1.	Hi he estat pensant i em sembla que abans d'entrar en el que és la *transfinitat* en si hauríem de donar una volta per tot el que serien les bases generals de la **TEORIA DE CONJUNTS**.
2.	Comencem pel començament: un *conjunt* és una col·lecció de coses que en diem *elements*.
3.	No obstant això, no totes les col·leccions de coses són conjunts.
4.	Va haver-hi un temps en el que hom creia que més o menys sí que ho són. Volent dir aquest «més o menys» que tampoc és que ningú s'hagués plantejat mai el tema amb gaire profunditat. Es tenia la noció intuïtiva que els conjunts són col·leccions de coses i s'anava fent.
5.	En concret, al segle XIX, que és quan en Cantor i en Dedekind per qui em demanaven abans operaven, la cosa anava així.
6.	En particular, s'acceptava tàcitament la validesa del que després s'ha vingut a anomenar *«axioma de comprensió sense restriccions»*: donada una propietat qualsevol que poden tenir les coses, existeix el conjunt de coses que la satisfan.
7.	Existeix el conjunt de nombres primers que conté precisament aquelles coses que compleixen la propietat «ser un nombre primer». Existeix el conjunt de coses de color blau que conté precisament aquelles coses que compleixen la propietat «ser de color blau».
8.	També existeixen el *conjunt buit* $\varnothing$ que respon a una propietat abstracta que no compleix cap cosa i per tant no té cap element i el *conjunt universal* $\mathbb{U}$ que respon a una propietat abstracta que compleixen totes les coses i per tant totes les coses en són elements.
9.	Després van venir el segle XX i un paio que es deia Bertrand Russell que es va posar a pensar molt fort sobre aquests conceptes.
10.	Considerem un moment el conjunt universal que hem esmentat fa una estona. Hem dit que és aquell conjunt tal que totes les coses en són elements. I en particular, com que ell mateix és també una cosa doncs tenim que serà un element de si mateix.
11.	Això que un conjunt sigui un element d'ell mateix pot semblar exòtic però és una propietat com qualsevol altra que segons l'axioma de comprensió que hem vist tindran alguns conjunts com el conjunt universal, el conjunt de tots els conjunts i molts altres. Altres conjunts com el buit, el conjunt dels nombres parells o el conjunt de conjunts de coses que no són conjunts no la tindran.
12.	Considerem ara la propietat complementària a aquesta. Els conjunts que **no** es tenen a ells mateixos com a element. Compliran aquesta propietat conjunts com el buit, el conjunt dels nombres parells o el conjunt de conjunts de coses que no són conjunts. I segons l'axioma de comprensió sense restriccions, aquesta propietat ens defineix un altre conjunt: el conjunt de conjunts que no són element d'ells mateixos, del que formaran part tots aquests.
13.	Anomenarem a aquest conjunt, jo què sé, K. I ens preguntem a continuació si K és un element d'ell mateix.
14.	Suposant que efectivament K és un element d'ell mateix, per la pròpia definició de K això implica que no és un element d'ell mateix, cosa que contradiu la hipòtesi.
15.	I si en canvi suposem que K no és element d'ell mateix, això vol dir que no compleix la propietat de no ser un element d'ell mateix, cosa que implica que sí que ho és, contradient altre cop la hipòtesi.

16. La mateixa existència del conjunt K, per tant, ens aboca a una contradicció tant si suposem que es té a ell mateix com a element com si suposem que no, i aquestes dues són les úniques possibilitats que hi ha (segons ens diu la *lògica clàssica*). Hem trobat, per tant, una col·lecció de coses que no pot existir com a conjunt.

17. No sé si en Bertrand Russell va ser el primer en topar amb aquesta idea, però segurament sí que va ser el primer en adonar-se que representava un problema molt greu. I per això s'anomena *«la paradoxa de Russell»*.

18. El problema és que si tenim una matemàtica que admet l'existència de coses que alhora demostrablement no poden existir com aquest conjunt K, aleshores cap resultat que ens proporcioni aquesta ciència té algun valor perquè aquest resultat podria ser tant veritat com mentida.

19. La cosa a més té una importància especial perquè el concepte de conjunt és absolutament ubic en la matemàtica. Seria molt difícil trobar un text matemàtic modern en que no fes aparició en algun moment.

20. Tant és així que de fet es pot arribar a desenvolupar tota la matemàtica a partir només de la teoria de conjunts i sense fer servir essencialment cap altre concepte que el de *conjunt pur*. Un conjunt pur és un conjunt tal que tots els seus elements són alhora conjunts purs. Dit d'una altra manera: tots i cadascun dels elements d'un conjunt pur són conjunts tals que tots i cadascun dels seus elements són conjunts tals que ...

21. Però tornem al problema de la inconsistència descobert per Russell. La manera com en general s'ha adreçat la qüestió és restringint la idea intuïtiva de conjunt per mitjà d'unes regles estrictes que no donin lloc a contradiccions.

22. Per arribar a afirmar «existeix el conjunt A amb totes les coses que compleixen la propietat P» necessitarem justificar aquesta existència seguint aquestes regles, entre les que de ben segur no hi haurà l'axioma que deia que ho podíem afirmar directament perquè, tal com hem vist, aquest axioma ens condueix directament cap a una paradoxa.

23. D'aquests jocs de regles en diem *«sistemes axiomàtics»* i se n'han anat proposant diversos des d'aleshores. De cadascuna de les teories de conjunts basades en aquests sistemes en diem una *«teoria axiomàtica de conjunts»*.

24. De la teoria de conjunts amb la que treballaven els matemàtics del segle XIX o que s'ensenya encara avui dia als nens de primària, basada únicament en la noció intuïtiva de conjunt, en diem *«teoria informal de conjunts»*.

25. D'un sistema axiomàtic per la teoria de conjunts voldrem bàsicament tres coses:

    1. Que l'entitat abstracta que defineixi i descrigui sota el terme «conjunt» es correspongui a la nostra noció intuïtiva del que és un conjunt.

    2. Que sigui *consistent*: que no ens pugui dur alhora a afirmar una cosa i la contrària com amb la paradoxa de Russell.

    3. Que sigui *complet*: que doni resposta a totes les qüestions que ens puguem plantejar sobre teoria de conjunts. O dit d'una altra manera, que donat qualsevol enunciat en el que apareguin conjunts, o ell o bé la seva negació es puguin demostrar a partir dels axiomes.

26.	El punt 1 és subjectiu perquè d'intuïció cadascú té la seva i a tot al que podem aspirar és a un conveni. Hi ha una multiplicitat de teories de conjunts on en cadascuna el concepte «conjunt» té uns matisos diferents i una teoria de conjunts que convenim que dona lloc a les matemàtiques «estàndard».
27.	A més aquí hi entren posicionaments filosòfics que són una qüestió bàsicament prematemàtica i que jo tot i tenir personalment triat el meu els trobo fruit d'una discussió més propera a la religió que a una altra cosa.
28.	Hi ha per exemple ~~una secta~~ un corrent de pensament anomenat *finitisme* que rebutja l'existència de conjunts infinits ~~perquè la troben herètica o quelcom semblant~~.
29.	De fet tampoc és que sigui un posicionament tan insensat, si vas a mirar. Estem dient que el que fem és plasmar la nostra intuïció de conjunt com un joc de regles formals i l'infinit en si és un concepte que té ramificacions que desafien la intuïció.
30.	Per exemple la qüestió de l'*Hotel Infinit de Hilbert*. Parlem un moment de l'Hotel Infinit de Hilbert.
31.	Posem que ens trobem treballant a la recepció d'un hotel que té infinites habitacions. I que estem plens fins la bandera. Totes les habitacions ocupades. En aquell moment arriba un client nou que vol una habitació.
32.	La nostra experiència limitada als hotels finits ens diu que si tenim un hotel complet i arriba un client nou, no el podrem acomodar i li hem de dir que sentint-ho molt s'haurà de buscar un altre establiment.
33.	Però en un hotel infinit sí que podrem obtenir una habitació lliure per ell encara que partim de tenir-les totes ocupades. Tot el que hem de fer és agafar cada client de l'habitació n i moure'l cap a la $n+1$ i després donar-li l'habitació 0 que ha quedat lliure al nou hoste.
34.	Un finitista ens dirà que aquest resultat contraintuïtiu entra en conflicte amb el punt 1 dels que hem dit abans i per tant en la nostra teoria de conjunts no hi ha d'haver infinits.
35.	Per altra banda, una matemàtica construïda només sobre conjunts finits és difícil que arribi a assolir la potència que té la normal de tota la vida. Com fas per exemple geometria analítica si no pots dir que un segment està format per infinits punts? Doncs ni idea.
36.	Els punts 2 i 3, és a dir, que el sistema axiomàtic que adoptem per la teoria de conjunts a sigui consistent i complet, en canvi, sí que són qüestions perfectament objectivables. Però aquí entren Kurt Gödel i els seus teoremes d'incompletesa.
37.	Gödel es va adonar que donat un sistema de la mena que estem tractant que sigui prou potent com per respondre qüestions aritmètiques bàsiques, seria possible traduir una afirmació com «aquesta afirmació no és demostrable en aquest sistema» en forma d'equació aritmètica que a continuació podríem introduir dins del propi sistema perquè ens proporcionés una resposta, generant una paradoxa de l'estil de la que hem vist abans amb Russell.
38.	Per tant no és possible que si el nostre sistema és consistent sigui alhora complet i pugui resoldre totes les qüestions que li plantegem. Sempre hi haurà coses que des dels nostres axiomes no podrem ni demostrar ni refutar. Terrible.

39. La part d'expressar una oració en llenguatge natural com «aquesta afirmació no és demostrable en aquest sistema» en forma de proposició processable per un sistema axiomàtic formal es diu molt ràpid però és ~~una liada~~ un sarau en ella mateixa bastant important.
40. En llenguatge natural podem referir-nos a «aquesta frase» dins de la mateixa frase a la que ens estem referint saltant alegrement entre nivells de metallenguatge i el receptor ho entén sense més problema perquè el cervell humà és molt pràctic i té facilitat per aquestes coses.
41. Per exemple, podem dir «aquesta frase és mentida» creant una paradoxa d'autoreferència i qui ho sent de seguida entén la broma sense que el cervell li entri en un bucle infinit en processar-ho ni agafar-li una embòlia ni morir-se ni res.
42. Però fer-li aquest mateix joc a un sistema formal fet per distingir allò veritable d'allò fals d'una manera ben fonamentada és força més complicat. No tindrem manera de dir «aquesta frase» o «aquest sistema» així amb un adjectiu demostratiu ~~i a cascar-la~~.
43. Haurem de buscar-nos la vida per declarar els conceptes de manera explícita. Es una mica com la llengua dels ents.
44. El que va haver de fer en Gödel per dur a terme això va ser d'alguna manera «programar» sobre paper en forma d'equacions aritmètiques el comportament d'un sistema axiomàtic mínim que pogués resoldre aquelles mateixes equacions aritmètiques.
45. El cop d'intuïció que devia fer falta per afrontar tota aquesta feinada avorridíssima amb la convicció que al final hi ha una conclusió formal valuosa és una cosa que sempre m'ha admirat bastant.
46. Una altra conseqüència dels teoremes d'incompletesa de Gödel és que la consistència d'un d'aquests sistemes no es pot arribar a demostrar d'una manera matemàtica.
47. I per tant mai podrem estar realment segurs que els axiomes que haguem escollit per parlar de conjunts no ens portin a una contradicció com va passar amb la teoria de conjunts preaxiomàtica del segle XIX i la paradoxa de Russell.
48. Recapitulant doncs, de les tres coses[25] que voldríem per un sistema axiomàtic que ens permeti discórrer amb rigor per la teoria de conjunts i, per extensió, per tota la matemàtica: una és subjectiva, l'altra no la podem tenir garantida i la tercera és impossible. Ai las.
49. Existeix un joc d'axiomes concret, però, que donat que sembla que a la seva manera satisfà *prou* tots tres punts s'ha pres per conveni general com que representa la teoria de conjunts (i per extensió la matemàtica) *«estàndard»*.
50. Se'l coneix com a ***ZFC***, amb les **Z** i **F** per Ernst **Z**ermelo i Abraham **F**raenkel, que són dos senyors, i la **C** de *«axiom of* ***c****hoice»*. Quan parlem de conjunts sense dir res més s'entén que ens referim exactament a aquells ens que compleixen aquests axiomes i no a una altra cosa.
51. El sistema axiomàtic **ZFC** consta de nou axiomes i em temo que tuiter no és un lloc gaire adequat per entrar a detallar-los un per un, ja que seria una cosa feixuga i avorridíssima.
52. Tot i això, és exactament el que em disposo a fer.
53. L'*axioma d'extensionalitat* diu que dos conjunts iguals són el mateix conjunt.

54. Això d'entrada pot semblar que no digui gran cosa però aquí darrere hi ha una característica bastant profunda que separa el món immutable de les idees i les abstraccions matemàtiques del món sensible de les coses on ens veiem lamentablement forçats existir nosaltres.

55. Quan diem «$2+2$ és igual a 4», inherentment a això va lligat que a qualsevol proposició on veiem un «$2+2$» el podem substituir per un «4» i la seva validesa no es veu afectada pel canvi, perquè són la mateixa cosa i tenen exactament les mateixes propietats.

56. Aquest fet és una part essencial del discórrer matemàtic, de fet. En canvi, en el món sensible si veiem un cotxe igual pel nostre no necessàriament ha de ser el nostre i si fem amb ell el que faríem amb el nostre podem tenir problemes amb qui tingui encarregada la tasca de protegir la propietat privada.

57. És obvi que a causa d'això discórrer en el món sensible ha de ser per força molt més esgotador, feixuc i desagradable. No saps mai si dues coses iguals són la mateixa o no, casum l'olla.

58. Tornant als conjunts, direm que dos conjunts són iguals quan tinguin exactament els mateixos elements i per l'axioma d'extensionalitat qualsevol propietat que tingui un també la tindrà l'altre.

59. Per exemple, la propietat de ser un element d'un tercer conjunt donat. Si $A = B$, i $A \in C$, podem estar segurs que $B \in C$. I això és en virtut d'aquest primer axioma. Saludem tots a l'axioma d'extensionalitat.

60. L'*axioma d'emparellament* diu que donats dos elements qualssevol a i b (no necessàriament diferents) existeix un conjunt $\{a, b\}$ format per precisament aquests dos elements.

61. L'existència dels conjunts d'un sol element queda subsumida en aquest axioma, quan a i b siguin la mateixa cosa. Tots els elements de $\{a, a\}$ són element de $\{a\}$ i viceversa, per tant tenen els mateixos elements, per tant són iguals, i per tant, per l'anterior axioma d'extensionalitat són el mateix conjunt. Aquest raonament seria una mica formalitzar la idea que els conjunts són col·leccions sense ordre ni repetició, pel cas de parells de la forma $\{a, a\}$.

62. L'emparellament d'elements ens permet construir algunes estructures interessants amb conjunts. Per exemple, si tenim dos elements a i b podem formar els conjunts $\{a\}$ i $\{a, b\}$ i després emparellar aquests per formar $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

63. Aquesta estructura ens interessa per la seva asimetria. No és el mateix $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ que $\{\{b\}, \{b, a\}\}$. I com que és asimètrica podem definir-hi un ordre, dir que un element va davant de l'altre. Per això en diem *«parell ordenat»* i ho escrivim amb la notació $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

64. Els parells ordenats són una cosa que es fa servir bastant, per exemple per *jugar a barcos.*

65. Amb parells ordenats podem construir alhora llistes finites d'elements: $[a, b, c, d, e] = ((((a, b), c), d), e)$. Tot i que en matemàtiques normalment en diem *tuples* i les escrivim en la forma (a, b, c, d, e).

66. El que és interessant d'això és que totes aquestes estructures les podem tractar matemàticament, manipular-les i formular teoremes sobre elles fent servir res més que la teoria de conjunts que surt d'aquests axiomes, donat que les hem definit com res més que un tipus particular de conjunt.

67. L'*axioma de la unió* diu que donat un conjunt tal que els seus elements són altres conjunts aleshores els elements d'aquests conjunts units constitueixen alhora un conjunt.

68. És a dir que si tenim el conjunt $\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ aleshores existeix el conjunt unió $\bigcup \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\} = \{a, b, c, d, e\}$.

69. Combinant els axiomes d'emparellament i d'unió podem fer l'operació d'unió binària de tota la vida, o sigui, l'operació que pren dos conjunts i uneix els seus elements en un de sol: donats els conjunts A i B, existeix el conjunt parella $\{A, B\}$ i d'aquest la unió $\bigcup \{A, B\} = A \cup B$

70. Aquesta operació d'unió binària dona lloc a una altra construcció interessant. Amb ella podem definir la funció $S(X) = X \cup \{X\}$. És a dir, donat un conjunt qualsevol X, construïm un nou conjunt prenent aquest i afegint-li ell mateix com a element.

71. Per exemple, aplicada al conjunt $\{a, b\}$: $S(\{a, b\}) = \{a, b, \{a, b\}\}$. D'aquesta funció en diem *«successor»* i direm que el successor del conjunt $\{a, b\}$ és $\{a, b, \{a, b\}\}$.

72. Si apliquem la funció successor al conjunt buit $\varnothing$[(8)], aquell conjunt que no té cap element, tenim que $S(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$. En aquest context, al conjunt buit l'anomenarem $\mathbf{0}$ (*zero*) i del resultat d'aplicar-li la funció successor, el conjunt d'un sol element que és el conjunt buit, en direm $\mathbf{1}$ (*u*).

73. Si apliquem ara la funció successor al conjunt $\mathbf{1}$, tenim que $S(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \cup \{\mathbf{1}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Obtenim un nou conjunt amb els dos elements $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ i d'aquest en diem $\mathbf{2}$ (*dos*).

74. Aplicant ara la funció successor a $\mathbf{2}$, obtenim $S(\mathbf{2}) = \mathbf{2} \cup \{\mathbf{2}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, un conjunt amb tres elements que en diem $\mathbf{3}$ (*tres*).

75. I així, amics, és com neixen els nombres: no són altra cosa que conjunts purs[(20)] amb unes característiques i propietats particulars.

76. L'*axioma de l'infinit* diu que existeix un conjunt $I = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \ldots\}$ que conté tots els nombres que surten d'aplicacions successives de la funció successor al conjunt buit tal com els hem definit abans.

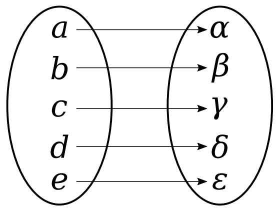
77. Més formalment, existeix un conjunt I tal que $\varnothing \in I$ i que a més donat qualsevol element $x \in I$ tenim que també $x \cup \{x\} \in I$.

78. Dels elements d'aquest conjunt I i de tots els que tenen la mateixa cardinalitat en diem *«conjunts finits»*. De tots els altres, inclòs el mateix conjunt I, en diem *«conjunts infinits»*.

79. I aquesta simplement és la definició de la dicotomia finit/infinit que es sol fer anar quan es treballa amb el sistema d'axiomes **ZFC**. Però per a realment comprendre-la ens mancaria primer saber ben bé què vol dir això de *«tenir la mateixa cardinalitat»*. I per això haurem d'aprendre a comptar.

80. La cardinalitat és la mesura de la quantitat d'elements que té un conjunt. Que dos conjunts tinguin la mateixa cardinalitat vol dir que tenen la mateixa quantitat d'elements.

81. Per saber si dos conjunts tenen la mateixa quantitat d'elements el que fem és mirar d'establir entre ells una correspondència *un a un* que se'n diu *«bijecció»*. Si som capaços d'establir-la, aleshores diem que els dos conjunts tenen la mateixa cardinalitat.



82. Així doncs, si en un conjunt podem establir-hi una bijecció amb algun dels elements del conjunt $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (no amb el conjunt I mateix), direm que aquest conjunt és finit.

83. Com hem vist abans, aquests elements són conjunts que inclouen alhora tots els conjunts que han anat sortint abans en l'aplicació successiva de la funció successor a partir del conjunt buit $0 = \varnothing$, és a dir $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i així successivament.

84. Si tenim per exemple el conjunt $\{a, b, c, d, e\}$ veiem que podem establir una bijecció amb el conjunt $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de la següent manera (entre moltes altres):

$$\begin{aligned} a &\to 0 \\ b &\to 1 \\ c &\to 2 \\ d &\to 3 \\ e &\to 4 \end{aligned}$$

85. Per tant sabem que el conjunt $\{a, b, c, d, e\}$ és finit i direm que té una cardinalitat de 5. Els elements de I els farem servir com a mesura estàndard de la cardinalitat dels conjunts finits. En direm *«nombres naturals»* i en aquest context ens referirem a ells mitjançant el símbol $\mathbb{N}$.

86. De fet tot aquest procés és exactament el que fa un infant quan compta els elements d'un conjunt qualsevol d'ítems concrets que té al davant. Els va assenyalant un per un assignant-los nombres consecutius i al final sap amb quin dels elements de $\mathbb{N}$ pot establir-hi una bijecció.

87. Recordeu l'Hotel Infinit de Hilbert[30]?

88. En aquella maniobra de fer córrer tots els clients de l'habitació n cap a la $n + 1$ estàvem de fet establint una bijecció entre el conjunt I i el conjunt I sense l'element 0, per tal de poder encabir el nou client en l'habitació 0.

89. En altres paraules, estem demostrant que I té la mateixa quantitat d'elements que I traient-li un element, segons la definició de «tenir la mateixa quantitat d'elements» que hem donat.

90. Això amb els conjunts finits no passa. Si a un conjunt finit li trèiem un element, el resultat té estrictament menys elements que l'original. El que vindria a ser al que estem acostumats que passi a la nostra quotidianitat finita.

91. Al segle XIX, abans de tot això de l'axiomatització, un senyor que es deia Richard Dedekind buscava una manera de caracteritzar la infinitat que fos purament interna a la teoria de conjunts; que no fes referència a cap concepte extern, com per exemple els nombres naturals tal com ell els considerava.

92. La definició que va desenvolupar va ser precisament aquesta propietat de la que estem parlant: un conjunt és infinit quan es pot posar en bijecció (té la mateixa quantitat d'elements) amb una de les seves parts pròpies, o sia, un subconjunt estricte d'ell mateix.

93. En **ZFC** es pot demostrar que els conjunts que caracteritza aquesta definició són exactament els mateixos que els de la definició que hem dit abans que faríem servir (els conjunts que no es poden posar en bijecció amb algun element de I), però això no té perquè ser així en altres sistemes axiomàtics.

94. I això és perquè, encara que sempre fem servir la paraula «conjunt», sistemes axiomàtics diferents poden estar parlant de coses (lleugerament) diferents.

95. De fet, ni tant sols en **ZFC** fem servir la definició de Dedekind perquè per demostrar l'equivalència amb la que hem donat inicialment necessitem un axioma particular que és el de l'elecció (la **C** de **ZFC**), que és controvertit, sempre es deixa pel final i s'evita si es pot evitar.

96. Fer servir la definició d'infinit de Dedekind implicaria que per demostrar molts teoremes on intervé d'alguna manera la infinitat necessitaríem recórrer a l'axioma de l'elecció; i resulta que ens agrada mantenir tanta matemàtica com sigui possible dins de **ZF** sense la **C**. Quan arribem a l'axioma de l'elecció veurem per què.

97. A nosaltres no ens preocupa com a Dedekind el fet de fer servir els nombres naturals per a definir el concepte d'infinitat perquè com que els hem desenvolupat com un tipus particular de conjunt ja no són una cosa *externa* a la teoria de conjunts, sinó una part d'ella mateixa.

98. Dels conjunts que són infinits segons la definició de Dedekind (i que poden ser o no infinits segons el sistema axiomàtic en el que estiguem treballant) avui dia en diem *Dedekind-infinits*.

99. De l'axioma de l'infinit (i possiblement l'ajut d'algun altre que encara devem tenir pendent) es deriva una cosa força important que és el *principi d'inducció matemàtica*.

100. Així en general la inducció és un tipus de raonament que consisteix en la construcció d'una regla general a partir de l'observació d'un conjunt de casos concrets. Veiem passar quatre o cinc corbs negres i concloem que tots els corbs són negres. ~~Amb dos collons.~~

101. En matemàtiques també volem arribar a conclusions generals d'una manera anàloga però:

- Requerim un total rigor i per tant hem d'estar estrictament segurs que podem parlar per tots els corbs.
- Els nostres conjunts de corbs són generalment infinits.
- Les nostres demostracions són necessàriament finites.

102. Per això fem servir coses com l'anomenat «principi d'inducció matemàtica»; si tenim una propietat P aplicada als nombres naturals on podem validar que:

- Es dóna $P(0)$.
- Donada qualsevol $n \in \mathbb{N}$ tal que es doni $P(n)$ aleshores també es donarà $P(n+1)$.

103. Donat que sabem que serà cert que $P(0)$, i d'aquí podrem deduir consecutivament $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ... podrem concloure que P es donarà per totes les $n \in \mathbb{N}$.

104. Podem demostrar, doncs, infinites coses (que P es dóna per cadascun dels infinits nombres naturals) amb una demostració finita, un raonament format per un conjunt finit de passos lògics. I això és una eina potentíssima.

105. Aquest principi el necessitem per demostrar coses tan bàsiques com la validesa de la commutativitat de la suma, que $a + b = b + a$. I la validesa del principi, alhora, es demostra partint de l'axioma de l'infinit, així com la construcció de funcions recursives com la suma mateixa.

106. El que no sé jo és com es convencen ells mateixos d'aquestes coses (la validesa de la commutativitat de la suma, per exemple) els finitistes de qui he estat parlant abans[28] ~~(escup al terra)~~. Possiblement admetin la inducció com a axioma en ell mateix, però ni idea.

107. L'*axioma d'especificació* diu que donat un conjunt A i una propietat P que els seus elements poden tenir o no tenir, existeix un conjunt B format per tots aquells elements del conjunt A que satisfan la propietat P.

108. Aquest axioma és interessant perquè s'assembla bastant a l'axioma de comprensió sense restriccions, del que vam parlar gairebé al començament[6], i que havia provocat tot el pollastre de la paradoxa de Russell.

109. Però aquesta vegada, en operar dins d'un conjunt que ja és preexistent, ens evitem caure en paradoxes de l'estil «tenim el conjunt de conjunts que no es pertanyen a ells mateixos».

110. Quan un element no pertanyi a un conjunt B generat per aquest axioma, no podrem concloure directament que satisfà la negació de la propietat P. També podria ser que no formés part del conjunt inicial A.

111. Així esquivem conclusions que ens podrien dur a contradiccions de l'estil paradoxa de Russell que ens tornarien a dur a la temuda inconsistència de tot el sistema.

112. I tanmateix podem definir coses com «el conjunt del nombres naturals que són primers», sempre i quan puguem prèviament demostrar l'existència del conjunt dels nombres naturals, cosa que ja hem fet a partir de l'axioma de l'infinit.

113. Era per això, de fet, que volíem l'axioma de comprensió, no pas per generar contradiccions que ens fessin replantejar els fonaments de tota la matemàtica i la solidesa de la seva connexió amb la veritat.

114. Amb l'axioma d'especificació també podem definir coses l'operació binària d'intersecció de tota la vida: $A \cap B = \{a \in A \mid a \in B\}$, és a dir, els elements de A que tenen la propietat de ser alhora un element de B.

115. O el conjunt diferència: $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$; el conjunt d'elements de A que tenen la propietat de **no** ser un element de B.

116.	Per fer servir aquest axioma d'especificació per crear una paradoxa a l'estil Russell hauríem de fer alguna cosa com $K = \{A \in \mathbb{U} \mid A \notin A\}$, on $\mathbb{U}$ és el conjunt universal[(8)], aquell que ho conté **tot** com a element.
117.	Necessitaríem demostrar prèviament l'existència d'aquest conjunt universal $\mathbb{U}$, i això amb **ZFC** no es pot fer. De fet es pot demostrar la **no** existència de l'universal.
118.	Si comencem suposant que existeix un conjunt universal, l'axioma de comprensió sense restriccions esdevé un corol·lari de l'axioma d'especificació, simplement fent $A = \mathbb{U}$. I aquest axioma de comprensió sense restriccions hem vist abans que ens porta cap a la paradoxa de Russell[(12)], un contrasentit. Per tant la hipòtesi que existeix un conjunt universal ha de ser forçosament falsa.
119.	D'aquesta mena d'argument (prendre una hipòtesi com a certa, veure que ens porta a una contradicció i concloure per tant que la hipòtesi falsa) se'n diu *reducció a l'absurd* i és un recurs bàsic i habitual en les demostracions matemàtiques.
120.	L'*axioma de regularitat* té una formulació una mica estranya perquè d'aquesta manera serveix per descartar l'existència de tota una tipologia de conjunts que la seva existència ens fa nosa.
121.	Diu: tot conjunt que no sigui buit té un element que és *disjunt* amb ell. Disjunt vol dir que no en comparteix cap element, que la seva intersecció és el conjunt buit.
122.	Suposem un conjunt A que sigui un element d'ell mateix. És a dir $A \in A$. Amb l'axioma d'emparellament podem construir el conjunt que només el té a ell com element, el seu conjunt *singletó* $\{A\}$.
123.	Aquest $\{A\}$ no és el conjunt buit perquè té un element i aquest únic element A no és disjunt amb ell, ja que $A \in \{A\}$ i alhora per hipòtesi $A \in A$. Per tant per l'axioma de regularitat no poden existir ni $\{A\}$ ni tampoc A. Ni cap altre conjunt que sigui element d'ell mateix.
124.	Una característica del conjunt universal $\mathbb{U}$ és que en tenir-ho tot com a element per definició també s'hi ha de tenir a ell mateix, i per tant pel que acabem de veure l'axioma de regularitat també descarta la seva existència, talment com ho feia (per un altre argument) el d'especificació.
125.	Seguint un raonament molt semblant a l'anterior, l'axioma de regularitat també ens descarta estructures com $A \in B \in A$, $A \in B \in C \in A$, i en general cicles de qualsevol llargària.
126.	I encara més, ens descarta qualsevol seqüència infinita de la forma $A_0 \ni A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni A_4 \ni \ldots$ encara que el cicle no es repeteixi mai. Tota seqüència de descens que es faci seguint la relació «$\in$» *(és element de)* entre conjunts ha d'anar a parar forçosament al conjunt buit després d'un nombre finit de salts.
127.	De la «prohibició» que es doni $A \in A$ se'n deriva que l'aplicació iterada de la funció successor[(71)] no pot tornar a portar a un element pel que ja hem passat. És a dir, que per a qualsevol conjunt A, $S(S(S(\ldots S(A)))) \neq A$.
128.	I d'aquí es deriva que construccions basades en aquesta funció com la dels nombres natural tenen una estructura *ordenada*: si l'aplicació successiva de la funció successor a un nombre a ens porta fins a b, subsegüents aplicacions des de b ja no ens podran tornar fins el nombre a.

129. D'això se'n diu una *relació antisimètrica*; $\leq$ és una relació antisimètrica perquè si tenim que $a \leq b$ i $b \leq a$ aleshores $a = b$. Les relacions d'ordre com $\leq$ tenen la propietat antisimètrica (entre d'altres que aniran sortint més endavant).

130. Tal com vam definir els nombres naturals[(85)], on cada $n \in \mathbb{N}$ és $n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, la relació $\leq$ entre nombres naturals és exactament la mateixa que $\subseteq$ *(és un subconjunt de)*: $n \leq m$ si i només si $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, \ldots, m-1\}$.

131. La relació $\subseteq$ considerada entre conjunts de qualsevol mena ja té la propietat antisimètrica, de fet: si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ aleshores $A = B$.

132. L'*axioma de reemplaçament* diu que si tenim un conjunt domini qualsevol i una funció que existeixi dins la teoria de conjunts aleshores també existeix el conjunt imatge format pels resultats de la funció aplicats a cada element del domini.

133. O sia, que si tenim per exemple el conjunt $A = \{a, b, c, d\}$ i la funció $f(x) = \{x\}$, que donat un element ens retorna el conjunt format només per aquell element, que podíem construir amb l'axioma d'emparellament[(60)], aleshores per l'axioma de reemplaçament existeix el conjunt $f(A) = \{f(a), f(b), f(c), f(d)\} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$.

134. Una altra cosa que també podríem fer amb aquest axioma és aplicar-ho a un conjunt $A = \{a_0, a_1, a_2\}$ i a la funció $f(x) = (x, b)$, fent servir aquells parells ordenats que també havíem construït quan parlàvem de l'axioma d'emparellament i un element b arbitrari.

135. Això ens donaria el conjunt de parells ordenats $f(A) = \{(a_0, b), (a_1, b), (a_2, b)\}$. Aquesta maniobra que hem fet sobre el conjunt A que podríem fer per a qualsevol element b que volguéssim la podem fer servir per definir una funció de b tal com $g(b) = \{(a_0, b), (a_1, b), (a_2, b)\}$.

136. Aplicant ara l'axioma de reemplaçament a un conjunt $B = \{b_0, b_1\}$ amb aquesta funció g obtindríem que existeix un conjunt $g(B) = \{\{(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_2, b_0)\}, \{(a_0, b_1), (a_1, b_1), (a_2, b_1)\}\}$.

137. Si a aquest conjunt li apliquem l'axioma de la unió[(67)] obtenim $\{(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_2, b_0), (a_0, b_1), (a_1, b_1), (a_2, b_1)\}$. Això és, el conjunt de tots els parells ordenats que podem formar amb un element de A i un element de B.

138. D'això se'n diu *producte cartesià* i és un altre dels conceptes importantíssims en matemàtiques. Per exemple, per jugar a barcos. Les jugades són parells ordenats i el taulells són productes cartesians.

139. Havíem vist anteriorment que comptar consisteix bàsicament en trobar bijeccions entre conjunts. Anem a veure què passa quan comptem els elements dels productes cartesians.

140. Per exemple, si fem el producte cartesià del conjunt $3 = \{0, 1, 2\}$ i $2 = \{0, 1\}$, veiem que el podem posar en bijecció amb el conjunt $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\begin{array}{lcl} (0,0) & \rightarrow & 0 \\ (0,1) & \rightarrow & 1 \\ (1,0) & \rightarrow & 2 \\ (1,1) & \rightarrow & 3 \\ (2,0) & \rightarrow & 4 \\ (2,1) & \rightarrow & 5 \end{array}$$

141. És a dir, la cardinalitat del producte cartesià entre el conjunt 3 i el conjunt 2 és la mateixa que la cardinalitat del conjunt 6. El que expressat en notació seria: $|3 \times 2| = |6|$.

(**notació**: $|A|$ vol dir *«la cardinalitat de A»* i $A \times B$ vol dir *«el producte cartesià de A i B»*).

142. És fàcil inferir que en conjunts finits es compleix que $|A \times B| = |A| \times |B|$. Podríem de fet desenvolupar uns rudiments d'aritmètica a partir dels axiomes que hem anat veient i demostrar que és una conseqüència lògica i inevitable de la teoria de conjunts.

143. Anem a mirar què passa quan ho fem amb conjunt infinits. Amb $\mathbb{N} \times 3$ podem fer la bijecció:

$$\begin{array}{ccc}
(0,0) & \rightarrow & 0 \\
(0,1) & \rightarrow & 1 \\
(0,2) & \rightarrow & 2 \\
(1,0) & \rightarrow & 3 \\
(1,1) & \rightarrow & 4 \\
(1,2) & \rightarrow & 5 \\
(2,0) & \rightarrow & 6 \\
 & \vdots & \\
(5342,1) & \rightarrow & 16027 \\
(5342,2) & \rightarrow & 16028 \\
(5343,0) & \rightarrow & 16029 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

144. No podem llistar infinits ítems però sí que podem copsar com podem establir una correspondència un a un entre tots els elements de $\mathbb{N} \times 3$ i els de $\mathbb{N}$ sense ometre'n ni repetir-ne cap a les dues bandes.

145. I per tant encara que a primer cop d'ull ens pogués semblar alguna altra cosa podem dir que tenen exactament la mateixa quantitat d'elements: $|\mathbb{N} \times 3| = |\mathbb{N}|$

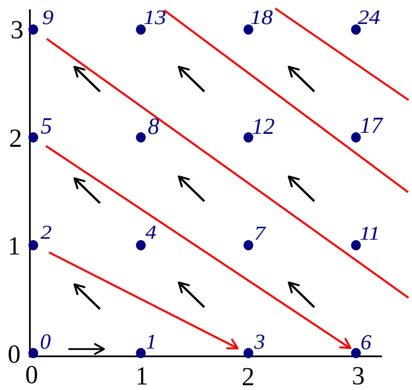
146. Comptar els elements de $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ se'ns complica una mica més. No podem fer la bijecció amb $\mathbb{N}$ tal com l'hem fet abans perquè no passaríem mai de la primera «fila»:

$$\begin{array}{ccc}
(0,0) & \rightarrow & 0 \\
(0,1) & \rightarrow & 1 \\
(0,2) & \rightarrow & 2 \\
 & \vdots & \\
(0,6423) & \rightarrow & 6423 \\
(0,6424) & \rightarrow & 6424 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

147. I per tant estaríem ometent tots elements de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on el primer component del parell ordenat és diferent de zero i per tant no seria una bijecció. Però això no vol dir que la bijecció no existeixi, només que per trobar-la potser ens farà falta ser una mica més creatius.

148. Si enlloc d'anar fila per fila com hem estat fent anem diagonal per diagonal, sí que podrem completar la bijecció:

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \to & 0 \\ (0,1) & \to & 1 \\ (1,0) & \to & 2 \\ (0,2) & \to & 3 \\ (1,1) & \to & 4 \\ (2,0) & \to & 5 \\ (0,3) & \to & 6 \\ & \vdots & \end{array}$$



(adaptat de: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pairing_natural.svg)

149. I per tant també podrem establir una correspondència un a un entre tots els elements de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i els elements de $\mathbb{N}$ que no ometi ni repeteixi cap element a les dues bandes. I per tant el conjunt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ també tindrà la mateixa cardinalitat que $\mathbb{N}$: $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

150. En aquest moment un es comença a preguntar si aquesta capacitat absorbent de les cardinalitats infinites arriba fins a que tots els conjunts infinits tinguin la mateixa cardinalitat i simplement haguem de ser més o menys enginyosos per trobar la bijecció que els relaciona.

151. I el fet que donats dos conjunts no siguem capaços de trobar aquesta bijecció no vol dir que aquesta no existeixi. L'absència d'evidència no equival a l'evidència d'absència a la vida en general i en la matemàtica especialment.

152. Per demostrar que la bijecció entre dos conjunts no existeix més enllà de la nostra capacitat de trobar-la o imaginar-nos-la ens cal alguna mena d'argument més fort i rigorós. I això és el que va descobrir en Georg Cantor. Però abans ens caldrà parlar del següent axioma.

153. L'*axioma del conjunt potència* diu que donat un conjunt qualsevol existeix el conjunt dels seus subconjunts.

154. És a dir, si tenim per exemple el conjunt $\{a, b\}$, aleshores també ha d'existir el conjunt de conjunts $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ format per tots aquells $X \subseteq \{a, b\}$.

155. Si hi afegim un nou element c, el conjunt potència de $\{a, b, c\}$ seran tots els subconjunts de $\{a, b\}$ més altre cop tots els subconjunts de $\{a, b\}$ però afegint c a cadascun d'ells.

156. És a dir que el conjunt potència de $\{a, b, c\}$ seran per un costat els mateixos quatre de $\{a, b\}$: $\varnothing$, a, b, $\{a, b\}$ i per l'altre aquests altres quatre: $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. En total, vuit.

157. O sigui, que quan afegim un element a un conjunt la cardinalitat del seu conjunt potència, si més no en conjunts finits, se'ns duplica.

158. El conjunt potència del conjunt buit serà el conjunt format per l'únic subconjunt que hi ha del conjunt buit que és el mateix conjunt buit, o sigui el conjunt amb un sol element $\{\varnothing\}$.

159. Aplicant la inducció a aquests dos fets podríem demostrar que en els conjunts finits la cardinalitat del conjunt potència serà igual a 2 elevat a la cardinalitat del conjunt inicial.

160. No exactament per això, sinó per una qüestió de fet més general però fortament relacionada amb aquesta, la notació que modernament es fa servir per indicar el conjunt potència del conjunt A és «2^A».

161. Així doncs, posant el que hem vist en notació, per conjunts finits tenim que: $|2^A| = 2^{|A|}$.

162. Com que en l'aritmètica de $\mathbb{N}$ sabem que $2^n > n$ per qualsevol n doncs podem deduir que en el que es refereix a conjunts finits $|2^A| > |A|$.

163. Si volguéssim generalitzar això a qualsevol tipus de conjunt finit o infinit podem veure d'entrada que hi ha una bijecció trivial entre qualsevol conjunt $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ i el conjunt de singletons $\{\{a0\}, \{a1\}, \{a2\}, \ldots\}$ que és un subconjunt de 2^A i per tant: $|2^A| \geq |A|$.

164. Anem a explorar la possibilitat $|2^A| = |A|$, és a dir, que el conjunt potència d'un conjunt tingui la mateixa cardinalitat que aquest conjunt i per tant que puguem establir una bijecció entre ells.

165. Posem un conjunt A amb elements $\{a, b, c, d, e, f, \ldots\}$ i una bijecció $\varphi : 2^A \to A$ que per cadascun dels subconjunts de A ens dona un element de A de manera unívoca i exhaustiva. Alguna cosa com:

$$\begin{array}{lcl} \varphi(\{d, e\}) & = & a \\ \varphi(\{c, \boldsymbol{b}, f, \ldots\}) & = & \boldsymbol{b} \\ \varphi(\varnothing) & = & c \\ \varphi(\{a, \boldsymbol{d}, f\}) & = & \boldsymbol{d} \\ & \vdots & \end{array}$$

166. De totes aquestes correspondències en algunes es donarà el cas que $\varphi(W) \in W$ i en d'altres no. En la mostra d'exemple que he posat es donaria per la segona i la quarta i no es donaria en la segona i la tercera. I podem construir un conjunt K amb totes les $\varphi(W)$ tals que $\varphi(W) \notin W$.

167. Aquest conjunt K és un subconjunt de A i per tant un element de 2^A i per tant té la seva $\varphi(K)$ que pot pertànyer o no pertànyer a K.

168. Que $\varphi(K) \in K$ tal com hem definit el conjunt K voldria dir que K és d'aquells elements de 2^A tals que $\varphi(K) \notin K$. I que $\varphi(K) \notin K$ voldria dir que és d'aquells tals que $\varphi(K) \in K$. Això és una contradicció i per tant la hipòtesi que existia una bijecció entre 2^A i A ha de ser falsa.

169. Per tant doncs, com que hem vist abans que $|2^A| \geq |A|$ i ara veiem que $|2^A| \neq |A|$, podem concloure que $|2^A| > |A|$. O sigui que donat un conjunt qualsevol sempre n'existeix un altre conjunt amb una cardinalitat estrictament més gran que és concretament el seu conjunt potència.

170. Fins i tot per un conjunt infinit com $\mathbb{N}$ tenim que $|2^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$.

171. I també tindrem un $2^{2^{\mathbb{N}}}$ que serà un altre infinit més gran que l'infinit de $2^{\mathbb{N}}$. I així successivament infinites vegades.

172. I més enllà, de fet. Ja que la seqüència infinita de conjunts $\mathbb{N}$, $2^{\mathbb{N}}$, $2^{2^{\mathbb{N}}}$, $2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}$, ... la podem unir en un sol conjunt amb l'axioma de la unió. I aquest conjunt enorme fins i tot dins l'espècie dels conjunts infinits també tindrà un conjunt potència que serà estrictament més gran. Amb el que si volem podrem tornar a fer tot el procés que acabem de fer amb $\mathbb{N}$. I així fins la nàusea.

173. Tornant a l'argument que hem vist pel que 2^A no el podem posar en bijecció amb A, això és el que es coneix com a *«diagonalització de Cantor»*.

174. A l'escola es sol explicar restringit al cas de $\mathbb{N}$ i intentant posar-lo en bijecció no amb la seva potència sinó amb el conjunt dels nombres reals i construint aquesta bijecció fent una cosa rara amb els dígits. Però és que allà no foten mai res bé.

175. Per veure que aquest conjunt de nombres reals $\mathbb{R}$ té efectivament la mateixa cardinalitat de $2^{\mathbb{N}}$ primer hauríem de saber què carai és això dels nombres reals.

176. Hem vist fins ara els nombres naturals que són cadascun com el representant de tots els conjunts finits d'una cardinalitat donada.

177. Hem vist que un nombre natural és en realitat un conjunt que construïm per mitjà d'aplicacions successives de la funció successor $S(x) = x \cup \{x\}$ sobre el conjunt buit $\varnothing$ que és el nombre zero.

178. Podem definir les relacions d'ordre $<$ i $\leq$ entre nombres naturals com les relacions entre conjunts $\in$ i $\subseteq$, respectivament.

179. Un cop tenim això ens podem pràcticament oblidar de l'estructura interna d'aquests nombres naturals en tant que conjunts i tractar-los com els hem vist sempre abans de saber que eren de fet conjunts: com entitats abstractes de les que només ens interessen les seves propietats *«externes»*.

180. A partir d'aquí podem fer coses com per exemple demostrar, fent servir els axiomes que hem vist i la deducció purament lògica, que per cada nombre natural n existeix una única funció $f_n(m)$ definida sobre els naturals que compleixi que:

$$\begin{aligned} f_n(0) &= n \\ f_n(S(m)) &= S(f_n(m)) \end{aligned}$$

181. Per exemple:

$$\begin{aligned}
f_5(3) &= f_5(S(2)) \\
&= S(f_5(2)) \\
&= S(f_5(S(1))) \\
&= S(S(f_5(1))) \\
&= S(S(f_5(S(0)))) \\
&= S(S(S(f_5(0)))) \\
&= S(S(S(5))) \\
&= S(S(6)) \\
&= S(7) \\
&= 8
\end{aligned}$$

182. Sí amics, la funció $f_n(m)$ no és altra cosa que la suma $n + m$ i d'aquí $f_5(3) = 5 + 3 = 8$. Acabem de descobrir la suma de nombres naturals.

183. La suma és una funció molt interessant perquè ens dona la cardinalitat de la unió de dos conjunts disjunts a partir només de les seves respectives cardinalitats.

184. És a dir, que si sé que dins d'aquesta mà tinc dues bales i en l'altra n'hi tinc tres puc saber que quan ajunti les dues mans en tindré cinc sense necessitat de visualitzar mentalment els conjunts de dues i tres bales unint-se, visualitzar a continuació el conjunt de totes les bales juntes i després fer mentalment el comptatge d'aquestes cinc bales. Puc fer-ho oblidant-me de fet de les bales en si i pensant només en aquestes entitats abstractes que es diuen nombres i l'aritmètica que els manega.

185. Això es diu abstracció i és una eina poderosíssima. És bàsicament al que es dedica la matemàtica. A fer abstraccions.

186. L'abstracció ens dóna accés a un coneixement que sense ella seria senzillament impossible quan intervenen conjunts mínimament grans.

187. Jo sóc absolutament incapaç de crear-me una imatge mental d'un conjunt de 4332 carxofes que tingui més precisió que un piló així indeterminat.

188. Però fent servir l'aritmètica puc fer coses com saber gairebé instantàniament que puc dividir el piló en tres pilons més petits de la mateixa quantitat cadascun perquè 4332 és múltiple de 3 perquè els seus dígits compleixen allò que sumats són un múltiple de 3.

189. A partir de la funció suma podríem definir una altra funció tal com «donats dos nombres a i b, aquell nombre c que caldria sumar a b perquè ens donés a». D'això en diem *«resta»* i també és força útil per fer coses de comptables.

190. No obstant té el problema que el nombre c que surt a la definició no sempre existeix donats qualssevol a i b. Per exemple, no hi ha cap nombre natural que puguem sumar a 7 perquè ens doni 4.

191. Els matemàtics expressen aquest fet dient que els nombres naturals no són *tancats* respecte a l'operació de resta. Com sí que ho són respecte l'operació de suma: donats dos nombres naturals qualssevol existeix la seva suma que és un altre nombre natural.

192. Això fa que els nombres naturals no em serveixin per representar conceptes com el balanç de carxofes que resulta si ara mateix en disposo de 4 i estic compromès a entregar-ne 7.

193. Necessitaríem una altra mena de nombres que poguessin representar aquest concepte que és més ampli que el de purament la cardinalitat d'un conjunt finit.

194. Però que alhora mantinguessin totes les propietats que tenen els nombres naturals, ja que ens interessa seguir fent amb ells tot el que hem estat fent amb els nombres naturals. Només volem estendre'ls per representar una mena de concepte més sofisticat però que inclou l'anterior.

195. Com que el que volem és que la resta de dos d'aquesta nova mena de nombres ens doni, a diferència del que passava amb els naturals, un altre nombre d'aquesta mateixa mena el que fem és representar-los precisament com una resta de naturals de manera abstracta: '$a - b$'.

196. Els nombres naturals quedaran representats en aquesta nova categoria amb restes de la forma '$a - 0$', donat que «aquell nombre c que caldria sumar a 0 perquè ens donés a» és exactament el mateix a.

197. Així, la resta que hem vist abans que no podíem fer dins dels naturals $4 - 7$ ara seria la resta entre els nombres '$4 - 0$' i '$7 - 0$' i ens donaria simplement el nombre '$4 - 7$'.

198. En l'aritmètica dels nombres naturals existeix la propietat (que podríem demostrar aplicant inferències de deducció lògica als axiomes de **ZFC**) que $(a + c) - (b + c) = a - b$. Aquest fet es trasllada cap aquest nou tipus de nombres de manera que el nombre '$4 - 7$' és exactament el mateix que '$5 - 8$' que '$0 - 3$'.

199. El que podem fer és escollir un representant canònic per cada nombre-resta en el que almenys un dels dos components és zero, cosa que farà que aquest representat sigui únic per cada nombre. Pel cas '$4 - 7$' seria '$0 - 3$'.

200. De fet, a l'hora d'escriure els nombres per fer aritmètica aquests zeros s'ometen i quan és al primer component (és a dir, '$0 - b$') simplement s'escriu '$-b$' i en diem *«nombres negatius»*.

201. Quan el zero és al segon component ('$a - 0$') podem segons el context en què ens trobem indicar el signe de forma explícita fent '$+a$' o bé ometre'l i escriure només 'a', en consistència amb la notació del nombre natural al que és equivalent. D'això en diem *«nombres positius»*.

202. D'aquests nous nombres-resta en diem *«nombres enters»*, els podem representar a nivell de teoria de conjunts com a parells ordenats amb els dos components naturals de la resta (un d'ells zero), i el conjunt que formen l'escrivim $\mathbb{Z}$.

203. Com que un subconjunt seu (els positius) té una correspondència u a u amb els naturals tenim per una banda que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$. Com que el representem amb parells ordenats de $\mathbb{N}$ per l'altra banda tenim que $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

204. Però com que hem vist abans que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, doncs resulta que $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$. I si $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ i alhora $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$ llavors ha de passar que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. O sigui que el conjunt de nombres enters té exactament la mateixa cardinalitat infinita que el de nombres naturals. Ves per on.

205. Seguint un procediment anàleg a aquest però buscant el tancament de l'operació de divisió d'enters, arribem al conjunt de nombres racionals $\mathbb{Q}$, els *«nombres racionals»*.

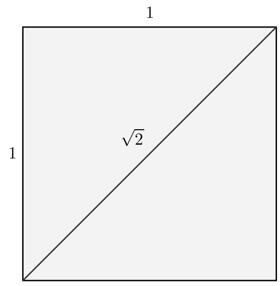
206. Els nombres racionals representen quantitats fraccionàries i proporcions enteres. Si tenim tres pastissos i els hem de repartir entre quatre amics, doncs hem de donar $^3/_4$ de pastís a cadascú. Bé.

207. Respecte a la seva cardinalitat, pel mateix raonament que abans, també serà exactament la mateixa que $|\mathbb{N}|$. Un racional s'expressa com la divisió d'un parell d'enters $^a/_b$ i en la teoria de conjunts es representarà amb un parell ordenat d'aquests dos enters.

208. De tots els parells a i b que poden representar el mateix racional s'agafa aquell en que els dos nombres no tenen cap factor comú i per tant són més petits, la fracció irreductible.

209. Uns grans amants de la proporció van ser el geòmetres grecs. El seu sentit de l'estètica els feia voler expressar qualsevol mesura en forma de fracció entera. També van ser capaços d'adonar-se que en general això no pot ser i aquest fet els va fer petar bastant el cap.

210. Imaginem un quadrat de costat 1. Pel teorema de Pitàgores el quadrat de la longitud de la diagonal hauria de ser igual a 2.



211. Posem que volem expressar aquesta longitud en forma de fracció irreductible $^a/_b$. Per tant, volem dos enters a i b tals que $(^a/_b)^2 = 2$. O sigui $a^2 = 2 \cdot b$.

212. Com que a^2 és igual a 2 multiplicat per alguna cosa (b) aleshores a^2 ha de ser un nombre parell. I quan el quadrat d'un nombre és parell aquest nombre també ha de ser parell. Per tant a és parell i per tant és igual a el doble d'un altre nombre: $a = 2 \cdot a'$. A partir d'aquí:

$$
\begin{aligned}
(2{\cdot}a')^2 &= 2{\cdot}b^2 \\
4{\cdot}a'^2 &= 2{\cdot}b^2 \\
2{\cdot}a'^2 &= b^2
\end{aligned}
$$

213. I com que b^2 és igual a 2 multiplicat per alguna cosa (a'^2) i per tant parell, aleshores b també ha de ser un nombre parell. I com que tant a com b són nombres parells resulta que la fracció a/b no és irreductible perquè podem dividir tant el numerador com el denominador per 2 tot contradient la hipòtesi.

214. I això vol dir que no es pot expressar una cosa tant simple com la longitud de la diagonal d'un quadrat amb un nombre racional, una proporció entera amb la longitud del seu costat.

215. D'això els grecs se'n van adonar i es van preguntar a veure què diantre està passant aquí. I no van ser capaços de respondre. Aquesta qüestió no començaria a respondre's adequadament fins la il·lustració. Newton, Leibniz i tot l'assumpte del càlcul infinitesimal. Quedaven uns 2,000 anys encara.

216. L'eina que necessitem per modelar l'espai que ens envolta, que és el que volien en definitiva aquests geòmetres de la Grècia antiga, és alguna mena de nombres amb els que puguem representar la noció intuïtiva que tenim dels punts d'una recta.

217. I els nombres racionals *gairebé* serveixen per això. Tenen el que es diu un ordre total igual que tenen els punts d'una recta i són densos igual que ho són els punts d'una recta.

218. Un *ordre total* és una relació $\leq$ que donats qualssevol elements a, b i c compleix les propietats:

- *reflexivitat*: $a \leq a$.
- *transitivitat*: **si** $a \leq b$ **i** $b \leq c$ **aleshores** $a \leq c$.
- *antisimetria*: **si** $a \leq b$ **i** $b \leq a$ **aleshores** $a = b$.
- *totalitat*: $a \leq b$ **o** $b \leq a$.

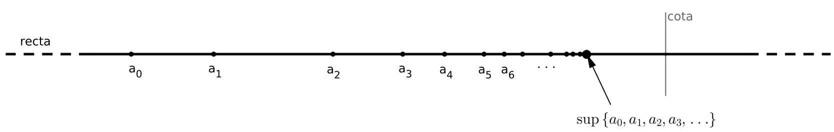
219. Un ordre és *dens* si per cada $a < b$ existeix un c tal que $a < c < b$.

220. Aquestes propietats les compleixen tant els punts de la recta com els nombres racionals. I això despista molt.

221. El problema és que els punts d'una recta tal com els intuïm tenen una altra propietat subtil que els grecs tot i que apropar-s'hi bastant no van arribar a copsar del tot. Perquè és una cosa difícil d'abstreure i aïllar conceptualment com a element fonamental.

222. Imaginem un conjunt $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ (no necessàriament finit) de punts sobre la recta que estigui *acotat*. És a dir, que aquests punts no s'estenguin per tota la recta sinó que existeixi una *cota* damunt la recta per la que tots els punts de A es trobin situats cap al costat esquerre de la cota i corresponguin, per tant, a un nombre més petit.

223. En aquesta situació existirà un punt de la recta que essent més gran o igual que tots els punts de A serà més petit o igual que totes les cotes superiors de A. D'aquest punt en diem *«suprem»*.

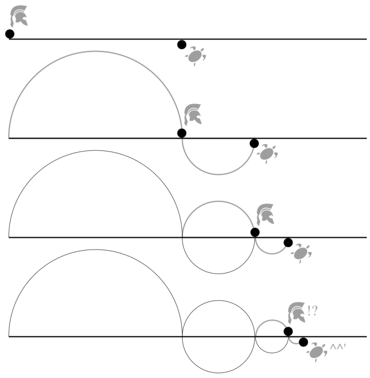


224. Quan el conjunt A sigui finit aquest suprem coincidirà amb el punt màxim del conjunt A, però en conjunts infinits no ha de ser necessàriament un punt de A. El que sí serà sempre que A estigui acotat és un punt ben definit de la recta; si A és acotat el seu suprem existeix.

225. D'aquesta propietat se'n diu *completesa* i els nombres racionals no la tenen.

226. Suposem que A és el conjunt de racionals q tals que $q^2 \leq 2$. El suprem d'aquest conjunt hauria de ser $\sqrt{2}$, però hem demostrat abans que no existeix cap racional que elevat al quadrat doni 2. $\sqrt{2}$ no és un racional i per tant el subconjunt $A \subseteq \mathbb{Q}$, que certament és acotat (si $q^2 \leq 2$ aleshores $q \leq 2$ i per tant $2 \in \mathbb{Q}$ és cota de A), no té suprem.

227. Un grec que es va apropar molt a identificar el problema va ser Zenó d'Elea. Allò d'Aquil·les no aconseguint atrapar mai la tortuga.



(adaptat de: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zeno_Achilles_Paradox.png)

228. Les successives distàncies entre Aquil·les i la tortuga serien el conjunt A i l'esdeveniment d'atrapar-la el suprem que estem trobant. De la mateixa manera que el suprem d'un conjunt acotat de nombres racionals pot no ser un racional, dins el cap de nombres racionals que tenien els grecs aquest esdeveniment no arribava mai.

229. Però en el món físic i en la també seva intuïció de la recta real sí que Aquil·les arriba a atrapar la tortuga. I això els desconcertava molt, pobres grecs.

230. Així, doncs, el que ens fa falta per representar els punts de la recta és alguna mena de nombre que tingui les propietats dels racionals i que a més el suprem de qualsevol conjunt acotat d'aquests nombres resulti en un altre nombre de la mateixa mena.

231. Un conjunt que sigui tancat respecte la funció suprem, en definitiva. A un conjunt ordenat que compleixi tota aquesta bateria de propietats (reflexivitat, transitivitat, antisimetria, totalitat, densitat i completesa) en diem un *continu*. Ni els nombres naturals, ni els enters, ni els racionals són conjunts continus. Dels conjunts que no son continus en diem *discrets*.

232. El procediment d'obtenir un continu a partir del conjunt discret dels racionals és el mateix que quan hem volgut tancar els naturals respecte la resta per obtenir els enters o els enters respecte la divisió per obtenir els racionals.

233. Com que l'operació suprem opera sobre conjunts en comptes de sobre parells com ho fan les operacions de resta o la divisió, aquests nous nombres els representarem fent servir no parells sinó conjunts de racionals, elements de $2^{\mathbb{Q}}$.

234. És a dir, que cada nombre *real* (així anomenarem aquest nou conjunt de nombres), el definim com el suprem d'un conjunt acotat de nombres racionals.

235. Igual que ens havia passat amb la resta i la divisió, el suprem de conjunts diferents ens pot resultar en el mateix nombre real.

236. Per fer una representació precisa escollirem un únic representant canònic d'entre tots els que ens donen el mateix real. De la mateixa manera que en els enters vam escollir aquells parells on hi havia un zero o en els racionals els que feien una fracció irreductible.

237. Aquest cop no serà tan fàcil de fer això perquè d'entrada estem tractant amb conjunts infinits en comptes de parells. Una manera d'escollir aquest representant únic són el que se'n diuen «talls de Dedekind». Sí, el mateix Dedekind que va voler definir l'infinit sense fer servir el concepte de nombre. Ves per on.

238. Un *tall de Dedekind* és un conjunt de racionals A tal que:

- No és buit. Existeix com a mínim un $p \in A$.
- No és igual al conjunt de tots els racionals. Existeix com a mínim un $p \in \mathbb{Q} \setminus A$; és a dir, un $p \in \mathbb{Q}$ i que a més $p \notin A$.
- Si $p \in A$, aleshores per a tot $q < p$ també $q \in A$.
- Si $p \in A$, aleshores existeix com a mínim un $q > p$ que també $q \in A$.

239. Un tall de Dedekind vindria a ser doncs una partició dels racionals en dues parts no buides: els que estan per sota d'un determinat llindar (A) i els que estan per sobre ($\mathbb{Q} \setminus A$) i amb unes característiques particulars en la frontera d'aquesta divisió.

240. Fixem-nos ara en les característiques que té la relació $\subseteq$ respecte als talls de Dedekind.

241. Les tres primeres característiques del que hem definit com a ordre total (reflexivitat, transitivitat i antisimetria) la relació de subconjunt inclusiu $\subseteq$ les té respecte a qualsevol mena de conjunt. D'això se'n diu ser un *ordre parcial.*

242. A més, amb els talls de Dedekind en particular complirà la propietat de la totalitat a causa del tercer punt de la nostra definició del que és un tall de Dedekind i que la relació $\leq$ entre racionals és un ordre total. Per tant, la relació $\subseteq$ és un ordre total del conjunt de talls de Dedekind.

243. Com que $\subseteq$ és total, donats dos talls de Dedekind diferents $A \neq B$ s'ha de donar que $A \subset B$ o bé que $B \subset A$. Suposem sense perdre generalitat que el cas és $A \subset B$. Això és: A és un subconjunt propi de B. Tots els elements de A són element de B però existeix algun element de B que no és element de A. Anem a anomenar p a aquest element.

244. Per la propietat quarta dels talls de Dedekind, existeix un $q > p$ que també $q \in B$. Aquest q el farem servir per definir un nou tall de Dedekind C format per tots els nombres racionals r tals que $r < q$.

245. Es pot comprovar que aquest conjunt C tal com l'hem definit té efectivament totes les propietats que defineixen un tall de Dedekind i que a més es dona que $A \subset C \subset B$. Per tant els talls de Dedekind són densos respecte la relació d'ordre $\subseteq$.

246. Suposem ara que tenim un conjunt no buit de talls de Dedekind $\Gamma = \{A_o, A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ que pot ser infinit però es dona el cas que existeix un altre tall de Dedekind C tal que per a tot $A \in \Gamma$, $A \subseteq C$. És a dir, C és una cota superior de Γ i per tant Γ és acotat.

247. Si apliquem a Γ l'axioma de la unió(67), podrem comprovar que:

- $\bigcup \Gamma$ és un tall de Dedekind perquè compleix les propietats amb les que els hem definit.
- $\bigcup \Gamma$ és una cota superior de Γ: per a tot $A \in \Gamma$, $A \subseteq \bigcup \Gamma$.
- De totes les cotes superiors C que pot tenir Γ, resulta que $\bigcup \Gamma \subseteq C$

És a dir, que $\bigcup \Gamma$ és la mínima de totes les cotes superiors de Γ respecte la relació d'ordre $\subseteq$. El que per definició és el valor suprem de Γ.

248. Per tant, els talls de Dedekind amb la relació $\subseteq$ tenen totes les propietats necessàries per ser considerades un continu, i és el que farem servir per representar els nombres reals en la teoria de conjunts; el real representat és el valor suprem de tots els nombres racionals que conformen el tall o bé la frontera de la partició de $\mathbb{Q}$.

249. Això vol dir que el nombre real **3** de fet el podem veure en teoria de conjunts el conjunt de tots els nombres racionals que són estrictament més petits que 3. I el nombre real $\sqrt{\mathbf{2}}$ com tots els nombres racionals que són estrictament més petits que $\sqrt{2}$.

250. I qualsevol tractament matemàtic que es fa amb ells es pot fer en darrera instància amb teoremes i operacions de teoria de conjunts estrictament. En aquest sentit, tot aquell fato dels límits, derivades, integrals i la resta de l'estudi dels nombres reals que es fa en el càlcul infinitesimal és només un branca de la teoria de conjunts. ~~Molt gros.~~

251. En notació, del conjunt dels nombres reals en diem $\mathbb{R}$. Com que els representem fent servir conjunts de racionals la seva cardinalitat ha de ser com a màxim la del conjunt dels conjunts de racionals, o siguis $|\mathbb{R}| \leq |2^{\mathbb{Q}}|$. I com que sabem de quan hem estudiat la cardinalitat dels racionals que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, doncs és clar que $|\mathbb{R}| \leq |2^{\mathbb{N}}|$.

252. Per veure que alhora $|2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$ ens caldrà una funció *injectiva* $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, és a dir una bijecció entre $2^{\mathbb{N}}$ (el conjunt dels conjunts de naturals) i algun subconjunt de $\mathbb{R}$.

253. Anem doncs a construir aquesta bijecció. Suposem un element del conjunt de sortida $X \in 2^{\mathbb{N}}$. En tant que element de $2^{\mathbb{N}}$ aquest X serà un subconjunt dels nombres naturals, és a dir que $X \subseteq \mathbb{N}$.

254. Aplicant l'axioma de reemplaçament sobre aquest X amb la funció $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que $g(n) = \frac{1}{10^n}$, obtindrem un $f(X)$ que serà un subconjunt dels nombres racionals. A continuació d'aquest subconjunt en farem el sumatori. O sia que $f(X) = \sum g(X) = \sum \left\{ \frac{1}{10^n} \mid n \in X \right\}$.

255. Per exemple:

$$\begin{aligned} f(\{0,1\}) &= \sum\left\{\frac{1}{10^0},\frac{1}{10^1}\right\} \\ &= \sum\left\{1,\frac{1}{10}\right\} \\ &= 1+\frac{1}{10} \\ &= 1+0.1 \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\{2,3,5\}) &= \sum\left\{\frac{1}{10^2},\frac{1}{10^3},\frac{1}{10^5}\right\} = 0.01101 \\ f(\varnothing) &= \sum\varnothing = 0 \end{aligned}$$

256. El resultat és, doncs, un nombre racional entre 0 i 2 que en la seva representació decimal té un dígit 1 en la posició n si resulta que $n \in X$ i un 0 en cas contrari. Donat això és força clar que per dos conjunts diferents la funció f ens donarà nombres diferents, ja que la seva representació decimal haurà de diferir en com a mínim una posició, allí on els conjunts d'entrada siguin diferents.

257. Amb això tindríem ja definida una bijecció de com a mínim tots els subconjunts *finits* de $\mathbb{N}$ cap a un cert subconjunt de $\mathbb{R}$. Però necessitem tractar *tots* els subconjunts de $\mathbb{N}$, també els que són infinits com ara el conjunt de nombres parells $\{0,2,4,6,8,\ldots\}$, el conjunt de nombres primers $\{2,3,5,7,11,\ldots\}$ o el mateix conjunt $\mathbb{N}$.

258. Amb conjunts infinits de fet ens val la mateixa funció f:

$$\begin{aligned} f(\{0,2,4,6,8,\ldots\}) &= \sum\left\{\frac{1}{10^0},\frac{1}{10^2},\frac{1}{10^4},\frac{1}{10^6},\ldots\right\} \\ &= 1.010101010\ldots \\ &= 1.\overline{01} \\ &= 1+{}^{1}\!/_{99} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\{2,3,5,7,11,\ldots\}) &= \sum\left\{\frac{1}{10^2},\frac{1}{10^3},\frac{1}{10^5},\frac{1}{10^7},\frac{1}{10^{11}},\ldots\right\} \\ &= 0.01101010001\ldots \end{aligned}$$

259. En alguns (molts, de fet, gairebé tots) casos de conjunts infinits de naturals com aquest darrer dels nombres primers el resultat de la funció f serà un nombre irracional (tot i que real). Cosa que ja podíem preveure donat que hem demostrat amb la diagonalització de Cantor que $|2^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$; no pot existir cap bijecció entre el conjunt de conjunts de naturals i el conjunt de racionals o un subconjunt seu.

260. Tanmateix tenim un problema amb això que és fer el sumatori d'un conjunt infinit de nombres. De fet ni tant sols hem definit exactament què vol dir fer el sumatori d'un conjunt finit de nombres. Intuïtivament sembla bastant clar què és el que vol dir però per fer les coses de manera ben fonamentada i rigorosa ho hauríem de definir-ho.

261. Quan hem parlat de la funció suma l'hem vist com una operació *binària* interna dels nombres naturals, és a dir, que actua sobre parells de nombres, no sobre conjunts. I a més ara necessitem una funció suma pels nombres racionals.

262. La resposta a això darrer és una qüestió de definició. Es tracta de definir una funció suma de racionals que sigui consistent amb la suma que ja hem definit, amb les propietats algebraiques que volem que tingui, i amb la nostra visió intuïtiva de l'ajuntament de les quantitats que representen els nombres racionals. La suma de nombres enters a partir de la de naturals es defineix així: $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ i la suma de nombres racionals a partir de la d'enters així: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

263. Però a on anàvem és al tema de sumar conjunts de nombres. Què volem dir quan diem $\sum A$ on A és un conjunt de nombres de la mena que sigui?

264. Si arrangem els elements del conjunt A en forma de seqüència ordenada així com $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ podem definir una suma acumulada parcial d'una manera recursiva tal com hem definit la suma anteriorment:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} a_i &= 0 \\ \sum_{i=0}^{n+1} a_i &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) + a_n \end{aligned}$$

265. Per un conjunt $A = \{a_{0,} a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ finit on $|A| = n$ podríem definir la seva suma talment com:

$$\sum A = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

266. Per exemple, la suma del conjunt $A = \{2, 3, 5\}$ segons aquesta definició seria:

$$
\begin{aligned}
\sum\{2,3,5\} &= \sum_{i=0}^{3} a_i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{2} a_i\right) + 5 \\
&= \left(\left(\sum_{i=0}^{1} a_i\right) + 3\right) + 5 \\
&= \left(\left(\left(\sum_{i=0}^{0} a_i\right) + 2\right) + 3\right) + 5 \\
&= ((0+2)+3)+5 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

267. Com que la suma té les propietats algebraiques commutativa: $a + b = b + a$ i associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ l'ordre en que arrangem els elements del conjunt A no altera el resultat del total de la suma. Tant ens fa fer $(2 + 3) + 5$ com $(5 + 2) + 3$. L'únic rellevant és quins són els elements que formen part de A, que en tant que conjunt no té ordre.

268. Però com podem definir la suma si el conjunt A és infinit? En el cas finit hem dit que la suma total de A seria l'element final de la seqüència $\sum_{i=0}^{n} a_i$, la que correspon a què n és la quantitat total d'elements que té A perquè és quan ja els hem sumat tots.

269. Ara, però, la seqüència $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ seguirà indefinidament sense tenir cap final i no podrem dir en cap moment que ja haguem sumat tots els elements de A.

270. I no obstant, nosaltres seguim volent trobar aquest «final» de s_n, cap a on s'està dirigint. D'aquest concepte se'n diu *límit* i és el fonament d'algunes de les branques més importants de la matemàtica com el càlcul infinitesimal i l'anàlisi.

271. Si recordem el cas particular que ens ocupa i del que potser ja ens hem anat apartant una mica massa, els elements que estem intentant sumar eren tots nombres racionals de la forma $\frac{1}{10^k}$, és a dir, tots nombres positius. Això vol dir que cada element de la seqüència de sumes parcials tindrà un valor més gran que l'anterior perquè $s_{i+1} = s_i + a_i$ i $a_i > 0$ aleshores $s_{i+1} > s_i$.

272. Això vol dir que aquell valor límit cap al que ens dirigim també ha de ser més gran que tots i cadascun dels infinits s_i. I alhora de tots els nombres que són més grans que tots i cadascun dels infinits s_i serà el més petit. Aquest concepte ja el coneixem i es diu suprem. Recordem que el suprem d'un conjunt infinit de nombres racionals podia ser un nombre irracional però real. Això és el que ens passarà per exemple amb el conjunt de nombres primers tal com havíem vist.

273. I amb això ja tenim definida d'una forma perfectament fonamentada la funció $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $f(X) = \sum \left\{ \frac{1}{10^n} \mid n \in X \right\}$ que té la propietat de no col·lisionar en el mateix nombre real de sortida amb cap parell de conjunts d'entrada diferents. Dit d'una altra manera, és una bijecció amb un cert subconjunt dels reals.

274. I existint aquesta bijecció, podem donar per fet que $|2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$. I com que alhora havíem vist abans que $|\mathbb{R}| \leq |2^{\mathbb{N}}|$, doncs aleshores $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$ com volíem demostrar. El conjunt dels reals té la mateixa cardinalitat que el conjunt potència dels naturals.

275. Aquest fet i particularment la desigualtat $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ que se'n deriva té conseqüències profundes més enllà de la matemàtica.

276. Per una banda el món físic en el que vivim immersos se'ns presenta en formes que gairebé sempre inclouen directa o indirectament nombres reals. O potser més ben dit, aquella noció de recta formada per punts que ens ha creat la necessitat de descobrir-los.

277. La distància que separa dos punts de l'espai físic és un nombre real, el temps que transcorre entre dos esdeveniments és un nombre real. Les variables dels models que creem per representar el comportament de qualsevol sistema físic gairebé sempre són nombres reals o derivats.

278. Per altra banda, els llenguatges que som capaços de crear nosaltres per descriure'ns i discórrer sobre el món són en darrer terme encadenaments de conjunts finits de símbols. I com a tals el conjunt de discursos que podem generar amb ells està limitat a la cardinalitat de $\mathbb{N}$.

279. Dit d'una altra manera, podríem establir una bijecció entre tots els infinits llibres que podrien arribar a ser escrits en qualsevol llengua sobre qualsevol cosa i els nombres naturals, simplement codificant el text en forma de dígits.

280. I això inclou el llenguatge natural, qualsevol notació matemàtica formal, els llenguatges formals amb els que programem ordinadors i representem les seves dades, la manera com especifiquem els plànols per construir una màquina, etc.

281. Res d'això ens serveix per tractar adequadament amb la totalitat del conjunt dels nombres reals i per extensió amb la realitat tal com la percebem. Senzillament hi ha massa teca.

282. Sovint ens conformem treballant amb un subconjunt numerable i aproximacions més o menys bones de la cosa real. En computació això vindria a ser el que es diu l'aritmètica de punt flotant.

283. Recapitulem una mica. Hem estat veient que hi ha conjunts finits, que per definició són equipotents amb un nombre natural, o sigui un element de $\mathbb{N}$.

284. I després que hi ha una família de conjunts infinits que són equipotents amb $\mathbb{N}$ com $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$. D'aquesta mena de conjunts en diem «*numerables*».

285. Però també hi ha uns altres conjunts equipotents amb $2^{\mathbb{N}}$ com $\mathbb{R}$ que són estrictament més grans. I després conjunts encara més i més estrictament grans que podem anar construint tot aplicant l'operació de potència de conjunts als conjunts que ja tinguem.

286. El que no sabem és si existeixen altres cardinalitats intermèdies al començament d'aquesta jerarquia de conjunts infinits.

287. És a dir: existeix algun conjunt X infinit tal que $|X| < |\mathbb{N}|$? I algun Y tal que $|\mathbb{N}| < |Y| < |\mathbb{R}|$?

288.	La primera qüestió és força assequible si partim de la definició d'infinitat de Dedekind que vam veure.
289.	Suposem un conjunt X que és Dedekind-infinit. És a dir, que existeix un subconjunt propi $A \subsetneq X$ i una bijecció f entre X i A.
290.	Com que $X \neq A$, ha d'existir almenys un $x_0 \in X \setminus A$. Un element de X que **no** sigui alhora element de A.
291.	Com que el codomini de f és A, $f(x_0) \in A$ i per tant ha de ser diferent que x_0. En direm $x_1 = f(x_0)$.
292.	De la mateixa manera, farem $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$. Aquest x_2 ha de ser diferent que x_0 pel mateix motiu que abans. Tampoc pot ser igual a x_1 perquè, donat que f és una bijecció: $$x_2 = x_1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_0) \Rightarrow x_1 = x_0$$ ...i ja hem vist abans que això és fals, que $x_1 \neq x_0$.
293.	Seguint aquest procediment, podrem anar definit tota una seqüència de x_n en la que per tot $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, on tot $x_n \in X$ i cada x_n és diferent de tots els altres.
294.	Aquesta seqüència funciona com una bijecció entre $\mathbb{N}$ i un subconjunt de X. I l'existència d'aquesta bijecció ens assegura que $\lvert\mathbb{N}\rvert \leq \lvert X\rvert$: $\mathbb{N}$ té la cardinalitat mínima que pot tenir un conjunt Dedekind-infinit.
295.	L'altra qüestió, si $\mathbb{R}$ té la cardinalitat més petita d'entre les que són estrictament superiors que la de $\mathbb{N}$, ~~té més enhúndia~~ és més complexa.
296.	Cantor va anomenar a aquesta proposició la *«hipòtesi del continu»* i va dedicar anys a intentar demostrar-la. No ho va aconseguir i es va quedar com una de les qüestions matemàtiques obertes per resoldre de cara al segle XX.
297.	Anteriorment hem parlat de la incompletesa dels sistemes axiomàtics que va demostrar Gödel: qualsevol sistema axiomàtic que sigui consistent i que abasti l'aritmètica bàsica tindrà qüestions que no s'hi podran demostrar ni refutar.
298.	Doncs bé, el mateix Gödel va contribuir a demostrar que aquest és el cas de la hipòtesi del continu en el sistema **ZFC**. Però la prova completa d'això no va arribar fins als anys 60 del segle XX. Normal que el pobre Cantor no se'n sortís.
299.	Això vol dir que **ZFC** no ens respondrà si existeix o no una cardinalitat que estigui entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ però que si tenim moltes ganes que no existeixi podem introduir la seva inexistència com a axioma i fer el nou sistema axiomàtic **ZFC+CH** (de ***c****ontinuum* ***h****ypothesis*), que seria tant consistent com **ZFC**.
300.	I si, en canvi, tenim moltes ganes que existeixi podem fer el sistema axiomàtic **ZFC+¬CH** i també serà tant consistent com **ZFC**.
301.	Una altra manera d'entendre això és pensar que existeixen dos ens abstractes separats als que podem anomenar indistintament «conjunts», que **ZFC** és una teoria que descriu ambdues de manera ambigua i que la introducció de **CH** o de **¬CH** a la teoria desfà l'ambigüitat en un sentit o un altre.
302.	Això ja depèn molt de si adoptem una postura filosòfica formalista o realista respecte la naturalesa última de la matemàtica i els seus objectes. Però jo no em veig pas capacitat per parlar de filosofia de les matemàtiques. És un tema us el deixaré a vosaltres.

303. Com ja vam dir, la tria entre un sistema axiomàtic i un altre que se suposin consistents és una pura qüestió de conveni. En el cas de la hipòtesi del continu no ha calgut establir cap conveni perquè resulta que ara com ara no hi ha grans qüestions matemàtiques que en depenguin.

304. Si algun dia es topa amb alguna gran conjectura necessita de la hipòtesi del continu o de la seva negació per ser demostrada i es decideix que convé que aquesta conjectura tingui una demostració dins de la matemàtica estàndard, doncs possiblement es revisi aquest conveni i deixarem de fer servir **ZFC** en favor de **ZFC+CH** o **ZFC+¬CH**.

305. De fet, això és vindria a ser el que succeí amb el darrer axioma que ens falta, l'axioma de l'elecció.

306. Es va trobar que era independent del sistema axiomàtic format pel conjunt d'axiomes que hem vist fins ara, **ZF**, i va resultar que és necessari per sostenir part de la matemàtica que es va considerar de és desitjable que sigui sostinguda.

307. Tot això amb certa controvèrsia; a alguns matemàtics aquest axioma els semblava molt rebuscat i poc auto-evident, característiques que són poc desitjables en un axioma.

308. Per altra banda, aquest axioma el necessitem per demostrar coses tant aparentment òbvies com que si tenim dos conjunts qualssevol A i B, és el cas que $|A| \leq |B|$ o bé $|A| \geq |B|$. I aquest teorema (la totalitat en l'ordre de les cardinalitats) alhora el volem per a demostrar moltes altres coses.

309. Diu l'*axioma de l'elecció* que si tenim un conjunt X de conjunts no buits, existeix una funció f tal que per tota $A \in X$, $f(A) \in A$.

310. És a dir, que la funció $f(X)$ elegeix un element per cada conjunt dels que formen X. Si ens restringíssim a conjunts finits, podríem construir aquesta funció fent servir l'axioma de l'infinit a través de la inducció matemàtica i no ens caldria un axioma especial per tenir-la.

311. Però en el cas de X infinites, necessitem assegurar l'existència de la funció de tria amb l'axioma de l'elecció.

312. No obstant, de la mateixa manera que amb l'axioma de l'elecció podem demostrar teoremes que intuïm intensament com a veritat i per tant en volem poder fer una demostració, també ens porta a resultats que són fortament antiintuïtius.

313. Un d'aquests resultats que és especialment vistós és la paradoxa de Banach-Tarski.

314. Suposem que tenim una bola en l'espai de tres dimensions habitual. És a dir, el volum d'espai sòlid que està tancat dins d'una esfera.

315. Diu aquest teorema que és possible dividir aquest sòlid tallant-lo en un conjunt finit de trossos (en cinc parts, es pot arribar a fer) de manera que llavors es poden prendre aquests trossos i fent-los només desplaçaments i rotacions rígides com si fos un puzle acabar muntant dues boles separades cadascuna d'elles exactament idèntica a la bola original.

316. Com deia això contradiu fortament la nostra intuïció degut a la nostra experiència física tallant i rearmant sòlids a l'espai, i per això se'n diu «paradoxa».

317. Però és un resultat matemàtic perfectament vàlid i consistent a partir de l'axioma de l'elecció. No és una paradoxa en el sentit que ho era la de Russell que invalidava tota la matemàtica i s'havia de refundar de nou. És només un teorema «estrany».

318. La matèria física que ens envolta no la podem duplicar màgicament com les boles matemàticament idealitzades d'aquest teorema perquè d'entrada els talls que hem de fer són d'una delicadesa infinita (hauríem de separar la substància com aquell qui diu «punt a punt») i la substància de les boles de billar a partir d'una certa escala microscòpica comença a fer coses que s'aparten de l'ideal d'espai tridimensional del que parteix el teorema. Quan ens trobem coses com les partícules elementals i la física quàntica la idealitat contínua d'un espai euclidià ple d'una substància igualment contínua deixa de ser aplicable.

319. Respecte a la demostració en si, són matemàtiques massa avançades i jo no em veig capacitat per exposar-vos-la però aquest youtuber atabalat en fa un esbós que em sembla que està bastant bé:
https://youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA.

320. Una altra cosa menys marciana i més concordant amb la nostra intuïció de les coses que podem demostrar a partir de l'axioma de l'elecció (i sense ell no) és l'equivalència entre la definició estàndard d'infinit i la de Dedekind.

321. Havíem comentat en el seu moment que no es pren la de Dedekind com a definició estàndard del concepte d'infinit perquè fer-ho ens obligaria a fer servir massa aquest axioma i això no ens ~~barrufa~~ interessa.

322. Empalmant aquesta equivalència amb el que hem demostrat abans sobre que $\mathbb{N}$ és més petit o igual que qualsevol conjunt Dedekind-infinit tindríem que també ho és que qualsevol conjunt infinit «a seques».

323. I amb això acabaríem l'exposició de la teoria de conjunts **ZFC**, que és en el que es fonamenten les matemàtiques «estàndard»: quan no ens trobem explorant els fonaments mateixos de les matemàtiques o se'ns indica el contrari explícitament, els teoremes que trobem en qualsevol text matemàtic són en darrer terme conseqüències lògiques estrictes dels nou axiomes de teoria de conjunts que hem explicat:

- Extensionalitat(53).
- Emparellament(60).
- Unió(67).
- Infinit(76).
- Especificació(107).
- Regularitat(120).
- Reemplaçament(132).
- Potència(153).
- Elecció(309).

324.	Amb ells, mica en mica hem anat descobrint una complexitat important en el món que hi ha a l'altre costat del llindar de la infinitat.
325.	Hem vist que els conjunts no són infinits i ja està sinó que dintre de la categoria de la infinitat n'hi ha de més grans i de més petits, igual com passa entre els finits.
326.	També vam veure que per manegar aquesta complexitat amb els conjunts finits fem servir uns objectes abstractes que es diuen *«nombres»*.
327.	Quan parlem del nombre *«tres»* estem en certa manera parlant de tots els conjunts que tenen tres elements i podem aplicar les conclusions a les que arribem a tots els conjunts de tres elements.
328.	Tot i amb això, mentre ho fem ens oblidem d'aquest fet i dediquem tota la nostra capacitat mental a l'abstracció pura, sense malgastar pensament en particularitats irrellevants. Això ens permet arribar a llocs que serien altrament impensables. Però d'això ja en vam parlar.
329.	De la mateixa manera que generalitzant els nombres naturals vam descobrir altres tipus de nombres que ens poden servir per abstreure conceptes més amplis que el que és la cardinalitat dels conjunts finits, voldríem ara alguna mena de nombres que ens permetés abstreure sobre conceptes la cardinalitat de també els conjunts infinits.
330.	És per això que en els següents tuits intentarem parlar una mica dels **NOMBRES TRANSFINITS**.
331.	Havíem vist en capítols anteriors que els nombres naturals els construïm aplicant successivament la funció successor $S(x) = x \cup \{x\}$ sobre el conjunt buit. Això fa que cada nombre sigui de fet el conjunt de tots els nombres anteriors: $5 = S(4) = 4 \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
332.	També havíem vist la definició del que és un ordre total(218) quan vam estar parlant dels nombres racionals.
333.	La relació $\leq$ entre naturals (que de fet és la mateixa que $\subseteq$, el ser subconjunt l'un de l'altre) també compleix aquestes propietats de l'ordre total. Igual que les relacions $\leq$ entre enters, racionals i reals.
334.	Però a més té una altra propietat que aquests altres conjunts ordenats no tenen: tots els conjunts de nombres naturals tenen un element mínim, més petit que tots els altres elements del conjunt. El mínim del conjunt de nombres primers $\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$, per exemple, és 2.
335.	Mentre que conjunts com el d'enters parells $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ o l'interval obert real $(0, 1)$ no han de tenir necessàriament un element mínim segons la relació d'ordre habitual tal com s'entén quan diem "tal nombre és més petit que tal altre".
336.	De vegades es poden definir relacions d'ordre alternatives que sí que la tenen. Per exemple, podríem ordenar els enters tot seguint una com aquesta $(0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots)$ i llavors segons aquesta relació d'ordre sí que tots els conjunts d'enters tindrien un mínim.
337.	I el mínim absolut de tots els enters segons aquest ordre seria el zero. Amb els reals no està tan clar com podríem definir un ordre alternatiu que tingués aquesta propietat. En parlarem més endavant.
338.	Bé, doncs. Quan una relació d'ordre total té aquesta propietat, que tots els subconjunts no buits tenen un element mínim, es diu que és un *«bon ordre»*. Els nombres naturals formen un conjunt *«ben ordenat»*.

339. També havíem parlat que el procediment de comptar els elements d'un conjunt finit consistia en establir una bijecció entre aquest conjunt i els nombres naturals. Etiquetar cada element amb un nombre consecutiu.

340. Havíem obviat però que aquesta bijecció la podem fer de moltes maneres diferents. El conjunt $\{a, b, c\}$ podem comptar-lo així:

$$\begin{array}{ccc} a & \rightarrow & 0 \\ b & \rightarrow & 1 \\ c & \rightarrow & 2 \end{array}$$

O bé així:

$$\begin{array}{ccc} b & \rightarrow & 0 \\ a & \rightarrow & 1 \\ c & \rightarrow & 2 \end{array}$$

341. Cadascuna d'aquestes possibles bijeccions ens determina de fet una relació bon ordre diferent en el conjunt $\{a, b, c\}$.

342. I viceversa: si partim d'una relació de bon ordre definida sobre un conjunt, ens queda determinada una única bijecció amb el conjunt de naturals que representa la seva cardinalitat de manera consistent en el sentit que $x \leq y \longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Ordenar és comptar.

343. D'aquestes bijeccions entre conjunts ordenats que són consistents amb l'ordre se'n diuen *«isomorfismes d'ordre»*.

344. Les dues propietats dels nombres naturals que hem vist (ser ben ordenats i que cadascun sigui el conjunt de tots els que són més petits que ell) es poden generalitzar i estendre a una classe de conjunts molt més general que els que es poden generar aplicant la funció successor.

345. Tots els nombres naturals d'entrada formaran part d'aquesta categoria perquè hem vist que compleixen aquestes propietats, però a més:

346. El mateix conjunt de tots els nombres naturals, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, també seria un conjunt d'aquest tipus. Un objecte que en el bon ordre vindria just després de tota la sèrie infinita de naturals, ja que els té com a elements i per tant són estrictament menors.

347. En aquest context d'aquest conjunt no en direm $\mathbb{N}$ sinó nombre ω *(omega)*. Per allò d'estar al final, suposo.

348. Però potser no perquè de fet no està al final de res. A aquest ω li podem aplicar la funció successor i obtenim $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$, que també és un conjunt d'aquesta classe.

349. I tornant a aplicar repetidament la funció successor obtindríem altre cop infinits $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... que anirien just a continuació de tota la seqüència d'elements de $\mathbb{N}$, ω i $\omega + 1$.

350. I el conjunt de tots ells formarien un nou element al final de tot que en diem $\omega + \omega = \omega \cdot 2$.

351. A aquest $\omega \cdot 2$ també podem aplicar-hi el successor iterativament fins a generar $\omega \cdot 3$. I després $\omega \cdot 4$. I fent això infinites vegades arribar fins a $\omega \cdot \omega = \omega^2$. I després seguir fins a ω^3, ω^4, $\ldots$, ω^ω, $\ldots$, ω^{ω^ω}, $\ldots$, $\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$, $\ldots$

352. De fet a qualsevol notació que ens puguem inventar per representar elements més i més grans li passarà el mateix que quan parlàvem de la dels nombres reals. Que només pot representar una quantitat numerable de coses i n'hi ha moltes més per representar.

353. La quantitat d'objectes d'aquesta classe de conjunts que hi ha és absurdament gran. I això és bastant literal en el sentit que **ZFC** no ens serveix per parlar d'aquesta categoria de quantitats.

354. Això és així perquè no podem agafar-los tots i tancar-los en un conjunt. Aquest conjunt hauria de ser per definició un altre objecte d'aquesta classe i per tant ser element d'ell mateix. I això ho tenim prohibit per l'axioma de regularitat.

355. D'aquesta mena de conjunts en diem *«nombres ordinals»* i en certa manera són anàlegs funcionalment al concepte de numeral ordinal en lingüística.

356. Tot conjunt ben ordenat (finit o infinit) té isomorfisme d'ordre amb exactament un nombre ordinal. És a dir, que es poden etiquetar ordenadament els seus elements amb nombres ordinals consecutius i això es pot fer d'una sola manera.

357. Com ja es va dir anteriorment, el procediment informal de comptar coses és exactament això. Anem etiquetant els objectes amb un nombre (ordinal) de manera ordenada fins que els esgotem. I ara tenim eines per fer aquesta part també en conjunts infinits que estiguin ben ordenats.

358. Quan vam parlar de comptar conjunts finits fent servir nombres naturals, però, vam obviar l'ordre en què els comptàvem i la bijecció particular que fèiem servir per descartar-ho com a irrellevant i quedar-nos únicament amb el nombre final que obteníem, la cardinalitat.

359. Això ens ho podíem permetre aleshores perquè tots els conjunts finits es poden ordenar d'alguna manera i totes les maneres en què es pot ordenar un conjunt finit són isomòrfiques.

360. És a dir, no importa l'ordre en que comptem els elements d'un conjunt finit, el conjunt de nombres naturals que acabarem fent servir per etiquetar els seus elements serà el mateix.

361. Amb els nombres infinits això no passa i el comptatge és sensible a l'ordre particular en que ens trobem el conjunt.

362. Per exemple, si comptem els nombres naturals mateixos en el seu ordre natural (el que ens genera la relació d'ordre $\leq$ tal com l'entenem habitualment, o sia: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$), farem:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 2 \\ & \vdots & \\ n & \to & n \\ & \vdots & \end{array}$$

I tindrem que $\mathbb{N}$ ordenat d'aquesta manera és isomòrfic amb l'ordinal ω, cosa que com que de fet són per definició el mateix conjunt no és cap sorpresa.

363. Però també els podríem ordenar posant el zero al final, així com $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots, 0)$. Aleshores l'assignació d'ordinals ens quedaria:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 0 \\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 3 & \rightarrow & 2 \\ & \vdots & \\ n & \rightarrow & n-1 \\ & \vdots & \\ 0 & \rightarrow & \omega \end{array}$$

I en aquest cas tenim que $\mathbb{N}$ ordenat d'aquesta manera particular, en canvi, és isomòrfic amb el conjunt $\omega + 1$, que és un nombre ordinal diferent de ω.

364. Per tant els ordinals tal qual no serveixen per representar la cardinalitat dels conjunts infinits donat que la cardinalitat per definició ha de ser independent de l'ordre particular en que comptem els elements.

365. Per començar ara com ara no sabem ni tant sols si tots els conjunts es poden arribar a ordenar d'*alguna* manera per poder-ne fer la bijecció amb *algun* ordinal.

366. Quan hem definit el que era un bon ordre no hem vist una manera evident d'ordenar els nombres reals de manera que qualsevol subconjunt no buit tingui un mínim definit de manera consistent.

367. Amb els conjunts que són numerables no hi ha problema perquè la bijecció amb els naturals que per definició existeix es pot fer servir per definir un ordre que serà igual de ben ordenat que ho són els nombres naturals.

368. Per tota la resta es pot demostrar que es pot definir com a mínim un bon ordre fent servir l'axioma de l'elecció.

369. Els detalls de la demostració són un xic complexos, però la funció d'elecció que ens assegura l'axioma que existeix manipulada amb enginy es pot fer servir per determinar quin serà el mínim de cada subconjunt d'aquest ordre de manera consistent.

370. De manera que sense tenir necessàriament idea d'exactament com és en detall, amb l'axioma de l'elecció sabem que existeix almenys un bon ordre per als reals i també per a qualsevol altre conjunt.

371. És important entendre que de la mateixa manera que l'axioma de l'elecció només ens assegura que una funció d'elecció existeix però no ens diu res sobre com és, el *teorema del bon ordre* només ens assegura que per a cada conjunt un bon ordre existeix, però no ens diu res sobre com és. No sabrem quin nombre anirà abans de quin altre en cap dels com a mínim un bons ordres que té el conjunt dels nombres reals.

372. Tot això al que ens porta és a que qualsevol conjunt es pot posar en bijecció amb diversos ordinals diferents però sempre com a mínim a un.

373. Per representar la cardinalitat d'un conjunt donat X, una cosa que podem fer és trobar una manera sistemàtica i determinista d'escollir un dels nombres ordinals que són equipotents amb X.

374. I, donat que els ordinals són ben ordenats, sabem qualsevol conjunt d'ells sempre tindrà un element mínim. Aquest element mínim el podem fer servir per representar les cardinalitats. I en direm *nombres cardinals*.

375.	En el cas dels conjunts finits, el conjunt d'ordinals equipotents amb cadascun està format per un sol element, que és exactament el nombre natural que havíem dit que representaria la cardinalitat quan ho limitàvem a conjunts finits.
376.	De manera que els nombres cardinals finits seran altre cop els mateixos naturals 0, 1, 2, 3... de manera consistent a com ja havíem dit que representàvem les cardinalitats finites.
377.	Els nombres corresponents a les cardinalitats infinites es representen fent servir la lletra hebrea $\aleph$ *(àlef)* amb un subíndex.
378.	Els més petits dels conjunts infinits, els numerables com $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^5$, ... tenen la seva cardinalitat representada pel nombre cardinal infinit $\aleph_0$.
379.	El nombre cardinal immediatament superior és $\aleph_1$, el següent $\aleph_2$, i així successivament.
380.	Així, la hipòtesi del continu[296] que volia demostrar Cantor es pot formular de manera succinta en el context dels nombres cardinals en la forma: $\lvert\mathbb{R}\rvert = \aleph_1$. Si la cardinalitat de $\mathbb{R}$ és igual al nombre cardinal immediatament superior al que representa la cardinalitat de $\mathbb{N}$, aleshores és que no hi ha cap cardinalitat que estigui entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$.
381.	Tal com vam dir, el sistema **ZFC** per ell mateix no ens permet demostrar ni refutar la hipòtesi del continu i per tant no ens pot dir a quin nombre àlef correspon la cardinalitat de $\mathbb{R}$. El que sí que es pot demostrar sense sortir de **ZFC** és que $\lvert\mathbb{R}\rvert$ és igual a algun $\aleph_i$ amb $i \in \mathbb{N}$, $i > 0$.
382.	Hi ha conjunts que tenen una cardinalitat encara més gran que la de tots aquests nombres àlef que hem enumerat amb un índex natural $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... Perquè de fet l'índex de $\aleph$ pot ser qualsevol nombre ordinal, no només un natural.
383.	Així, el més petit dels nombres cardinals que són més grans que tots els $\aleph_i$ amb $i \in \mathbb{N}$ en diem $\aleph_\omega$. I després tindríem $\aleph_{\omega+1}$,$\aleph_{\omega+2}$, ..., $\aleph_{\omega\cdot 2}$, $\aleph_{\omega\cdot 3}$, ..., $\aleph_{\omega^2}$, ..., $\aleph_{\omega^\omega}$, ... i així amb tota la sèrie inacabable d'ordinals.
384.	És demostrable en **ZFC** que tots els conjunts infinits tenen la cardinalitat d'algun nombre $\aleph_i$ per algun i ordinal. I per tant els nombres cardinals són tots els nombres naturals (representant les cardinalitats finites) junt amb tots els nombres àlef (representant les infinites).
385.	En general donat algun conjunt concret com $\mathbb{R}$ no podrem determinar quin $\aleph_i$ li correspon sense adoptar axiomes addicionals a més dels de **ZFC** com la hipòtesi del continu, però sí que podrem donar-los-hi una certa acotació com és el cas de $\aleph_0 < \lvert\mathbb{R}\rvert < \aleph_\omega$.
386.	Havíem vist que una manera de generar conjunts amb cardinalitats estrictament més grans que ell mateix és mitjançant el conjunt potència. Donat un conjunt A tindrem el conjunt 2^A format per tots els subconjunts de A del que pel teorema de Cantor sabem que $\lvert 2^A\rvert > \lvert A\rvert$.
387.	Si posem per cas $\lvert A\rvert = \aleph_0$, aleshores 2^A tindrà la cardinalitat $2^{\aleph_0}$, que és la de $2^{\mathbb{N}}$, que és la de $\mathbb{R}$, que estem dient que no sabem a quin $\aleph_i$ correspon que és tant com dir que no sabem ben bé quina cardinalitat és. I això potser és un problema a l'hora d'expressar segons quins conceptes que ens queden d'alguna manera indeterminats.

388. Per encarar aquesta mena de problemes els matemàtics el que solen fer és inventar-se un símbol nou i així si més no poden expressar la cosa de manera succinta i sintètica. Per què no.

389. Una forma alternativa de designar els cardinals infinits és amb la lletra hebrea $\beth$ *(bet)* . Els nombres bet es defineixen recursivament sobre els ordinals de la següent manera:

$$\begin{aligned} \beth_0 &= \aleph_0 \\ \beth_{i+1} &= 2^{\beth_i} \\ \beth_\lambda &= \sup\{\beth_i \mid i < \lambda\} \end{aligned}$$

390. Aquestes fórmules volen dir que $\beth_0$ és $|\mathbb{N}|$ igual que $\aleph_0$, $\beth_1$ és $|2^{\mathbb{N}}|$, $\beth_2$ és $|2^{2^{\mathbb{N}}}|$, $\ldots$, $\beth_\omega$ el més petit dels cardinals superiors que tots els $\beth_i$ amb $i < \omega$, i així per tota la resta d'ordinals.

391. Els nombres $\beth$ els podem construir i determinar-ne les propietats amb precisió fent servir la maquinària de **ZFC**, amb eines com el conjunt potència; no com amb els nombres $\aleph$, que són cardinalitats que corresponen a conjunts indeterminats.

392. Però per altra banda, la sèrie de nombres $\beth$ no cobreix necessàriament tots els cardinals infinits exhaustivament com sí que ho fan els $\aleph$. No sabem si hi ha altres cardinals entre $\beth_0$ i $\beth_1$ mentre que entre $\aleph_0$ i $\aleph_1$ per definició no n'hi ha. No es pot tenir tot.

393. Així doncs, una nova manera de formular la nostra ja entranyable hipòtesi del continu podria ser $\aleph_1 = \beth_1$.

394. Hi ha una generalització de la hipòtesi del continu que estén aquesta fórmula a tots els subíndexs ordinals, o sigui $\aleph_i = \beth_i$ per a tot i ordinal. A aquesta se l'anomena *«hipòtesi del continu generalitzada»*.

395. Igual que hipòtesi del continu restringida, aquesta tampoc té demostració ni refutació en **ZFC**. Però sí que s'ha trobat que amb ella i **ZF** sense sense axioma de l'elecció es pot demostrar l'axioma de l'elecció.

396. Això vol dir que en un sistema axiomàtic format per **ZF+GCH** es pot demostrar tot el que es demostra en **ZFC** i algunes coses més i alhora és consistent si també ho és **ZFC**.

397. Hi ha una gent que es dedica a buscar aquesta mena de relacions entre els diferents axiomes/hipòtesis/conjectures i determinar les capacitats les característiques dels diversos sistemes axiomàtics que es poden formar amb ells i les teories de conjunts a que donen lloc.

398. Perquè pot molt ben ser que per qüestions matemàtiques que romanen obertes, algunes fins i tot amb alguna utilitat pràctica, les matemàtiques «normals» senzillament no estiguin suficientment dotades per resoldre-les, com en el seu moment va passar amb la hipòtesi del continu de Cantor.

399. I aleshores la manera de donar resposta a aquestes qüestions és plantejar-se la pregunta «què caldria incorporar a les matemàtiques per poder demostrar que això és veritat i quines altres implicacions tindria fer-ho?».

400. Tot això sabent que mai les podrem dotar suficientment com per a resoldre-ho tot.

401.	L'aritmètica dels nombres naturals es pot estendre cap als transfinits de manera consistent a la semàntica que hem anat descrivint.
402.	La suma de dos nombres cardinals és, doncs, la corresponent a la cardinalitat de la unió disjunta de dos conjunts amb les cardinalitats donades, igual que quan ho limitàvem a nombres naturals i cardinalitats finites.
403.	Si tenim un conjunt amb 7 elements i un altre conjunt amb 4 elements tals que un i altre conjunt no tenen cap element compartit, en ajuntar-los en un sol conjunt resulta que aquest tindrà $7+4=11$ elements.
404.	Quan estenem aquesta idea als cardinals infinits ens trobem que sota **ZFC** resulta que el cardinal infinit més gran «absorbeix» el petit: $\aleph_0+5=\aleph_0$, $\aleph_6+\aleph_4=\aleph_6$, $\aleph_2+\aleph_2=\aleph_2$, $\beth_1+\beth_9=\beth_9$, ...
405.	$\aleph_2+\beth_1$ no està determinat perquè sota **ZFC** tampoc ho està quin dels dos si $\aleph_2$ o $\beth_1$ és més gran, però sí que està determinat que el resultat de la suma serà igual a un dels dos. Sí que està perfectament determinat, en canvi, que $\aleph_\omega+\beth_1=\aleph_\omega$, ja que sabem que $\aleph_\omega>\beth_1$.
406.	D'una manera semblant, la suma de nombres ordinals és l'ordinal que representa el conjunt ordenat resultant de posar dos conjunts ordenats disjunts un a continuació de l'altre. És a dir:
407.	Si tenim per un costat el nombre ordinal infinit ω que representa l'ordre de la seqüència $(a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots)$ i per l'altre el nombre ordinal finit 3 que representa l'ordre de la seqüència (b_0,b_1,b_2), en unir-los ordenadament obtenim un conjunt ordenat amb la forma $(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,b_0,b_1,b_2)$ que seria isomòrfic amb l'ordinal $\{0,1,2,3,4,\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2\}$ i que de fet en notació l'expressem tal qual com $\omega+3$, la suma dels dos ordinals que representen els conjunts ordenats que hem concatenat.
408.	En canvi, si els col·loquem a l'inrevés, primer el 3 i després el ω, ens surt la seqüència $(b_0,b_1,b_2,a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots)$ que és isomòrfic amb $\{0,1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}$ que és igual a ω. O sigui, que $3+\omega=\omega\neq\omega+3$.
409.	O sigui, que la suma d'ordinals no és commutativa i, a diferència que amb els cardinals, els infinits no sempre absorbeixen els finits.
410.	El producte de dos nombres cardinals és el corresponent a la cardinalitat del producte cartesià de dos conjunts amb les cardinalitats donades. O sigui, quants parells ordenats podem formar amb un element d'un i un element de l'altre.
411.	Igual que amb la suma, en **ZFC** cardinals infinits grans absorbeixen els petits i els infinits als finits: $\aleph_0\cdot 3=\aleph_0$, $\aleph_6\cdot\aleph_0=\aleph_6$, $\aleph_6\cdot\aleph_\omega=\aleph_\omega$.
412.	El producte d'ordinals també és anàleg a la suma però fent servir el producte cartesià en comptes de la unió disjunta: s'ordenen tots els parells ordenats per components de dreta a esquerra.

413. És a dir: si multipliquem els ordinals $3 = \{0, 1, 2\}$ i $2 = \{0, 1\}$ tenim aquest un conjunt de parells ordenats que segueix aquest ordre:

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \to & 0 \\ (1,0) & \to & 1 \\ (2,0) & \to & 2 \\ (0,1) & \to & 3 \\ (1,1) & \to & 4 \\ (2,1) & \to & 5 \end{array}$$

Que és isomòrfic amb l'ordinal $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i per tant aquest és el resultat de la multiplicació.

414. Si multipliquem els ordinals $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ i $2 = \{0, 1\}$ els parells ordenats que tenim són:

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \to & 0 \\ (1,0) & \to & 1 \\ (2,0) & \to & 2 \\ & \vdots & \\ (0,1) & \to & \omega \\ (1,1) & \to & \omega+1 \\ (2,1) & \to & \omega+2 \\ & \vdots & \end{array}$$

I l'ordinal corresponent és $\omega + \omega$ que és igual a $\omega \cdot 2$, ja que les propietats aritmètiques que porten a que $x \cdot 2 = x + x$ les seguim tenint en els nombres transfinits.

415. En canvi, si fem la multiplicació a l'inrevés $2 \cdot \omega$, tenim els parells ordenats seguint l'ordre:

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \to & 0 \\ (1,0) & \to & 1 \\ (0,1) & \to & 2 \\ (1,1) & \to & 3 \\ (0,2) & \to & 4 \\ (1,2) & \to & 5 \\ (0,3) & \to & 6 \\ & \vdots & \end{array}$$

Aquest conjunt ben ordenat, tot i tenir la mateixa cardinalitat $\aleph_0$ que el $\omega \cdot 2$ d'abans, és isomòrfic amb l'ordinal ω.

416. Per tant $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2$. El producte d'ordinals, igual que la suma, tampoc és commutatiu.

417. Una operació de la que encara no em parlat (directament) és la *potenciació de conjunts.*

418. Donats dos conjunts qualssevol A i B la potència A^B es defineix com el conjunt de funcions que van de B cap a A.

419. O sigui, si $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ i $B = \{b_0, b_1, b_2\}$, la funció $f : B \to A$ definida com:

$$\begin{aligned} f(b_0) &= a_2 \\ f(b_1) &= a_0 \\ f(b_2) &= a_2 \end{aligned}$$

És un element de A^B (A elevat a B). I també totes les altres funcions que puguem definir entre aquests dos conjunts.

420. El conjunt de totes funcions reals de variable real és doncs $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

421. Les operacions naturals aritmètiques de suma, multiplicació, resta i divisió vistes com funcions de dues variables són elements del conjunt $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

422. Un parell ordenat (a, b) pot ser considerat com una funció f que té com a domini el conjunt $2 = \{0, 1\}$ tal que $f(0) = a$ i $f(1) = b$.

423. Així, una altra manera d'expressar el producte cartesià $A \times A$, que és el conjunt de parells ordenats formats per dos elements de A, seria en forma de la potència A^2, el conjunt de totes les funcions $f : 2 \to A$.

424. I de la mateixa manera, podem expressar el producte $A \times A \times A$ en la forma A^3, i $A \times A \times ... \times A$ en la forma A^n: el producte (cartesià) i potència de conjunts és consistent amb el producte i potència de nombres que ja coneixem.

425. Donat un conjunt A, qualsevol dels seus subconjunts A' es pot veure com una funció f de A cap a $2 = \{0, 1\}$ tal que $f(a) = 0$ si $a \in A'$ i $f(a) = 1$ si $a \in A'$.

426. Així, el conjunt de tots els subconjunts del conjunt A el podem considerar com el conjunt de totes les funcions $f : A \to 2$, que seria 2^A.

427. Això és precisament el que havíem definit com a conjunt potència en parlar de l'axioma del conjunt potència i que havíem expressat en notació com a 2^A. Resulta que aquella notació ve de la idea més general de potenciació de conjunts.

428. La cardinalitat d'aquest conjunt de funcions entre B i A quan són finits és un problema de combinatòria conegut i resulta que és igual a precisament la potenciació de les cardinalitats de A i B.

429. És a dir, que per A i B finits es dona que $|A^B| = |A|^{|B|}$. D'aquí prové el fet d'anomenar a aquest concepte *«potenciació de conjunts»*, en consistència amb el de potenciació de nombres naturals.

430. Això es generalitza a cardinalitats infinites: el nombre de funcions naturals de variable natural és $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|^{|\mathbb{N}|} = \aleph_0^{\aleph_0}$.

431. Es pot demostrar que aquesta cardinalitat és igual a la dels nombres reals $\mathbb{R}$; podem codificar cada funció natural de variable natural f de la següent manera:

432. Si tenim una funció f qualsevol tal que per exemple:

$$\begin{aligned} f(0) &= 7 \\ f(1) &= 3 \\ f(2) &= 123 \\ f(3) &= 0 \\ f(4) &= 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podem agafar la seqüencia d'imatges ordenadament $(f(0), f(1), f(2), \ldots) = (7, 3, 123, 0, 3, \ldots)$ i convertir-ne els nombres a base binària $(111_2, 11_2, 1111011_2, 0_2, 11_2, \ldots)$.

433. A continuació podem agafar aquesta seqüència de nombres en base 2 i concatenar-los fent servir el dígit 2 com a separador: $111211211110112211\ldots$ I després posar aquesta cadena de dígits a continuació d'un «0.»; és a dir $0.111211211110112211\ldots$

434. Això resulta en un nombre real que serà únic per a cada funció $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Per tant $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$ i d'aquí $\aleph_0^{\aleph_0} \leq 2_0^{\aleph} = \beth_1$. Per altra banda també tenim que $\aleph_0^{\aleph_0} \geq 2_0^{\aleph}$ ja que $\aleph_0 \geq 2$. I d'aquí $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \beth_1$.

435. El conjunt de funcions reals de variable real és $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i la seva cardinalitat la podem deduir fent servir aritmètica cardinal i prou:

$$\begin{aligned} |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| &= |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} \\ &= \beth_1^{\beth_1} \\ &= \left(2^{\beth_0}\right)^{\beth_1} \\ &= 2^{\beth_0 \cdot \beth_1} \\ &= 2^{\beth_1} \\ &= \beth_2 \end{aligned}$$

436. Però portar l'operació de potenciació cap als nombres ordinals no ho podem fer de la mateixa manera que ho hem fet abans amb les operacions de suma i multiplicació.

437. Abans el que hem fet és agafar el resultat de l'operació entre conjunts, establir-hi una mena d'ordre «natural» a partir dels ordres dels operands hem dit: el resultat de l'operació és l'ordinal que representa aquest ordre.

438. Amb la potenciació de conjunts ens passa que no existeix en general cap bon ordre que puguem establir en el resultat d'una manera ben definida.

439. No sabem ordenar les funcions entre naturals de manera que qualsevol conjunt de funcions tingui un element mínim. Igual com tampoc ho sabem fer amb els nombres reals, de fet.

440. En l'ordre considerat natural dels nombres reals conjunts com l'interval obert $(0, 1)$ no tenen element mínim i per tant no és un bon ordre. El mateix passaria amb qualsevol ordre de volguéssim definir explícitament.

441. Per això de fet s'introdueix l'axioma de l'elecció dins de **ZFC**. Per assegurar que cada conjunt té un bon ordre encara que no siguem capaços de definir explícitament quin és.

442. Però per definir una operació amb nombres ordinals el que ens caldria és un bon ordre definit explícitament i això no ho tenim.

443. La manera com es defineixen en general les funcions ordinals és una altra. Recordem com vam definir la suma de nombres naturals:

$$\begin{aligned} a+0 &= a \\ a+(b+1) &= (a+b)+1 \end{aligned}$$

O la multiplicació:

$$\begin{aligned} a\cdot 0 &= 0 \\ a\cdot(b+1) &= a\cdot b+a \end{aligned}$$

O la potenciació:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{b+1} &= a^b\cdot a \end{aligned}$$

444. Aquestes definicions recursives funcionen perquè existeix el principi d'inducció del que també vam parlar.

445. Amb el principi d'inducció podem demostrar que una definició així realment descriu una funció que existeix i que és única, i també amb ell podem demostrar les propietats de les funcions que definim així.

446. El que ens cal per poder definir funcions d'una manera similar a aquesta sobre els ordinals és una extensió del principi d'inducció que operi sobre els nombres ordinals en comptes dels naturals.

447. D'això se'n diu *«principi d'inducció transfinita»*.

448. La inducció sobre nombres naturals en, donada una propietat P definida sobre aquests mateixos nombres naturals, verificar per una banda que es compleix pel zero i per l'altra que es compleix pel successor d'un nombre en el supòsit que ja s'està complint per aquell nombre.

449. Els nombres ordinals també tenen zero i també tenen successors, però hi ha un tercer tipus d'ordinal que haurem de cobrir per completar la inducció: els *ordinals límit*.

450. Un ordinal límit és allò que ve després d'aplicar el successor infinites vegades. És a dir, després de 0, $0+1=1$, $1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4$, $\ldots$, $53312+1=53313$, $\ldots$ ve un ordinal límit que n'havíem dit ω.

451. I després de ω, $\omega+1$, $(\omega+1)+1=\omega+2$, $(\omega+2)+1=\omega+3$, $\ldots$ ve un altre ordinal límit que n'havíem dit $\omega\cdot 2$. Aquesta mena de nombres ordinals no són successor de cap nombre ni tampoc són zero.

452. El pas d'inducció per aquests nombres consistirà en verificar que si la propietat P es dóna per tota la seqüència d'ordinals anteriors a ell aleshores també la té ell.

453. Recapitulant, el principi d'inducció transfinita consisteix en que si una propietat $P(\alpha)$ sobre els nombres ordinals compleix que:

- $P(0)$.
- Per a tot α ordinal, $P(\alpha) \to P(\alpha+1)$.
- Per a tot λ ordinal límit, per a tot $\alpha<\lambda$, $P(\alpha)\to P(\lambda)$.

...llavors podem dir que per a tot α ordinal es compleix $P(\alpha)$.

454. Tot i dir-se'n «principi» com si fos una cosa especial i particular, en l'àmbit de **ZFC** és un teorema com qualsevol altre que es segueix i es demostra a partir dels axiomes com qualsevol altre.

455. Com també ho són de fet els anomenats «corol·laris» i «lemes». La distinció entre uns i altres és una cosa subjectiva que no té cap rellevància formal.

456. En realitat només hi ha axiomes, que es prenen sense demostració, i teoremes, que es demostren a partir d'axiomes i altres teoremes. I de tots plegats en diem «proposicions».

457. Anàlogament a com havíem vist amb els naturals, amb la inducció transfinita podem definir funcions sobre els ordinals fent servir el resultat de la mateixa funció aplicada a altres arguments talment com:

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathit{\Phi} \\ \forall\alpha \text{ ordinal, } f(\alpha+1) &= X(f(\alpha)) \\ \forall\lambda \text{ ordinal límit, } f(\lambda) &= \mathit{\Psi}(\{f(\alpha)\mid\alpha<\lambda\}) \end{aligned}$$

458. De fet aquesta esquema és precisament el que vam fer servir quan vam definir els nombres cardinals infinits àlef i bet(389), tot i que encara no havíem definit els ordinals límit ni la inducció transfinita.

459. I també el podem fer servir per estendre les definicions de les operacions bàsiques sobre naturals(443) cap als nombres ordinals.

La suma d'ordinals queda definida, doncs, així:

$$\begin{aligned} \forall\alpha \text{ ordinal, } \alpha+0 &= \alpha \\ \forall\alpha\forall\beta \text{ ordinals, } \alpha+(\beta+1) &= (\alpha+\beta)+1 \\ \forall\alpha \text{ ordinal } \forall\lambda \text{ ordinal límit, } \alpha+\lambda &= \sup\{\alpha+\beta\mid\beta<\lambda\} \end{aligned}$$

460. I la multiplicació:

$$\begin{aligned}
\forall\alpha \text{ ordinal}, \ \alpha\cdot 0 &= 0\\
\forall\alpha\forall\beta \text{ ordinals}, \ \alpha\cdot(\beta+1) &= \alpha\cdot\beta+\alpha\\
\forall\alpha \text{ ordinal } \forall\lambda \text{ ordinal límit}, \ \alpha\cdot\lambda &= \sup\{\alpha\cdot\beta \mid \beta<\lambda\}
\end{aligned}$$

461. Aquestes definicions fan la suma i la multiplicació d'ordinals consistents amb les de naturals que coneixem i a més coincideix amb la que vam donar més informalment aquí(406) i aquí(412). Defineixen la mateixa cosa.

462. La potenciació d'ordinals queda definida com:

$$\begin{aligned}
\forall\alpha \text{ ordinal}, \ \alpha^0 &= 1\\
\forall\alpha\forall\beta \text{ ordinals}, \ \alpha^{\beta+1} &= \alpha^\beta\cdot\alpha\\
\forall\alpha \text{ ordinal } \forall\lambda \text{ ordinal límit}, \ \alpha^\lambda &= \sup\left\{\alpha^\beta \mid \beta<\lambda\right\}
\end{aligned}$$

I també és una extensió de la potenciació de nombres naturals entesa com una multiplicació repetida.

463. És interessant que en aquest cas aquesta operació és inconsistent amb la potenciació de nombres cardinals tal com l'havíem definit; per una banda: $2^\omega = \sup\left\{2^i \mid i<\omega\right\} = \sup\{1,2,4,8,16,32,\ldots\} = \omega$, mentre que alhora: $2^{|\omega|} = 2^{\aleph_0} = \beth_1 > \aleph_0 = |\omega|$.

464. La potenciació de nombres ordinals i la de nombres cardinals són ambdues extensions de la de nombres naturals, la primera entesa com a multiplicació iterada i l'altra com a cardinalitat del conjunt potència, però resulten ser operacions completament diferents.