Processos de Poisson, Cadeias de Markov em Tempo Contínuo e Sistemas de Filas de Espera

Desempenho e Dimensionamento de Redes

Prof. Amaro de Sousa (asou@ua.pt)

DETI-UA, 2017/2018

Processos de contagem

- Um processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ diz-se um <u>*processo de contagem*</u> se $N(t)$ representar o número total de eventos que ocorreram até ao instante t.
- Um processo de contagem satisfaz as seguintes condições:

  (1) $N(t) \geq 0$.

  (2) $N(t)$ toma valores inteiros apenas.

  (3) Se $s < t$, então $N(s) \leq N(t)$.

  (4) Se $s < t$, então $N(t) - N(s)$ é igual ao número de eventos ocorridos no intervalo de tempo $[s,t]$.
- Um processo de contagem tem <u>*incrementos independentes*</u> se o número de eventos em intervalos de tempo disjuntos for independente.
- Um processo de contagem tem <u>*incrementos estacionários*</u> se a distribuição do número de eventos que ocorre em qualquer intervalo de tempo depender apenas do comprimento do intervalo de tempo.

Processos de Poisson

- Um processo de contagem diz-se um <u>*processo de Poisson*</u> com taxa λ, $\lambda > 0$, se:

  (1) $N(0) = 0$;

  (2) o processo tem incrementos independentes;

  (3) o número de eventos num intervalo de duração t tem uma distribuição de Poisson com média λt. Isto é, para todo s, $t \geq 0$

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

- Um processo de Poisson tem incrementos estacionários e média

$$E[N(t)] = \lambda t$$

  razão pela qual λ é designada a <u>*taxa*</u> do processo de Poisson.

Propriedades de um processo de Poisson

- **Propriedade 1:** Num processo de Poisson com taxa λ considere-se:
  - T_1 o instante do primeiro evento
  - T_n, $n > 1$, o intervalo de tempo entre o (n-1)-ésimo evento e o n-ésimo evento
- Então, T_n, n = 1, 2, …, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com *distribuição exponencial* de média $1/\lambda$.
- **Propriedade 2:** Num processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ com taxa λ considere-se que cada evento é classificado de forma independente em:
  - evento do tipo 1 com probabilidade p
  - evento do tipo 2 com probabilidade $1-p$
- Assim, $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$ são o número de eventos de cada tipo que ocorreram no intervalo $[0,t]$.
- Então, $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são *ambos processos independentes e de Poisson* com taxas λp e $\lambda(1-p)$.

Propriedades de um processo de Poisson

- **Propriedade 3:** Sejam $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$ processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2,
- Então, o processo $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ é também *um processo de Poisson* com taxa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

- **Propriedade 4:** Sabendo-se que num processo de Poisson ocorreram exatamente n eventos até ao instante t,
- Então, os instantes de ocorrência dos eventos são *distribuídos independentemente e uniformemente* no intervalo $[0, t]$. Por esta razão diz-se que num processo de Poisson as chegadas são *aleatórias*.

Cadeias de Markov em tempo contínuo

- Considere-se um processo estocástico em tempo contínuo $\{X(t), t \geq 0\}$ com o espaço de estados definido pelo conjunto dos númeors inteiros não negativos.
- $X(t)$ <u>*é uma cadeia de Markov*</u> se para todo o s, $t \geq 0$ e inteiros não-negativos i, j, $x(u)$, $0 \leq u < s$:

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$$

- Significa que a distribuição futura $X(s+t)$ condicionada ao presente $X(s)$ e ao passado $X(u)$, $0 \leq u < s$, depende apenas do presente e é independente do passado (propriedade <u>*Markoviana*</u>).

- Se $P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$ for independente de s então diz-se que a cadeia de Markov em tempo contínuo tem <u>*probabilidades de transição estacionárias*</u> ou <u>*homogéneas*</u>:

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$$

Cadeias de Markov em tempo contínuo

- Uma cadeia de Markov em tempo contínuo tem como propriedades:

  (1) Quando o processo entra no estado *i*, o tempo de permanência nesse estado, antes de efetuar uma transição para um estado diferente, é exponencialmente distribuído (designamos a média por $1/q_i$);

  (2) Quando o processo deixa o estado *i*, entra de seguida no estado *j* com uma probabilidade P_{ij} que satisfaz as seguintes condições

$$P_{ii} = 0 \qquad 0 \leq P_{ij} \leq 1 \quad , j \neq i \qquad \sum_j P_{ij} = 1$$

NOTA: A propriedade (1) é equivalente a dizer que quando o processo está no estado *i*, ele transita para outro estado qualquer a uma taxa q_i.

- Numa cadeia de Markov em tempo contínuo, o tempo de permanência num estado e o próximo estado visitado são variáveis aleatórias independentes.

Taxas de transição instantâneas

- Para qualquer par de estados i e j seja

$$q_{ij} = q_i P_{ij}$$

q_i - a taxa à qual o processo faz uma transição quando está no estado i

P_{ij} - a probabilidade que a transição seja para o estado j quando está no estado i

q_{ij} - a taxa à qual o processo faz uma transição para o estado j quando está no estado i

- As q_{ij} designam-se por *taxas de transição instantâneas*. Estas são as grandezas habitualmente representadas nos diagramas de transição de estados.

- Como $\quad q_i = \sum_j q_i P_{ij} = \sum_j q_{ij} \qquad P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$

resulta que a especificação das taxas de transição instantâneas determina a cadeia de Markov em tempo contínuo.

Exemplo 1

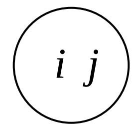
Considere um servidor de *video-streaming* que providencia filmes em formato standard (2.0 Mbps) ou HD (4.0 Mbps) e com uma interface de rede de 10 Mbps.

No período de maior tráfego, a taxa de pedidos de filmes é de 2 filmes/hora em formato standard e 1 filme/hora em formato HD.

Ambos os tipos de filmes têm uma duração exponencialmente distribuída de média 90 minutos. Quando um filme é pedido, ele começa a ser transmitido desde que haja capacidade disponível na interface de rede ou é recusado caso contrário.

Considere o estado do sistema dado pelo número de filmes de cada tipo em transmissão. Qual o diagrama de transição de estados do sistema?

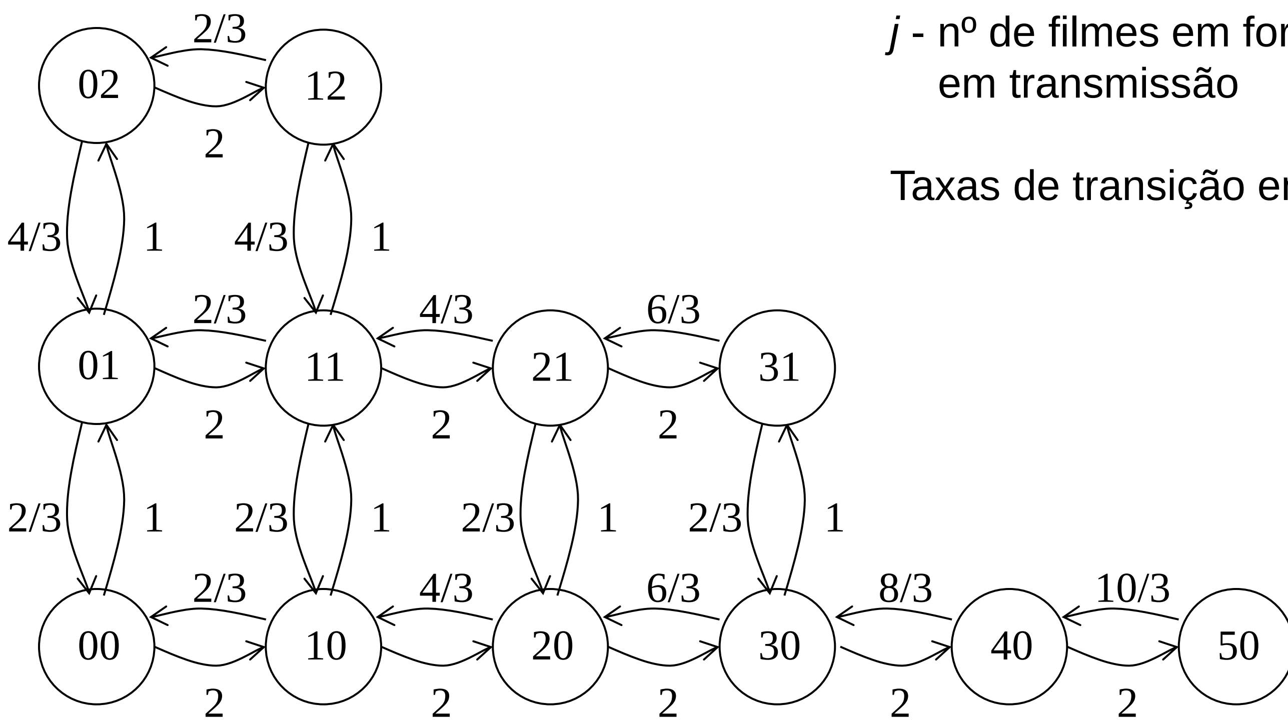
Diagrama de transição de estados do Exemplo 1



i - nº de filmes em formato standard em transmissão

j - nº de filmes em formato HD em transmissão

Taxas de transição em horas^{-1}



Probabilidades limite

- Seja $$P_{ij}(t) = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$$

  a probabilidade de um processo presentemente no estado *i* estar no estado *j* após um intervalo de tempo *t*.

- A probabilidade de uma cadeia de Markov em tempo contínuo estar no estado *j* no instante *t* converge para um valor limite independente do estado inicial:

$$\pi_j \equiv \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

- Condição suficiente para a existência de probabilidades limite:

  (1) a cadeia é irredutível, isto é, começando no estado *i* existe uma probabilidade positiva de alguma vez se estar no estado *j*, para todo o par de estados *i*, *j*

  (2) a cadeia de Markov é recorrente positiva, isto é, começando em qualquer estado o tempo médio para voltar a esse estado é finito

Cálculo das probabilidades limite

- As probabilidades limite podem calcular-se resolvendo as equações:

$$q_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k \,, \qquad \text{para todos os estados } j$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

- Estas equações são designadas por *equações de balanço*:

taxa à qual o sistema transita do estado *j*

=

taxa à qual o sistema transita para o estado *j*

- A probabilidade π_j pode ser interpretada como a proporção de tempo em que o processo está no estado *j*.

- As probabilidades π_j são designadas por *probabilidades estacionárias*: se o estado inicial for dado pela distribuição $\{\pi_j\}$, então a probabilidade de se estar no estado *j* no instante *t* é π_j, para todo o *t*.

Exemplo 1

Equações de balanço:

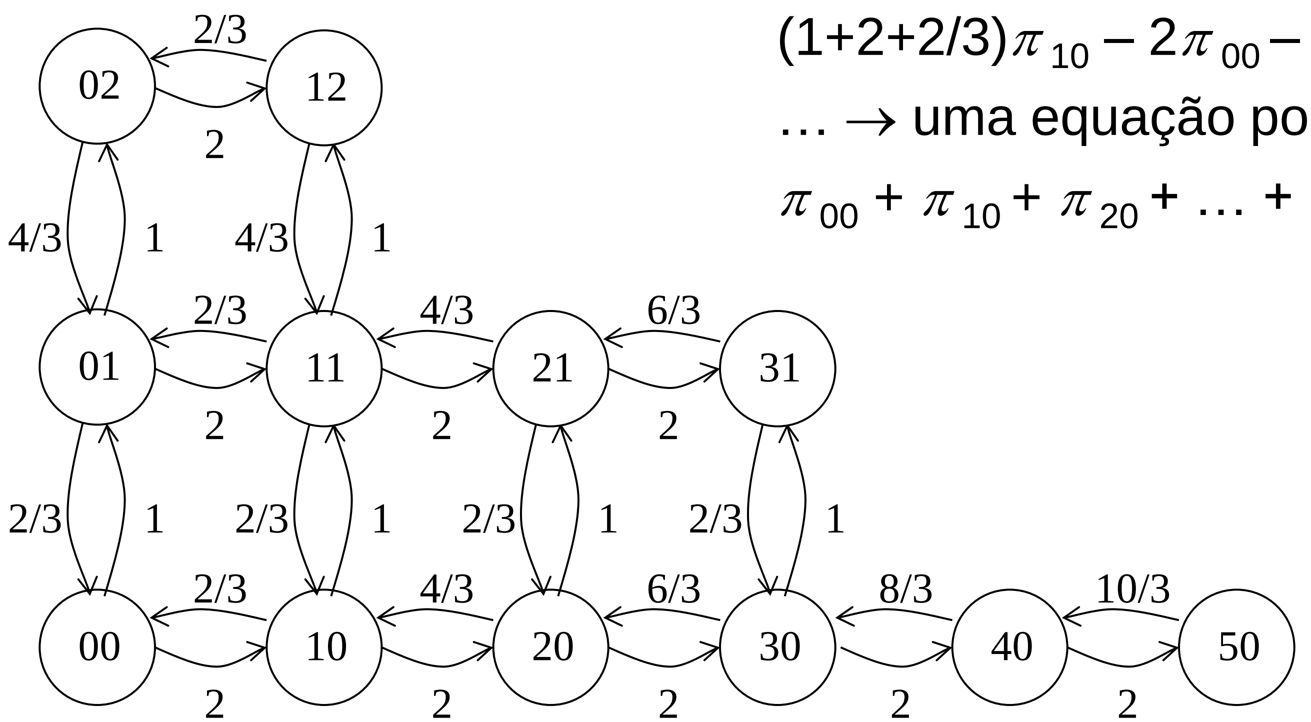
$$q_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k \qquad \sum_j \pi_j = 1$$

$(1+2)\pi_{00} - 2/3\pi_{10} - 2/3\pi_{01} = 0$

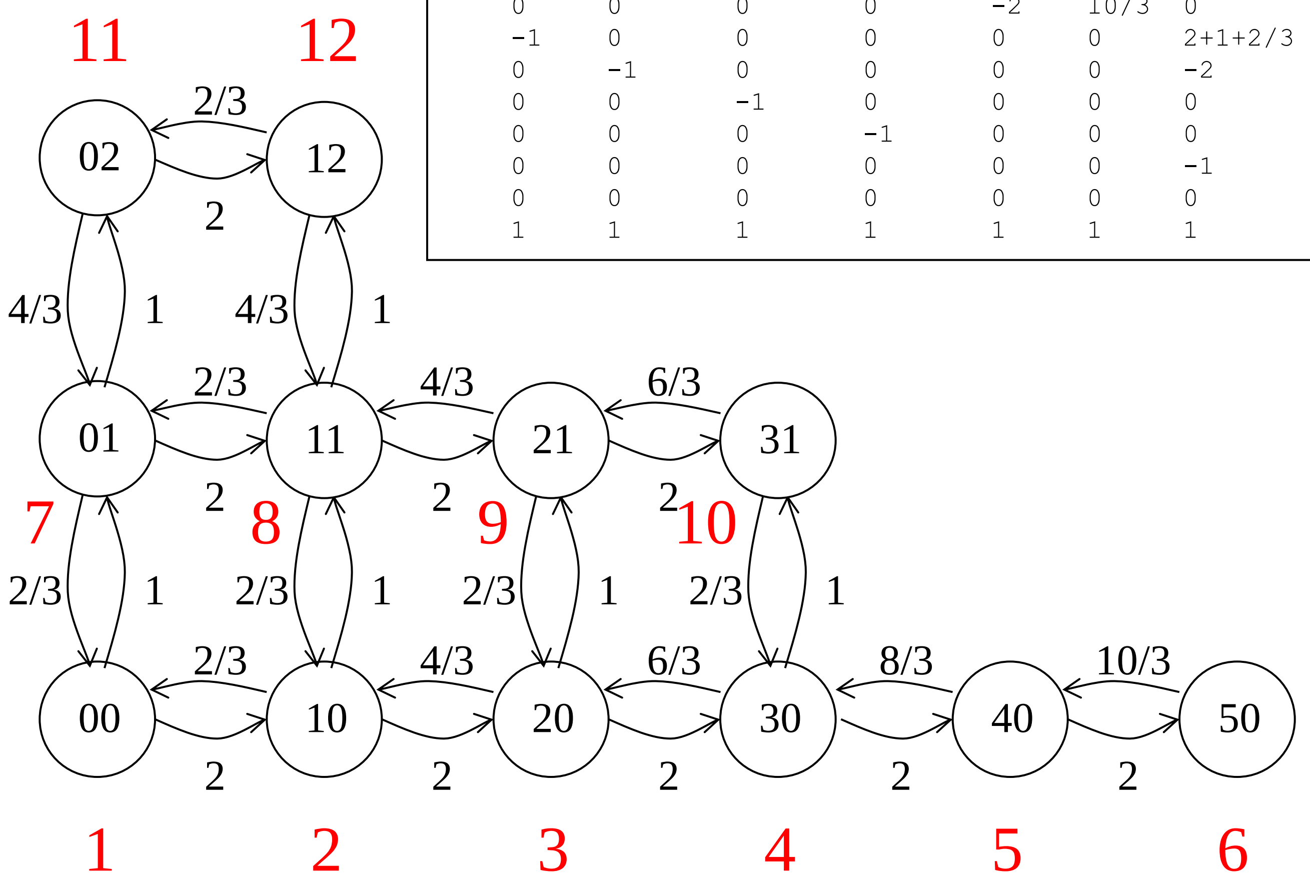
$(1+2+2/3)\pi_{10} - 2\pi_{00} - 4/3\pi_{20} - 2/3\pi_{11} = 0$

… $\rightarrow$ uma equação por cada estado

$\pi_{00} + \pi_{10} + \pi_{20} + \ldots + \pi_{02} + \pi_{12} = 1$



Exemplo 1 – resolução no MATLAB

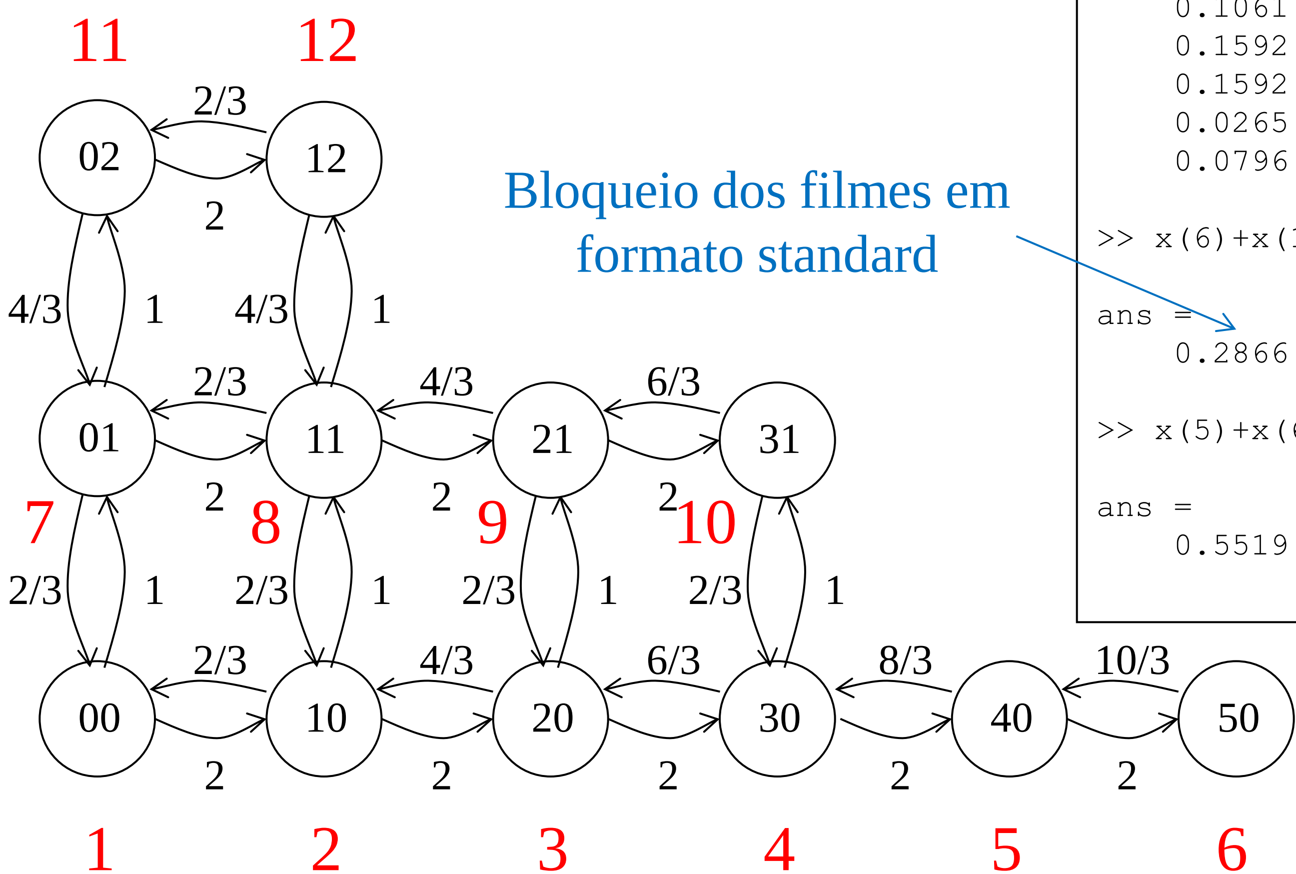



```
A= [2+1   -2/3     0        0        0      0      -2/3     0        0      0      0      0
    -2    2+1+2/3  -4/3     0        0      0      0        -2/3     0      0      0      0
    0     -2       2+1+4/3  -6/3     0      0      0        0        -2/3   0      0      0
    0     0        -2       2+1+6/3  -8/3   0      0        0        0      -2/3   0      0
    0     0        0        -2       2+8/3  -10/3  0        0        0      0      0      0
    0     0        0        0        -2     10/3   0        0        0      0      0      0
    -1    0        0        0        0      0      2+1+2/3  -2/3     0      0      -4/3   0
    0     -1       0        0        0      0      -2       2+1+4/3  -4/3   0      0      -4/3
    0     0        -1       0        0      0      0        -2       2+6/3  -6/3   0      0
    0     0        0        -1       0      0      0        0        -2     8/3    0      0
    0     0        0        0        0      0      -1       0        0      0      2+4/3  -2/3
    0     0        0        0        0      0      0        -1       0      0      -2     6/3
    1     1        1        1        1      1      1        1        1      1      1      1]
```

```
B= [0
    0
    0
    0
    0
    0
    0
    0
    0
    0
    0
    0
    1]
```

Exemplo 1 – resolução no MATLAB

```
>> x=A\B

x =
    0.0236
    0.0708
    0.1061
    0.1061
    0.0796
    0.0478
    0.0354
    0.1061
    0.1592
    0.1592
    0.0265
    0.0796

>> x(6)+x(10)+x(12)

ans =
    0.2866

>> x(5)+x(6)+x(9)+x(10)+x(11)+x(12)

ans =
    0.5519
```



Bloqueio dos filmes em formato standard

Bloqueio dos filmes em formato HD

Definições do teorema de Little

- Admita-se que se observa um sistema desde o instante t = 0. Seja:

  $L(t)$ - o número de clientes no sistema no instante t,

  $N(t)$ - o número de clientes que chegaram no intervalo $[0,t]$,

  W_i - o tempo despendido no sistema pelo i-ésimo cliente.

- Média temporal do *número de clientes* observados até ao instante t:

$$L_t = \frac{1}{t}\int_0^t L(\tau)d\tau \qquad\qquad L = \lim_{t\to\infty} L_t$$

- Média temporal da *taxa de chegada* no intervalo $[0,t]$:

$$\lambda_t = N(t)/t \qquad\qquad \lambda = \lim_{t\to\infty} \lambda_t$$

- Média temporal do *atraso dos clientes* até ao instante t:

$$W_t = \frac{\sum_{i=0}^{N(t)} W_i}{N(t)} \qquad\qquad W = \lim_{t\to\infty} W_t$$

Teorema de Little

- O teorema de Little enuncia que

$$L = \lambda W$$

- O teorema de Little traduz a ideia intuitiva de que, para a mesma taxa de chegada de clientes, sistemas mais congestionados (*L* elevado) impõem maiores atrasos (*W* elevado).

- Num dia de chuva, o mesmo tráfego (mesmo λ) é mais lento do que normalmente (*W* maior) e as ruas estão mais congestionadas (*L* maior).
- Um restaurante de refeições rápidas (*W* menor) precisa de uma sala menor (*L* menor) que um restaurante normal, para a mesma taxa de chegada de clientes (mesmo λ).

Propriedade PASTA

- Considere um sistema em que os clientes chegam um de cada vez e são servidos um de cada vez.
- Seja $L(t)$ o número de clientes no sistema no instante t e defina-se P_n, $n \geq 0$, como

$$P_n = \lim_{t \to \infty} P\{L(t) = n\}$$

  P_n é a probabilidade em estado estacionário de existirem exatamente n clientes no sistema (ou a proporção de tempo em que o sistema contém exatamente n clientes).

- Considere a_n a proporção de clientes que ao chegar encontram n clientes no sistema.
- Considere d_n a proporção de clientes que ao partir deixam n clientes no sistema.
- Em qualquer sistema em que os clientes chegam um de cada vez e são servidos um de cada vez verifica-se que

$$a_n = d_n$$

Propriedade PASTA

- Propriedade PASTA (*Poisson Arrivals always See Time Averages*):

  As *chegadas de Poisson* em que o *tempo de serviço é estatisticamente independente dos instantes de chegada*, vêem sempre médias temporais:

$$a_n = P_n$$

- Contra exemplos:
- Considere que o intervalo entre chegadas é uniformemente distribuído entre 2 e 6 segundos e os tempos de serviço dos clientes são uniformemente distribuídos entre 1 e 2 segundos.

  - As chegadas não são de Poisson
- Considere um sistema em que o processo de chegada de clientes é um processo de Poisson e que o tempo de serviço do n-ésimo cliente é igual a metade do intervalo entre a chegada do n-ésimo e do (n+1)-ésimo cliente.

  - O tempo de serviço não é independente das chegadas

Processos de nascimento e morte

- Considere um sistema cujo estado representa o número de clientes no sistema.

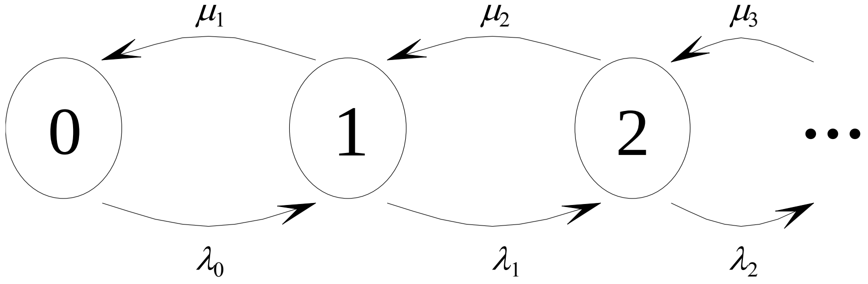
- Sempre que o sistema tem n clientes:

  (1) chegam novos clientes ao sistema a uma taxa exponencial λ_n

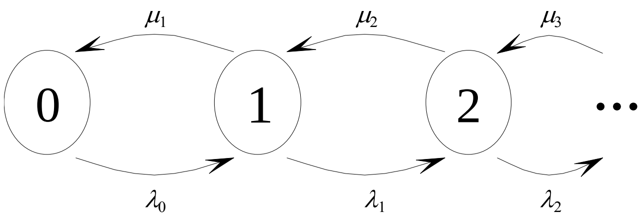
  (2) partem clientes do sistema a uma taxa exponencial μ_n

- Este sistema é designado por *processo de nascimento e morte*.

- Os parâmetros λ_n (n = 0, 1, …) e μ_n (n = 1, 2, …) são designados por *taxas de chegada* (ou de nascimento) e *taxas de partida* (ou de morte), respetivamente.



Equações de balanço de processos de nascimento e morte



Estado	*taxa de saída = taxa de entrada*
0	$\lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1$
1	$(\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \mu_2\pi_2 + \lambda_0\pi_0$
2	$(\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 = \mu_3\pi_3 + \lambda_1\pi_1$
n, $n \geq 1$	$(\lambda_n + \mu_n)\pi_n = \mu_{n+1}\pi_{n+1} + \lambda_{n-1}\pi_{n-1}$

Ou, de forma equivalente (por manipulação das equações anteriores):

$$\lambda_n\pi_n = \mu_{n+1}\pi_{n+1}, \qquad n \geq 0$$

Probabilidades limite de processos de nascimento e morte

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}}$$

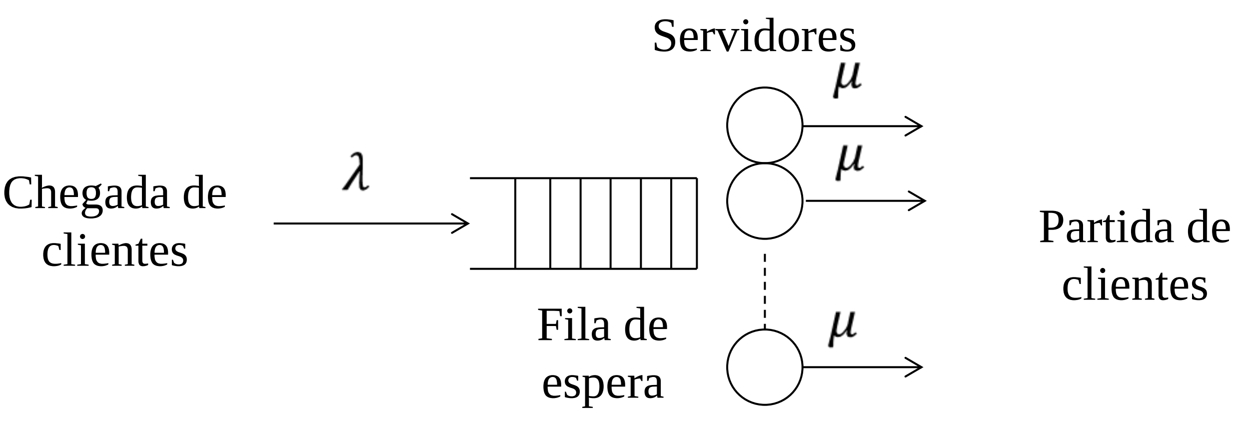
$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}\right)} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot \pi_0, \; n \geq 1$$

Condição necessária para a existência de probabilidades limite:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} < \infty$$

Sistema de fila de espera

- Um sistema de fila de espera é caracterizado por:
  - um conjunto de *c* servidores, cada um com capacidade para servir clientes a uma taxa μ
  - uma fila de espera com uma determinada capacidade (em nº de clientes)
- A este sistema chegam clientes a uma taxa λ
- Quando um cliente chega:
  - ele começa a ser servido por um servidor se houver algum disponível
  - ele é colocado da fila de espera se os servidores estiverem todos ocupados
- Os clientes na fila de espera são atendidos segundo uma disciplina *First-In-First-Out*



Sistema de fila de espera

- Um sistema de fila de espera é representado por:

$$A/B/c/d$$

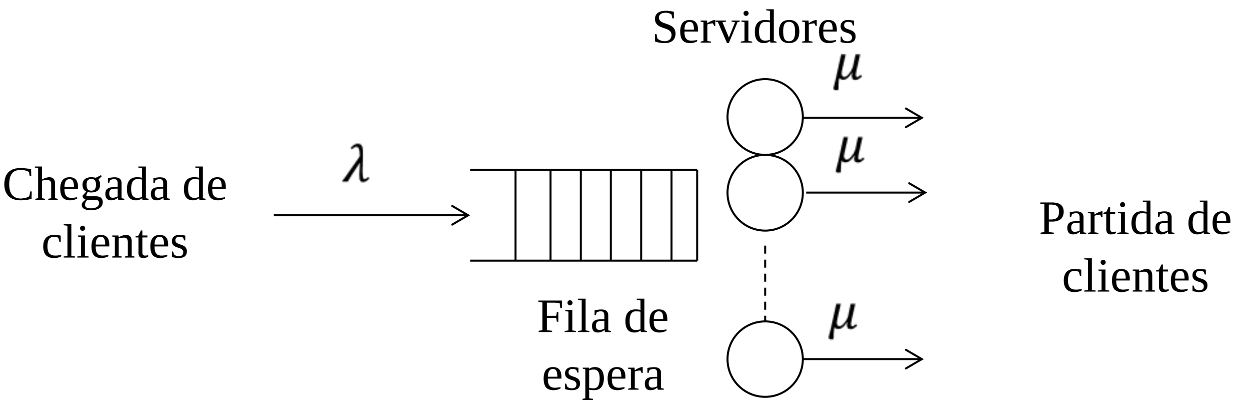
A – o processo de chegada de clientes:
M – Markoviano, *D* – Determinístico, *G* – Genérico

B – o processo de atendimento de clientes:
M – Markoviano, *D* – Determinístico, *G* – Genérico

c – o número de servidores

d – capacidade do sistema em nº de clientes:
número de servidores + capacidade da fila de espera

- Quando *d* é omisso, a fila de espera tem tamanho infinito.



Sistema *M*/*M*/1

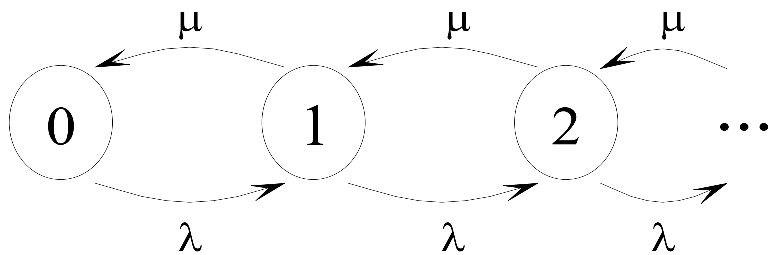
- Processo de nascimento e morte em que:

  (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ

  (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$

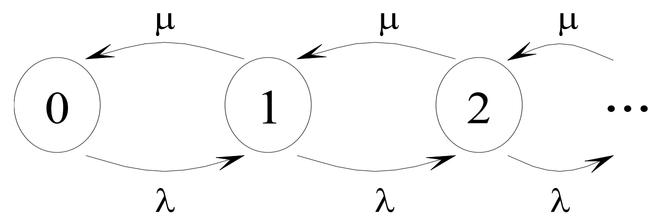
  (3) o sistema tem 1 servidor

  (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes



- Uma ligação ponto-a-ponto com capacidade μ pacotes/s e uma fila de espera muito grande onde chegam pacotes a uma taxa de Poisson λ pacotes/s com comprimento exponencialmente distribuído de média $1/\mu$ é um sistema *M*/*M*/1

Sistema *M*/*M*/1



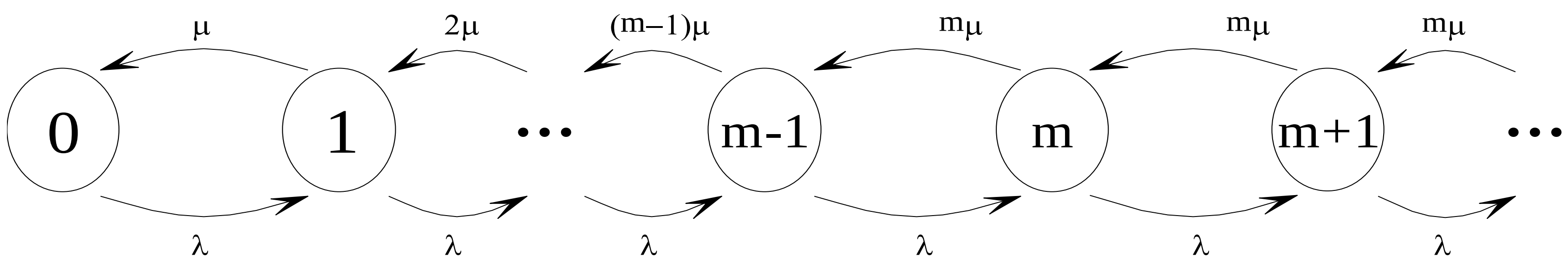
$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}} = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

$$P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

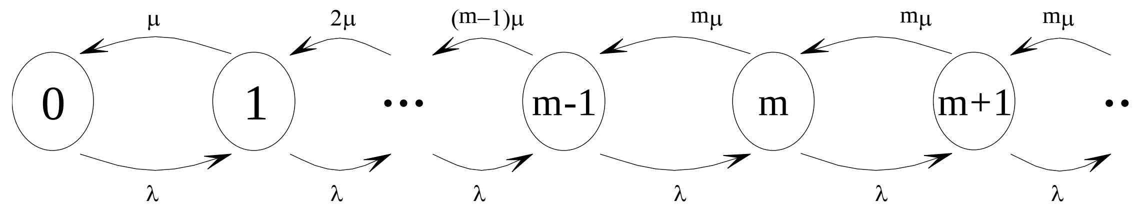
- Número médio de clientes no sistema: $L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
- Atraso médio no sistema: $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
- Atraso médio na fila de espera: $W_Q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
- Número médio de clientes na fila de espera: $L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

Sistema *M/M/m*

- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
  - (3) o sistema tem *m* servidores
  - (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes



Sistema *M/M/m*



Equações de balanço:

$$\lambda P_{n\text{-}1} = n\mu P_n, \qquad n \le m$$

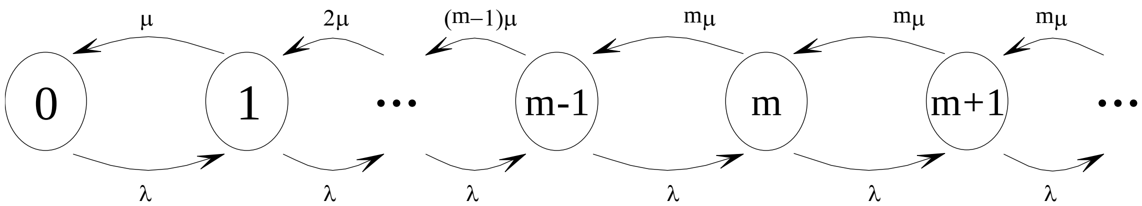
$$\lambda P_{n\text{-}1} = m\mu P_n, \qquad n > m$$

Probabilidade de *n* clientes no sistema em estado estacionário ($\rho = \lambda / m\mu < 1$):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \dfrac{(m\rho)^n}{n!}, \; n \le m \\ P_0 \dfrac{m^m \rho^n}{m!}, \; n > m \end{cases} \qquad , n \ge 1$$

Sistema *M/M/m*



- Probabilidade de uma chegada encontrar todos os servidores ocupados (fórmula de Erlang C):

$$P_Q = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \frac{P_0 (m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

- Número médio de clientes na fila de espera: $L_Q = \sum_{n=0}^{\infty} n P_0 \frac{m^m \rho^{m+n}}{m!} = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$

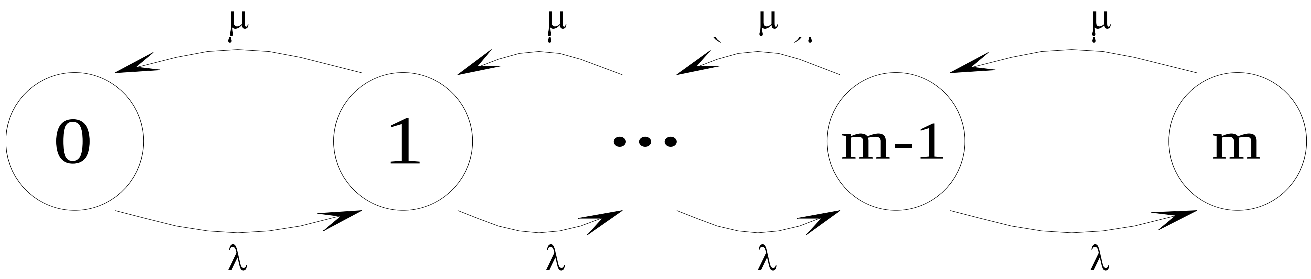
- Atraso médio na fila de espera: $W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$

- Atraso médio no sistema: $W = \frac{1}{\mu} + W_Q = \frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{m\mu - \lambda}$

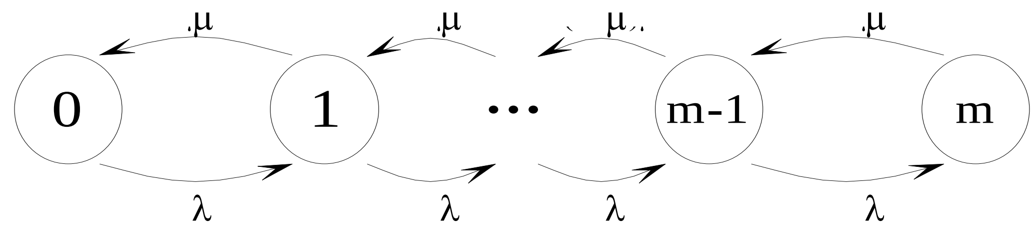
- Número médio de clientes no sistema: $L = \lambda W = m\rho + \frac{\rho P_Q}{1-\rho}$

Sistema *M*/*M*/1/*m*

- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
  - (3) o sistema tem 1 servidor
  - (4) o sistema acomoda no máximo *m* clientes (*i.e.*, a fila de espera tem capacidade para *m* – 1 clientes)



Sistema *M*/*M*/1/*m*



- Equações de balanço:

$$\lambda P_{n\text{-}1} = \mu P_n, \qquad n = 1, 2, ..., m$$

- Probabilidade de *n* clientes no sistema em estado estacionário:

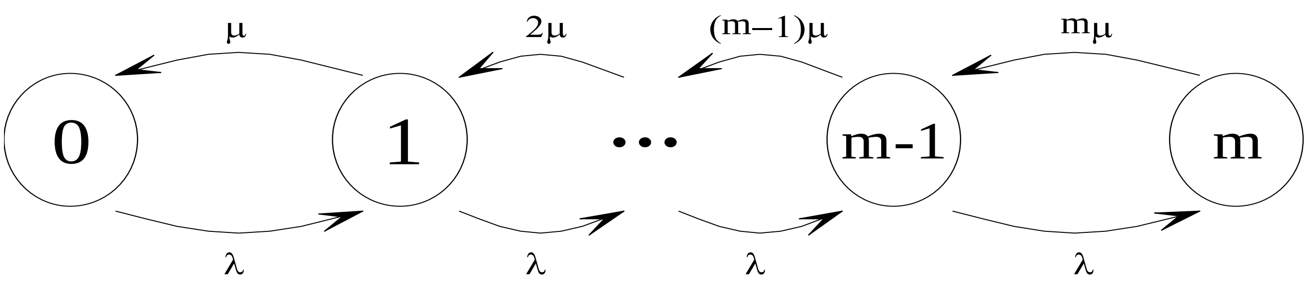
$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i} \qquad n = 0, 1, ..., m$$

- Pela propriedade PASTA, a probabilidade de uma chegada encontrar o sistema cheio (*i.e.*, o servidor ocupado e a fila de espera cheia):

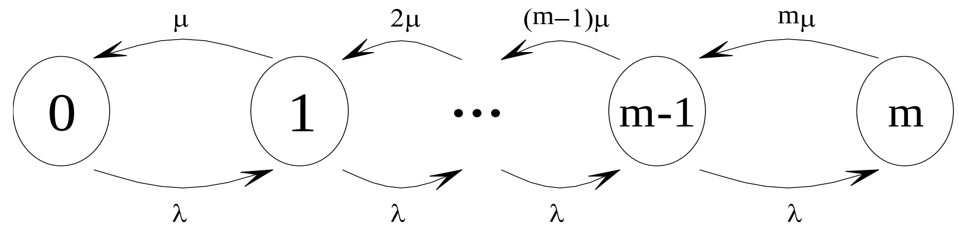
$$P_m = \frac{(\lambda/\mu)^m}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i}$$

Sistema *M/M/m/m*

- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
  - (3) o sistema tem *m* servidores
  - (4) o sistema acomoda no máximo *m* clientes (*i.e.*, não tem fila de espera)



Sistema *M/M/m/m*



- Equações de balanço:

$$\lambda P_{n\text{-}1} = n\mu P_n, \qquad n = 1, 2, ..., m$$

- Probabilidade de *n* clientes no sistema em estado estacionário:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n / n!}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i / i!} \qquad n = 0, 1, ..., m$$

- Pela propriedade PASTA, a probabilidade de uma chegada encontrar o sistema cheio é (fórmula de Erlang B):

$$P_m = \frac{(\lambda/\mu)^m / m!}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i / i!}$$

Sistema *M/G/1*

- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o tempo de atendimento S do servidor tem uma distribuição genérica e independente das chegadas dos clientes
  - (3) o sistema tem 1 servidor
  - (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes
- Sendo conhecidos $E[S]$ e $E[S^2]$ do tempo de atendimento S, a fórmula de Pollaczek - Khintchine enuncia que <u>o atraso médio na fila de espera</u> é dado por:

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])}$$

- O atraso médio no sistema é dado por:

$$W = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])} + E[S]$$

Sistema *M*/*G*/1

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])}$$

- Quando o tempo de serviço é exponencialmente distribuído, o sistema resulta num *M*/*M*/1:

  $E[S] = 1/\mu$

  $E[S^2] = 2/\mu^2$

  $$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

- Quando os tempos de serviço são iguais para todos os clientes com valor $1/\mu$, o sistema resulta num *M*/*D*/1:

  $E[S] = 1/\mu$

  $E[S^2] = 1/\mu^2$

  $$W_Q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

- Uma ligação ponto-a-ponto com capacidade μ pacotes/s e uma fila de espera muito grande onde chegam pacotes a uma taxa de Poisson λ pacotes/s é um sistema *M*/*G*/1.
  - Se o comprimento dos pacotes for exponencialmente distribuído, degenera num sistema *M*/*M*/1.
  - Se o comprimento dos pacotes for fixo, degenera num sistema *M*/*D*/1.

Exemplo 2

Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego oferecido é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

(a) A percentagem de pacotes perdidos.

(b) A percentagem de pacotes que não sofre atraso na fila de espera.

(c) A percentagem de utilização da linha de transmissão.

Fazer em casa!