Relaciones de equivalencia y conjunto cociente

Sea S un conjunto ; Relación (binaria) $\Rightarrow R \subseteq S \times S$; $(a,b) \in R \Rightarrow aRb \quad \forall a,b \in S$

Propiedades

- Reflexiva : $\forall a \in S,\ aRa$
- Simétrica : $\forall a,b \in S,\ aRb \Rightarrow bRa$
- Transitiva : $\forall a,b,c \in S,\ aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$

Si cumple todas $\Rightarrow$ Relación de equivalencia $\Downarrow$ Divide S en bloques

Clases de equivalencia $\Rightarrow \forall a \in S,\ [a] = \{x \in S \,/\, xRa\}$ Todos los elementos de S equivalentes a a.

$a, b \in S$ son equivalentes $\Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$

Demo : Sea $x \in [a] \cap [b] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [a] \Rightarrow xRa \overset{Sim}{\Rightarrow} aRx \\ x \in [b] \Rightarrow xRb \Rightarrow bRx \end{array} \right\} \overset{Tran}{\Rightarrow} aRb$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x \in [a] \Rightarrow xRa,\ aRb \Rightarrow xRb \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow [a] \subseteq [b] \\ \text{Si } x \in [b] \Rightarrow xRb,\ bRa \Rightarrow xRa \Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subseteq [a] \end{array} \right\} \Rightarrow [a] = [b]$$

Las clases de equivalencia descomponen S en subconjuntos disjuntos $\neq \emptyset \Rightarrow$ Partición de S

Sea R sobre S $\Rightarrow$ Conjunto cociente de S por R $\Rightarrow$ $\boxed{S/R = \{ [a] \in P(S) \mid a \in S \}}$

↳ Conjunto que se obtiene de considerar iguales elementos de S equivalentes.

A partir de aquí se define una aplicación: Proyección canónica $\Rightarrow$ $p: S \to S/R \; ; \; p(x) = \bar{x}$

Relación núcleo de una aplicación $\Rightarrow$ $f: S \to T \; ; \; R_f$ en S $\Rightarrow$ $x R_f y \iff f(x) = f(y), \; \forall x, y \in S$

↳ $\boxed{\sim f}$

Proposición $\Rightarrow$ R sobre S ; $f: S \to T$ tq: $\forall a, b \in S$, $aRb \Rightarrow f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists \boxed{\bar{f} : S/R \to T} \; ; \; \bar{f}(\bar{a}) = f(a) \;\; \forall \bar{a} \in S/R \quad (Im(\bar{f}) = Im(f))$

Aplicación inducida por f en el cociente.

$\bar{f}$ sobreyectiva $\iff$ f sobreyectiva

$\bar{f}$ inyectiva $\iff$ $\forall a, b \;\; f(a) = f(b) \Rightarrow aRb$

Teorema de la descomposición canónica de una aplicación

↳ $f: S \to T$, $\exists$ isomorfismo $\boxed{b: S/R_f \xrightarrow{\cong} Im(f)}$ que hace conmutar $\longrightarrow$

↓

(una biyección)

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ S/R_f & \xrightarrow[b]{\cong} & Im(f) \end{array}$$

$p \equiv$ proy. canónica

$i \equiv$ inclusión

Relaciones de equivalencia y conjunto cociente

$\mathbb{Z}$ es un cociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Conjunto cociente

$X \rightarrow X / ??$

Relación de equivalencia en un conjunto X

Es un subconjunto R de $X \times X$ $\quad R \subseteq X \times X$

$$(a,b) \in R \; ; \; a \in X \, , \, b \in X$$

(Relación Binaria en X)

$X \xrightarrow{f} X$ la gráfica de f es una relación binaria

$\Delta \subseteq X \times X$ $\quad \Delta$ (diagonal)

$\Delta = \{(x,x) \, ; \, x \in X\}$

Notación $\quad \dfrac{(a,b) \in R}{aRb}$

$$aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} (a,b) \in R$$

Propiedades

- Reflexiva: $\forall x \in X \quad xRx$

  $(\Delta \subseteq R)$

- Simétrica $\forall x, y \in X \quad xRy \Rightarrow yRx$

Ej $X = \{a, b, c\}$

$R = \{(a,a), (b,c), (c,a), (a,b)\}$

no es simétrica aRb pero $b \not R a$

Ej: $\mathbb{Z}$ $a|b$ $2|6$

a divide a b

$\exists q \in \mathbb{Z}$ / $a \cdot q = b$

$6 \nmid 2$ no es simétrica.

- Transitiva

$x, y, z \in Z$ si xRy e $yRz \Rightarrow xRz$

$$\left.\begin{matrix} a|b \\ b|c \end{matrix}\right| \Rightarrow a|c$$

$\exists q$ tq. $b = aq$

$\exists q'$ tq $c = b \cdot q'$ $\Rightarrow a(qq')$

es transitiva.

El divide es reflexiva, transitiva pero no simétrica.

Si una relación cumple ref + sim + trans $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Relación de equivalencia}}$

Sea $x \in X$ la clase de equivalencia de x $[x]$, $\bar{x}$ se define como:

$\bar{x} = \{ y \in X \,/\, xRy \} \subseteq X$

Propiedades

① Reflexiva, $xRx \Rightarrow x \in \bar{x}$

$\Rightarrow \bar{x} \neq \emptyset$

② $y \in \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

$\Updownarrow$

$\boxed{yRx \iff \bar{x} = \bar{y}}$

$\Rightarrow$ $yRx \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$

$z \in \bar{x} \Rightarrow xRz \Rightarrow zRx \left\{ \begin{matrix} zRx \\ xRy \end{matrix} \right. \Rightarrow zRy \Rightarrow z \in \bar{y}$
$\quad\quad\quad\quad yRx$

$z \in \bar{y} \Rightarrow \left. \begin{matrix} yRz \\ yRx \end{matrix} \right\} \Rightarrow xRz \Rightarrow z \in \bar{x}$

$\Rightarrow \bar{y} \subseteq \bar{x}$

③. $\boxed{\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \iff \bar{x} = \bar{y}}$; $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \iff xRy$

$\Rightarrow$ $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ sea $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$

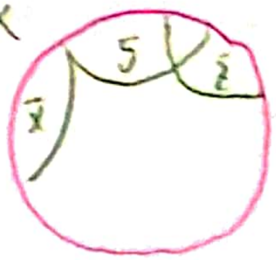
$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} z \in \bar{x} \Rightarrow xRz \\ z \in \bar{y} \Rightarrow yRz \end{matrix} \right\} \Rightarrow xRy$

$\Leftarrow$ $xRy \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \bar{x} \cap \bar{y} = \bar{x} \neq \emptyset$

③ other way $\Rightarrow$ $\bar{x} \neq \bar{y} \iff \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

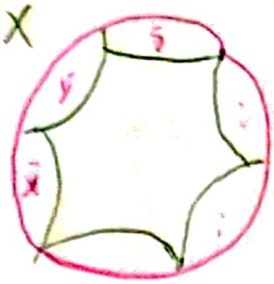
Disjuntos.

X



No puede ocurrir

X



Partición de X $\{P_i$

Toda relación de equivalencia en X da lugar a una partición de X

Si $B = \{P_i \subseteq X \, ; \, i \in I\}$ es una partición

R_p definida como $x R_p y \iff \exists i \in I \, ; \, x, y \in P_i$

es una relación de equivalencia.

Si R es una relación de equivalencia en X

$X/R = \{\bar{x} \, ; \, x \in X\}$ Se llama $\boxed{\text{Conjunto cociente de } X \text{ por } R}$

Ejemplo

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(a,b) R (c,d) \overset{def}{\iff} a+d = b+c$

Reflexiva $\Rightarrow (a,b) R (a,b)$??

$\Updownarrow$

$a+d = b+c$ ✓ por tanto se cumple refl.

Simétrica $\Rightarrow (a,b) R (c,d) \overset{??}{\Rightarrow} (c,d) R (a,b)$ Se cumple la prop. sim.

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

✓ $a+d = b+c \; = \; c+b = d+a$ ✓

Transitiva: $(a,b)R(c,d) \Rightarrow a+c = b+d$

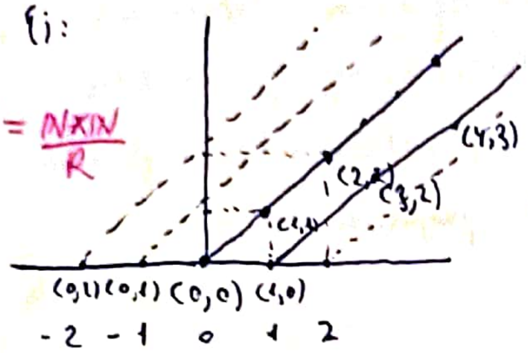
$(c,d)R(e,f) \Rightarrow c+f = d+e$

$+\quad a+\cancel{d}+\cancel{c}+f = b+\cancel{d}+\cancel{c}+e$

$a+f = b+e$

Luego $(a,b)R(e,f) \Leftrightarrow a+f = b+e$ ✓

Ej: $\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{R}$



$\overline{(0,0)} = \{(a,b) ; (0,0)R(a,b)\} =$

$b = a$

$= \{(a,a) ; a \in \mathbb{N}\}$

$\overline{(1,0)} = \{(a,b) ; (1,0)R(a,b)\} = \{(1+b,b) ; b \in \mathbb{N}\}$

$1+b = a$

Ejemplo $\mathbb{Q}$

$\frac{n}{m}$; $m,n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$

$\frac{2}{3} = \frac{10}{5} = \frac{-2}{-3}$

$(n,m)R(a,b) \Leftrightarrow na = mb$

$$\boxed{\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*}{R} \overset{def}{=} \mathbb{Q}}$$

Ej: $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f(\frac{n}{m}) = n+m$

$f(\frac{2}{3}) = 2+3 = 5$

$f(\frac{10}{15}) = 10+15 = 15$

!!! No está bien definida.

R es una relación de equivalencia en X.

$$X \overset{p^r}{\twoheadrightarrow} X/R$$

$$x \longmapsto \bar{x}$$

Sobreyectiva

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$x R_f x' \iff f(x) = f(x')$$

(Toda aplicación determina una relación de eq. y toda relación de eq. determina una aplicación (la proyección canónica).

$$X \xrightarrow{pr} X/R$$

$$R_{pr} = R$$

$$x R_{pr} x' \iff \underset{\bar{x}}{\underset{\shortparallel}{pr(x)}} = \underset{\bar{x}'}{\underset{\shortparallel}{pr(x')}} \iff \bar{x} = \bar{x}' \iff x R x'$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "pr"] & X/R \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ {} & \end{tikzcd}$$

$f = \bar{f} \circ pr$

Es conmutativo

$$\underline{\bar{f}(\bar{x}) = f(x)}$$

$$\bar{f} \circ pr = f$$

$\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ está bien def $\iff [x R x' \Rightarrow f(x) = f(x')]$

Propiedad universal de proy $X \to X/R$

Descomposición canónica de una aplicación

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "pr"'] & Y \\ X/R_f \arrow[r, "b", "\cong"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Es conmutativo

$\underline{R_f}$

$$b(\bar{x}) := f(x)$$

bien definida y es <u>bijectiva</u>.

b = inyectiva

$$b(\bar{x}) = b(\bar{x}') \iff f(x) = f(x') \iff x \, R_f \, x' \iff \bar{x} = \bar{x}'$$