



# **Revisões sobre Probabilidades, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos**

Desempenho e Dimensionamento de Redes

Prof. Amaro de Sousa (asou@ua.pt)

DETI-UA, 2017/2018

# Experiência aleatória

- Numa experiência aleatória, o espaço de resultados,  $S$ , é o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência
- Qualquer subconjunto  $E$  do espaço de resultados  $S$  designa-se por evento ou acontecimento
- Dados dois acontecimentos  $E$  e  $F$ , podem-se definir outros acontecimentos:

A união dos acontecimentos,  $E \cup F$

A intersecção dos acontecimentos,  $EF$

- Quando  $EF = \emptyset$  ( $\emptyset$  é o conjunto vazio) os acontecimentos dizem-se mutuamente exclusivos
- O complemento de  $E$ ,  $E^c$ , é o conjunto de elementos de  $S$  que não pertencem a  $E$

# Probabilidades definidas sobre acontecimentos

- Para cada acontecimento  $E$  de  $S$ , admite-se a existência de um número  $P(E)$  designado por probabilidade de  $E$ , que satisfaz as seguintes condições:

$$(1) 0 \leq P(E) \leq 1$$

$$(2) P(S) = 1$$

- (3) Para qualquer conjunto de acontecimentos mutuamente exclusivos  $E_1, E_2, E_3, \dots$

$$P\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i P(E_i)$$

- Corolários:

$$P(E) + P(E^c) = 1$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

# Probabilidades condicionadas

- Dados dois acontecimentos  $E$  e  $F$ , a probabilidade condicionada de  $E$  ocorrer dado que  $F$  ocorreu designa-se por  $P(E|F)$  e é dada por

$$P(E|F) = P(EF)/P(F)$$

- Dois acontecimentos  $E$  e  $F$  dizem-se acontecimentos independentes se

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

- Se  $E$  e  $F$  são independentes, então:

$$P(E|F) = P(E) \quad \text{e} \quad P(F|E) = P(F)$$

ou seja, se o conhecimento que um acontecimento ocorreu não afetar a probabilidade do outro ocorrer.

- Sejam  $F_1, F_2, \dots, F_n$  acontecimentos mutuamente exclusivos tais que a sua união forma o espaço de resultados  $S$ . Então,

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(EF_i) = \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)$$

# Regra de Bayes

Sejam  $F_1, F_2, \dots, F_n$  acontecimentos mutuamente exclusivos tais que a sua união forma o espaço de resultados  $S$ .

Tendo ocorrido o acontecimento  $E$ , a probabilidade de  $F_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ter ocorrido é dada por:

$$P(F_j | E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E | F_j)P(F_j)}{P(E)} = \frac{P(E | F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E | F_i)P(F_i)}$$

# Probabilidades condicionadas – Exemplo 1

Num teste de escolha múltipla, um estudante sabe a resposta certa com probabilidade  $p$  e adivinha a resposta com probabilidade  $1-p$ . Ao adivinhar a resposta, o estudante acerta com probabilidade  $1/m$ , sendo  $m$  o número de alternativas de escolha múltipla.

Determine a probabilidade de um estudante (a) responder corretamente e (b) saber a resposta dado que a respondeu corretamente.

Acontecimentos:  $E$  – o aluno responde corretamente

$F$  – o aluno sabe a resposta ( $F^c$  – não sabe a resposta)

$$\begin{array}{l|l} (a) P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = & (b) P(F|E) = P(E|F)P(F) / P(E) = \\ \quad = 1 \times p + 1/m \times (1 - p) = & \quad = 1 \times p / [p + (1 - p)/m] = \\ \quad = p + (1 - p)/m & \quad = p m / [1 + (m - 1) p] \end{array}$$

Se  $p = 50\%$  e  $m = 4$ , então (i)  $P(E) = 62.5\%$  e (ii)  $P(F|E) = 80\%$

## Probabilidades condicionadas – Exemplo 2

Numa ligação sem fios (wireless) entre dois equipamentos, a probabilidade dos pacotes de dados serem recebidos com erros é de 0.1% em condições normais ou de 10% quando há interferências. A probabilidade de haver interferência é de 2%. Os equipamentos têm a capacidade de verificar na receção se os pacotes de dados foram recebidos com erros ou não.

(a) Se uma mensagem for recebida com erros, qual a probabilidade da ligação estar com interferência.

(b) Os terminais decidem que a ligação está com interferência quando recebem 2 pacotes seguidas com erros. Qual a probabilidade desta decisão estar correta?

Fazer em casa!

# Variáveis aleatórias

- Uma variável aleatória  $X$  é uma função que atribui um número real a cada ponto do espaço de resultados  $S$  de uma experiência aleatória.
- A função distribuição (ou função de distribuição cumulativa) da v.a.  $X$  é:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

- Propriedades da função distribuição:

(1)  $0 \leq F(x) \leq 1$  para todo o  $x$

(2) se  $x_1 \leq x_2$  então  $F(x_1) \leq F(x_2)$  (função não decrescente)

(3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

(4)  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$  , para  $a < b$



# Variáveis aleatórias discretas

- Uma variável aleatória  $X$  diz-se discreta se puder tomar, quando muito, um número contável de valores  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$
- Define-se função probabilidade (ou função massa de probabilidade) da v.a discreta  $X$  por

$$f(x_i) = P(X = x_i) \quad \text{para todos os valores de } i = 1, 2, 3, \dots$$

- Obrigatoriamente, tem de acontecer que:  $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$
- A função distribuição da v.a discreta  $X$  é:

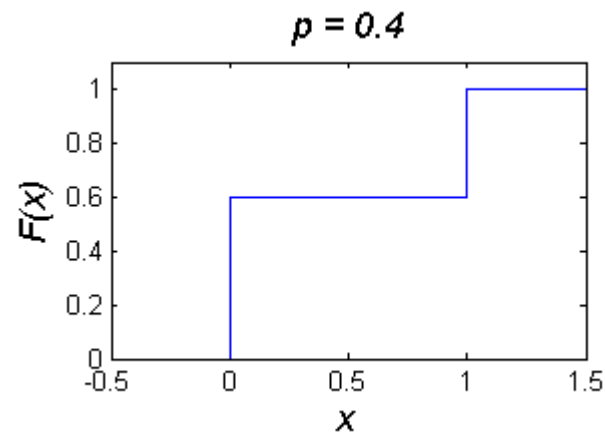
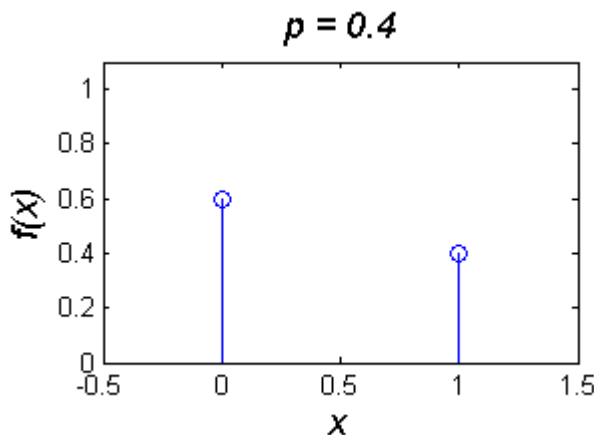
$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

# Variáveis aleatórias discretas

Variável aleatória de Bernoulli: experiência que pode resultar em sucesso com probabilidade  $p$  ou insucesso com probabilidade  $1 - p$ .

Se  $X = 1$  representar um sucesso e  $X = 0$  um insucesso, a função probabilidade é:

$$f(i) = p^i (1 - p)^{1-i}, i = 0, 1$$

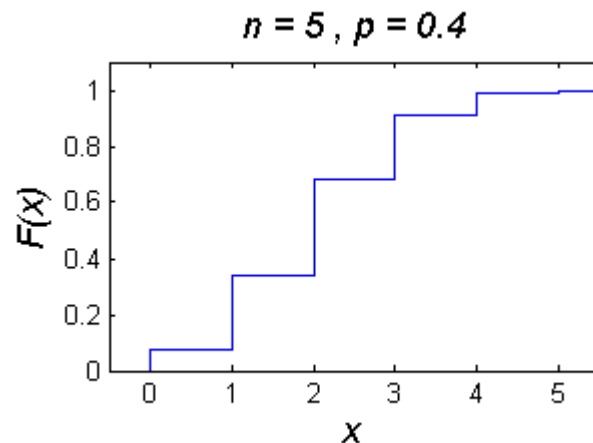
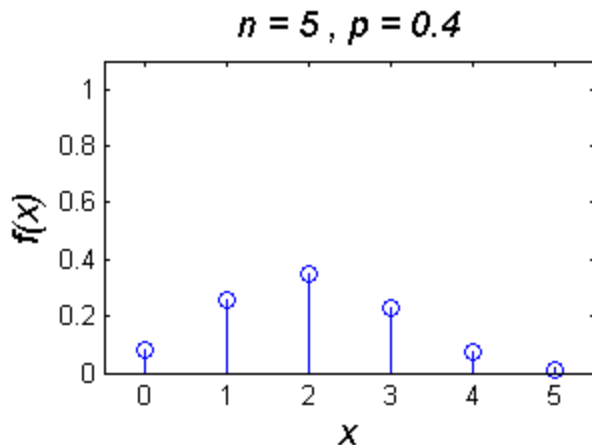


# Variáveis aleatórias discretas

Variável aleatória binomial: admita uma sequência de  $n$  experiências de Bernoulli independentes, cada uma das quais resulta num sucesso com probabilidade  $p$  ou num insucesso com probabilidade  $1 - p$ .

Se  $X$  representar o número de sucessos em  $n$  experiências, a função probabilidade é:

onde  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$   $f(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, i = 0, 1, 2, \dots, n$

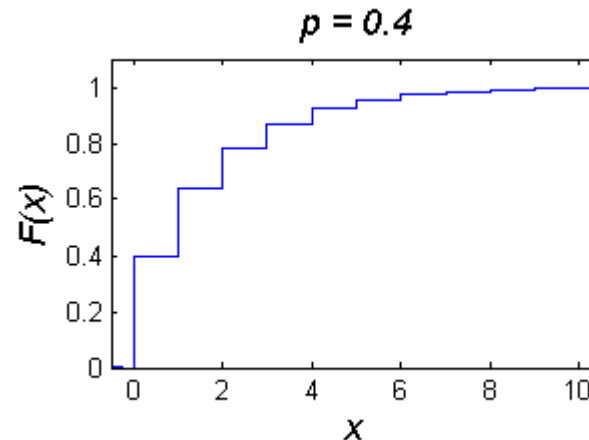
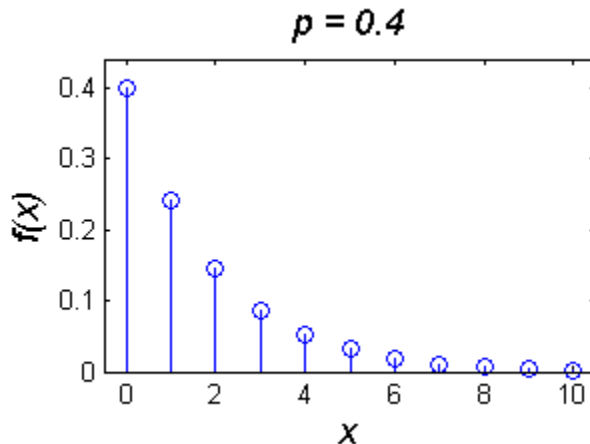


# Variáveis aleatórias discretas

Variável aleatória geométrica: admita que são realizadas experiências de Bernoulli independentes com parâmetro  $p$  (probabilidade de sucesso) até que ocorra um sucesso.

Se  $X$  representar o número de insucessos antes do primeiro sucesso, a função probabilidade é

$$f(i) = (1 - p)^i p, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$



Se  $X$  representar o número de experiências até ao primeiro sucesso, a função probabilidade é

$$f(i) = (1 - p)^{i-1} p, \quad i = 1, 2, \dots$$

## Variáveis aleatórias discretas – Exemplos 3 e 4

Considere a experiência aleatória do lançamento de 2 dados equilibrados. O resultado da experiência é dado pela soma das 2 faces que ficam para cima.

Determine a função probabilidade  $f(x)$  e a função distribuição  $F(x)$  da variável aleatória associada a esta experiência.

Numa dada ligação de dados, a probabilidade de erro de bit (BER – *Bit Error Rate*) no estado normal é dada por  $q$  e os erros em diferentes bits são estatisticamente independentes.

Determine: (i) a probabilidade de um pacote de dados de tamanho 100 Bytes ser recebido sem erros se  $q = 10^{-5}$ ; (ii) a probabilidade de um pacote de dados de 1000 Bytes ser recebido com 2 ou mais erros se  $q = 10^{-7}$ .

Fazer em casa!

# Variáveis aleatórias contínuas

- Uma variável aleatória  $X$  diz-se contínua se existir uma função não negativa  $f(x)$  tal que para qualquer conjunto de números reais  $B$ :

$$P(X \in B) = \int_B f(x) dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$f(x)$  é a função densidade de probabilidade da v.a contínua  $X$

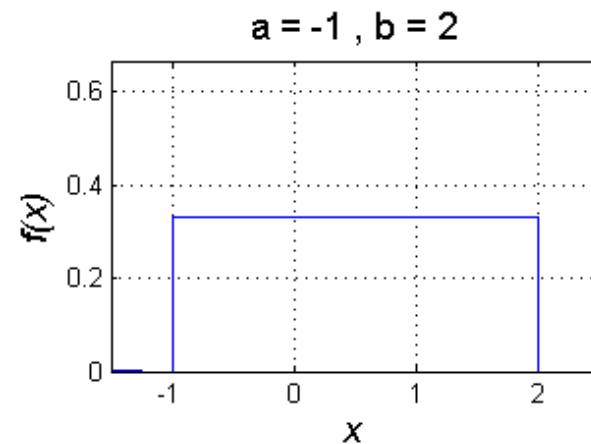
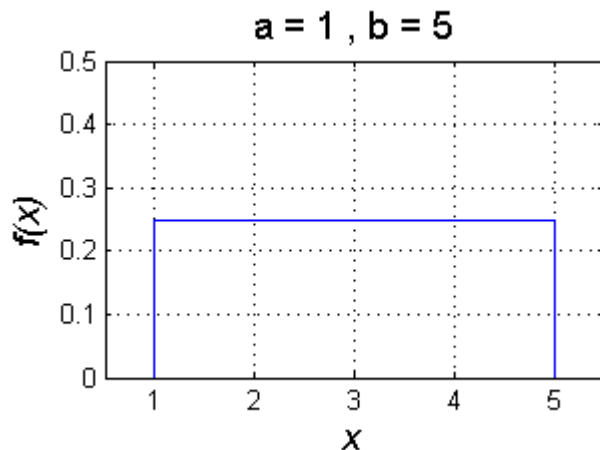
- Resulta então que:  $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx$
- A função distribuição da v.a contínua  $X$  é:

$$F(x) = P(X \in [-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

# Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

Variável aleatória com Distribuição Uniforme: uma v.a. diz-se uniformemente distribuída no intervalo  $[a,b]$  se a função densidade de probabilidade for dada por

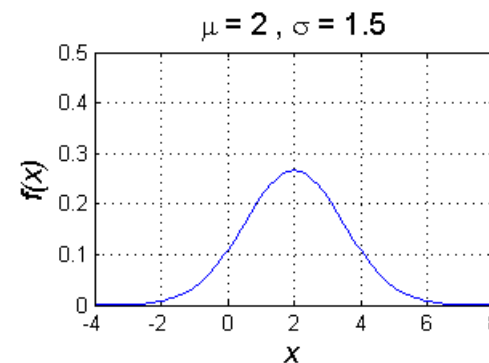
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & , \text{cc} \end{cases}$$



# Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

Variável aleatória com Distribuição Gaussiana (ou Normal): Uma v.a.  $X$  tem uma distribuição Gaussiana com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  se a função densidade é dada por:

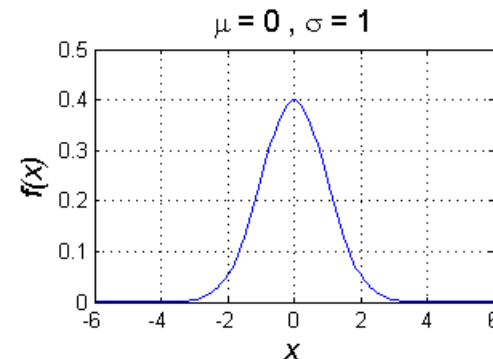
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



Designa-se por distribuição Gaussiana (ou Normal) padrão à distribuição Gaussiana com média 0 e desvio padrão 1.

Neste caso:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$





# Média de uma variável aleatória

- Média ou valor esperado de uma v.a.  $X$ :

$$E[X] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} x_j f_X(x_j) & \text{se } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx & \text{se } X \text{ continua} \end{cases}$$

- Propriedades importantes:

$$E[cX] = cE[X]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^n c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n c_i E[X_i]$$

- Média da v.a.  $Y = g(X)$ :

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) f_X(x_j) & \text{se } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{se } X \text{ continua} \end{cases}$$

# Variância de uma variável aleatória

- Variância de uma v.a.  $X$ :

$$\text{Var}[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = E[X^2] - E[X]^2$$

- Propriedades importantes:

$$\text{Var}[X] \geq 0$$

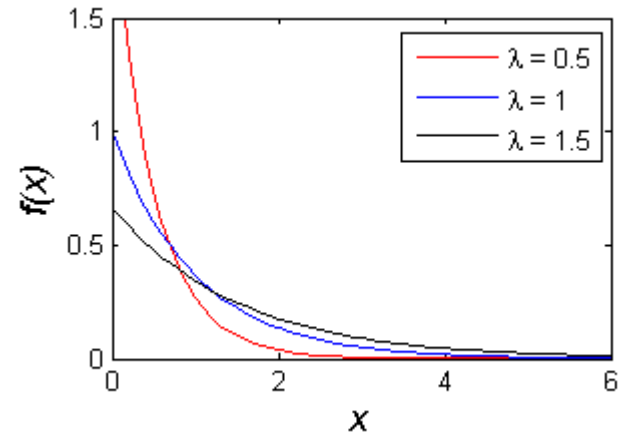
$$\text{Var}[cX] = c^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] \quad \text{se } X_i \text{ forem independentes}$$

# Distribuição exponencial

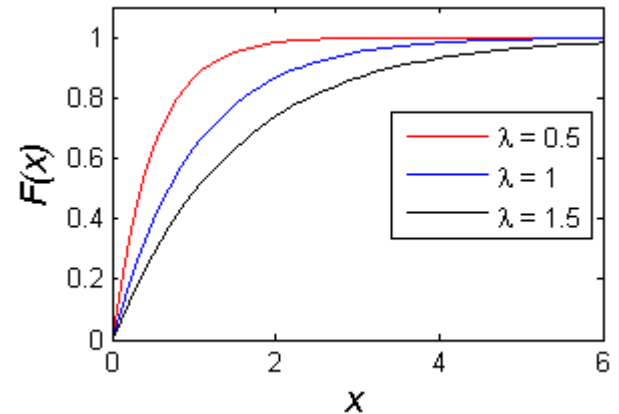
- Uma v. a.  $X$  tem uma distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , se a sua função densidade de probabilidade for:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



- A função de distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



# Distribuição exponencial

- A média e a variância de uma distribuição exponencial são:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- A distribuição exponencial não tem memória, isto é,

$$P\{X > s + t \mid X > t\} = P\{X > s\}$$

- Se  $X_1$  e  $X_2$  são v. a. independentes e exponencialmente distribuídas com médias  $1/\lambda_1$  e  $1/\lambda_2$  respetivamente, então

$$P\{X_1 < X_2\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

## Distribuição exponencial – Exemplo 5

Uma pessoa entra num banco e encontra os 2 empregados do banco ocupados a servir clientes. Não existem outros clientes no banco, pelo que a pessoa começará a ser atendida logo que um dos clientes que se encontra a ser atendido deixe o banco.

O empregado A serve os clientes segundo uma distribuição exponencial à taxa  $\lambda_A = 12$  clientes por hora e o empregado B serve os clientes segundo uma distribuição exponencial à taxa  $\lambda_B = 8$  clientes por hora. Determine a probabilidade da pessoa que entrou ser o segundo cliente a ser servido.

Evento A – o empregado A termina de servir o seu cliente antes do empregado B

Evento B – o empregado B termina de servir o seu cliente antes do empregado A

Evento C – a pessoa que entrou é o segundo cliente a ser servido

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C | A) \times P(A) + P(C | B) \times P(B) = \\ &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \times \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \times \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \\ &= \frac{12}{12 + 8} \times \frac{12}{12 + 8} + \frac{8}{12 + 8} \times \frac{8}{12 + 8} = 0.52 = 52\% \end{aligned}$$

# Processos estocásticos

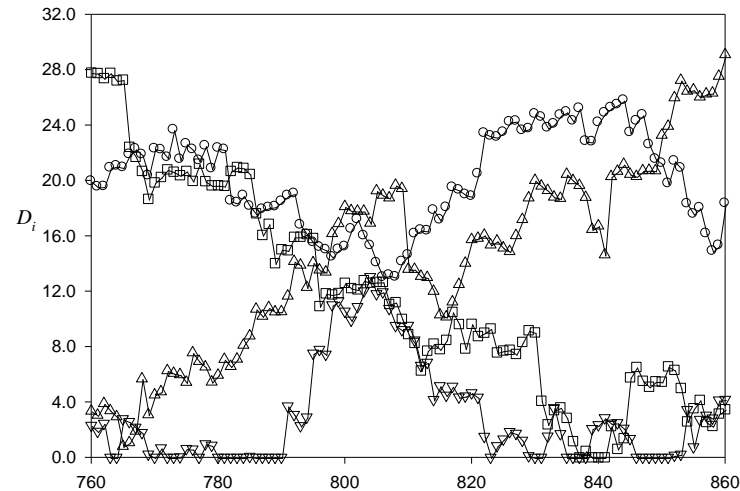
- Um processo estocástico  $\{X(t), t \in T\}$  é um conjunto de variáveis aleatórias: para cada  $t \in T$ ,  $X(t)$  é uma variável aleatória.
- O índice  $t$  é frequentemente interpretado como tempo. Nesta interpretação,  $X(t)$  é o estado do processo no instante  $t$ .
- O conjunto  $T$  é o conjunto de índices do processo.
  - (1) se  $T$  é um conjunto contável, designa-se o processo estocástico como sendo em tempo discreto
  - (2) se  $T$  é um intervalo da reta real, designa-se o processo estocástico como sendo em tempo contínuo
- O espaço de estados é o conjunto de todos os valores que as variáveis aleatórias  $X(t)$  podem tomar.

# Exemplos de processos estocásticos

Considere um sistema com uma fila de espera e um servidor. A este sistema chegam clientes para serem servidos.

## Atrasos sofridos por cada cliente na fila de espera

- (1) é um processo estocástico em tempo discreto
- (2) o estado é uma variável contínua



## O número de clientes em espera

- (1) é um processo estocástico em tempo contínuo
- (2) o estado é uma variável discreta

