测度，记作 μ ，它满足 $\mu|_{\mathcal{S}} = \mu_0$ 。

对于任意 $U \subseteq \mathbb{R}$ 满足 $\text{diam } U \leq 1$ ，设 $3^{-(k+1)} \leq \text{diam } U < 3^{-k}$ ，则 U 至多和 1 个第 k 次操作得到的区间相交，因此我们有

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = (3^{-k})^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq (3 \text{diam } U)^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 2(\text{diam } U)^s \quad (3.14)$$

这说明 (3.9) 对于 C, s 和 $\varepsilon = 1, c = 2$ 成立，根据引理 3.1, $\mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{2}$ ，因此 $\dim_H C \geq s$ 。

综合以上两部分， $\mathcal{H}^s(C) \in [\frac{1}{2}, 1]$ ，并且 $\dim_H C = s = \frac{\log 2}{\log 3}$ 。

注释 3.5: 我们可以推广 *Cantor* 三分集的定义，例如进行五分、七分等，用类似的方法可以证明对于 *Cantor* $(2m-1)$ -分集 C_{2m-1} ，我们有 $\dim_H C_{2m-1} = \frac{\log 2}{\log(2m-1) - \log(m-1)}$ 。注意到 $\mathcal{L}^1(C_{2m-1}) = 0$ ，并且随着 m 趋于正无穷， $\dim_H C_{2m-1}$ 趋于 1。这说明可以对可数个 *Cantor* 型集合取并集，以此得到 \mathbb{R} 中 *Hausdorff* 维数为 1 的 *Lebesgue* 零测集。

例 3.4 (Cantor 尘埃集): *Cantor* 尘埃集^[29] 的定义如下: 记 $A = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ 。首先通过将每条边四等分, 以此将 A 划分为 16 个小正方形, 然后保留如图 3.3 所示的四个小正方形, 移除其他部分, 这样得到 D_1 。对于 D_1 中的四个正方形重复以上操作, 即等分为 16 个小正方形, 保留其中四个, 移除其他部分。不断重复这一过程, 可以得到一列不断下降的集合 $\{D_i\}_{i=1}^\infty$, 我们定义 *Cantor* 尘埃集为

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^\infty D_i \quad (3.15)$$

它是一个 \mathcal{L}^2 零测集。

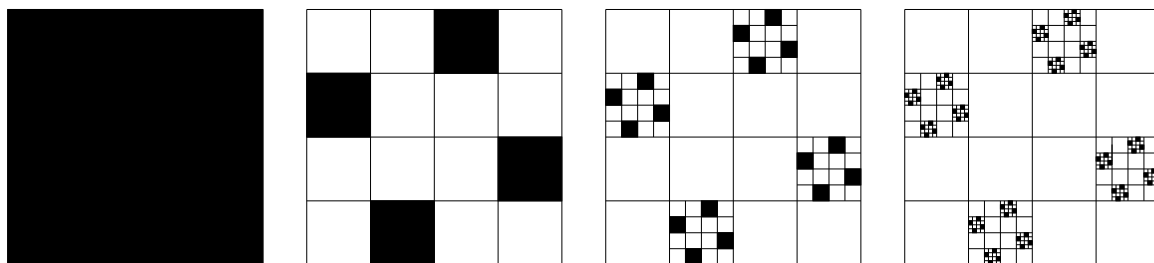


图 3.3 *Cantor* 尘埃集的构造过程

现在我们来计算它的 *Hausdorff* 维数。

- 记 D_k 为第 k 次操作后留下的集合, 则它由 4^k 个边长为 4^{-k} 的正方形构成, 它们形成 \mathcal{D} 的一个覆盖。因此有

$$\mathcal{H}_{4^{-k}\sqrt{2}}^1(\mathcal{D}) \leq 4^k \cdot 4^{-k} \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad (3.16)$$

令 k 趋于正无穷, 得到 $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}) \leq \sqrt{2}$, 这说明 $\dim_H \mathcal{D} \leq 1$ 。

- 考虑向 x 轴的投影 $\text{Proj}_0(\cdot)$, 这是一个参数为 1 的 *Lipschitz* 映射, 并且由 *Cantor* 尘埃集的定义可知, $\text{Im Proj}_0 = [0, 1]$ 。根据命题 3.2, $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}) \geq \mathcal{H}^1([0, 1]) = 1$, 因此 $\dim_H \mathcal{D} \geq 1$ 。

综合以上两部分, $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}) \in [1, \sqrt{2}]$, 并且 $\dim_H \mathcal{D} = 1$ 。

3.1.2 势能方法

势能方法是给出 *Hausdorff* 维数的一种有效方法。为了证明它, 我们需要引入以下 *Frostman* 引理。



定理 3.1 (O. Frostman 引理^[28]): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 Borel 集, $0 \leq s \leq n$, 并且 $0 < \mathcal{H}^s(F) \leq \infty$, 则存在紧集 $E \subseteq F$ 满足以下两个性质

- (1) $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$;
- (2) 存在 $b > 0$, 使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, 都有 $\mathcal{H}^s \llcorner E(B(x, r)) \leq br^s$ 。其中 $\mathcal{H}^s \llcorner E$ 是 $\mathcal{H}^s(\cdot)$ 在 E 上的限制, 即 $\mathcal{H}^s \llcorner E(\cdot) = \mathcal{H}^s(E \cap \cdot)$ 。

注释 3.6: 定理 3.1 可以视为引理 3.1 的逆命题。引入密度的概念后, 定理 3.1 的结果可以表述成 “ E 的上密度有界”。

定义 3.5 (Riesz 位势和 s - 能量): 设 μ 是 \mathbb{R}^n 上的一个质量分布, $0 \leq s \leq n$,

- (1) 定义 Riesz s - 位势

$$\phi_s(x) = \frac{1}{|x|^s} * \mu = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \quad (3.17)$$

- (2) 定义 s - 能量

$$I_s(\mu) = \int \phi_s(x) dx = \iint \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} \quad (3.18)$$

定理 3.2 (势能方法): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 Borel 集, $0 \leq s \leq n$,

- (1) 如果存在一个 F 上的质量分布 μ , 使得 $I_s(\mu) < \infty$, 则 $\mathcal{H}^s(F) = \infty$;
- (2) 如果 $\mathcal{H}^s(F) > 0$, 则存在一个 F 上的质量分布 μ , 使得对于任意 $0 \leq t < s$, 都有 $I_t(\mu) < \infty$ 。

证明 (1) 设 μ 是 F 上的一个质量分布, 它满足 $I_s(\mu) < \infty$ 。

- 令 $F_1 = \left\{ x \in F \mid \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} > 0 \right\}$, 先证明 $\mu(F_1) = 0$ 。

对于任意 $x \in F$, 存在 $\varepsilon > 0$ 和一系列 $\{r_i\}$, 满足 r_i 趋于 0, 并且 $\mu(B(x, r_i)) \geq \varepsilon r_i^s$ 。

由于 $I_s(\mu) < \infty$, 可见 $\mu(\{x\}) = 0$ 。利用测度 μ 的连续性, 存在一系列 $\{q_i\}$, 满足 $q_i < r_i$, 并且

$$\mu(B(x, r_i) \setminus B(x, q_i)) \geq \frac{\varepsilon r_i^s}{2} \quad (3.19)$$

记 $A_i = B(x, r_i) \setminus B(x, q_i)$ 。在选取子列的意义下, 不妨设 $r_1 > q_1 > r_2 > q_2 > \cdots$, 于是

$$\phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(A_i)}{r_i^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} = \infty \quad (3.20)$$



由于 $I_s(\mu) = \int \phi_s(x)dx < \infty$, 满足以上条件的 x 一定包含在一个 μ 零测集中, 即 $\mu(F_1) = 0$ 。

- 现在令 $E = F \setminus F_1 = \left\{ x \in F \mid \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} = 0 \right\}$, 则 $\mu(E) = \mu(F)$ 。

对于 $c > 0$, 令 $E_n = \{x \in F \mid \mu(B(x, r)) < cr^s, 0 < r \leq \frac{1}{n}\}$ 。则 $\{E_n\}$ 是一列不断上升的集合, 并且 $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ 。因此有

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^s(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^s(E_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{n}}^s(E_n) \quad (3.21)$$

注意到对于 E_n 和任意 $\delta > 0$, 设 $\{U_i\}$ 满足 $\text{diam } U_i < \frac{1}{n}$, $E_n \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ (这里不妨设 $U_i \cap E_n \neq \emptyset$, 否则可以去除该 U_i 而不影响 $\{U_i\}$ 的性质), 并且

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{n}}^s(E_n) + \delta \geq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s \quad (3.22)$$

设 $x \in U_i \cap E_n$, 这样 $U_i \subseteq B(x_i, \text{diam } U_i)$, 这说明 $E_n \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \text{diam } U_i)$ 。根据 E_n 的定义, 我们有 $\mu(B(x_i, \text{diam } U_i)) < c(\text{diam } U_i)^s$, 所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(B(x_i, \text{diam } U_i))}{c} \geq \frac{\mu(E_n)}{c} \quad (3.23)$$

结合 (3.22), 我们有

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{n}}^s(E_n) + \delta > \frac{\mu(E_n)}{c} \quad (3.24)$$

由于 $\delta > 0$ 的任意性, 可得 $\mathcal{H}_{\frac{1}{n}}^s(E_n) \geq \frac{\mu(E_n)}{c}$ 。根据 (3.21),

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{n}}^s(E_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(E_n)}{c} = \frac{\mu(E)}{c} = \frac{\mu(F)}{c} > 0 \quad (3.25)$$

由于 $c > 0$ 的任意性, 令 c 趋于 0, 得到 $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ 。

- (2) 设 $\mathcal{H}^s(F) > 0$, 由定理 3.1, 存在紧集 $E \subseteq F$, 满足 $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$, 并且存在 $b > 0$, 使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, 都有 $\mathcal{H}^s \llcorner E(B(x, r)) \leq br^s$ 。记 $M = \text{diam } E, \mu = \mathcal{H}^s \llcorner E$ 。



对于 $0 \leq t < s$,

$$\begin{aligned}
 \phi_t(x) &= \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\frac{M}{2^{i+1}} \leq |x-y| < \frac{M}{2^i}} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2^{i+1}}{M}\right)^t \cdot \mu\left(B\left(x, \frac{M}{2^i}\right)\right) \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2^{i+1}}{M}\right)^t \cdot b\left(\frac{M}{2^i}\right)^s \\
 &= 2^t M^{s-t} b \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (2^{t-s})^i < \infty
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

因此 $I_t(\mu) = \int \phi_t(x) d\mu(x) < \infty$ 。

□

推论 3.2: 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 *Borel* 集, $0 \leq s \leq n$, 则 $\dim_H F \geq s$ 当且仅当存在一个 F 上的质量分布 μ , 使得对于任意 $t < s$, 都有 $I_t(\mu) < \infty$ 。

注释 3.7: 在以上结论中, “*Borel* 集”的要求可以减弱。之所以考虑 *Borel* 集, 是因为这样可以避免讨论集合 F 的可测性, 而且由于 *Hausdorff* 测度是 *Borel* 正则的 (参见命题 3.1), 在讨论测度、维数时, 考虑 *Borel* 集就足够了。

3.2 正则集与非正则集

我们先给出密度的定义以及密度定理, 然后通过它来讨论 1- 集合的性质。

3.2.1 密度

定义 3.6 (集合在某一点处的密度^[31]): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in F$, $0 \leq s \leq n$,

(1) 定义 F 在 x 处的 s - 上密度为

$$\Theta^{*s}(F, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B(x, r))}{(2r)^s} \tag{3.27}$$

(2) 定义 F 在 x 处的 s - 下密度为

$$\Theta_*^s(F, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B(x, r))}{(2r)^s} \tag{3.28}$$



定理 3.3 (密度定理^[29]): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个 Borel 集, $0 \leq s \leq n$, 则我们有

- (1) 对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in F$, 都有 $2^{-s} \leq \Theta^{*s}(F, x) \leq 1$;
- (2) 对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \notin F$, 都有 $\Theta^{*s}(F, x) = \Theta_*^s(F, x) = 0$ 。

为了证明定理3.3, 我们需要以下两个引理。

引理 3.2 (5r 覆盖^[28]): 设 $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一族闭球, 满足

$$\sup_{\alpha \in I} \text{diam } B_\alpha < \infty \quad (3.29)$$

则存在至多可数的闭球 $B_i \in \mathcal{B}$ 满足以下两条

- (1) $\{B_i\}$ 两两不交;
- (2) $\cup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \cup_i 5B_i$ 。其中如果 $B_i = \overline{B(x_i, r_i)}$, 则 $5B_i = \overline{B(x_i, 5r_i)}$ 。

证明 记 $B_\alpha = \overline{B(x_\alpha, r_\alpha)}$, 令 $M = \sup_{\alpha \in I} r_\alpha < \infty$ 。对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 令 $I_k = \{\alpha \in I \mid 2^{-k}M \leq r_\alpha < 2^{-k+1}M\}$, 则 $\{I_k\}$ 两两不交, 并且 $\cup_{k=1}^\infty I_k = I$ 。因为 $\{B_\beta\}_{\beta \in I_1}$ 半径有下界, 所以可以取极大子集 $J_1 \subseteq I_1$, 满足 J_1 可数, 并且 $\{B_\beta\}_{\beta \in J_1}$ 两两不交。下面通过递归定义 $\{J_k\}$ 。假设 J_1, \dots, J_{k-1} 已经取定, 同样因为 $\{B_\beta\}_{\beta \in I_k}$ 半径有下界, 可以取 I_k 的极大子集 J_k , 满足 J_k 可数, 并且 $\{B_\beta\}_{\beta \in J_1 \cup \dots \cup J_k}$ 两两不交。

现在令 $J = \cup_{k=1}^\infty J_k$, 这是一个至多可数的集合, 并且 $\{B_i\}_{i \in J}$ 两两不交, 这样 (1) 得到满足。现在来证明 (2)。对于任意 $\alpha \in I$, 我们证明 $B_\alpha \subseteq \cup_{i \in J} 5B_i$ 。设 $\alpha \in I_k$, 则有 $2^{-k}M \leq r_\alpha < 2^{-k+1}M$ 。

- 如果 $\alpha \in J_k \subseteq J$, 那么自然有 $B_\alpha \subseteq \cup_{i \in J} B_i \subseteq \cup_{i \in J} 5B_i$;
- 如果 $\alpha \notin J_k$, 由于 J_k 的极大性, 存在 $j \in J_k$, 使得 $B_\alpha \cap B_j \neq \emptyset$ (否则可以将 B_α 补充到 $\{B_\beta\}_{\beta \in J_k}$ 中, 这和极大性矛盾)。由于 $\alpha, j \in I_k$, 则 $2^{-k}M \leq r_\alpha, r_j < 2^{-k+1}M$, 我们有 $\frac{1}{2}r_\alpha \leq r_j \leq 2r_\alpha$ 。因此 $|x_\alpha - x_j| \leq r_\alpha + r_j \leq 2r_j + r_j = 3r_j$ 。所以对于任意 $y \in B_\alpha$, 都有 $|y - x_j| \leq |y - x_\alpha| + |x_\alpha - x_j| \leq 5r_j$, 这说明 $B_\alpha \subseteq 5B_j \subseteq \cup_{i \in J} 5B_i$ 。

综合以上两点, $B_\alpha \subseteq \cup_{i \in J} 5B_i$, 由于 $\alpha \in I$ 的任意性, $\cup_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \cup_{i \in J} 5B_i$ 。□

注释 3.8: 从以上引理的证明可以看出, 我们能够得到一个可数的指标集 J , 满足对于任意 $\alpha \in I$, 都存在 $j \in J$, 使得 $B_\alpha \cap B_j \neq \emptyset$, 并且 $\frac{1}{2}r_\alpha \leq r_j$ 。正是这一点保证了 $\cup_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \cup_{i \in J} 5B_i$ 。

引理 3.3: 设 μ 是 \mathbb{R}^n 上的一个质量分布, $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个 Borel 集, $0 < c < \infty$, 则我们有



- (1) 如果对于任意 $x \in F$, 都有 $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} < c$, 则 $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{c}$;
- (2) 如果对于任意 $x \in F$, 都有 $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} > c$, 则 $\mathcal{H}^s(F) \leq \frac{2^s \mu(\mathbb{R}^n)}{c}$.

证明 (1) 对于任意 $\delta > 0$, 令 $F_\delta = \{x \in F \mid \mu(B(x, r)) < cr^s, 0 < r \leq \delta\}$. 则 F_δ 随着 δ 趋于 0 而不断上升. 设 $\{U_i\}$ 满足 $\text{diam } U_i < \delta, F_\delta \subseteq F \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty U_i$. 对于 U_i , 如果 $U_i \cap F \neq \emptyset$, 则取 $x \in U_i \cap F$, 这时 $U_i \subseteq B(x, \text{diam } U_i)$. 根据 F_δ 的定义

$$\mu(U_i) \leq \mu(B(x, \text{diam } U_i)) < c(\text{diam } U_i)^s \quad (3.30)$$

因此

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_{U_i \cap F_\delta \neq \emptyset} \mu(U_i) < c \sum_{i=1}^\infty (\text{diam } U_i)^s \quad (3.31)$$

根据 $\{U_i\}$ 的选取方式, $\mu(F_\delta) \leq c\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$. 现在令 δ 趋于 0, 则 F_δ 不断趋于 F , 根据测度 μ 的连续性, $\mu(\mathbb{R}^n) = \mu(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$.

- (2) 对于任意 $0 < t < c, \delta > 0$, 令 $\mathcal{B} = \{\overline{B(x, r)} \mid x \in F, 0 < r < \delta, \mu(\overline{B(x, r)}) > t \cdot r^s\}$. 则 $F \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, 对它使用引理 3.2, 存在至多可数的 $B_i = \overline{B(x_i, r_i)}$, 满足 $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ 两两不交, 并且 $F \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty 5B_i$. 取定 $N \in \mathbb{N}_*$, 如果 $F \setminus (\bigcup_{i=1}^N B_i) \neq \emptyset$, 则对于任意 $x \in F \setminus (\bigcup_{i=1}^N B_i)$, 根据 \mathcal{B} 的定义, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 满足 $x \in B, B \cap (\bigcup_{i=1}^N B_i) = \emptyset$. 根据注释 3.8, 存在 $B_j \in \{B_i\}_{i=1}^\infty$ (实际上 $j \geq N+1$), 满足 $x \in B \subseteq 5B_j$. 这说明

$$F \setminus (\bigcup_{i=1}^N B_i) \subseteq \bigcup_{i=N+1}^\infty 5B_i \quad (3.32)$$

也即 $F \subseteq (\bigcup_{i=1}^N B_i) \cup (\bigcup_{i=N+1}^\infty 5B_i)$. 所以

$$\mathcal{H}_{5\delta}^s(F) \leq \sum_{i=1}^N (\text{diam } B_i)^s + \sum_{i=N+1}^\infty (\text{diam } 5B_i)^s = \sum_{i=1}^N (\text{diam } B_i)^s + 5^s \sum_{i=N+1}^\infty (\text{diam } B_i)^s \quad (3.33)$$

在上式中令 N 趋于正无穷, 根据 \mathcal{B} 的定义, 得到

$$\mathcal{H}_{5\delta}^s(F) \leq \sum_{i=1}^\infty (\text{diam } B_i)^s \leq \sum_{i=1}^\infty \frac{2^s \mu(B_i)}{t} \leq \frac{2^s \mu(\mathbb{R}^n)}{t} \quad (3.34)$$

现在令 δ 趋于 0, 由于 $0 < t < c$ 的任意性, 可得 $\mathcal{H}^s(F) \leq \frac{2^s \mu(\mathbb{R}^n)}{c}$. \square



证明 (定理3.3) (1) • 首先证明下界。令 $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner F$ 。对于任意 $0 < c < 1$, 令 $F_1 = \left\{ x \in F \mid \Theta^{*s}(F, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{(2r)^s} < 2^{-s}c \right\}$ 。根据引理3.3, 可得

$$\mathcal{H}^s(F_c) \geq \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{c} = \frac{\mathcal{H}^s(F)}{c} \geq \frac{\mathcal{H}^s(F_c)}{c} \quad (3.35)$$

由于 $0 < c < 1$, 上式成立说明 $\mathcal{H}^s(F_c) = 0$ 。因此由 $\mathcal{H}^s(\cdot)$ 的连续性,

$$\mathcal{H}^s(\{x \in F \mid \Theta^{*s}(F, x) < 2^{-s}\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^s(F_{1-\frac{1}{n}}) = 0。$$

• 然后证明上界。对于任意 $c > 1$, 令

$G_c = \left\{ x \in F \mid \Theta^{*s}(F, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B(x, r))}{(2r)^s} > c \right\}$ 。对于任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\mathcal{H}^s(\cdot)$ 的 Borel 正则性 (命题3.1), 存在一个开集 $O \subseteq G_c$, 满足 $\mathcal{H}^s(F \cap O) < \mathcal{H}^s(G_c) + \varepsilon$ 。现在令 $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner (F \cap O)$ 根据引理3.3, 可得

$$\mathcal{H}^s(G_c) \leq \frac{2^s \mu(\mathbb{R}^n)}{2^s c} = \frac{\mathcal{H}^s(F \cap O)}{c} < \frac{\mathcal{H}^s(G_c) + \varepsilon}{c} \quad (3.36)$$

现在令 ε 趋于 0, 得到 $\mathcal{H}^s(G_c) \leq \frac{\mathcal{H}^s(G_c)}{c}$ 。由于 $c > 1$, 上式成立说明 $\mathcal{H}^s(G_c) = 0$ 。

因此由 $\mathcal{H}^s(\cdot)$ 的连续性, $\mathcal{H}^s(\{x \in F \mid \Theta^{*s}(F, x) > 1\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^s(G_{1+\frac{1}{n}}) = 0$ 。

综合以上两部分, 对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in F$, 都有 $2^{-s} \leq \Theta^{*s}(F, x) \leq 1$ 。

(2) 对于任意 $t > 0$, 令 $B_t = \{x \in F^c \mid \Theta^{*s}(F, x) > t\}$, 我们证明 $\mathcal{H}^s(B_t) = 0$ 。

令 $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner F$, 则 $\mu(F^c) = 0$ 。根据 Borel 正则性, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supseteq F^c$, 满足 $\mu(O) < \varepsilon$ 。设 $\delta > 0$ 对于任意 $x \in B_t \subseteq F^c \subseteq O$, 存在 $0 < r_x < \delta$, 满足 $B(x, r_x) \subseteq O$, 并且

$$\frac{\mu(B(x, r_x))}{(2r_x)^s} > t \quad (3.37)$$

现在 $\mathcal{B} = \{\overline{B(x, r_x)} \mid x \in B_t\}$ 满足 $B_t \subseteq \cup_{B \in \mathcal{B}} B$, 对它使用引理3.2, 存在至多可数的 $B_i = \overline{B(x_i, r_i)}$, 满足 $\{B_i\}$ 两两不交, 并且 $B_t \subseteq \cup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \cup_i 5B_i$ 。因此根据 (3.37)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{5\delta}^s(B_t) &\leq \sum_i (2r_i)^s < \sum_i \frac{\mu(B_i)}{t} \\ &= \frac{1}{t} \sum_i \mathcal{H}^s(F \cap B_i) = \frac{1}{t} \mathcal{H}^s(F \cap (\cup_i B_i)) \\ &\leq \frac{\mu(O)}{t} < \frac{\varepsilon}{t} \end{aligned} \quad (3.38)$$



令 δ 趋于 0, 由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 可得 $\mathcal{H}^s(B_t) = 0$ 。

因此由 $\mathcal{H}^s(\cdot)$ 的连续性, $\mathcal{H}^s(\{x \in F^c \mid \Theta^{*s} \neq 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^s(B_{\frac{1}{n}}) = 0$ 。由于 $\Theta_*^s(F, x) \leq \Theta^{*s}(F, x)$, 则对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \notin F$, 都有 $\Theta^{*s}(F, x) = \Theta_*^s(F, x) = 0$ 。□

3.2.2 s -集合的分解

定义 3.7 (正则点和非正则点、正则集和非正则集^[29]): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq s \leq n$,

(1) 对于 $x \in F$, 称 x 是 F 的一个正则点, 如果 $\Theta^{*s}(F, x) = \Theta_*^s(F, x) = 1$;

称 x 是 F 的一个非正则点, 如果它不是一个正则点。

(2) 称 F 是一个正则集, 如果对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in F$, 都有 x 是 F 的一个正则点;

称 F 是一个非正则集, 如果对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in F$, 都有 x 是 F 的一个非正则点。

注释 3.9: 对于 $x \in F$, x 是 F 的一个正则点当且仅当它不是一个非正则点, 反之亦然。但是对于集合 F , F 是一个正则集并不表示它不是一个非正则集, F 是一个非正则集也不表示 F 不是一个正则集。实际上, 一个集合既是一个正则集又是一个非正则集, 当且仅当它是一个 \mathcal{H}^s 零测集。

定义 3.8 (s -集合): 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 被称为一个 s -集合, 如果它满足以下两条

(1) F 是 Borel 集;

(2) $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ 。

命题 3.5 (s -集合的分解^[29]): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个 s -集合, 则我们有

(1) $\{x \in F \mid x \text{ 是 } F \text{ 的一个正则点}\}$ 是一个正则集;

(2) $\{x \in F \mid x \text{ 是 } F \text{ 的一个非正则点}\}$ 是一个非正则集。

证明 注意到对于 F 的子集 E , 和任意 $x \in E$

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B(x, r))}{(2r)^s} = \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x, r))}{(2r)^s} + \frac{\mathcal{H}^s((F \setminus E) \cap B(x, r))}{(2r)^s} \quad (3.39)$$

根据定理 3.3, 对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in E$, 都有 $\Theta_*^s(F \setminus E, x) = \Theta^{*s}(F \setminus E, x) = 0$ 。因此在 (3.39) 两侧同时取上极限、下极限, 可以得到, 对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in E$, 都有

$$\begin{aligned} \Theta^{*s}(F, x) &= \Theta^{*s}(E, x) \\ \Theta_*^s(F, x) &= \Theta_*^s(E, x) \end{aligned} \quad (3.40)$$



- (1) 令 $E = \{x \in F \mid x \text{ 是 } F \text{ 的一个正则点}\}$ 。根据 (3.40) 和正则点的定义, 对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in E$, 都有

$$\Theta^{*s}(E, x) = \Theta^{*s}(F, x) = 1 = \Theta_*^s(F, x) = \Theta_*^s(E, x) \quad (3.41)$$

所以对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in E$, 都有 x 是 E 的一个正则点, 因此 E 是一个正则集。

- (2) 令 $G = \{x \in F \mid x \text{ 是 } F \text{ 的一个非正则点}\}$ 。根据 (3.40) 和非正则点的定义, 对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in G$, 都有

$$\Theta^{*s}(G, x) = \Theta^{*s}(F, x) \neq 1 \text{ 或 } \Theta_*^s(G, x) = \Theta_*^s(F, x) \neq 1 \quad (3.42)$$

所以对于 \mathcal{H}^s 几乎处处的 $x \in G$, 都有 x 是 E 的一个非正则点, 因此 G 是一个非正则集。 \square

注释 3.10: 以上命题说明, 对于 \mathbb{R}^n 中的一个 s -集合, 可以设 $F = E \cup G$, 其中 E 是一个正则集, G 是一个非正则集, 并且 $E \cap G$ 是一个 \mathcal{H}^s 零测集。

最后我们来考虑 \mathbb{R}^2 中的 1-集合。不难证明 \mathbb{R}^2 中的可求长曲线都是正则的 1-集合, 这启示我们通过可求长曲线来刻画 1-集合。

定理 3.4 (\mathbb{R}^2 中 1-集合的刻画^[32]): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个 1-集合, 则我们有

- (1) F 是一个非正则集当且仅当 F 与所有可求长曲线的交集都是 \mathcal{H}^1 零测集;
- (2) F 是一个正则集当且仅当 $F = F_1 \cup F_2$, 其中 F_1 包含于可数多条可求长曲线的并集之中, F_2 是一个 \mathcal{H}^1 零测集。

3.3 \mathbb{R}^2 中的投影定理

在本节中, 我们将利用势能方法证明 \mathbb{R}^2 中的投影定理, 然后讨论 \mathbb{R}^2 中 1-集合的投影性质。

3.3.1 \mathbb{R}^2 中投影定理

设 $F \subseteq \mathbb{R}^2$, 记 L_θ 为过原点的和 x 轴夹角为 $\theta \in [0, \pi)$ 的直线, $\text{Proj}_\theta F$ 为 F 向 L_θ 的正交投影。由于 Proj_θ 是一个参数为 1 的 Lipschitz 映射, 根据命题 3.4, 我们有



$\dim_H \text{Proj}_\theta F \leq \dim_H F$ 。另一方面, 由于 $\text{Proj}_\theta F \subseteq L_\theta$, 则有 $\dim_H \text{Proj}_\theta F \leq \dim_H L_\theta = 1$ 。综合以上两点, 我们有 $\dim_H \text{Proj}_\theta F \leq \min\{\dim_H F, 1\}$ 。下面的 Marstrand 投影定理告诉我们这里往往可以取到等号。

定理 3.5 (Marstrand 投影定理 [33]): 设 $F \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个 Borel 集, 则对于 \mathcal{L}^1 几乎处处的 $\theta \in [0, \pi)$, 都有 $\dim_H \text{Proj}_\theta F = \min\{\dim_H F, 1\}$ 。

证明 • 先设 $\dim_H F \leq 1$ 。对于任意 $0 \leq s < \dim_H F$, 我们利用定理 3.2 证明对于 \mathcal{L}^1 几乎处处的 $\theta \in [0, \pi)$, 都有 $\dim_H \text{Proj}_\theta F \geq s$ 。

由于 $0 \leq s < \dim_H F$, 根据定理 3.2, 存在 F 上的一个质量分布 μ , 满足

$$I_s(\mu) = \iint \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} < \infty \quad (3.43)$$

现在我们从 μ 出发, 构造 $\text{Proj}_\theta F$ 上的一个质量分布 μ_θ 。

我们用 a_θ, b_θ 表示直线 $y = \tan \theta x$ 上与原点的有向距离为 a, b 的点, 用 e_θ 表示这条直线的方向向量, 以此定义

$$\mu([a_\theta, b_\theta]) = \mu(\{x \in F \mid \langle x, e_\theta \rangle \in [a, b]\}) \quad (3.44)$$

由于 $\{[a_\theta, b_\theta] \mid a \leq b\}$ 是一个半环, μ_θ 是其上的预测度, 根据 Carathéodory 扩张理论^[27], 我们可以将 μ_θ 扩张为直线 $y = \tan \theta x$ 上的一个测度, 出于方便仍记作 μ_θ 。这一测度 μ_θ 满足, 对于 $f = \chi_{[a_\theta, b_\theta]}$,

$$\begin{aligned} \int_{\text{Proj}_\theta F} f(t) d\mu_\theta(t) &= \mu_\theta([a_\theta, b_\theta]) = \mu(\{x \in F \mid \langle x, e_\theta \rangle \in [a, b]\}) \\ &= \int_F f(\langle x, e_\theta \rangle) d\mu(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

通过简单函数的逼近, 可以证明对于任意 \mathcal{L}^1 可积的函数 f , 都有

$$\int_{\text{Proj}_\theta F} f(t) d\mu_\theta(t) = \int_F f(\langle x, e_\theta \rangle) d\mu(x) \quad (3.46)$$

因此我们有

$$I_s(\mu_\theta) = \iint_{\text{Proj}_\theta F \times \text{Proj}_\theta F} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|^s} = \iint_{F \times F} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|\langle x-y, e_\theta \rangle|^s} \quad (3.47)$$

为了证明对于 \mathcal{L}^1 几乎处处的 $[0, \pi)$, 都有 $I_s(\mu_\theta) < \infty$, 我们考虑对 $\theta \in [0, \pi)$ 进行积分。因此得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi I_s(\mu_\theta) d\theta &= \int_0^\pi d\theta \iint_{F \times F} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|\langle x-y, e_\theta \rangle|^s} \\ &= \iint_{F \times F} d\mu(x)d\mu(y) \int_0^\pi \frac{1}{|\langle x-y, e_\theta \rangle|^s} d\theta \end{aligned} \quad (3.48)$$

在上式中随着 θ 取遍 $[0, \pi)$, $|\langle x-y, e_\theta \rangle|^s$ 的值实际上和 $x-y$ 的方向无关, 只和它的长度有关, 这说明不妨用 $|x-y|e_1 = |x-y| \cdot (1, 0)$ 替换 $x-y$, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^\pi I_s(\mu_\theta) d\theta &= \iint_{F \times F} d\mu(x)d\mu(y) \int_0^\pi \frac{1}{|\langle x-y, e_\theta \rangle|^s} d\theta \\ &= \iint_{F \times F} d\mu(x)d\mu(y) \int_0^\pi \frac{1}{|x-y|^s |\langle e_1, e_\theta \rangle|^s} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{|\langle e_1, e_\theta \rangle|^s} d\theta \iint_{F \times F} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} \\ &= I_s(\mu) \int_0^\pi \frac{1}{|\langle e_1, e_\theta \rangle|^s} d\theta \\ &= I_s(\mu) \int_0^\pi \frac{1}{|\cos \theta|^s} d\theta \end{aligned} \quad (3.49)$$

由于反常积分 $\int_0^\pi \frac{1}{|\cos \theta|^s} d\theta$ 在 $0 \leq s < 1$ 时收敛, 可得 $\int_0^\pi I_s(\mu_\theta) d\theta < \infty$ 。因为这一积分的值有限, 所以对于 \mathcal{L}^1 几乎处处的 $\theta \in [0, \pi)$, 都有 $I_s(\mu_\theta) < \infty$ 。

现在 μ_θ 是 $\text{Proj}_\theta F$ 上的质量分布, 根据定理3.2, 对于 \mathcal{L}^1 几乎处处的 $\theta \in [0, \pi)$, 都有 $\dim_H \text{Proj}_\theta F \geq s$ 。由于 $0 \leq s < \dim_H F$ 的任意性, 可得 $\dim_H \text{Proj}_\theta F \geq \dim_H F$, 因此 $\dim_H \text{Proj}_\theta F = \dim_H F$ 。

- 现在考虑 $\dim_H F > 1$ 的情形。对于任意的 $0 \leq s < 1$, 和以上过程相同, 可以证明对于 \mathcal{L}^1 几乎处处的 $\theta \in [0, \pi)$, 都有 $\dim_H \text{Proj}_\theta F \geq s$ 。再由 $0 \leq s < 1$ 的任意性, 可得 $\dim_H \text{Proj}_\theta F \geq 1$, 因此 $\dim_H \text{Proj}_\theta F = 1$ 。

综合以上两部分, $\dim_H \text{Proj}_\theta F = \min\{\dim_H F, 1\}$ 。 □

3.3.2 1- 集合的投影性质

定理 3.6: 设 $F \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个 1- 集合

- (1) 如果 F 是一个正则集, 则除去至多一个 $\theta \in [0, \pi)$, $\text{Proj}_\theta F$ 都有正的长度。
- (2) 如果 F 是一个非正则集, 则对于几乎处处的 $\theta \in [0, \pi)$, $\text{Proj}_\theta F$ 的长度都为 0。



证明 (1) 由于 F 是一个 1- 集合, 则 $0 < \mathcal{H}^1(F) < \infty$ 。根据定理3.4, F 中包含一段具有正的长度的可求长曲线。对于一段具有正的长度的可求长曲线, 它在至多除去一个 θ 以外所有方向的投影都具有正的长度 [32], 所以 F 在除去至多一个 $\theta \in [0, \pi)$ 以外所有方向的投影也具有正的长度, 也即 $\text{Proj}_\theta F$ 有正的长度。

(2) 参见文献 [28]。 □

推论 3.3: 设 $F \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个 1- 集合, 则 F 是非正则的当且仅当 F 在至少两个方向上的投影是 \mathcal{L}^1 零测的。

例 3.5 (Cantor 尘埃集): *Cantor* 尘埃集 (例3.4) 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $-\frac{\pi}{4}$ 两个方向的投影都是 \mathcal{L}^1 零测的, 因此它是一个非正则的 1- 集合。

3.4 Besicovitch 集的对偶构造

3.4.1 对偶方法

设 $F \subseteq \mathbb{R}^2$, 对于任意点 $(a, b) \in F$, 令 $L(a, b) = \{(x, y) | y = a + bx\}$ 。它的含义是以 a 为与 y 轴的截距, 以 b 为斜率, 得到一条直线。我们记 $L(F) = \cup_{(a,b) \in F} L(a, b)$, 并且称它为 F 的**线集**。对于任意 $c \in \mathbb{R}$, 记 $L_c = \{(c, y) | y \in \mathbb{R}\}$ 。

现在考虑 $L(F) \cap L_c = \{(c, a + bc) | (a, b) \in F\}$, 注意到

$$(c, a + bc) = (c, \langle (a, b), (1, c) \rangle) \quad (3.50)$$

这说明如果固定 c , 那么点 $(c, a + bc)$ 的纵坐标是 (a, b) 在直线 $y = cx$ 上做投影, 然后再沿着直线的方向伸长 $\sqrt{1 + c^2}$ 倍。因此如果设 $c = \tan \theta$, $\theta \in [0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, 那 $L(F) \cap L_c$ 和 $\text{Proj}_\theta F$ 作为直线的子集, 只相差一个伸缩变换。由于伸缩变换和它的逆变换都是 Lipschitz 映射, 结合命题3.4, 我们有

$$\dim_H(L(F) \cap L_c) = \dim_H \text{Proj}_\theta F \quad (3.51)$$

这一关系告诉我们, 可以通过研究 $\text{Proj}_\theta F$ 的维数来研究 $L(F)$ 的维数。

注释 3.11: 以上 Hausdorff 维数的关系对于任意 $\theta \in [0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ 成立, 而对于 $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{Proj}_{\frac{\pi}{2}} F = \{(0, b) | (a, b) \in F\} \quad (3.52)$$



由于 b 代表直线 $L(a, b)$ 的斜率, 可以认为 $\text{Proj}_{\frac{\pi}{2}} F$ 标记了 $L(F)$ 中所有直线的“方向”。

3.4.2 主要结果

为了给出线集的维数定理, 我们需要以下引理。

引理 3.4: 设 $F \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个 Borel 集, $1 \leq s \leq n$, 则我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_c) dc \leq \mathcal{H}^s(F) \quad (3.53)$$

证明 对于任意 $\varepsilon, \delta > 0$, 取 $\{U_i\}$ 满足 $\text{diam } U_i < \delta$, $F \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i$, 并且

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s \quad (3.54)$$

这时 $\{U_i \cap L_c\}$ 是 $F \cap L_c$ 的一个覆盖。我们取包含 U_i 的方块 S_i , 它满足边长为 $\text{diam } U_i$, 并且两边分别和 x, y 轴平行。那么 $\{S_i \cap L_c\}$ 同样是 $F \cap L_c$ 的一个覆盖, 因此有

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta}^{s-1}(F \cap L_c) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } S_i \cap L_c)^{s-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^{s-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^{s-2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{S_i}(c, x) dx \end{aligned} \quad (3.55)$$

在上式两边同时对 $c \in \mathbb{R}$ 进行积分, 利用 (3.54),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^{s-1}(F \cap L_c) dc \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^{s-2} \iint \chi_{S_i}(c, x) dc dx = \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(F) + \varepsilon \quad (3.56)$$

现在令 δ 趋于 0, 由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 得到 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_c) dc \leq \mathcal{H}^s(F)$ 。 \square

定理 3.7: 设 $F \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个 Borel 集, 则我们有

- (1) $\dim_H L(F) \geq \min\{1 + \dim_H F, 2\}$;
- (2) 如果 F 是一个 1- 集合, 则 $\mathcal{H}^2(L(F)) = 0$ 当且仅当 F 是一个非正则集。



证明 (1) 利用定理3.5, 对于几乎处处的 $\theta \in [0, \pi)$, 都有 $\dim_H \text{Proj}_\theta F = \min\{\dim_H F, 1\}$ 。

如果设 $c = \tan \theta$, 结合 (3.51), 我们有对于几乎处处的 $c \in \mathbb{R}$,

$$\dim_H(L(F) \cap L_c) = \min\{\dim_H F, 1\} \quad (3.57)$$

对于任意 $s > \dim_H L(F)$, 我们有 $\mathcal{H}^s(L(F)) = 0$ 。根据引理3.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{s-1}(L(F) \cap L_c) dc \leq \mathcal{H}^s(L(F)) = 0 \quad (3.58)$$

因此对于几乎处处的 $c \in \mathbb{R}$, 都有 $\mathcal{H}^{s-1}(L(F) \cap L_c) = 0$, 因此

$$\dim_H(L(F) \cap L_c) \leq s - 1 \quad (3.59)$$

由 $s > \dim_H L(F)$ 的任意性, 可得 $\dim_H(L(F) \cap L_c) \leq \dim_H L(F) - 1$, 因此有 $\dim_H L(F) \geq 1 + \dim_H(L(F) \cap L_c) = \min\{1 + \dim_H F, 2\}$ 。

(2) 注意到 $\mathcal{L}^2(L(F)) = \int \mathcal{L}^1(L(F) \cap L_c) dc$ 。所以 $\mathcal{H}^2(L(F)) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{L}^2(L(F)) = 0$, 后者成立当且仅当对于 \mathcal{L}^1 几乎处处的 $c \in \mathbb{R}$, 都有 $\mathcal{L}^1(L(F) \cap L_c) = 0$ 。根据定理3.6, 这等价于 F 是一个非正则集。 \square

现在可以给出一类 Besicovitch 集的构造方法, 并且证明它的 Hausdorff 维数是满的。

定理 3.8: (1) \mathbb{R}^2 中存在一个集合, 它的面积为 0, 并且包含任意方向的一条直线。

(2) 对于满足 (1) 中条件的集合, 它的 Hausdorff 维数一定为 2。

证明 (1) 考虑 Cantor 尘埃集 \mathcal{D} , 根据例3.5, 它是一个非正则的 1- 集合。因此根据定理3.7, $\mathcal{H}^2(L(\mathcal{D})) = 0$ 。注意到 $[0, 1] \subseteq \text{Proj}_{\frac{\pi}{2}} F$, 即 $L(F)$ 中直线的斜率可以取尽区间 $[0, 1]$ 。现在将 $L(\mathcal{D})$ 分别绕着原点旋转 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$, 并且将四个部分拼起来得到集合 F 。那么 $\mathcal{H}^2(F) \leq 4 \cdot 0 = 0$, 即 F 是 \mathcal{L}^2 零测的, 并且 F 中包含任意方向的一条直线。

(2) 假设集合 E 包含任意方向的一条直线。由于 Hausdorff 测度的 Borel 正则性 (参见注释3.7), 不妨假设 E 是一个 Borel 集。令 $F = \{(a, b) | L(a, b) \subseteq E\}$, 则 $L(F) \subseteq E$ 。由于 E 中包含任意方向的一条直线, 则根据注释3.11, $\text{Proj}_{\frac{\pi}{2}} F$ 是整条 y 轴, 这说



明 $\dim_H \text{Proj}_{\frac{\pi}{2}} F = 1$ 。因此我们有 $\dim_H F \geq \dim_H \text{Proj}_{\frac{\pi}{2}} F = 1$ 。结合定理3.7,

$$\dim_H L(F) \geq \min\{1 + \dim_H F, 2\} = 2 \quad (3.60)$$

因此 $\dim_H E \geq \dim_H L(F) = 2$, 即 $\dim_H E = 2$ 。 □

在定理3.8中, 我们得到一类特殊的 Besicovitch 集, 它包含任意方向的一条直线。这一要求看似比 Besicovitch 集的定义 (定义2.1) 更强, 但是它们在 Hausdorff 维数的意义下是等价的。具体而言, 文献 [34] 使用 Baire 纲定理证明了对于 \mathbb{R}^n 中任意一个紧的 Besicovitch 集 E , 都存在一个包含任意方向的一条直线的集合 F , 使得 $\dim_H E = \dim_H F$ 。所以定理3.8可以推出下面的定理, 这最早由 R. Davies 在 [6] 中证明。

定理 3.9: \mathbb{R}^2 中任意一个紧 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数都为 2。



4 Keakeya 极大函数

在上一章中我们考虑通过点和直线的对偶关系研究了 \mathbb{R}^2 中 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数问题, 并且得到了定理 3.9。在更高维度的情况下, 这类维数问题并没有得到解决, 我们有以下 Keakeya 猜想。

猜想 4.1 (Keakeya 猜想): \mathbb{R}^n 中任意一个紧 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数都为 n 。

在这一章, 我们介绍 Keakeya 极大函数, 以及它和 Keakeya 猜想之间的关联, 并且通过 Keakeya 极大函数给出在 $n = 2$ 时猜想 4.1 的证明。为了实现这一目标, 我们需要补充一些 Fourier 变换的性质。

4.1 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换

在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上, 我们可以直接定义一个函数的 Fourier 变换。

定义 4.1 ($L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换): 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义它的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx \quad (4.1)$$

命题 4.1 (Fourier 变换的性质^[35-36]): 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$,

- (1) $(\alpha f + \beta g)\hat{\ } = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$;
- (2) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, 并且 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$;
- (3) $(f * g)\hat{\ } = \hat{f} \cdot \hat{g}$;
- (4) $(f(\lambda \cdot x))\hat{\ } = \frac{1}{\lambda^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$;
- (5) 设 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个正交变换, 则 $(f \circ T)\hat{\ } = \hat{f} \circ T$ 。

证明 (1) 由积分的线性性可得。

(2)

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_\infty &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx \right| \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int |e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x)| dx \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int |f| dx = \|f\|_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$



\hat{f} 的连续性是因为 *Lebesgue* 控制收敛定理, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 则是因为 *Riemann-Lebesgue* 引理^[27]。

(3)

$$\begin{aligned}(f * g)\hat{\gamma}(\xi) &= \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \int g(x-y)f(y)dydx \\ &= \int e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} f(y)dy \cdot \int e^{-2\pi i \langle x-y, \xi \rangle} g(x-y)d(x-y) \\ &= \hat{f} \cdot \hat{g}\end{aligned}\quad (4.3)$$

(4)

$$\begin{aligned}(f(\lambda \cdot x))\hat{\gamma} &= \int e^{-2\pi i \langle \lambda \cdot x, \frac{\xi}{\lambda} \rangle} f(\lambda \cdot x)dx \\ &= \int e^{-2\pi i \langle x, \frac{\xi}{\lambda} \rangle} f(x)d\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\end{aligned}\quad (4.4)$$

(5) 对于正交变换 T , 设 $T(x) = Ax$, 这里 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 并且 $A^T A = I$ 。

$$\begin{aligned}(f \circ T)\hat{\gamma} &= \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(Ax)dx \\ &= \frac{1}{\det(A)} \int e^{-2\pi i \langle Ax, A\xi \rangle} f(Ax)dAx \\ &= \hat{f}(A\xi) = \hat{f} \circ T\end{aligned}\quad (4.5)$$

最后一行是因为 $\det(A) = 1$ 。

□

为了在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上定义 Fourier 变换, 我们需要先引入 Schwartz 空间的概念。

定义 4.2 (Schwartz 空间): 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, 我们称 f 是一个 *Schwartz* 函数, 如果它满足以下两条

- (1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- (2) 对于任意指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, 都有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \quad (4.6)$$

我们记 \mathbb{R}^n 上所有 *Schwartz* 函数构成的集合为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 。



在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上可以定义一族半范数 $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n}$, 其中

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \quad (4.7)$$

由此可以定义 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛性。

定义 4.3: 设 $\{f_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 我们称 $\{f_k\}$ 收敛到 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{\alpha,\beta}(f_k - f) = 0$ 。

在以上收敛性下, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是完备的, 实际上我们有以下命题^[37]。

命题 4.2: $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n})$ 是一个 *Fréchet* 空间, 可以用如下方式构造 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量:

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(f - g)}{1 + p_k(f - g)} \quad (4.8)$$

这里 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n}$ 的一个排列。

对于任意 $1 \leq p \leq \infty$, 我们都有 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ 。下面的例子说明, 这些包含关系都是严格的。

例 4.1: 设 $f(x) = e^{-|x|^2}$, $g(x) = e^{-|x|}$, $h(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^n}$, 则 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g, h \in L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 。

命题 4.3 (稠密性^[36]): (1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的;

(2) 对于任意 $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的。

现在来看 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换。

例 4.2: 设 $f(x) = e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} e^{-\pi|x|^2} dx \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\int e^{-2\pi i x_i \xi_i - \pi x_i^2} dx_i \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(e^{-\pi i \xi_i^2} \int e^{-\pi(x_i + i\xi_i)^2} dx_i \right) = e^{-\pi|\xi|^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

这说明 $f(x)$ 在 Fourier 变换下保持不变。



命题 4.4 ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换^[35]): *Fourier* 变换是一个从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的连续的线性同构, 它满足以下三条性质

- (1) 对于任意 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 都有 $\int f \cdot \hat{g} dx = \int \hat{f} \cdot g dx$;
- (2) 记 $\check{f}(\xi) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx$, 则对于任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 都有 $f(x) = \check{\check{f}}(x)$;
- (3) 记 $\tilde{f}(x) = f(-x)$, 则对于任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 都有 $\hat{\hat{f}}(x) = \tilde{f}(x)$ 。

推论 4.1: 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上, *Fourier* 变换以 4 为周期。

推论 4.2: 对于任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 都有 $\check{\check{f}} = \tilde{f}$ 。

证明

$$\check{\check{f}} = \overline{\int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \bar{\check{f}}(x) dx} = \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx = \hat{f} \quad (4.10)$$

在 (4.10) 的两边同时取共轭即可。 □

根据命题4.3和4.4, 我们可以在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上定义 *Fourier* 变换, 具体的步骤如下:

- (1) 对于任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 根据命题4.3, 可以选取函数列 $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 满足 $\{\phi_k\}$ 在 L^2 范数的意义下收敛到 f 。
- (2) 对于任意的 i, j , 根据命题4.4,

$$\begin{aligned} \|\phi_i - \phi_j\|_2^2 &= \int (\phi_i - \phi_j)(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_j) dx \\ &= \int (\phi_i - \phi_j)(\hat{\hat{\phi}}_i - \hat{\hat{\phi}}_j) dx \\ &= \int (\hat{\phi}_i - \hat{\phi}_j)(\tilde{\phi}_i - \tilde{\phi}_j) dx \\ &= \|\hat{\phi}_i - \hat{\phi}_j\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

这说明 $\{\hat{\phi}_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的一个收敛函数列。由此可以定义 $\hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\phi}_k$ 。

- (3) 根据等式 (4.11), $\|\hat{f}\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\phi}_k\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k\|_2 = \|f\|_2$ 。

等式 (4.11) 保证了 \hat{f} 不依赖于 $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的选取方式, 这说明这种定义是良好的。可以验证, 对于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 *Fourier* 变换, 命题4.1依然成立。

定理 4.1 (Plancherel 定理^[35]): *Fourier* 变换是一个从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的等距同构, 即对于任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 都有 $\hat{f}, \check{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ 。



最后我们来看一个例子。

例 4.3: 设 $f(x) = \pi\chi_{[-a,a]}(x)$, 则

$$\hat{f}(\xi) = \pi \int_{-a}^a e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{e^{2\pi i a \xi} - e^{-2\pi i a \xi}}{2i\xi} = \frac{\sin 2\pi a \xi}{\xi} \quad (4.12)$$

在 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin \theta \leq \theta$ 。所以取 $a = \frac{1}{4}$, 在 $|\xi| \leq 1$ 时, $1 \leq |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\pi}{2}$ 。

虽然 $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 但是可以选取合适的 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 使得 $\phi, \hat{\phi}$ 具有类似的性质。

例如对于任意的 $\varepsilon > 0$, 设 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $0 \leq \phi \leq \pi$, $\phi(x) = \begin{cases} \pi, & |x| \leq a \\ 0, & |x| \geq a + \varepsilon \end{cases}$ 。这样

$\text{supp } \phi \subseteq [-a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, 并且在 $|\xi| \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}(\xi)| &= \left| \pi \int_{-a}^a e^{-2\pi i x \xi} dx + \left(\int_{-a-\varepsilon}^{-a} + \int_a^{a+\varepsilon} \right) e^{-2\pi i x \xi} \phi(x) dx \right| \\ &\geq 1 - \left(\int_{-a-\varepsilon}^{-a} + \int_a^{a+\varepsilon} \right) |\phi(x)| dx \geq 1 - 2\pi\varepsilon \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2 Kakeya 极大函数

我们采用记号 \lesssim 和 \approx 。变量 A, B 满足 $A \lesssim B$ 当且仅当存在常数 $C > 0$, 使得 $A \leq C \cdot B$; 变量 $A \approx B$ 当且仅当 $A \lesssim B, B \lesssim A$ 。因此 $A \lesssim 1$ 等价于 A 是有界的, $A \approx 1$ 表示 A 是恒正并且有界的。

对于 $A \subseteq S^{n-1}$, 我们记 $\text{Area}(A) = \int \chi_A dS^{n-1}$, 它表示 A 的“面积”。

定义 4.4 (Kakeya 极大函数^[36]): 对于任意 $\delta > 0$, $e \in S^{n-1}$ 和 $a \in \mathbb{R}^n$, 定义管道

$$T_e^\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\langle x - a, e \rangle| \leq \frac{1}{2}, |(x - a)^\perp| \leq \delta\} \quad (4.14)$$

这里 $(x - a)^\perp = (x - a) - \langle x - a, e \rangle e$ 表示 $x - a$ 的垂直于 e 的分量。对于 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 定义它的 Kakeya 极大函数为

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} |f| d\mathcal{L}^n \quad (4.15)$$

对于 $1 \leq p \leq \infty$, $f(x)$ 的 L^p 范数为 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $f_\delta^*(e)$ 的 L^p 范数为 $\|f_\delta^*\|_{L^p(S^{n-1})}$ 。出于方便, 在不引起误会时, 我们将它们简记为 $\|f\|_p, \|f_\delta^*\|_p$ 。



命题 4.5: 对于 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*(e)\|_\infty &\leq \|f\|_\infty \\ \|f_\delta^*(e)\|_\infty &\lesssim \delta^{1-n} \|f\|_1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

证明

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*(e)\|_\infty &\leq \sup_{e \in S^{n-1}} \left| \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} \|f\|_\infty d\mathcal{L}^n \right| = \|f\|_\infty \\ \|f_\delta^*(e)\|_\infty &\leq \sup_{e \in S^{n-1}} \left| \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mathcal{L}^n \right| \approx \delta^{1-n} \|f\|_1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

以上不等式在 $\|f\|_\infty, \|f\|_1$ 有限或者无限时都成立。 \square

命题4.5给出了 $(1, \infty)$ 和 (∞, ∞) 型的控制, 下面的例子说明, 对于 $n \geq 2, 1 \leq p < \infty$, 并不存在 (p, q) 型的控制。

例 4.4: 设 $n \geq 2, 1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ 。我们取 \mathbb{R}^n 中的一个 Lebesgue 测度为 0 的 Besicovitch 集 E , 令 $E_\delta = B(E, \delta)$, $f_\delta = \chi_{E_\delta}$ 。对于任意 $e \in S^{n-1}$, 由于 E 是一个 Besicovitch 集, E_δ 中包含一个方向为 e 的管道, 因此 $(f_\delta)_\delta^*(e) = 1$ 。这样 $\|(f_\delta)_\delta^*\|_q = (\text{Area}(S^{n-1}))^{\frac{1}{q}} \approx 1$ 。另一方面, $\|f_\delta\|_p = (\mathcal{L}^n(E_\delta))^{\frac{1}{p}}$, 随着 δ 趋于 0, $\|f_\delta\|_p$ 同样趋于 0。因此形如

$$1 \approx \|(f_\delta)_\delta^*\|_q \lesssim \|f_\delta\|_p \quad (4.18)$$

的不等式, 在 δ 很小时不能成立。

一个重要的问题是建立如下的 $\delta^{-\varepsilon}$ 型不等式, 即对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 C_ε , 满足

$$\|f_\delta^*\|_p \leq C_\varepsilon \cdot \delta^{-\varepsilon} \|f\|_p \quad (4.19)$$

我们先看一个例子, 它说明对于 $1 \leq p < n$, 以上不等式并不成立。

例 4.5: 对于 $1 \leq p < n$, 我们取 $f = \chi_{B(0, \delta)}$ 。这样对于任意 $e \in S^{n-1}$, 都有 $B(0, \delta) \subseteq T_e^\delta(0)$ 。因此

$$f_\delta^*(e) = \frac{\mathcal{L}^n(B(0, \delta))}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(0))} \approx \frac{\delta^n}{\delta^{n-1}} = \delta \quad (4.20)$$

从而 $\|f_\delta^*\|_p \approx \delta \cdot \text{Area}(S^{n-1}) \approx \delta$ 。另一方面, $\|f\|_p = (\mathcal{L}^n(B(0, \delta)))^{\frac{1}{p}} \approx (\delta^n)^{\frac{1}{p}} = \delta^{\frac{n}{p}}$ 。由于 $\frac{n}{p} > 1$,



对于很小的 ε , 可以满足 $1 + \varepsilon < \frac{n}{p}$, 这时

$$\frac{\delta^{-\varepsilon} \|f\|_p}{\|f_\delta^*\|_p} \approx \delta^{\frac{n}{p}-1-\varepsilon} \quad (4.21)$$

在 δ 很小时, (4.19) 不能成立。

这一例子说明只能在 $p \geq n$ 时尝试建立不等式 (4.19)。与之相关的有以下 **Kekeya** 极大函数猜想。

猜想 4.2 (Kekeya 极大函数猜想): 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 C_ε , 满足

$$\|f_\delta^*\|_n \leq C_\varepsilon \cdot \delta^{-\varepsilon} \|f\|_n \quad (4.22)$$

Kekeya 极大函数猜想和 **Kekeya** 猜想之间有着密切的联系, 以下命题说明可以从 **Kekeya** 极大函数的角度来研究 **Kekeya** 猜想^[36]。

命题 4.6 (Bourgain[12]): 如果不等式 (4.19) 对于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 和某个 $1 \leq p < \infty$ 成立, 则猜想 4.1 成立。

证明 设 E 是 \mathbb{R}^n 中一个紧的 *Besicovitch* 集。对于 $0 < \delta < \frac{1}{100}$, $\eta > 0$, 设 $\{U_i\}$ 满足 $\text{diam } U_i < \delta$, $E \subseteq \cup_{i=1}^\infty U_i$ 。出于方便, 我们记 $r_i = \text{diam } U_i$, 并且取开球 $B_i = B(x_i, r_i)$, 使得 $U_i \subseteq B_i$ 。这样 $E \subseteq \cup_{i=1}^\infty B_i$ 。

令 $J_k = \{j \in \mathbb{N}_* | 2^{-k} \leq r_j < 2^{-(k-1)}\}$, 则 $\cup_k J_k = \mathbb{N}_*$ 。对于任意 $e \in S^{n-1}$, 由于 E 是一个 *Besicovitch* 集, 我们设 $I_e \subseteq E$ 是平行于 e 的单位长度的线段, 并且记

$$S_k = \left\{ e \in S^{n-1} \mid \mathcal{L}^1(I_e \cap (\cup_{j \in J_k} B_j)) \geq \frac{\delta^2}{k^2} \right\} \quad (4.23)$$

对于任意 $e \in S^{n-1}$, 由于 $\sum_{k=1}^\infty \frac{\delta^2}{k^2} < \frac{1}{100^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < 1$, 以及

$$1 = \mathcal{L}^1(I_e) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^1(I_e \cap (\cup_{j \in J_k} B_j)) \quad (4.24)$$

所以一定存在 $k_0 \in \mathbb{N}_*$, 使得 $\mathcal{L}^1(I_e \cap (\cup_{j \in J_{k_0}} B_j)) \geq \frac{\delta^2}{k^2}$, 因此 $e \in S_{k_0}$ 。这说明 $\cup_{k=1}^\infty S_k = S^{n-1}$ 。现在取 $N \in \mathbb{N}_*$, 满足 $N > \frac{1}{\delta}$, 并且记 $F_k = \cup_{j \in J_k} N B_j$, $f = \chi_{F_k}$, 则 $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 。



对于 $e \in S_k$, 我们记 a_e 为线段 I_e 的中点。注意对于 $j \in J_k$, 有 $r_j \geq 2^{-k}$ 。如果 $I_e \cap B_j \neq \emptyset$, 将 B_j 扩大 N 倍, $T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap NB_j$ 应该包含一个高为 $\mathcal{L}^1(I_e \cap B_j)$, 底面半径为 2^{-k} 的圆柱。结合 S_k 的定义 (4.23), 我们有

$$\mathcal{L}^n(T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap F_k) \geq \frac{\delta^2}{k^2} \mathcal{L}^n(T_e^{2^{-k}}(a_e)) \quad (4.25)$$

因此对于 $1 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned} \|f_{2^{-k}}^*\|_p &= \left(\int \left(\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^{2^{-k}}(a))} \int_{T_e^{2^{-k}}(a)} \chi_{F_k} d\mathcal{L}^n \right)^p dS^{n-1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\int_{e \in S_k} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^{2^{-k}}(a_e))} \cdot \frac{\delta^2}{k^2} \mathcal{L}^n(T_e^{2^{-k}}(a_e)) \right)^p dS^{n-1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\delta^2}{k^2} (\text{Area}(S_k))^{\frac{1}{p}} \approx \frac{1}{k^2} (\text{Area}(S_k))^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

另一方面, 根据 J_k 的定义和不等式 (4.19), 对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\|f_{2^{-k}}^*\|_p \lesssim 2^{k\varepsilon} \|f\|_p = 2^{k\varepsilon} \mathcal{L}^n(F_k)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{k\varepsilon} \left(\sum_{j \in J_k} \mathcal{L}^n(NB_j) \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim 2^{k\varepsilon} \cdot (\#J_k \cdot 2^{-(k-1)n})^{\frac{1}{p}} \quad (4.27)$$

注意 $k^{2p} \lesssim 2^{kp\varepsilon}$, 比较 (4.26) 和 (4.27),

$$\text{Area}(S_k) \lesssim k^{2p} \cdot 2^{kp\varepsilon} \cdot \#J_k \cdot 2^{-(k-1)n} \lesssim (2^{-k})^{n-2p\varepsilon} \cdot \#J_k \quad (4.28)$$

现在对于 k 进行求和,

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-2p\varepsilon} \geq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k})^{n-2p\varepsilon} \cdot \#J_k \gtrsim \sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(S_k) = \text{Area}(S^{n-1}) \approx 1 \quad (4.29)$$

由于 $\{U_i\}$ 的任意性, 根据 $\mathcal{H}_\delta^s(\cdot)$ 的定义 (参见定义3.1),

$$\mathcal{H}_\delta^{n-2p\varepsilon}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-2p\varepsilon} \gtrsim 1 \quad (4.30)$$

现在令 δ 趋于 0, 得到 $\mathcal{H}^{n-2p\varepsilon}(E) > 0$ 。由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 根据 Hausdorff 维数的定义, $\dim_H E \geq n$ 。又因为 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 $\dim_H E = n$, 也即猜想4.1成立。□

4.3 $n = 2$ 时的证明

根据命题4.6, 我们可以尝试建立不等式 (4.19) 或者 (4.22), 以此来证明猜想4.1。在 $n = 2$ 时, A. Córdoba[11] 和 J. Bourgain[12] 各自独立证明了下面的定理, 不难看出它比 (4.22) 更强。

定理 4.2: 在 $n = 2$ 时, 我们有

$$\|f_\delta^*\|_2 \lesssim \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_2 \quad (4.31)$$

证明 (J. Bourgain[12]) 对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^2) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, 根据 *Kekeya* 极大函数的定义, 我们不妨设 $f \geq 0$ 。令 $\rho_\delta^e(x) = \frac{1}{2\delta} \chi_{T_e^\delta(0)}(x)$, 则 $f_\delta^* = \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\rho_\delta^e * f)(a)$ 。选取 $\phi \geq 0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 使得 $\text{supp } \hat{\phi} \subseteq [-N, N]$, 并且在 $|a| \leq 1$ 时, $\phi(a) \geq 1$ (具体的构造可见例4.3)。令 $\psi(x, y) = \frac{1}{\delta} \phi(x) \cdot \phi\left(\frac{y}{\delta}\right)$, 用 e_1 表示 x 轴方向的单位向量, 则在 $T_{e_1}^\delta(0)$ 上, $\psi \geq \frac{1}{\delta} \geq \rho_\delta^{e_1}$ 。因此我们有

$$f_\delta^*(e_1) = \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\rho_\delta^{e_1} * f)(a) \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\psi * f)(a) \quad (4.32)$$

对于一般的 $e \in S^1$, 考虑绕原点的旋转 p_e , 它满足 $p_e(e) = e_1$, 并且令 $\psi_e = \psi \circ p_e$, 同样可以得到 $f_\delta^*(e) \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\psi_e * f)(a)$ 。

现在利用 *Fourier* 变换的性质 (参见命题4.1), 并且使用 *Cauchy-Schwarz* 不等式,

$$\begin{aligned} f_\delta^*(e) &\leq \|\psi_e * f\|_\infty \leq \|\widehat{\psi_e} \cdot \hat{f}\|_1 \\ &= \int \sqrt{|\widehat{\psi_e}(\xi)| \cdot (1 + |\xi|)} \cdot |\hat{f}(\xi)| \cdot \sqrt{\frac{|\widehat{\psi_e}(\xi)|}{1 + |\xi|}} d\xi \\ &\leq \left(\int |\widehat{\psi_e}(\xi)| \cdot (1 + |\xi|) \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int \frac{|\widehat{\psi_e}(\xi)|}{1 + |\xi|} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

根据命题4.1, $\widehat{\psi_e}(\xi) = \hat{\psi} \circ p_e, \hat{\psi} = \hat{\phi}(\xi_1) \cdot \hat{\phi}(\delta \xi_2)$, 并且 $\hat{\psi} \in C_0(\mathbb{R}^2)$, 因此 $\widehat{\psi_e}$ 是有界的。而且由于 $\text{supp } \hat{\phi} \subseteq [-N, N]$, 我们有 $\text{supp } \hat{\psi} \subseteq [-N, N] \times [-\frac{1}{\delta}N, \frac{1}{\delta}N]$, 因此

$$\int \frac{|\widehat{\psi_e}(\xi)|}{1 + |\xi|} d\xi \lesssim \int_{p_e^{-1}([-N, N] \times [-\frac{1}{\delta}N, \frac{1}{\delta}N])} \frac{1}{1 + |\xi|} d\xi = \int_{-N}^N \int_{-\frac{1}{\delta}N}^{\frac{1}{\delta}N} \frac{1}{1 + |\xi|} d\xi_1 d\xi_2 \approx \log \frac{1}{\delta} \quad (4.34)$$



与之类似的, 对于 $\xi \in \mathbb{R}^2$, 我们将 $|\widehat{\psi}_e(\xi)|$ 看作关于 $e \in S^{n-1}$ 的函数, 则在 $|\xi| > 2N$ 时, $\text{supp}_e |\widehat{\psi}_e(\xi)| = \emptyset$ 。这一讨论, 结合 $\widehat{\psi}_e(\xi)$ 的有界性, 说明

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|) \int |\widehat{\psi}_e(\xi)| dS^{n-1} &\lesssim (1 + |\xi|) \cdot \text{Area}(\text{supp}_e |\widehat{\psi}_e(\xi)|) \\ &\leq \sup_{|\xi| \leq 2N} (1 + |\xi|) \cdot \text{Area}(\text{supp}_e |\widehat{\psi}_e(\xi)|) \approx 1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

现在利用 (4.33), (4.34) 和 (4.35) 来计算 $\|f_\delta^*\|_2$,

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*\|_2^2 &\lesssim \left(\log \frac{1}{\delta}\right) \cdot \int \left(\int |\widehat{\psi}_e(\xi)| \cdot (1 + |\xi|) \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) dS^{n-1} \\ &= \left(\log \frac{1}{\delta}\right) \cdot \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \cdot (1 + |\xi|) \int |\widehat{\psi}_e(\xi)| dS^{n-1} \\ &\lesssim \left(\log \frac{1}{\delta}\right) \cdot \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \left(\log \frac{1}{\delta}\right) \cdot \|\hat{f}\|_2^2 = \left(\log \frac{1}{\delta}\right) \cdot \|f\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

(4.36) 的最后一步使用了 *Plancherel* 定理, 在两侧同时开根号就得到 (4.31)。□

4.4 一些讨论

关于 *Keakeya* 猜想, 它在 $n \geq 3$ 时并没有得到解决, 目前已知的最佳结果为

$$k = \min \left\{ \frac{n+2}{2}, (2 - \sqrt{2})(n-4) + 3 \right\} \quad (4.37)$$

即 \mathbb{R}^n 中任意一个紧 *Besicovitch* 集的 *Hausdorff* 维数有下界 k 。前者由 T. Wolff 在 [38] 中给出, 而后者由 N. Katz 和 T. Tao 在 [39] 中给出。

关于 *Keakeya* 极大函数猜想, 它在 $n \geq 3$ 时并没有被证明。在 $n = 2$ 时, 我们需要 L^2 型的估计, 这可以由 (4.33) 和 (4.36) 给出, 而在 $n \geq 3$ 时, L^n 型的估计并不容易得到。如果将 (4.5) 和 (4.22) 进行插值, 我们将得到以下更弱的不等式

$$\|f_\delta^*\|_q \lesssim C_\varepsilon \cdot \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_p \quad (4.38)$$

其中 $1 \leq p \leq \infty$, 而 q 依赖于 p (不一定互为共轭指标)。对于不等式 (4.38), 已知的最佳结果是它在 $p \leq \min \left\{ \frac{n+2}{2}, \frac{4n+3}{7} \right\}$ 时成立^[38-39]。



结论

本文介绍了 Kakeya 问题的背景和研究现状, 介绍了 Besicovitch 集和 Kakeya 针集的构造、Hausdorff 维数、 Kakeya 猜想和 Kakeya 极大函数等内容, 梳理了有关这一问题的一些研究方法和重要结论, 并进行简要的讨论。 Kakeya 问题依然是几何测度论和调和分析等领域的一个重要课题, 对该问题的研究, 包括改进现有方法和发展新技术等, 对于促进现代数学的发展以及构建不同领域之间的联系具有重要意义。



致谢

时间来到五月下旬，蓝园的油菜花开了，一片鲜黄仿佛带有无限的生命力。到这里赏花、观鸟、听歌、晒太阳，这一切美好得有些梦幻。或许在将来哪天会带着某些观念回想本科的四年时光，在那时我大概已经忘记在什么地方听过什么课、食堂的风味如何，但是没准还会记得校园里的某些景物，记得和谁聊过什么、和谁去过哪里干过什么...是这些大的小的、好的坏的、有趣的无聊的，总之是无法复刻的回忆组成了这四年。现在到了告别的时候，还是有许多感慨，对许多人和事充满感激。

我在此感谢四年间教导过我的每一位老师，他们治学严谨，对科学充满热情，这让我深受感召。特别要感谢我的导师梁湘玉教授。本科期间我修读了她的几门课程，从中学习到很多知识，同时也感受到了现代数学的魅力。在进行毕业设计的过程中，她给予我莫大的关心和鼓励。我有幸参加了她的讨论班，不论是做汇报还是听讲，都能得到很多收获，和学长学姐的交流也让我受益匪浅。

我要感谢我的同学们，和他们一起看书、一起吃饭、一起玩、一起聊天，这些经历无疑是非常宝贵的，遇见这些家伙们是我的幸运。愿岁并谢，与长友兮。

我要感谢我的父母，感谢他们的付出，感谢他们尽最大的努力培养和教育我，给我无声然而坚实的支持。或许从高中起，我开始渐渐地走向独立，也因此部分地成为局外之人。但是家庭的概念总能给我一种踏实的感觉，这让我能更加从容地面对许多挑战。

最后还是谈谈数学。“你们的事业的成长，应该像一棵树的成长一样，应该是顺其自然、无间断和全面的”。每次读到这句话都有许多感慨，遗憾于自己学得太慢太杂太浅太少，同时担心自己过于急功近利好大喜功。它成为一种鼓励，同时也是一种教诲。四年间我逐渐形成了一些念头，它们并不特殊，可是对我来说有一定的意义。

- 并不是只有聪明/早慧的人才可以学习数学，无论基础、应用；
- 每一个数学家都是鲜活的人。

带着这些想法，数学在我眼中变得和善一些，我也终于走上了数学研究的道路。希望将来哪天我能自豪地说“我弄懂了谁的思路”“终于想清楚了某问题”。

或许毕业是一个好的开始，可以期待更多的风景，so please dive into the real world!



参考文献

- [1] KAKEYA S. Some problems on maximum and minimum regarding ovals[J]. Tohoku Science Reports, 1917.
- [2] BESICOVITCH A. On keakeya's problem and a similar one[J]. Mathematische Zeitschrift, 1928, 27(1):312-320.
- [3] ŁABA I. From harmonic analysis to arithmetic combinatorics[J]. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 2008, 45(1):77-115.
- [4] CUNNINGHAM F, SCHOENBERG I. On the keakeya constant[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1965, 17:946-956.
- [5] CUNNINGHAM JR F. The keakeya problem for simply connected and for star-shaped sets [J]. The American Mathematical Monthly, 1971, 78(2):114-129.
- [6] DAVIES R O. Some remarks on the keakeya problem[C]//Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society: volume 69. Cambridge: Cambridge University Press, 1971: 417-421.
- [7] FEFFERMAN C. The multiplier problem for the ball[J]. Annals of mathematics, 1971, 94(2):330-336.
- [8] CSÖRNYEI M, HÉRA K, LACZKOVICH M. Closed sets with the keakeya property[J]. Mathematika, 2017, 63(1):184-195.
- [9] KINNEY J. A thin set of circles[J]. The American Mathematical Monthly, 1968, 75(10): 1077-1081.
- [10] WOLFF T. Recent work connected with the keakeya problem[J]. Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996), 1999, 2(129-162):4.
- [11] CÓRDOBA A. The keakeya maximal function and the spherical summation multipliers[J]. American Journal of Mathematics, 1977, 99(1):1-22.
- [12] BOURGAIN J. On the dimension of keakeya sets and related maximal inequalities[J]. Geometric & Functional Analysis GAFA, 1999, 9(2):256-282.
- [13] TAO T. From rotating needles to stability of waves: emerging connections between combinatorics, analysis, and pde[J]. Notices Amer. Math. Soc., 2001, 48(3):294-303.



- [14] KATZ N, TAO T. Recent progress on the kakeya conjecture[J]. arXiv preprint math/0010069, 2000.
- [15] DVIR Z. On the size of kakeya sets in finite fields[J]. Journal of the American Mathematical Society, 2009, 22(4):1093-1097.
- [16] HICKMAN J, ROGERS K M, ZHANG R. Improved bounds for the kakeya maximal conjecture in higher dimensions[J]. American Journal of Mathematics, 2022, 144(6):1511-1560.
- [17] SCHOENBERG I. On the besicovitch-perron solution of the kakeya problem[J]. 1962.
- [18] BESICOVITCH A. The kakeya problem[J]. The American Mathematical Monthly, 1963, 70(7):697-706.
- [19] PáL J. Ein minimumproblem für ovale[J/OL]. Mathematische Annalen, 1921, 83:311-320. <http://eudml.org/doc/158874>.
- [20] VAN ALPHEN H. Uitbreiding van een stelling von besicovitch'[J]. Mathematica, Zutphen, B, 1942, 10:144-57.
- [21] DE LEEUW K. On lp multipliers[J]. Annals of Mathematics, 1965:364-379.
- [22] DE GUZMAN M. Real variable methods in fourier analysis[M]. Basel: Elsevier, 1981.
- [23] BUSEMANN H, FELLER W. Zur differentiation der lebesgueschen integrale[J]. Fundamenta Mathematicae, 1934, 22:226-256.
- [24] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义. 上册[M]. 北京: 北京大学出版社, 2005.
- [25] HENRIKSON J. Completeness and total boundedness of the hausdorff metric[J]. MIT Undergraduate Journal of Mathematics, 1999, 1(69-80):10.
- [26] KÖRNER T. Besicovitch via baire[J]. Studia Mathematica, 2003, 158:65-78.
- [27] ROYDEN H, FITZPATRICK P M. Real analysis[M]. Beijing: China Machine Press, 2010.
- [28] MATTILA P. Geometry of sets and measures in euclidean spaces: fractals and rectifiability: number 44[M]. Cambridge: Cambridge university press, 1999.
- [29] FALCONER K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2004.
- [30] MATTILA P. Fourier analysis and hausdorff dimension: volume 150[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.



- [31] SIMON L. Introduction to geometric measure theory[J]. Tsinghua Lectures, 2014, 2(2): 3-1.
- [32] FALCONER K J. The geometry of fractal sets: number 85[M]. Cambridge: Cambridge university press, 1985.
- [33] MARSTRAND J M. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1954, 3(1):257-302.
- [34] KELETI T, MÁTHÉ A. Equivalences between different forms of the keakeya conjecture and duality of hausdorff and packing dimensions for additive complements[J]. arXiv preprint arXiv:2203.15731, 2022.
- [35] DUOANDIKOETXEA J. Fourier analysis: volume 29[M]. Providence: American Mathematical Society, 2024.
- [36] WOLFF T H. Lectures on harmonic analysis: volume 29[M]. Providence: American Mathematical Soc., 2003.
- [37] GRAFAKOS L, et al. Classical fourier analysis: volume 2[M]. New York: Springer, 2008.
- [38] WOLFF T. An improved bound for keakeya type maximal functions.[J]. Revista Matemática Iberoamericana, 1995, 11(3):651-674.
- [39] KATZ N, TAO T. New bounds on keakeya problems[J]. arXiv preprint math/0102135, 2001.



附录 A 引理2.3的证明

通过平移和旋转, 我们可以将 H_j 变为上半平面 $H = \{(x, y) | y \geq 0\}$, 同时将 R_j 变为以原点为中心, 两边分别平行于 x, y 轴的矩形。由于这一操作并不改变 $|T_j f_j|$ 在 \tilde{R}_j 上的取值, 令 $R = [-a, a] \times [-b, b]$, 只需要对于算子 $(T_H f)^\wedge = \chi_H \hat{f}$ 和 $f = \chi_R$ 进行证明。

$$\begin{aligned} T_H f &= (\chi_H \hat{f})^\vee \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}} d\xi \int_R e^{-2\pi i(x\xi_1 + y\xi_2)} \cdot e^{2\pi i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[-a, a]} e^{-2\pi i\xi_1 x} dx \right) e^{2\pi i\xi_1 x} d\xi_1 \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \left(\int_{[-b, b]} e^{-2\pi i\xi_2 y} dy \right) e^{2\pi i\xi_2 y} d\xi_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

在上式中, 第一项即 $(\widehat{\chi_{[-a, a]}})^\vee(x) = \chi_{[-a, a]}(x)$, 第二项即 $(\widehat{\chi_{[-b, b]} \chi_{[0, \infty)}})^\vee(y)$ 。现在利用 Hilbert 变换计算第二项。令 $g(y) = (\widehat{\chi_{[0, \infty)} \chi_{[-b, b]}})^\vee(y)$, 则 $\hat{g}(\xi) = \chi_{[0, \infty)}(\xi) \widehat{\chi_{[-b, b]}}(\xi)$ 。如果定义算子 $M_a, S_{a, b}$, $M_a f(x) = e^{2\pi i a x} f(x)$, $(S_{a, b} f)^\wedge(\xi) = \chi_{(a, b)} \hat{f}(\xi)$ 。根据 [35], 在主象征的意义下, 我们有

$$S_{a, b} = \frac{i}{2} (M_a H M_{-a} - M_b H M_{-b}) = \frac{1}{2} (\text{sgn}(\xi - a) - \text{sgn}(\xi - b)) \quad (\text{A.2})$$

这里的 H 表示 Hilbert 变换, 即 $(Hf)^\wedge = -\text{sgn} \hat{f}$ 。对于 $[0, \infty)$ 使用 (A.2), 我们有

$$\chi_{[0, \infty)}(\xi) = \frac{1}{2} (\text{sgn}(\xi - 0) - \lim_{t \rightarrow \infty} \text{sgn}(\xi - t)) = \frac{1}{2} (\text{sgn}(\xi) + 1) \quad (\text{A.3})$$

因此得到

$$\begin{aligned} g(y) &= (\chi_{[0, \infty)} \widehat{\chi_{[-b, b]}})^\vee(y) \\ &= \left(\frac{1}{2} (\text{sgn}(\xi) + 1) \widehat{\chi_{[-b, b]}} \right)^\vee(y) \\ &= \frac{1}{2} (I + iH)(\chi_{[-b, b]})(y) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

这样 $T_H f = \chi_{[-a, a]} \cdot \frac{1}{2} (I + iH)(\chi_{[-b, b]})(y)$ 。根据 \tilde{R} 的定义, 对于 $(x, y) \in \tilde{R}$, 我们有 $x \in [-a, a]$, $y \in [-3b, -b] \cup [b, 3b]$, 这时 $|T_H f| = \frac{1}{2} |H(\chi_{[-b, b]})(y)|$, 因此只需要计算 $H(\chi_{[-b, b]})(y)$ 。



根据 Hilbert 变换的主值定义^[35]

$$\begin{aligned} H(\chi_{[-b,b]})(y) &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int \chi_{[-b,b]}(y-x) \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-b}^b \frac{1}{y-x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-b}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^b \right) \frac{1}{y-x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{|y+b|}{|y-b|} \end{aligned} \tag{A.5}$$

由于 $y \in [-3b, -b] \cup [b, 3b]$, 根据上式可知 $|H(\chi_{[-b,b]})(y)| \geq \frac{1}{\pi} \ln 2$, 因此 $|T_H f| \geq \frac{1}{2\pi} \ln 2$ 。
所以取 $c = \frac{1}{2\pi} \ln 2 > 0$ 即可。