3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[1, 4]$. Elija una semilla x_0 que permita hallar, usando el método de Newton-Raphson, una aproximación a dicha solución y justifique dicha elección. Calcule las dos primeras iteraciones.

Sea $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$, una aplicación continua y derivable en $\mathbb{R}$; en particular en $[1,4]$. Por lo que es una función que verifica las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de Bolzano mediante el cual podemos determinar si la función posee alguna raíz real en el intervalo $[1,4]$. Como

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1-2-5 = -6 < 0 \\ f(4) &= 64-32-5 = 27 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(1)\cdot f(4) < 0$$

deducimos que en el intervalo $[1,4]$, f tiene al menos una raíz real. Probemos que dicha raíz real es única necesariamente.

Sea $f'(x) = 3x^2 - 4x$ la primera derivada $\Rightarrow f'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \in [1,4] \end{cases}$

Veamos la monotonía de la función a izquierda y derecha de $x = \frac{4}{3}$:

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in [1, \frac{4}{3}) \Rightarrow f$ decrece en $[1, \frac{4}{3}]$. Como $f(1)\cdot f(\frac{4}{3}) = -6 \cdot -6.\overline{185} > 0$ no hay cambio de signo, luego la raíz estará a la derecha del $4/3$. Como $x = \frac{4}{3}$ es mínimo absoluto en $[1,4]$, deducimos que en $(4/3, 4]$ f es estrictamente creciente, luego de cortar al eje, lo hará una sola vez. Es por ello que la raíz ha de ser única.

Tomemos un $x_0 \in [\frac{4}{3}+\varepsilon, 4]$ con $\varepsilon > 0$ todo lo pequeño que se quiera. Sea $x_0 \in [\frac{4}{3}+\varepsilon, 4]$; $x_0 = 2.8$ p.ej., que verifica la condición de relajación del teorema de convergencia global. Comprobemos que hay convergencia verificando si se cumplen las condiciones de dicho teorema:

1°) $f(\frac{4}{3}+\varepsilon)\cdot f(4) < 0$ ✓

2°) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [\frac{4}{3}+\varepsilon, 4]$ ✓

3°) $f''(x)$ no cambia de signo en $[\frac{4}{3}+\varepsilon, 4]$: $f''(x) = 6x - 4 = 0 \iff x = \frac{2}{3} \Rightarrow f''(x)$ no cambia de signo en $[\frac{4}{3}+\varepsilon, 4]$ $(\frac{2}{3} \notin [\frac{4}{3}+\varepsilon, 4])$ ✓

4°) $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ ✓

Por el Teorema de convergencia global, existe una única raíz real en $[\frac{4}{3}+\varepsilon, 4]$, lo que reafirma lo probado anteriormente, y además, el método de Newton-Raphson converge a la solución, para cualquier x_0 en dicho intervalo y además con orden al menos cuadrático.

Apliquemos el método de Newton-Raphson: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$x_1 = 2.8 - \frac{1.272}{12.32} = 2.696753247$$

$$x_2 = 2.696753247 - \frac{0.0671277}{11.3042124} = 2.690815399$$