



Resolução de Exercícios de Revisão

Desempenho e Dimensionamento de Redes

Prof. Amaro de Sousa (asou@ua.pt)

DETI-UA, 2017/2018

Exercício 1

Numa ligação sem fios (wireless) entre dois equipamentos, a probabilidade dos pacotes de dados serem recebidos com erros é de 0.1% em condições normais ou de 10% quando há interferências. A probabilidade de haver interferência é de 2%. Os equipamentos têm a capacidade de verificar na receção se os pacotes de dados foram recebidos com erros ou não.

- (a) Se uma mensagem for recebida com erros, qual a probabilidade da ligação estar com interferência.
- (b) Os terminais decidem que a ligação está com interferência quando recebem 2 pacotes seguidos com erros. Qual a probabilidade desta decisão estar correta?

Exercício 1 - resolução

(a) Se uma mensagem for recebida com erros, qual a probabilidade da ligação estar com interferência.

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)}$$

F_1 – estado normal

E – pacote recebido com erros

F_2 – estado em interferência

$$P(F_1) = 1 - P(F_2) = 98\% = 0.98 \quad P(F_2) = 2\% = 0.02$$

$$P(E|F_1) = 0.1\% = 0.001 \quad P(E|F_2) = 10\% = 0.1$$

$$\begin{aligned} P(F_2|E) &= \frac{P(E|F_2)P(F_2)}{P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2)} \\ &= \frac{0.1 \times 0.02}{0.001 \times 0.98 + 0.1 \times 0.02} = 0.671 = 67.1\% \end{aligned}$$

Exercício 1 - resolução

(b) Os terminais decidem que a ligação está com interferência quando recebem 2 pacotes seguidos com erros. Qual a probabilidade desta decisão estar correta?

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)}$$

F_1 – estado normal

E – 2 pacotes seguidos com erros

F_2 – estado em interferência

$$P(E|F_1) = 0.001 \times 0.001 = 10^{-6} \quad P(E|F_2) = 0.1 \times 0.1 = 0.01$$

$$\begin{aligned} P(F_2|E) &= \frac{P(E|F_2)P(F_2)}{P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2)} \\ &= \frac{0.01 \times 0.02}{10^{-6} \times 0.98 + 0.01 \times 0.02} = 0.995 = 99.5\% \end{aligned}$$

Exercício 2

Considere um sistema de transmissão de pacotes ponto-a-ponto de 64 Kbps. Os pacotes têm um tamanho exponencialmente distribuído com média de 500 Bytes e a chegada de pacotes é um processo de Poisson com taxa de 4 pacotes/segundo. Calcule a capacidade mínima da fila de espera (em número de pacotes) para que a taxa de pacotes perdidos seja menor que 2%.

Exercício 2 - resolução

Este sistema é um M/M/1/X em que X é a capacidade do sistema (a capacidade da fila de espera é $X - 1$). Pela propriedade PASTA, a taxa de pacotes perdidos é igual à probabilidade do sistema estar cheio:

$$\lambda = 4 \text{ pac/s}$$

$$\mu = 64000/(500 \times 8) = 16 \text{ pac/s}$$

$$\lambda / \mu = 4/16 = 0.25$$

$$P_X = \frac{\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{X-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_X}}{1 + \sum_{n=1}^X \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right)} = \frac{\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{X-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_X}}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{X-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_X}} = \frac{0.25^X}{1 + 0.25 + 0.25^2 + \dots + 0.25^X}$$

$$X = 1 \Rightarrow P_1 = 0.2 = 20\% > 2\%$$

$$X = 2 \Rightarrow P_2 = 0.0476 = 4.76\% > 2\%$$

$$X = 3 \Rightarrow P_3 = 0.0118 = 1.18\% < 2\%$$

Assim, é necessário que a fila de espera tenha capacidade para $X - 1 = 2$ pacotes.

Exercício 3

Considere um sistema de transmissão ponto-a-ponto de 128 kbps que suporta dois fluxos de pacotes:

- no fluxo 1, os pacotes têm um tamanho constante de 128 Bytes e a chegada de pacotes é um processo de Poisson com taxa de 30 pacotes/segundo;
- no fluxo 2, os pacotes têm um tamanho constante de 512 Bytes e a chegada de pacotes é um processo de Poisson com taxa de 10 pacotes/segundo.

Os fluxos são multiplexados estatisticamente numa fila de espera muito grande.

- a) Indique justificando que tipo de fila de espera modela o desempenho deste sistema de transmissão.
- b) Calcule o atraso médio no sistema dos pacotes de cada fluxo.

Exercício 3 - resolução

a) Este sistema é modelado por uma fila de espera M/G/1:

- a soma de 2 processos de Poisson é um processo de Poisson e, assim, o processo de chegada de pacotes é um processo de Poisson (‘M’ em M/G/1) com taxa $30 + 10 = 40$ pps;
- o tempo de transmissão dos pacotes é genérico (‘G’ em M/G/1) porque a distribuição dos tamanhos não segue uma distribuição comum (o tamanho dos pacotes é 128 Bytes com probabilidade 75% e 512 Bytes com probabilidade 25%);
- o número de servidores é um (‘1’ em M/G/1) pois o canal de transmissão é usado para transmitir um pacote de cada vez;
- como o sistema tem uma fila de espera muito grande, a notação relativa à capacidade do sistema é omissa (considera-se que o sistema tem capacidade infinita).

b) $S_1 = (128 \times 8)/128000 = 8 \times 10^{-3}$ seg $S_2 = (512 \times 8)/128000 = 32 \times 10^{-3}$ seg

$$E[S] = 0.75 \times 8 \times 10^{-3} + 0.25 \times 32 \times 10^{-3} = 14 \times 10^{-3}$$

$$E[S^2] = 0.75 \times (8 \times 10^{-3})^2 + 0.25 \times (32 \times 10^{-3})^2 = 0.304 \times 10^{-3}$$

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} = \frac{40 \times 0.304 \times 10^{-3}}{2(1 - 40 \times 14 \times 10^{-3})} = 14.3 \text{ ms}$$

$$W_1 = W_Q + S_1 = 14.3 + 8 = 22.3 \text{ ms}$$

$$W_2 = W_Q + S_2 = 14.3 + 32 = 46.3 \text{ ms}$$

Exercício 4

Considere uma ligação ponto-a-ponto de 64 kbps partilhada por 3 fluxos de pacotes:

- o fluxo A gera pacotes de tamanho constante de 200 bytes a uma taxa de Poisson de 10 pacotes/s.
- o fluxo B gera pacotes de tamanho exponencialmente distribuído com média de 500 bytes a uma taxa de Poisson de 2 pacotes/s.
- o fluxo C gera pacotes de tamanho exponencialmente distribuído com média de 500 bytes a uma taxa de Poisson de 6 pacotes/s.

A fila de espera tem tamanho infinito e atribui maior prioridade ao fluxo A e menor prioridade aos fluxos B e C (segundo um mecanismo de priorização estrita não-preemptiva).

Determine o atraso médio dos pacotes para cada um dos 3 fluxos.

Exercício 4 - resolução

Os fluxos B e C têm a mesma prioridade e o mesmo tamanho médio de pacotes pelo que são considerados um único fluxo BC com taxa de chegada de pacotes igual à soma das taxas de chegada dos dois fluxos.

$$W_{Q^k} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i E(S_i^2)}{2(1 - \rho_1 - \dots - \rho_{k-1})(1 - \rho_1 - \dots - \rho_k)} \quad \text{onde} \quad \rho_k = \lambda_k / \mu_k$$

$$\begin{aligned} \lambda_A &= 10 \text{ pac/s} & \mu_A &= 64000/(200 \times 8) = 40 \text{ pac/s} & \rho_A &= \lambda_A / \mu_A = 0.25 \\ \lambda_{BC} &= 6+2 = 8 \text{ pac/s} & \mu_{BC} &= 64000/(500 \times 8) = 16 \text{ pac/s} & \rho_{BC} &= \lambda_{BC} / \mu_{BC} = 0.5 \end{aligned}$$

$$E(S_A^2) = \text{VAR}(S_A) + E(S_A)^2 = 0^2 + (1/\mu_A)^2 = 625 \times 10^{-6}$$

$$E(S_{BC}^2) = \text{VAR}(S_{BC}) + E(S_{BC})^2 = (1/\mu_{BC})^2 + (1/\mu_{BC})^2 = 2 \times (1/\mu_{BC})^2 = 7812.5 \times 10^{-6}$$

$$W_A = \frac{\lambda_A E(S_A^2) + \lambda_{BC} E(S_{BC}^2)}{2(1 - \rho_A)} + \frac{1}{\mu_A} = 70.8 \text{ ms}$$

$$W_B = W_C = W_{BC} = \frac{\lambda_A E(S_A^2) + \lambda_{BC} E(S_{BC}^2)}{2(1 - \rho_A)(1 - \rho_A - \rho_{BC})} + \frac{1}{\mu_{BC}} = 154.2 \text{ ms}$$

Exercício 5

Considere uma ligação ponto-a-ponto de 128 Kbps. Chegam a esta ligação dois fluxos de chamadas de Poisson ambos com taxas de 2 chamadas/hora. Cada chamada ocupa uma capacidade de 64 Kbps no fluxo 1 e 128 Kbps no fluxo 2. As chamadas têm duração exponencialmente distribuída com média de 3 minutos no fluxo 1 e 6 minutos no fluxo 2.

Determine:

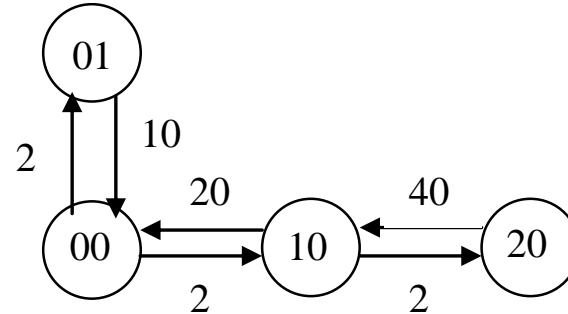
- a) a cadeia de Markov que representa o estado da ligação,
- b) a probabilidade de bloqueio de cada fluxo,
- c) a taxa de ocupação da ligação.

Exercício 5 - resolução

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ chamadas/hora

$\mu_1 = 60/3 = 20$ chamadas/hora

$\mu_2 = 60/6 = 10$ chamadas/hora



b) $\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 2/20 = 0.1$ Erl.

$\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 2/10 = 0.2$ Erl.

$$B_k = 1 - \frac{\sum_{\mathbf{n} \in S_k} \prod_{l=1}^K \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!}}{\sum_{\mathbf{n} \in S} \prod_{l=1}^K \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!}}$$

$$P_1 = 1 - \frac{\frac{0.1^0 0.2^0}{0!0!} + \frac{0.1^1 0.2^0}{1!0!}}{\frac{0.1^0 0.2^0}{0!0!} + \frac{0.1^1 0.2^0}{1!0!} + \frac{0.1^2 0.2^0}{2!0!} + \frac{0.1^0 0.2^1}{0!1!}} = 15.7\%$$

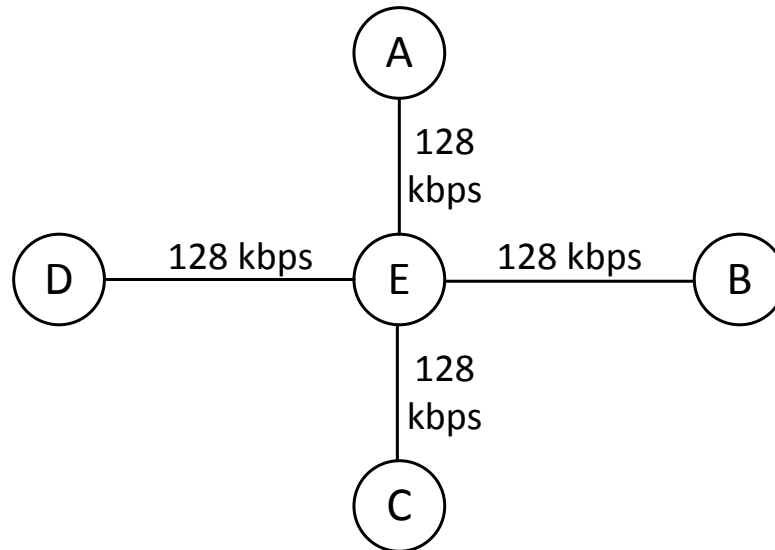
$$P_2 = 1 - \frac{\frac{0.1^0 0.2^0}{0!0!}}{\frac{0.1^0 0.2^0}{0!0!} + \frac{0.1^1 0.2^0}{1!0!} + \frac{0.1^2 0.2^0}{2!0!} + \frac{0.1^0 0.2^1}{0!1!}} = 23.4\%$$

c)

$$0 \times P(00) + 0.5 \times P(10) + 1 \times P(20) + 1 \times P(01) = \frac{0 \times \frac{0.1^0 0.2^0}{0!0!} + 0.5 \times \frac{0.1^1 0.2^0}{1!0!} + 1 \times \frac{0.1^2 0.2^0}{2!0!} + 1 \times \frac{0.1^0 0.2^1}{0!1!}}{\frac{0.1^0 0.2^0}{0!0!} + \frac{0.1^1 0.2^0}{1!0!} + \frac{0.1^2 0.2^0}{2!0!} + \frac{0.1^0 0.2^1}{0!1!}} = 19.5\%$$

Exercício 6

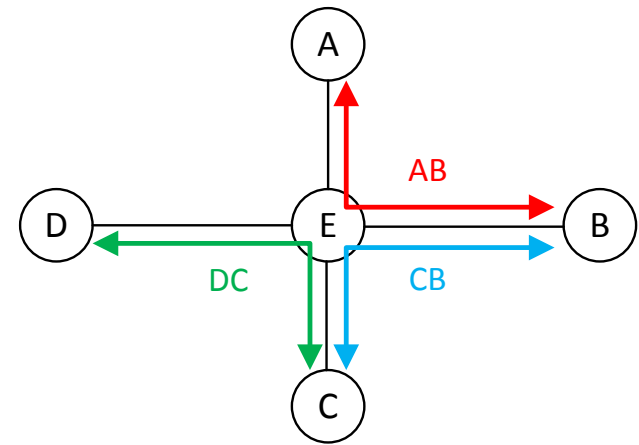
Considere a rede com comutação de circuitos da figura seguinte. A rede suporta três sessões de chamadas: AB, CB e DC. As chamadas das três sessões chegam de acordo com um processo de Poisson com taxas $\lambda_{AB} = 2$ chamadas/hora, $\lambda_{CB} = 1$ chamada/hora e $\lambda_{DC} = 5$ chamadas/hora. Em todas as sessões, as chamadas requerem uma largura de banda de 64 Kbps e a duração de cada chamada é exponencialmente distribuída com média de 3 minutos. Determine os limites superiores para a probabilidade de bloqueio de cada sessão com base no teorema do limite do produto.



Exercício 6 - resolução

Teorema do Limite do Produto:

$$\bar{\rho}_j = \sum_{k \in K_j} \rho_k \quad B_k \leq 1 - \prod_{j \in R_k} (1 - ER[\bar{\rho}_j, C_j])$$



$$\rho_{AB} = \frac{2 \times 3}{60} = 0.1 \text{ Erlangs}$$

$$\rho_{CB} = \frac{1 \times 3}{60} = 0.05 \text{ Erlangs}$$

$$\rho_{DC} = \frac{5 \times 3}{60} = 0.25 \text{ Erlangs}$$

$$P_{AB} \leq 1 - (1 - ER[\rho_{AB}, 2])(1 - ER[\rho_{AB} + \rho_{CB}, 2])$$

$$P_{AB} \leq 1 - \left(1 - \frac{\frac{0.1^2}{2!}}{\frac{0.1^0}{0!} + \frac{0.1^1}{1!} + \frac{0.1^2}{2!}} \right) \left(1 - \frac{\frac{0.15^2}{2!}}{\frac{0.15^0}{0!} + \frac{0.15^1}{1!} + \frac{0.15^2}{2!}} \right) = 0.0142 = 1.42\%$$

$$P_{CB} \leq 1 - (1 - ER[\rho_{CB} + \rho_{DC}, 2])(1 - ER[\rho_{AB} + \rho_{CB}, 2])$$

$$P_{CB} \leq 1 - \left(1 - \frac{\frac{0.3^2}{2!}}{\frac{0.3^0}{0!} + \frac{0.3^1}{1!} + \frac{0.3^2}{2!}} \right) \left(1 - \frac{\frac{0.15^2}{2!}}{\frac{0.15^0}{0!} + \frac{0.15^1}{1!} + \frac{0.15^2}{2!}} \right) = 0.0428 = 4.28\%$$

$$P_{DC} \leq 1 - (1 - ER[\rho_{DC}, 2])(1 - ER[\rho_{CB} + \rho_{DC}, 2])$$

$$P_{DC} \leq 1 - \left(1 - \frac{\frac{0.25^2}{2!}}{\frac{0.25^0}{0!} + \frac{0.25^1}{1!} + \frac{0.25^2}{2!}} \right) \left(1 - \frac{\frac{0.3^2}{2!}}{\frac{0.3^0}{0!} + \frac{0.3^1}{1!} + \frac{0.3^2}{2!}} \right) = 0.0570 = 5.70\%$$

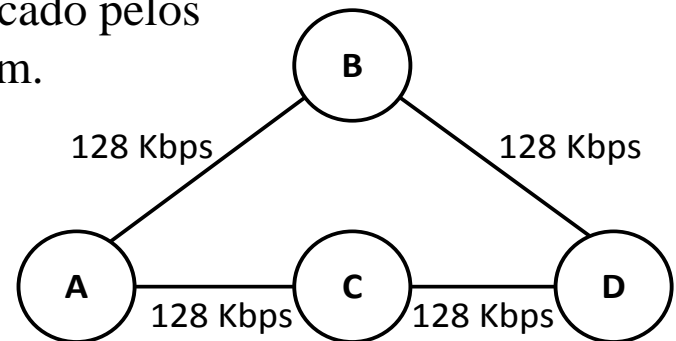
Exercício 7

Considere a rede com comutação de pacotes da figura. Inicialmente, a rede serve um fluxo de 24 pacotes/s no percurso direto $A \rightarrow B$ e um de fluxo 3 pacotes/s no percurso direto $A \rightarrow C$. É oferecido um novo fluxo de 10 pacotes/s de A para D. Todos os fluxos são caracterizados por intervalos entre chegadas e comprimentos de pacotes independentes e exponencialmente distribuídos, e o comprimento médio dos pacotes é de 250 bytes.

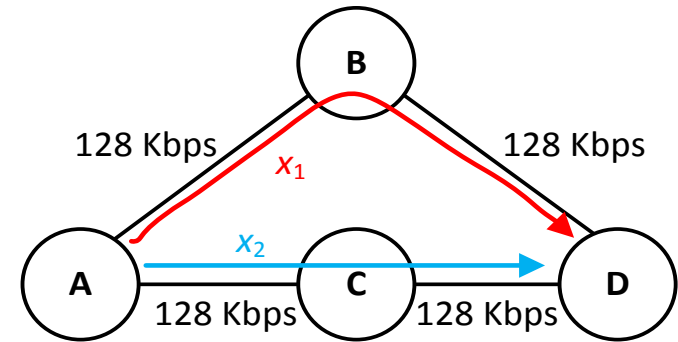
a) Admita que o novo fluxo $A \rightarrow D$ é encaminhado em igual percentagem pelos dois percursos possíveis. Determine pela aproximação de Kleinrock o atraso médio que os pacotes de cada fluxo sofrem na rede.

b) Admita que o novo fluxo $A \rightarrow D$ pode ser bifurcado pelos dois percursos possíveis em qualquer percentagem.

Determine o sistema de equações cuja resolução permite calcular a bifurcação do novo fluxo que minimiza o atraso médio total da rede.



Exercício 7 - resolução



a) O atraso médio do fluxo s é dado por:

$$W_s = \sum_{(i,j) \in R_s} \left(\frac{1}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} + d_{ij} \right)$$

$x_1 = 5$ pps, $x_2 = 5$ pps, d_{ij} nulos. Em todas as ligações temos $\mu = \frac{128000}{250 \times 8} = 64$ pps

$$W_{AB} = \frac{1}{64 - (24 + 5)} = 28.6 \text{ ms}$$

$$W_{AC} = \frac{1}{64 - (3 + 5)} = 17.9 \text{ ms}$$

$$W_{AD} = 50\% \left(\frac{1}{64 - (24 + 5)} + \frac{1}{64 - 5} \right) + 50\% \left(\frac{1}{64 - (3 + 5)} + \frac{1}{64 - 5} \right) = 40.2 \text{ ms}$$

$$b) \quad L = L_{AB} + L_{AC} + L_{BD} + L_{CD} = \frac{x_1 + 24}{64 - (x_1 + 24)} + \frac{x_2 + 3}{64 - (x_2 + 3)} + \frac{x_1}{64 - x_1} + \frac{x_2}{64 - x_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{64}{(40 - x_1)^2} + \frac{64}{(64 - x_1)^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{64}{(61 - x_2)^2} + \frac{64}{(64 - x_2)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{64}{(40 - x_1)^2} + \frac{64}{(64 - x_1)^2} = \frac{64}{(61 - x_2)^2} + \frac{64}{(64 - x_2)^2} \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

Exercício 8

Considere uma ligação de 2 Mbps que serve três fluxos de pacotes (A, B e C) com o algoritmo de escalonamento *Deficit Round Robin* e um limiar de 1200 bytes para cada fluxo.

- No fluxo A, chegam 3 pacotes: pacote 1 de 800 Bytes no instante 0 ms, pacote 2 de 700 Bytes no instante 12 ms e pacote 3 de 200 Bytes no instante 15 ms.
- No fluxo B, chegam 2 pacotes: pacote 1 de 500 Bytes no instante 5 ms e pacote 2 de 600 Bytes no instante 6 ms.
- No fluxo C, chegam 2 pacotes: pacote 1 de 1000 Bytes no instante 0 ms e pacote 2 de 1300 Bytes no instante 4 ms.

O ciclo segue a sequência $A \rightarrow B \rightarrow C$ e o algoritmo decide no início de cada ciclo os pacotes a enviar e respetiva ordem. Determine que pacotes e por que ordem são enviados em cada ciclo.

Exercício 8 - resolução

- Fluxo A: pacote 1 de 800 Bytes no instante 0 ms
 pacote 2 de 700 Bytes no instante 12 ms
 pacote 3 de 200 Bytes no instante 15 ms
 - Fluxo B: pacote 1 de 500 Bytes no instante 5 ms
 pacote 2 de 600 Bytes no instante 6 ms
 - Fluxo C: pacote 1 de 1000 Bytes no instante 0 ms
 pacote 2 de 1300 Bytes no instante 4 ms
-

1º ciclo: Início: 0 ms

Pacotes: A.1 → C.1 Créditos: Fluxo A = $1200 - 800 = 400$ Bytes
 Fluxo B = 0 Bytes
 Fluxo C = $1200 - 1000 = 200$ Bytes

2º ciclo: Início: $0 + 8 \times (800 + 1000) / 2000000 = 7.2$ ms

Pacotes: B.1 → B.2 → C.2 Créditos: Fluxo A = 0 Bytes
 Fluxo B = $1200 - (500 + 600) = 100$ Bytes
 Fluxo C = $(200 + 1200) - 1300 = 100$ Bytes

3º ciclo: Início: $7.2 + 8 \times (500 + 600 + 1300) / 2000000 = 16.8$ ms

Pacotes: A.2 → A.3 Créditos: Fluxo A = $1200 - (700 + 200) = 300$ Bytes
 Fluxo B = 0 Bytes
 Fluxo C = 0 Bytes