1.	Hi he estat pensant i em sembla que abans d'entrar en el que és la *transfinitud* en si hauríem de donar una volta per tot el que serien les bases generals de la **TEORIA DE CONJUNTS**.
2.	Comencem pel començament: un *conjunt* és una col·lecció de coses que en diem *elements*.
3.	Plot twist: no totes les col·leccions de coses són conjunts.
4.	Va haver-hi un temps que hom creia que més o menys sí que ho són. Volent dir aquest "més o menys" que tampoc és que ningú s'hagués plantejat mai el tema amb gaire profunditat. Es tenia la noció intuïtiva que els conjunts són col·leccions de coses i s'anava fent.
5.	En concret, al segle XIX, que és quan en Cantor i en Dedekind per qui em demanaven abans operaven, la cosa anava així.
6.	En particular, s'acceptava tàcitament la validesa del que després s'ha vingut a anomenar *"axioma de comprensió sense restriccions"*: donada una propietat qualsevol que poden tenir les coses, existeix el conjunt de coses que la satisfan.
7.	Existeix el conjunt de nombres primers que conté precisament aquelles coses que compleixen la propietat "ser un nombre primer". Existeix el conjunt de coses de color blau que conté precisament aquelles coses que compleixen la propietat "ser de color blau".
8.	També existeixen el *conjunt buit* $\emptyset$ que respon a una propietat abstracta que no compleix cap cosa i per tant no té cap element i el *conjunt universal* $\mathbb{U}$ que respon a una propietat abstracta que compleixen totes les coses i per tant totes les coses en són elements.
9.	Després van venir el segle XX i un paio que es deia Bertrand Russell que es va posar a pensar molt fort sobre aquesta noció.
10.	Considerem un moment el conjunt universal que hem esmentat fa una estona. Hem dit que és aquell conjunt tal que totes les coses en són elements. I en particular, com que ell mateix és també una cosa doncs tenim que serà un element de si mateix.
11.	Això que un conjunt sigui un element d'ell mateix pot semblar exòtic però és una propietat com qualsevol altra que segons l'axioma de comprensió que hem vist tindran alguns conjunts com el conjunt universal, el conjunt de tots els conjunts i molts altres.
12.	Considerem ara la propietat complementària a aquesta. Els conjunts que **no** es tenen a ells mateixos com a element. Segons l'axioma de comprensió sense restriccions, aquesta propietat també ens defineix un conjunt: el conjunt de conjunts que no són element d'ells mateixos.
13.	Anomenarem a aquest conjunt, jo què sé, K. I ens preguntem a continuació si K és un element d'ell mateix.
14.	Suposant que efectivament K és un element d'ell mateix, per la pròpia definició de K això implica que no és un element d'ell mateix, cosa que contradiu la hipòtesi.

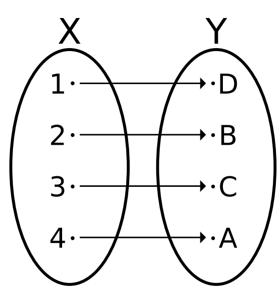
15.	I si en canvi suposem que no ho és això vol dir que no compleix la propietat de no ser un element d'ell mateix, cosa que implica que sí que ho és, contradient altre cop la hipòtesi.
16.	La mateixa existència del conjunt K, per tant, ens aboca a una contradicció. Hem trobat una col·lecció de coses que no pot existir com a conjunt.
17.	No sé si en Bertrand Russell va ser el primer en topar amb aquesta idea, però segurament sí que va ser el primer en adonar-se que representava un problema molt greu. I per això s'anomena *"la paradoxa de Russell"*.
18.	El problema és que si tenim una matemàtica que pot demostrar coses que són òbviament mentida com l'existència d'aquest conjunt K, aleshores cap resultat que ens proporcioni aquesta ciència té cap valor perquè aquest podria ser tant veritat com mentida.
19.	La cosa a més té una importància especial perquè el concepte de conjunt és absolutament ubic en les matemàtiques. Seria molt difícil trobar un text matemàtic modern en que no fes aparició en algun moment.
20.	Tant és així que de fet es pot arribar a desenvolupar tota la matemàtica a partir només de la teoria de conjunts i sense fer servir essencialment cap altre concepte que el de *conjunt pur*. Un conjunt pur és un conjunt tal que tots els seus elements són alhora conjunts purs.
21.	Però tornem al problema de la inconsistència descobert per Russell. La manera com en general s'ha adreçat la qüestió és restringint la idea intuïtiva de conjunt per mitjà d'unes regles estrictes que no donin lloc a contradiccions.
22.	Per arribar a afirmar "existeix el conjunt A amb totes les coses que compleixen la propietat P" necessitarem justificar aquesta existència seguint aquestes regles, entre les que de ben segur no hi haurà l'axioma que deia que ho podíem afirmar directament.
23.	D'aquests jocs de regles en diem *"sistemes axiomàtics"* i se n'han anat proposant diversos des d'aleshores. De cadascuna de les teories de conjunts basades en aquests sistemes en diem una *"teoria axiomàtica de conjunts"*.
24.	De la teoria de conjunts amb la que treballaven els matemàtics del segle XIX o que s'ensenya encara avui dia als nens de primària, basada únicament en la noció intuïtiva de conjunt, en diem *"teoria de conjunts naïf"*.

25.	D'un sistema axiomàtic per la teoria de conjunts voldrem bàsicament tres coses: 1. Que l'entitat que descrigui es correspongui a la nostra noció intuïtiva de conjunt. 2. Que sigui consistent: que no ens pugui dur alhora a afirmar una cosa i la contrària com amb la paradoxa de Russell. 3. Que sigui complet: que doni resposta a totes les qüestions que ens puguem plantejar sobre teoria de conjunts. O dit d'una altra manera, que donat qualsevol enunciat en el que apareguin conjunts, o ell o bé la seva negació es puguin demostrar a partir dels axiomes.
26.	El punt 1 és subjectiu perquè d'intuïció cadascú té la seva i a tot al que podem aspirar és a un conveni. Hi ha una multiplicitat de teories de conjunts on en cadascuna el concepte "conjunt" té uns matisos diferents i una que convenim que dona lloc a les matemàtiques "estàndard".
27.	A més aquí hi entren posicionaments filosòfics que són una qüestió bàsicament prematemàtica i que jo tot i tenir personalment triat el meu els trobo fruit d'una discussió més propera a la religió que a una altra cosa.
28.	Hi ha per exemple una secta que es diuen els *finitistes* que rebutgen l'existència de conjunts infinits perquè la troben herètica o quelcom semblant.
29.	De fet tampoc és que sigui un posicionament tan descabellat, si vas a mirar. Estem dient que el que fem és plasmar la nostra intuïció de conjunt com un joc de regles formals i l'infinit en si és un concepte que té ramificacions que desafien la intuïció.
30.	Per exemple l'*Hotel Infinit de Hilbert*. Parlem un moment de l'Hotel Infinit de Hilbert.
31.	Posem que ens trobem treballant a la recepció d'un hotel que té infinites habitacions. I que estem amb l'hotel ple fins la bandera. Totes les habitacions ocupades. En aquell moment arriba un client nou que vol una habitació.
32.	La nostra experiència limitada als hotels finits ens diu que si tenim un hotel complet i arriba un client nou, no el podrem acomodar i li hem de dir que sentint-ho molt s'haurà de buscar un altre establiment.
33.	Però en un hotel infinit sí que podrem obtenir una habitació lliure per ell encara que partim de tenir-les totes ocupades. Tot el que hem de fer és agafar cada client de l'habitació n i moure'l cap a la $n+1$ i després donar-li l'habitació 0 que ha quedat lliure al nou hoste.
34.	Un finitista ens dirà que aquest resultat contraintuïtiu entra en conflicte amb el punt 1 dels que hem dit abans i per tant en la nostra teoria de conjunts no hi ha d'haver infinits.

35.	Per altra banda, una matemàtica construïda només sobre conjunts finits és difícil que arribi a assolir la potència que té la normal de tota la vida. Com fas per exemple geometria analítica si no pots dir que un segment està format per infinits punts? Doncs ni idea.
36.	Els punts 2 i 3, és a dir, que el sistema axiomàtic que adoptem per la teoria de conjunts a sigui consistent i complet, en canvi, sí que són qüestions perfectament objectivables. Però aquí entren Kurt Gödel i els seus teoremes d'incompletesa.
37.	Gödel es va adonar que donat un sistema de la mena que estem tractant que sigui prou potent com per respondre qüestions aritmètiques bàsiques, seria possible traduir una afirmació com "aquesta afirmació no és demostrable en aquest sistema" en forma d'equació aritmètica que a continuació podríem introduir dins del propi sistema perquè ens proporcionés una resposta, generant una paradoxa de l'estil de la que hem vist abans amb Russell.
38.	Per tant no és possible que si el nostre sistema és consistent sigui alhora complet i pugui resoldre totes les qüestions que li plantegem. Sempre hi haurà coses que des dels nostres axiomes no podrem ni demostrar ni refutar. Terrible.
39.	La part d'expressar una oració en llenguatge natural com "aquesta afirmació no és demostrable en aquest sistema" en forma de proposició processable per un sistema axiomàtic formal es diu molt ràpid però és una liada en ella mateixa bastant important.
40.	En llenguatge natural podem referir-nos a "aquesta frase" dins de la mateixa frase a la que ens estem referint saltant alegrement entre nivells de metallenguatge i el receptor ho entén sense més problema perquè el cervell humà és molt pràctic i té facilitat per aquestes coses.
41.	Per exemple, podem dir "aquesta frase és mentida" creant una paradoxa d'autoreferència i qui ho sent de seguida entén la broma sense que el cervell li entri en un bucle infinit en processar-ho ni agafar-li una embòlia ni morir-se ni res.
42.	Però fer-li aquest mateix joc a un sistema formal fet per distingir allò veritable d'allò fals d'una manera ben fonamentada és força més complicat. No tindrem manera de dir "aquesta frase" o "aquest sistema" així amb un adjectiu demostratiu i a cascar-la.
43.	Haurem de buscar-nos la vida per declarar els conceptes de manera explícita. Es una mica com la llengua dels ents.
44.	El que va haver de fer en Gödel per dur a terme això va ser d'alguna manera "programar" sobre paper en forma d'equacions aritmètiques el comportament d'un sistema axiomàtic mínim que pogués resoldre aquelles mateixes equacions aritmètiques.
45.	El cop d'intuïció que devia fer falta per afrontar tota aquesta feinada avorridíssima amb la convicció que al final hi ha una conclusió formal valuosa és una cosa que sempre m'ha admirat bastant.

46.	Una altra conseqüència dels teoremes d'incompletesa de Gödel és que la consistència d'un d'aquests sistemes no es pot arribar a demostrar d'una manera matemàtica.
47.	I per tant mai podrem estar realment segurs que els axiomes que haguem escollit per parlar de conjunts no ens portin a una contradicció com va passar amb la teoria de conjunts naïf del segle XIX i la paradoxa de Russell.
48.	Recapitulant doncs, de les tres coses que voldríem per un sistema axiomàtic que ens permeti discórrer amb rigor per la teoria de conjunts i, per extensió, per tota la matemàtica: una és subjectiva, l'altra no la podem tenir garantida i la tercera és impossible. Ai las.
49.	Existeix un conjunt d'axiomes concret, però, que donat que sembla que a la seva manera satisfà *prou* tots tres punts s'ha pres per conveni general com que representa la teoria de conjunts (i per extensió la matemàtica) *"estàndard"*.
50.	Se'l coneix com a *ZFC*, amb les Z i F per Zermelo i Fraenkel, que són dos senyors, i la C de *"axiom of choice"*. Quan parlem de conjunts sense dir res més s'entén que ens referim exactament a aquells ens que compleixen aquests axiomes i no a una altra cosa.
51.	El sistema axiomàtic ZFC consta de nou axiomes i em temo que tuiter no és un lloc gaire adequat per entrar a detallar-los un per un, ja que seria una cosa feixuga i avorridíssima.
52.	És exactament el que faré.
53.	L'*axioma d'extensionalitat* diu que dos conjunts iguals són el mateix conjunt.
54.	Això d'entrada pot semblar que no digui gran cosa però aquí darrere hi ha una característica bastant profunda que separa el món immutable de les idees i les abstraccions matemàtiques del món sensible de les coses on ens veiem lamentablement forçats existir nosaltres.
55.	Quan diem "$2+2$ *és igual a* 4", inherentment a això va lligat que a qualsevol proposició on veiem un "$2+2$" el podem substituir per un "4" i la seva validesa no es veu afectada pel canvi, perquè són la mateixa cosa i tenen exactament les mateixes propietats.
56.	Aquest fet és una part essencial del discórrer matemàtic, de fet. En canvi, en el món sensible si veiem un cotxe igual pel nostre no necessàriament ha de ser el nostre i si fem amb ell el que faríem amb el nostre podem tenir problemes amb la justícia.
57.	És obvi que a causa d'això discórrer en el món sensible ha de ser per força molt més esgotador, feixuc i desagradable. No saps mai si dues coses iguals són la mateixa o no, hòstia puta.
58.	Tornant als conjunts, direm que dos conjunts són iguals quan tinguin exactament els mateixos elements i per l'axioma d'extensionalitat qualsevol propietat que tingui un també la tindrà l'altre.
59.	Per exemple, la propietat de ser un element d'un tercer conjunt donat. Si $A = B$, i $A \in C$, podem estar segurs que $B \in C$. I això és en virtut d'aquest primer axioma. Saludem tots a l'axioma d'extensionalitat.

60.	L'*axioma d'emparellament* diu que donats dos elements qualssevol a i b (no necessàriament diferents) existeix un conjunt $\{a, b\}$ format per precisament aquests dos elements.
61.	L'existència del conjunt d'un sol element queda subsumida en aquest axioma, quan a i b siguin la mateixa cosa. Tots els elements de $\{a, a\}$ són element de $\{a\}$ i viceversa, per tant tenen els mateixos elements, per tant són iguals, i per tant, per l'anterior axioma d'extensionalitat són el mateix conjunt. Aquest raonament seria una mica formalitzar la idea que els conjunts són col·leccions sense ordre ni repetició, pel cas de parells de la forma $\{a, a\}$.
62.	L'emparellament d'elements ens permet construir algunes estructures interessants amb conjunts. Per exemple, si tenim dos elements a i b podem formar els conjunts $\{a\}$ i $\{a, b\}$ i després emparellar aquests per formar $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.
63.	Aquesta estructura ens interessa per la seva asimetria. No és el mateix $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ que $\{\{b\}, \{b, a\}\}$. I com que és asimètrica podem definir-hi un ordre, dir que un element va davant de l'altre. Per això en diem "parell ordenat" i ho escrivim amb la notació $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
64.	Els parells ordenats són una cosa que es fa servir bastant, per exemple per jugar a barcos.
65.	Amb parells ordenats podem construir alhora llistes finites d'elements: $[a, b, c, d, e] = ((((a, b), c), d), e)$. Tot i que en matemàtiques normalment en diem *tuples* i les escrivim en la forma (a, b, c, d, e).
66.	El que és interessant d'això és que totes aquestes estructures les podem tractar matemàticament, manipular-les i formular teoremes sobre elles fent servir res més que la teoria de conjunts que surt d'aquests axiomes, donat que les hem definit com res més que un tipus particular de conjunt.
67.	L'*axioma de la unió* diu que donat un conjunt tal que els seus elements són altres conjunts aleshores els elements d'aquests conjunts units constitueixen alhora un conjunt.
68.	És a dir que si tenim el conjunt $\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ aleshores existeix el conjunt unió $\bigcup \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\} = \{a, b, c, d, e\}$.
69.	Combinant els axiomes d'emparellament i d'unió podem fer l'operació d'únió binària de tota la vida, o sigui, l'operació que pren dos conjunts i uneix els seus elements en un de sol: donats els conjunts A i B, existeix el conjunt parella $\{A, B\}$ i d'aquest la unió $\bigcup \{A, B\} = A \cup B$
70.	Aquesta operació d'unió binària dona lloc a una altra construcció interessant. Amb ella podem definir la funció $S(X) = X \cup \{X\}$. És a dir, donat un conjunt qualsevol X, construïm un nou conjunt prenent aquest i afegint-li ell mateix com a element.
71.	Per exemple, aplicada al conjunt $\{a, b\}$: $S(\{a, b\}) = \{a, b, \{a, b\}\}$. D'aquesta funció en diem *"successor"* i direm que el successor del conjunt $\{a, b\}$ és $\{a, b, \{a, b\}\}$.

72.	Si apliquem la funció successor al conjunt buit $\emptyset$[8], aquell conjunt que no té cap element, tenim que $S(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$. En aquest context, al conjunt buit l'anomenarem $\mathbf{0}$ (*zero*) i del resultat d'aplicar-li la funció successor, el conjunt d'un sol element que és el conjunt buit, en direm $\mathbf{1}$ (*u*).
73.	Si apliquem ara la funció successor al conjunt $\mathbf{1}$, tenim que $S(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \cup \{\mathbf{1}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Obtenim un nou conjunt amb els dos elements $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ i d'aquest en diem $\mathbf{2}$ (*dos*).
74.	Aplicant ara la funció successor a $\mathbf{2}$, obtenim $S(\mathbf{2}) = \mathbf{2} \cup \{\mathbf{2}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, un conjunt amb tres elements que en diem $\mathbf{3}$ (*tres*).
75.	I així, amics, és com neixen els nombres ♥.
76.	L'*axioma de l'infinit* diu que existeix un conjunt $I = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \ldots\}$ que conté tots els nombres que surten d'aplicacions successives de la funció successor al conjunt buit tal com els hem definit abans.
77.	Més formalment, existeix un conjunt I tal que $\emptyset \in I$ i que a més donat qualsevol element $x \in I$ tenim que també $x \cup \{x\} \in I$.
78.	Dels elements d'aquest conjunt I i de tots els que tenen la mateixa cardinalitat en diem *"conjunts finits"*. De tots els altres, inclòs el mateix conjunt I, en diem *"conjunts infinits"*.
79.	I aquesta simplement és la definició de la dicotomia finit/infinit que es sol fer anar quan es treballa amb el sistema d'axiomes ZFC. Però per a realment comprendre-la ens mancaria primer saber ben bé què vol dir això de *"tenir la mateixa cardinalitat"*. I per això haurem d'aprendre a comptar.
80.	La cardinalitat és la mesura de la quantitat d'elements que té un conjunt. Que dos conjunts tinguin la mateixa cardinalitat vol dir que tenen la mateixa quantitat d'elements.
81.	Per saber si dos conjunts tenen la mateixa quantitat d'elements el que fem és mirar d'establir entre ells una correspondència *un a un* que se'n diu *"bijecció"*. Si som capaços d'establir-la, aleshores diem que els dos conjunts tenen la mateixa cardinalitat. 
81.	Així doncs, si en un conjunt podem establir-hi una bijecció amb algun dels elements del conjunt $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, direm que aquest conjunt és finit.

82.	Com hem vist abans, aquests elements són conjunts que inclouen alhora tots els conjunts que han anat sortint abans en l'aplicació successiva de la funció successor a partir del conjunt buit $0 = \emptyset$, és a dir $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i així successivament.
83.	Si tenim per exemple el conjunt $\{a, b, c, d, e\}$ veiem que podem establir una bijecció amb el conjunt $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de la següent manera (entre moltes altres): $$\begin{aligned} a &\to 0 \\ b &\to 1 \\ c &\to 2 \\ d &\to 3 \\ e &\to 4 \end{aligned}$$
84.	Per tant sabem que el conjunt $\{a, b, c, d, e\}$ és finit i direm que té una cardinalitat de 5. Els elements de I els farem servir com a mesura estàndard de la cardinalitat dels conjunts finits. En direm *"nombres naturals"* i en aquest context ens referirem a ell mitjançant el símbol $\mathbb{N}$.
85.	De fet tot aquest procés és exactament el que fa un nen quan compta els elements d'un conjunt qualsevol d'ítems concrets que té al davant. Els va assenyalant un per un assignant-los nombres consecutius i al final sap amb quin dels elements de $\mathbb{N}$ pot establir-hi una bijecció.
86.	Recordeu l'Hotel Infinit de Hilbert[(33)]?
87.	En aquella maniobra de fer còrrer tots els clients de l'habitació n cap a la $n + 1$ estàvem de fet establint una bijecció entre el conjunt I i el conjunt I sense l'element 0, per tal de poder encabir el nou client en l'habitació 0.
88.	En altres paraules, estem demostrant que I té la mateixa quantitat d'elements que I traient-li un element, segons la definició de "tenir la mateixa quantitat d'elements" que hem donat.
89.	Això amb els conjunts finits no passa. Si a un conjunt finit li treiem un element, el resultat té estrictament menys elements que l'original. El que vindria a ser al que estem acostumats que passi a la nostra quotidianitat finita.
90.	Al segle XIX, abans de tot això de l'axiomatització, un senyor que es deia Richard Dedekind buscava una manera de caracteritzar la infinitat que fos purament interna a la teoria de conjunts; que no fes referència a cap concepte extern, com per exemple són els nombres naturals.
91.	La definició que va desenvolupar va ser precisament aquesta propietat de la que estem parlant: un conjunt és infinit quan es pot posar en bijecció (té la mateixa quantitat d'elements) amb una de les seves parts pròpies, o sia, un subconjunt estricte d'ell mateix.
92.	En ZFC es pot demostrar que els conjunts que caracteritza aquesta definició són exactament els mateixos que els de la definició que hem dit abans que fariem servir (els conjunts que no es poden posar en bijecció amb algun element de I), però això no té perquè ser així en altres sistemes axiomàtics.

93.	I això és perquè, encara que sempre fem servir la paraula "conjunt", sistemes axiomàtics diferents poden estar parlant de coses (lleugerament) diferents.
94.	De fet, ni tant sols en ZFC fem servir la definició de Dedekind perquè per demostrar l'equivalència amb la que hem donat inicialment necessitem un axioma particular que és el de l'elecció (la C de ZFC), que és controvertit, sempre es deixa pel final i s'evita si es pot evitar.
95.	Fer servir la definició d'infinit de Dedekind implicaria que per demostrar molts teoremes on intervé d'alguna manera la infinitat necessitariem recòrrer a l'axioma de l'elecció; i resulta que ens agrada mantenir tanta matemàtica com sigui possible dins de ZF sense la C. Quan arribem a l'axioma de l'elecció (no sé quan) veurem per què.
96.	A nosaltres no ens preocupa com a Dedekind el fet de fer servir els nombres naturals per a definir el concepte d'infinitat perquè com que els hem desenvolupat com un tipus particular de conjunt ja no són una cosa *externa* a la teoria de conjunts, sinó una part d'ella mateixa.
97.	Dels conjunts que són infinits segons la definició de Dedekind (i que poden ser o no infinits segons el sistema axiomàtic en el que estiguem treballant) avui dia en diem *Dedekind-infinits*.
98.	De l'axioma de l'infinit (i possiblement l'ajut d'algun altre que encara devem tenir pendent) es deriva una cosa força important que és el *principi d'inducció matemàtica*.
99.	Així en general la inducció és un tipus de raonament que consisteix en la construcció d'una regla general a partir de l'observació d'un conjunt de casos concrets. Veiem passar quatre o cinc corbs negres i concloem que tots els corbs són negres. ~~Amb dos collons.~~
100.	En matemàtiques també volem arribar a conclusions generals d'una manera anàloga però: • Requerim un total rigor i per tant hem d'estar estrictament segurs que podem parlar per tots els corbs. • Els nostres conjunts de corbs són generalment infinits. • Les nostres demostracions són necessàriament finites.
101.	Per això fem servir coses com l'anomenat "principi d'inducció matemàtica"; si tenim una propietat P aplicada als nombres naturals on podem validar que: • Es dóna $P(0)$. • Donada qualsevol $n \in \mathbb{N}$ tal que es doni $P(n)$ aleshores també es donarà $P(n+1)$.
102.	Donat que sabem que serà cert que $P(0)$, i d'aquí podrem deduïr consecutivament $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $\ldots$ podrem concloure que P es donarà per totes les $n \in \mathbb{N}$.

103.	Podem demostrar, doncs, infinites coses (que P es dóna per cadascun dels infinits nombres naturals) amb una demostració finita, un raonament format per un conjunt finit de passos lògics. I això és una eina potentíssima.
104.	Aquest principi el necessitem per demostrar coses tan bàsiques com la validesa de la commutativitat de la suma, que $a + b = b + a$. I la validesa del principi, alhora, es demostra partint de l'axioma de l'infinit, així com la construcció de funcions recursives com la suma mateixa.
105.	El que no sé jo és com es convencen ells mateixos d'aquestes coses (la validesa de la commutativitat de la suma, per exemple) els finitistes de qui he estat parlant abans(28) ~~(escup al terra)~~. Possiblement admetin la inducció com a axioma en ell mateix, però ni idea.
106.	L'*axioma d'especificació* diu que donat un conjunt A i una propietat P que els seus elements poden tenir o no tenir, existeix un conjunt B format per tots aquells elements del conjunt A que satisfan la propietat P.
107.	Aquest axioma és interessant perquè s'assembla bastant a l'axioma de comprensió sense restriccions, del que vam parlar gairebé al començament(6) , i que havia provocat tot el pollastre de la paradoxa de Russell.
108.	Però aquesta vegada, en operar dins d'un conjunt que ja és preexistent, ens evitem caure en paradoxes de l'estil "tenim el conjunt de conjunts que no es pertanyen a ells mateixos".
109.	Quan un element no pertanyi a un conjunt generat per aquest axioma, no podrem concloure directament que satisfan la negació de la propietat P. També podria ser que no pertanyessin al conjunt inicial A.
110.	Així esquivem conclusions que ens podrien dur a contradiccions de l'estil paradoxa de Russell que ens tornarien a dur a la inconsistència de tot el sistema.
111.	I tanmateix podem definir coses com "el conjunt del nombres naturals que són primers", sempre i quan poguem prèviament demostrar l'existència del conjunt dels nombres naturals, cosa que ja hem fet a partir de l'axioma de l'infinit.
112.	Per això de fet voliem l'axioma de comprensió, no per generar contradiccions que ens féssin replantejar els fonaments de tota la matemàtica i la solidesa de la seva connexió amb la veritat.
113.	Amb l'axioma d'especificació també podem definir coses l'operació binària d'intersecció de tota la vida: $A \cap B = \{a \in A \mid a \in B\}$, és a dir, els elements de A que tenen la propietat de ser alhora un element de B.
114.	O el conjunt complement: $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$; el conjunt d'elements de A que tenen la propietat de **no** ser un element de B.
115.	Per fer servir aquest axioma d'especificació per crear una paradoxa a l'estil Russell hauriem de fer alguna cosa com $K = \{A \in \mathbb{U} \mid A \notin A\}$, on $\mathbb{U}$ és el conjunt universal(8), aquell que ho conté **tot** com a element.
116.	Necessitariem demostrar prèviament l'existència d'aquest conjunt universal $\mathbb{U}$, i això amb ZFC no es pot fer. De fet veurem que es pot demostrar la **no** existència de l'universal.

117.	Si comencem suposant que existeix un conjunt universal, l'axioma de comprensió sense restriccions esdevé un corol·lari l'axioma d'especificació queda reduït al de comprensió sense restriccions, simplement fent $A = \mathbb{U}$. I aquest axioma hem vist abans que ens porta a la paradoxa de Russell(12), un contrasentit. Per tant la hipòtesi que existeix un conjunt universal ha de ser forçosament falsa.
118.	D'aquesta mena d'argument (prendre una hipòtesi com a certa, veure que ens porta a una contradicció i concloure per tant que la hipòtesi falsa) se'n diu *reducció a l'absurd* i és un recurs bàsic i habitual en les demostracions matemàtiques.
119.	L'*axioma de regularitat* té una formulació una mica estranya perquè d'aquesta manera serveix per descartar l'existència de tota una tipologia de conjunts que la seva existència ens fa nosa.
120.	Diu: tot conjunt que no sigui buit té un element que és disjunt amb ell. Disjunt vol dir que no en comparteix cap element, que la seva intersecció és el conjunt buit.
121.	Suposem un conjunt A que sigui un element d'ell mateix. És a dir $A \in A$. Amb l'axioma d'emparellament podem construir el conjunt que només el té a ell com element, el seu conjunt singletó $\{A\}$.
122.	Aquest $\{A\}$ no és el conjunt buit perquè té un element i aquest únic element A no és disjunt amb ell, ja que $A \in \{A\}$ i alhora $A \in A$. Per tant per l'axioma de regularitat no poden existir ni $\{A\}$ ni tampoc A. Ni cap altre conjunt que sigui element d'ell mateix.
123.	Una característica del conjunt universal $\mathbb{U}$ és que en tenir-ho tot com a element per definició també s'hi ha de tenir a ell mateix, i per tant pel que acabem de veure l'axioma de regularitat també descarta la seva existència, talment com ho feia (per un altre argument) el d'especificació.
124.	Seguint un raonament molt semblant a l'anterior, l'axioma de regularitat també ens descarta estructures com $A \in B \in A$, $A \in B \in C \in A$, i en general cicles de qualsevol llargària.
125.	I encara més, ens descarta qualsevol seqüència infinita de la forma $A_0 \ni A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni A_4 \ni \ldots$ encara que el cicle no es repeteixi mai. Tota seqüència de descens que es faci seguint la relació "$\in$" *(és element de)* entre conjunts ha d'anar a parar forçosament al conjunt buit.
126.	De la "prohibició" que es doni $A \in A$ se'n deriva que l'aplicació iterada de la funció successor(71) no pot tornar a portar a un element per el que ja hem passat. És a dir, que per qualsevol conjunt A, $S(S(S(\ldots S(A)))) \neq A$.
127.	I d'aquí es deriva que construccions basades en aquesta funció com la dels nombres natural tenen una estructura *ordenada*: donats dos elements que no siguin el mateix sempre podem dir que un dels dos va abans que l'altre.
128.	D'això se'n diu una *relació antisimètrica*; $\leq$ és una relació antisimètrica perquè si tenim que $a \leq b$ i $b \leq a$ aleshores $a = b$. Les relacions d'ordre com $\leq$ tenen la propietat antisimètrica (entre d'altres que aniran sortint més endavant).

129.	Tal com vam definir els nombres naturals(84), on cada $n \in \mathbb{N}$ és $n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, la relació $\leq$ entre nombres naturals és exactament la mateixa que $\subseteq$ *(és un subconjunt de)*: $n \leq m$ si i només sí $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, \ldots, m-1\}$.
130.	La relació $\subseteq$ considerada entre conjunts de qualsevol mena manté la propietat antisimètrica, de fet: si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ aleshores $A = B$.