Álgebra I

Axiomática de conjuntos

Dado que la matemática es una ciencia abstracta, no podemos comprobar si un resultado es o no correcto, lo cual obliga a establecer un contexto en el que los matemáticos han de ponerse de acuerdo en qué reglas o conceptos se dan por válidos.

En el contexto de "conjuntos", hemos de considerar que todo objeto matemático es un conjunto y cualquier enunciado debe estar basado en conjuntos y en la pertenencia.

⊛ Conjunto y pertenencia como las dos nociones básicas en el contexto de conjuntos.

Una vez tenemos el contexto, necesitamos establecer los axiomas (verdad que se da por supuesta).

⊛ Axiomática de Zermelo - Fraenkel

- Para expresar un conjunto usamos cualquier letra: $A, X, a, \beta, \ldots$
- Para indicar que pertenece → $\in$ (No podemos definir conjunto y pertenece)

Concepto de contenido ⇒ $\boxed{X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x \in X, x \in Y}$

Concepto de Igualdad ⇒ $\boxed{X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X}$

No podemos probar que un conjunto existe, pero aceptamos este axioma:

Axioma 1. : $\boxed{\exists X ; \forall x, x \notin X}$ $\Rightarrow$ Se demuestra por reducción al absurdo.

Teorema 1

Si X es un conjunto que satisface el Axioma 1, entonces $X \subseteq Y$, para cualquier conjunto de Y.

Consiste en negar la hipótesis del teorema y llegar a una contradicción (a algo que contradiga nuestros axiomas)

Negación del Teorema 1

Si X es un conjunto que satisface el Axioma 1, entonces $\exists Y$ tal que $\boxed{X \not\subseteq Y}$

Esto dice que debe existir un $x \in X$ que no esté en Y, contradiciendo así la hipótesis de que Ax 1 satisface el teorema, pues X no tiene elementos.

Consecuencia del Teorema 1

Corolario 1 → Existe un único conjunto que satisface el Axioma 1. Denotaremos a este conjunto como $\emptyset$ ó tmb 0; conjunto vacío o cero.

Demo → Si X_1 y X_2 satisfacen Ax 1, entonces $X_1 \subseteq X_2$ y, al mismo tiempo, $X_2 \subseteq X_1$, luego $X = Y$

¿Cómo podemos dar un conjunto?

Por:

- **Extensión** → Cuando especifiquemos todos los elementos de X (se listan todos los elementos del conjunto).

(!) No podemos dar por extensión el conjunto de los $\mathbb{N}$.

- **Comprensión** → Cuando tengamos una propiedad referente a los elementos de un conjunto ya dado X y nos quedemos con el conjunto de los elementos de X que tienen esa propiedad.

P.ej: Conjunto de los números naturales pares: $P = \{x \in \mathbb{N} \, ; \, x \text{ es par}\}$

El conjunto de las partes de un conjunto.

Si $A \subseteq S$, diremos que A es un subconjunto de S (Propiedad: Ser subconjunto)

Esa propiedad no está referida, en principio a los elementos de un conjunto.

La axiomática de conjuntos incluye un axioma que permite dado un conjunto S, construir el conjunto de los subconjuntos de S:

"Conjunto de las partes de S"

$$P(S) = \{A \, ; \, A \subseteq S\}$$

Para definir $P(S)$ por comprensión necesitamos un conjunto ?? de forma q:

$$P(S) = \{A \in ?? \, ; \, A \subseteq S\}$$

Necesitamos un axioma que nos permita hablar del conjunto de las partes de un conjunto S

Como consecuencia del Th. 1: $\forall S, \emptyset \in P(S)$, por tanto $P(S) \neq 0$ ya que tiene al menos un elemento. Por otro lado, $S \subseteq S$, de forma que tmb tenemos: $\forall S, S \in P(S)$, luego:

- $\forall S, P(S) \neq 0$
- Si $S \neq 0$ entonces $P(S)$ tiene al menos dos elementos $\emptyset$ y S.

Operaciones con conjuntos.

Sean A y B subconjuntos de S

Intersección → Subconjunto de S de elementos a tales que $a \in A$ y $a \in B$

$$\boxed{A \cap B = \{a \in S \mid a \in A \wedge a \in B\}}$$

Si $A \cap B = \emptyset$

A y B → Disjuntos.

Unión → Subconjunto de S de elementos a tales que $a \in A$ ó $a \in B$

$$\boxed{A \cup B = \{a \in S \mid a \in A \vee a \in B\}}$$

Proposición 1

Para cualesquiera subconjuntos $A, B, C \subseteq S$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Demostración:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Sea $a \in A \cap (B \cup C)$ Como $a \in (B \cup C)$, será $a \in B \vee a \in C$

y como $a \in A$, bien $a \in A \cap B \vee a \in A \cap C$, es decir, se deduce

que $a \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ahora sea $a \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Será $a \in (A \cap B) \vee a \in (A \cap C)$

En cualquier caso $a \in A \wedge a \in B \vee a \in C$. Entonces

$a \in A \wedge (B \cup C)$, o sea que $a \in A \cap (B \cup C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sea $a \in A \cup (B \cap C)$, es decir, $a \in A \vee a \in (B \cap C)$

Como $a \in (B \cap C)$, será $a \in B \wedge a \in C$.

De forma que $a \in A \vee a \in B \wedge a \in C$

Luego, $a \in A \vee B \wedge a \in A \cup C$

De aquí se deduce que $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ahora sea $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sea $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, en cualquier caso

$a \in (A \vee B) \wedge a \in (A \cup C)$, es decir,

$a \in A \vee a \in B \wedge a \in C$

Entonces, $a \in A \vee a \in (B \cap C)$, o sea que $a \in A \cup (B \cap C)$

Intersecciones y uniones para un conjunto arbitrario de subconjuntos de un conjunto S

Sea $\Gamma \subseteq P(S)$

Intersección

$$\boxed{\bigcap_{A\in\Gamma} A = \{a \in S \mid a \in A \ \forall A \in \Gamma\}}$$

Unión

$$\boxed{\bigcup_{A\in\Gamma} A = \{a \in S \mid \exists A \in \Gamma \mid a \in A\}}$$

Si Γ es finito ; $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, entonces escribimos también $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ó $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ (Intersección) o $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ó $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ (Unión).

Propiedades distributivas

$$B \cap \bigcup_{A\in\Gamma} A = \bigcup_{A\in\Gamma} (B \cap A) \quad , \quad B \cup \bigcap_{A\in\Gamma} A = \bigcap_{A\in\Gamma} (B \cup A)$$

Complementario de un subconjunto $A \subseteq S$

$$C(A) = \{a \in S \mid a \notin A\}$$

Propiedades

1. $C(\emptyset) = S$
2. $C(S) = \emptyset$
3. $A \cap C(A) = \emptyset$
4. $A \cup C(A) = S$
5. $C(C(A)) = A$.

Proposición 1 (Morgan)

$$c\left(\bigcap_{A\in\Gamma} A\right) = \bigcup_{A\in\Gamma} c(A)$$

$$c\left(\bigcup_{A\in\Gamma} A\right) = \bigcap_{A\in\Gamma} c(A)$$

Demo

$$c\left(\bigcap_{A\in\Gamma} A\right) = \bigcup_{A\in\Gamma} c(A)$$

Sea $a \in c\left(\bigcap_{A\in\Gamma} A\right)$ Entonces $a \notin \bigcap_{A\in\Gamma} A$ y, por tanto,

$\exists A\in\Gamma \mid a \notin A$, o lo que es lo mismo, $\exists A\in\Gamma \mid a \in c(A)$.

Por tanto, $a \in \bigcup_{A\in\Gamma} c(A)$.

Supongamos ahora $a \in \bigcup_{A\in\Gamma} c(A)$. Entonces $\exists A\in\Gamma \mid a \in c(A)$,

o lo que es lo mismo, $\exists A\in\Gamma \mid a \notin A$. Pero entonces

$a \notin \bigcap_{A\in\Gamma} A$ y, por tanto, $a \in c\left(\bigcap_{A\in\Gamma} A\right)$.

Proposición 2

Para cualesquiera dos subconjuntos $A, B \in P(S)$

$$A \subseteq B \iff c(B) \subseteq c(A)$$

Demo

Si $A \subseteq B$, y $a \notin B$ entonces $a \notin A$, es decir $c(B) \subseteq c(A)$

y recíprocamente si $c(B) \subseteq c(A)$, entonces $A = cc(A) \subseteq cc(B) = B$

Para subconjuntos $A, B \in P(X)$, es usual también considerar el subconj

$$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\} = A \cap c(B)$$

Proposiciones y demostraciones.

Los operadores lógicos corresponden a operaciones en conjuntos.

P.ej: Si P y Q son propiedades referidos a los elementos de un conjunto X;

$$* \; X_{P \wedge Q} = \{x \in X \mid x \in X_P \wedge x \in X_Q\} = X_P \cap X_Q$$

$$\oplus \; X_{P \vee Q} = \{x \in X \mid x \in X_P \vee x \, X_Q\} = X_P \cup X_Q$$

* Propiedad que es satisfecha por los elementos que satisfacen tanto P como Q.

⊕ Prop. que es satisfecha por los elementos que satisfacen P o Q.

La prop. que es verificada por aquellos elementos sobre los que una propiedad P es falsa se denota por $\neg P$ ('no P')

$$X_{\neg P} = \{x \in X \mid x \notin X_P\} = c(X_P)$$

	Operador lógico	Operador en conjuntos	
y	$\wedge$	$\cap$	Intersección
o	$\vee$	$\cup$	Unión
no	$\neg$	c	Complementario

Proposición matemática: Relación entre dos propiedades P, Q referidas a los elementos de un conjunto X, del tipo $P \Rightarrow Q$, que significa que si un elemento de X satisface la propiedad P, entonces ese elemento tmb satisface Q.

$P \Rightarrow Q$ será verdad si $X_P \subseteq X_Q$

Demostrar una proposición $P \Rightarrow Q$ consistirá en probar la inclusión $X_P \subseteq X_Q$.

La falsedad de una proposición ($P \not\Rightarrow Q$; $X_P \not\subseteq X_Q$; $\exists a \in X_P ; a \notin X_Q$) se demuestra con un contraejemplo

Proposición 1.1.8 (Transitividad)

Sean P, Q, y R propiedades referidas a los elementos de un conjunto X. Si $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow R$, entonces $P \Rightarrow R$.

Demo

Si $X_P \subseteq X_Q \subseteq X_R$, entonces $X_P \subseteq X_R$

Cuando $\underbrace{P \Rightarrow Q \text{ y } Q \Rightarrow P}_{P \Leftrightarrow Q}$, P y Q son equivalentes y por tanto $X_P = X_Q$

Proposición 1.1.9 Sean $P_1, \dots, P_n$, una lista de propiedades referidas a los elementos de un conjunto X.

Si $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3, \dots P_{n-1} \Rightarrow P_n$ y $P_n \Rightarrow P_1$, entonces $P_i \Leftrightarrow P_j$ para todo i, j.

Demo

Si $i < j$ $\quad P_i \Rightarrow P_j$ y tmb $P_j \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_i$

Proposición 1.1.10

Para cualquier dos subconjuntos $A, B \in P(X)$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow c(B) \subseteq c(A)$$

Proposición 1.1.11.

Sean P y Q propiedades referidas a elementos de un conjunto X.

(i) $P \Rightarrow Q$

(ii) $\neg Q \Rightarrow \neg P$

Demo $X_P \subseteq X_Q$ equivale a que $c(X_Q) \subseteq c(X_P)$

Cuando demostramos $\neg Q \Rightarrow \neg P$ para probar $P \Rightarrow Q$, se dice que razonamos el contrarecíproco de la proposición original.

También se suele decir que demostramos $P \Rightarrow Q$ por reducción al absurdo. Suponemos que un elemento verifica P pero no Q. Entonces verifica $\neg Q$, y por tanto $\neg P$. Es decir, que no verifica P en contradicción con la hipótesis.