Introdução à Simulação baseada em Eventos Discretos

Desempenho e Dimensionamento de Redes

Prof. Amaro de Sousa (asou@ua.pt)

DETI-UA, 2017/2018

Simulação baseada em eventos discretos

Modelação da evolução temporal de um sistema, através de uma representação na qual as variáveis que descrevem o estado do sistema *mudam de valor em instantes discretos no tempo*. Os instantes de tempo são aqueles em que ocorre um *evento*.

Elementos de um programa de simulação:

(1) Variáveis de estado: descrevem o estado do sistema

(2) Contadores estatísticos: variáveis que armazenam informação estatística relativa ao desempenho do sistema

(3) Relógio de simulação: variável que indica, em cada instante, o tempo de simulação (tempo de simulação ≠ tempo de computação)

(4) Eventos: tipos de ocorrências instantâneas que alteram o estado do sistema e/ou os contadores estatísticos

(5) Lista de eventos: lista onde são armazenados os instantes de ocorrência dos eventos futuros

Estrutura básica de um simulador baseado em eventos discretos

(1) Inicializa as variáveis de estado, os contadores estatísticos e a lista de eventos com o(s) primeiro(s) evento(s);

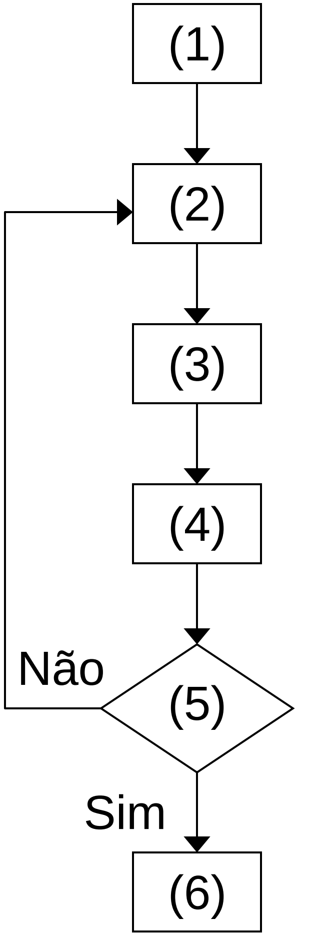
(2) Determina qual o próximo evento da lista de eventos;

(3) Avança o relógio de simulação para o instante de ocorrência desse evento;

(4) Executa as ações associadas a esse evento (geração de novos eventos e atualização das variáveis de estado e dos contadores estatísticos);

(5) Determina se a simulação deve terminar; se não, retorna ao passo (2);

(6) Atualiza os contadores estatísticos e determina as estimativas de interesse.



Exemplo:
Simulador de um servidor de *video-streaming*

Parâmetros de entrada do simulador:

(1) Tempo entre pedidos de filmes: variável exponencialmente distribuída com média 60 minutos

(2) Duração média dos filmes: variável exponencialmente distribuída com média 90 minutos

(3) Capacidade da ligação de rede do servidor = *2* filmes

Critério de paragem de simulação:

Instante de tempo do 4º pedido de filme (este pedido conta para os contadores estatísticos)

Medidas de desempenho que se pretende estimar:

(1) Probabilidade de bloqueio: percentagem de pedidos de filmes que são recusados porque a ligação de rede está completamente ocupada

(2) Ocupação média da ligação de rede (em número de filmes)

Exemplo:
Simulador de um servidor de *video-streaming*

Eventos:

CHEGADA: pedido de um filme

PARTIDA: terminação de um filme em transmissão

Variáveis de estado:

ESTADO: número de filmes em transmissão

Contadores estatísticos:

OCUPAÇÃO: integral da ocupação da ligação (em número de filmes) desde o início da simulação até ao instante presente

P_RECUSADOS: número de pedidos de filmes recusados até ao instante presente

PEDIDOS: número de pedidos de filmes até ao instante presente

Instante *t* = 0,0
Início da Simulação

LISTA DE EVENTOS
CHEGADA - 63 min

Relógio de Simulação: 0

Variável de Estado:

ESTADO
0

Contadores Estatísticos:

OCUPAÇÃO
0

P_RECUSADOS
0

PEDIDOS
0

Instante *t* = 63 (Primeira CHEGADA)

Relógio de Simulação: 63

LISTA DE EVENTOS
CHEGADA – 63 min
CHEGADA - 117 min
PARTIDA - 153 min

Variável de Estado:

ESTADO
1

Contadores Estatísticos:

OCUPAÇÃO
0

$\leftarrow 0 + 0 \times (63 - 0{,}0)$

P_RECUSADOS
0

$\leftarrow 0 + 0$

PEDIDOS
1

Instante *t* = 117 (Segunda CHEGADA)

Relógio de Simulação: 117

Variável de Estado: ESTADO 2

Contadores Estatísticos:

OCUPAÇÃO 54 $\leftarrow 0 + 1 \times (117 - 63)$

P_RECUSADOS 0 $\leftarrow 0 + 0$

PEDIDOS 2

LISTA DE EVENTOS

CHEGADA - 63 min

CHEGADA - 117 min

CHEGADA - 150 min

PARTIDA - 153 min

PARTIDA - 207 min

Instante *t* = 150 (Terceira CHEGADA)

Relógio de Simulação: 150

LISTA DE EVENTOS
CHEGADA - 63 min
CHEGADA - 117 min
CHEGADA - 150 min
PARTIDA - 153 min
CHEGADA - 204 min
PARTIDA - 207 min

Variável de Estado: ESTADO 2

Contadores Estatísticos:

OCUPAÇÃO 120 $\leftarrow 54 + 2 \times (150 - 117)$

P_RECUSADOS 1 $\leftarrow 0 + 1$

PEDIDOS 3

Instante t = 153 (Primeira PARTIDA)

Relógio de Simulação: 153

Variável de Estado: ESTADO 1

Contadores Estatísticos:

OCUPAÇÃO 126 $\leftarrow 120 + 2 \times (153 - 150)$

P_RECUSADOS 1

PEDIDOS 3

LISTA DE EVENTOS

~~CHEGADA - 63 min~~
~~CHEGADA - 117 min~~
~~CHEGADA - 150 min~~
~~PARTIDA - 153 min~~
CHEGADA - 204 min
PARTIDA - 207 min

Instante t = 204 (Quarta CHEGADA)

Fim da Simulação

Relógio de Simulação: 204

Variável de Estado: ESTADO 2

Contadores Estatísticos:

OCUPAÇÃO 177 $\leftarrow 126 + 1 \times (204 - 153)$

P_RECUSADOS 1

PEDIDOS 4

LISTA DE EVENTOS

CHEGADA - 63 min

CHEGADA - 117 min

CHEGADA - 150 min

PARTIDA - 153 min

CHEGADA - 204 min

PARTIDA - 207 min

Probabilidade de bloqueio:

P_RECUSADOS / PEDIDOS = 1/4 = 25%

Ocupação média da ligação:

OCUPAÇÃO / t = 177/204 = 0,87 filmes

Geração de valores aleatórios com distribuição uniforme entre 0 e 1

Os geradores mais populares são os *geradores lineares congruenciais* (LCG - *Linear Congruential Generator*)

Método de geração:

(1) Geram-se os inteiros Z_1, Z_2, … de acordo com a fórmula recursiva

$$Z_i = (aZ_{i-1} + c)(\mathrm{mod}\, m)$$

onde m, a, c e Z_0 são inteiros não-negativos

(2) Faz-se $U_i = Z_i / m$

Os números U_i parecem ser uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]

Exemplo

Exemplo: $Z_i = (5Z_{i-1} + 3)(\text{mod } 16)$

$Z_0 = 7$

i	Z_i	U_i	i	Z_i	U_i
0	7	----	10	9	0.563
1	6	0.375	11	0	0.000
2	1	0.063	12	3	0.188
3	8	0.500	13	2	0.125
4	11	0.688	14	13	0.813
5	10	0.625	15	4	0.250
6	5	0.313	16	7	0.438
7	12	0.750	17	6	0.375
8	15	0.938	18	1	0.063
9	14	0.875	19	8	0.500

Este gerador tem período 16. O gerador do MATLAB tem período 2^{31}-1

Geração de valores com outras distribuições

Variáveis discretas:

Considere-se que a variável aleatória pode assumir os valores X_1, X_2, …, X_n. A probabilidade do valor X_i é $P(X = X_i) = f_i$.

Método:

- Dividir o intervalo [0,1] em *n* intervalos proporcionais a f_i, com $i = 1 \ldots n$
- Gerar um valor aleatório *U* em [0,1] com distribuição uniforme
- Retornar X_i se *U* estiver no *i*-ésimo intervalo

Por exemplo, a variável aleatória de Bernoulli *X* com $p(0) = 1/4$ e $p(1) = 3/4$ pode ser gerada pelo algoritmo:

(1) Gerar $U \sim U(0,1)$

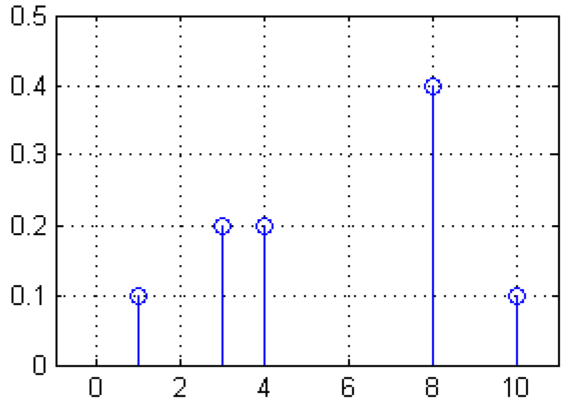
(2) Se $U \leq 1/4$, retornar $X = 0$; caso contrário, retornar $X = 1$

Geração de valores com outras distribuições

<u>*Variáveis discretas*</u> (exemplo MATLAB)

```
x= [1 3 4 8 10];
f= [0.1 0.2 0.2 0.4 0.1];

figure(1)
stem(x,f)
axis([-1 11 0 0.5])
grid on
```



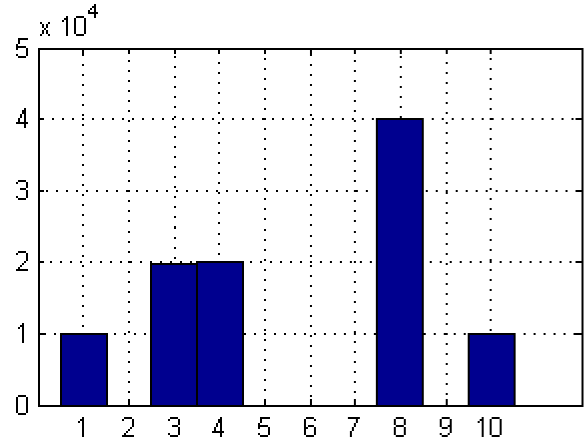

```
f_cum= cumsum(f)
```

```
f_cum =

    0.1   0.3   0.5   0.9   1.0
```

```
a= zeros(1,100000);
for it= 1:100000
    a(it)= x(sum(rand()>f_cum)+1);
end

figure(2)
hist(a,1:10)
Grid on
```



Geração de valores com outras distribuições

<u>*Variáveis contínuas*</u>:

Algoritmos mais populares baseiam-se no método da <u>transformação inversa</u>.

Considere $F(X)$ a função distribuição de uma variável aleatório contínua X. Considere $F^{-1}(U)$ a sua função inversa.

Método:

(1) Gerar U~U(0,1)

(2) Retornar $X = F^{-1}(U)$

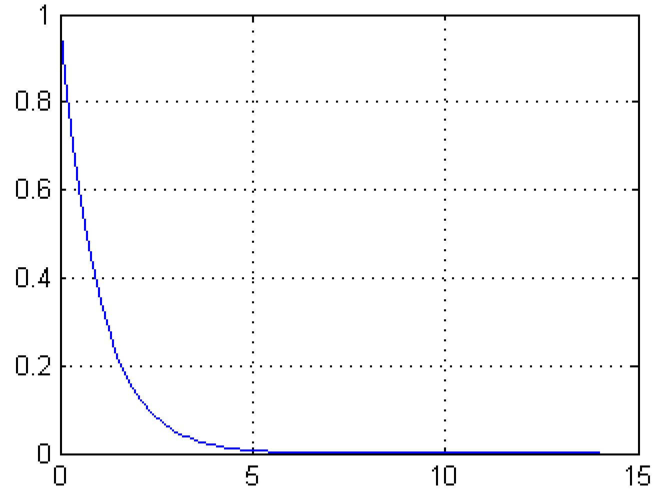
Por exemplo, numa variável aleatória com distribuição exponencial de média $1/\lambda$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$$

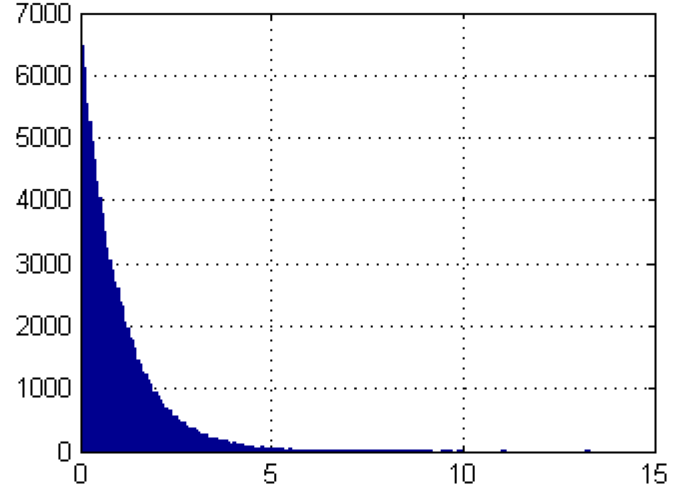
Geração de valores com outras distribuições

Variável exponencial (exemplo MATLAB)

```
x= 0:0.1:14;
f=exppdf(x,1)
figure(1)
plot(x,f)
grid on
```




```
a=exprnd(1,1,100000);
figure(2)
hist(a,200)
grid on
```



Análise dos resultados de uma simulação

Sejam X_1, X_2, …, X_n observações de variáveis aleatórias Independentes e Identicamente Distribuídas (IID) com média μ e variância ρ^2 finitas (resultado de diferentes réplicas da simulação do sistema).

A <u>*média amostral*</u> definida por

$$\overline{X}(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

é um estimador de μ.

A <u>*variância amostral*</u> definida por

$$S^2(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}(n)\right)^2}{n-1}$$

é um estimador de ρ^2.

A análise dos resultados de uma simulação é feita normalmente com base no <u>*teorema do limite central*</u>.

Análise dos resultados de uma simulação

Seja Z_n a variável aleatória dada por $$Z_n = \frac{\overline{X}(n) - \mu}{\sqrt{\sigma^2 / n}}$$

e seja $F_n(z)$ a função distribuição de Z_n para uma amostra de tamanho n.

O <u>*teorema do limite central*</u> enuncia que

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(z) = \Phi(z)$$

em que $\Phi(z)$ é a função distribuição de uma variável aleatória Guassiana (ou Normal) padrão (média nula e desvio padrão unitário).

Uma vez que $\lim_{n \to +\infty} S^2(n) = \rho^2$ então a v.a. $$\frac{\overline{X}(n) - \mu}{\sqrt{S^2(n) / n}}$$

tem uma distribuição aproximadamente Gaussiana padrão.

Análise dos resultados de uma simulação

Para n suficientemente elevado,

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}(n)-\mu}{\sqrt{S^2(n)/n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$P\left(\overline{X}(n)-z_{1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n} \leq \mu \leq \overline{X}(n)+z_{1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n}\right) \approx 1-\alpha$$

onde $z_{1-\alpha/2}$ é o ponto crítico da distribuição Gaussiana padrão

($z_{1-\alpha/2}$ é o valor de z tal que $P(x \leq z) = 1 - \alpha/2$ em que x é uma variável com distribuição Gaussiana padrão).

Assim, o intervalo de confiança aproximado a 100(1-α)% para μ é dado por

$$\overline{X}(n) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n}$$

Análise dos resultados de uma simulação

O intervalo de confiança aproximado a 100(1-α)% para μ é dado por

$$\overline{X}(n) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n}$$

Em MATLAB:

```
N = 20; %número de simulações
results= zeros(1,N); %vetor com os N resultados de simulação
for it= 1:N
       results(it)= simulator();
end

alfa= 0.1; %intervalo de confiança a 90%
media = mean(results);
termo = norminv(1-alfa/2)*sqrt(var(results)/N);

fprintf('resultado = %.2e +- %.2e\n',media,termo)
```

Análise dos resultados de uma simulação

O teorema do limite central requer que as variáveis X_1, X_2, …, X_n sejam independentes e identicamente distribuídas (IID).

- Uma das formas de garantir a independência é replicar a simulação em que cada réplica é iniciada com números aleatórios distinto dando assim origem a observações independentes.

Em geral, os processos estocásticos têm regimes transitórios (que dependem das condições iniciais) antes de atingir o regime estacionário.

- Para garantir que os parâmetros de desempenho são corretamente calculados, é necessário deixar *aquecer* a simulação (*warm-up*) dando tempo para que os regimes transitórios iniciais se extingam.
- Se o tempo simulado for muito superior ao tempo de *warm-up*, os contadores estatísticos podem ser inicializados no início da simulação.
- Se não, os contadores estatísticos devem ser inicializados apenas após o tempo de warm-up (que deverá ser previamente estimado).