El conjunto producto cartesiano. Aplicaciones

Si S y T son conjuntos, su producto cartesiano, $S \times T$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) con $x \in S$ e $y \in T$:

$$S \times T = \{(x,y) \mid x \in S, y \in T\}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) = \{x, \{x,y\}\} \\ (y,x) = \{y, \{y,x\}\} \end{array}\right\} \text{definición de par ordenado}$$

$$x \in (x,y), \quad x \notin (y,x) \Rightarrow (x,y) \neq (y,x)$$

Si $|S| = m$ y $|T| = n$ $\quad |S \times T| = mn = |S||T|$

Producto cartesiano de n conjuntos dados:

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \prod_{i=1}^{n} S_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in S_i \ \forall i = (1, \dots, n)\}$$

Cuando $S_1 = S_2 = \dots = S_n \rightarrow S^n$

Aplicación

Una aplicación es una terna que consta de tres datos (S, T, G) donde S es un conjunto ("dominio" de la aplicación), T, otro conjunto ("codominio o rango" de la aplicación) y $G \subseteq S \times T$, un subconjunto de $S \times T$ ("gráfica o regla") tal que se verifican estas propiedades:

- $\forall x \in S \ \exists_1 \ y \in T$ tal que $(x,y) \in G$

- Si $(x,y), (x',y') \in G$, entonces $x = x' \Rightarrow y = y'$

$(x,y) \in G$, notaremos $y = f(x)$, diremos que y es la imagen de x por f.

$(x,y) \equiv (x, f(x))$

$f = (S, T, G)$

Para dar una aplicación tenemos que dar S, T, y G.

$S \xrightarrow{f} T$ ó $f: S \longrightarrow T$ (Aplicación ~~de~~ f del conjunto S sobre el T

$a \longmapsto f(a)$ $\quad$ $a \mapsto f(a)$

Para que dos aplicaciones sean iguales es condición indispensable que tengan mismo dominio, codominio y gráfica.

Las propiedades anteriores establecen que para cualquier elemento x del dominio hay un único elemento y del rango, tal que (x,y) pertenece al grafo: $y = f(x)$.

Para conocer una aplicación $f: S \to T$ es suficiente especificar la imagen $f(x)$ en T de cada elemento x de S.

Imagen de una aplicación

Es el subconjunto de todas las imágenes de $f: S \to T$

$$Im(f) = \{ y \in T \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in S \} = \{ f(x) \mid x \in S \}$$

Aplicación identidad

$\forall S$, $id_S : S \to S$; $id_S(x) = x \quad \forall x \in S$

Es la aplicación de S en sí mismo cuyo grafo es la diagonal $\Delta = \{(x,x) \mid x \in S\}$

Si $f: S \to T$ es una aplicación cualquiera, se verifica que $id_T f = f = f \, id_S$

Lema ⇒ Si $S \xrightarrow{f} T$, $T \xrightarrow{g} S$ son dos aplicaciones tal que $gf = id_S$, es decir, tal que el triángulo conmute, entonces f es inyectiva y g sobreyectiva.

Teorema: $f: A \to B$ es biyectiva $\overset{\text{si y solo si}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, g: B \to A$ tq $f \circ g = 1d_B$, $g \circ f = 1d_A$

Proposición ⇒ Una aplicación $f: S \to T$ es biyectiva si y solo si existe una aplicación $g: Y \to X$ tal que $gf = id_S$ y $fg = id_T$

Para $f: S \to T$ una biyección, solo existe una aplicación $g: T \to S$ tal que $gf = id_S$ y $fg = id_T$. Si $g': T \to S$ es otra con $g'f = id_S$ y $f'g = id_T$ entonces:

$$g' = g' id_T = g' f g = id_S \, g = g$$

Esa g se llama inversa de f (f^{-1}). f^{-1} es también biyectiva, a igual que f. y $(f^{-1})^{-1} = f$.

- gf es biyectiva, su inversa es $g^{-1} f^{-1} = (gf)^{-1}$

Lema ⇒ Sea S un conjunto finito. Las siguientes propiedades para $f: S \to S$ son equivalentes:

1) f es biyectiva.
2) f es inyectiva.
3) f es sobreyectiva.

- Una aplicación es **sobreyectiva** si $Im(f) = T$ (todo elemento del rango es imagen de algún elemento del dominio. $\forall y \in T \ \exists x \in S$ tq $f(x) = y$

- Una aplicación es **inyectiva** si distintos elementos del dominio tienen distintas imágenes; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in S$

- Una aplicación es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. Entonces la aplicación es una **biyección**.

$f: S \to T$ es biyección $\Leftrightarrow \forall y \in T, \exists_1 x \in S \mid f(x) = y$.

S es biyectiva con $T \Rightarrow S \cong T$

Sean $S \xrightarrow{f} T$ y $T \xrightarrow{g} U$ (rango de f = dominio de g) de forma que pueden escribirse así: $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$

Su composición es la aplicación $S \xrightarrow{gf} U$ (dom = S, rango = U)

$$\forall x \in S \quad (gf)(x) = g(f(x))$$

La composición satisface la ley asociativa.

Si $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ son aplicaciones componibles, $h: S \to U$ es una aplicación, se cumple que $h = gf$; el triángulo es conmutativo.

El rectángulo es conmutativo si $gf = g'f'$

La conmutatividad de un diagrama de aplicaciones significa que las aplicaciones obtenidas por composición desde un vértice inicial hasta uno terminal según los diferentes rutas son la misma.

Imágenes directas e inversas

Toda aplicación $f: S \to T$ determina otras

$$f_*: P(S) \to P(T) \quad , \quad f^*: P(T) \to P(S)$$

Aplicación imagen. Aplicación imagen inversa por f

$$\forall A \subseteq S \; , \; X \subseteq T :$$

$$f_*(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \quad , \quad f^*(X) = \{ f(a) \in X \mid a \in S \}$$