UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Actividad Evaluable 2. Probabilidad

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Autor:

Quintín Mesa Romero

Actividad Evaluable 2

Deducir de forma razonada las funciones generatrices de momentos de todas las variables aleatorias continuas presentadas en las clases de teoría.

Observación

Las que están deducidas en las diapositivas de clase también hay que aportarlas a la entrega con algún comentario que complete la demostración si se considera.

1. Introducción

En primer lugar, dado que lo vamos a necesitar, definamos la esperanza matemática de una función de una variable aleatoria continua:

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria y sea $g : E_X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces:

Si existe $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| f_X(x)dx < \infty$, entonces,

$$\exists E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)dx$$

donde f_X es la función de densidad de la variable aleatoria.

Por otra parte, sabemos que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria es una aplicación

$$M_X : (-t_0, t_1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

con t_0, $t_1 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, tal que

$$M_X(t) = E[e^{tX}],\ \forall t \in (-t_0, t_1)$$

siempre y cuando se garantice la existencia de $E[e^{tX}]$, $\forall t \in (-t_0, t_1)$ con t_0, $t_1 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

2. Uniforme Continua

Sea X una variable aleatoria que sigue una **distribución Uniforme Continua**. Teniendo en cuenta que su función de densidad es, para todo $x \in (a, b)$ con (a, b) un intervalo,

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a},$$

procedamos a intentar calcular la función generatriz de momentos de esta variable aleatoria continua, teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado introductorio de la actividad.

En primer lugar, sabemos que dicha función existe dado que la variable está acotada; x solo toma valores en el abierto (a, b), luego,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_a^b \frac{e^{tX}}{b-a}dx = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)},\ t \neq 0;$$

Si $t = 0$, entonces se tiene:

$$lim_{t\to 0}\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} = lim_{t\to 0}\frac{be^{tb}-ae^{ta}}{(b-a)} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Por tanto, dado que para cualquier valor de t, se aprecia que la integral es convergente, deducimos que existe $\forall t \in \mathbb{R}$

3. Normal

Consideremos a continuación una variable aleatoria X que sigue una distribución **normal** de media μ y varianza σ^2; $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Hemos de tener en cuenta que la función de densidad de una variable aleatoria que sigue una distribución normal viene dada por la expresión:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}$$

En primer lugar, demostremos la existencia de la función generatriz de momentos que pretendemos calcular:

$$E[e^{tX}] \overset{*1}{=} e^{t\mu}\cdot E[e^{t(X-\mu)}] = \frac{e^{t\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\mu)-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx =$$

$$\overset{*2}{=} \frac{e^{t\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2-2\sigma^2 t(x-\mu)]}dx = \frac{e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(\mu+t\sigma^2)]^2}dx =$$

$$\overset{c.1}{=} \frac{e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u^2}du \overset{c.2}{=} \frac{e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2e^{w^2}}{\sqrt{\pi}}dw \overset{erf(x)}{=}$$

$$= \frac{e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{2}2 = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Aclaraciones

$*1 \Rightarrow$ se aplica la propiedad de la esperanza matemática, $E[cX] = cE[X]$.
$*2 \Rightarrow$ se saca factor común $-\frac{1}{2\sigma^2}$.
c.1 $\Rightarrow$ aplicamos el cambio de variable

$$u = x - (\mu + t\sigma^2);\quad du = dx$$

c.2 $\Rightarrow$ aplicamos el cambio de variable

$$w = \frac{u}{\sqrt{2}\sigma};\quad dw = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}du$$

llegando así a la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2e^{w^2}}{\sqrt{\pi}}dw$, que es una integral especial, conocida como *función error imaginaria*, con valor aproximado 2.

Si nos fijamos en la forma en la que he puesto la integral que define la experanza de e^{tX}:

$$E[e^{tX}] = \frac{e^{t\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\mu)-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(\mu+t\sigma^2)]^2} dx$$

podemos observar que el integrando lo que aparece es la función de densidad de una variable aleatoria que sigue una normal de media $\mu + t\sigma^2$ y varianza σ^2, por lo que la integral vale 1, y por consiguiente, $E[e^{tx}] < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde se deduce la existencia de la función generatriz de momentos. Viene por tanto dada por:

$$M_X(t) = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}, \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para el caso particular de una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media 0 y varianza 1, la función generatriz de momentos se reduce a:

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

4. Gamma

Previamente al estudio de la función generatriz de momentos correspondiente a una v.a que sigue una distribución gamma, vamos a definir la función gamma, $\Gamma(u)$ como

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx, \;\; u > 0$$

función continua y convergente para $u > 0$.

Una vez dicho esto, sea X una variable aleatoria continua que sigue una distribución **Gamma** de parámetros $u > 0$ (parámetro de forma) y $\lambda > 0$ (parámetro de escala). Su función de densidad viene dada por:

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x}, \;\; x > 0$$

Luego,

$$E[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} e^t \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-(\lambda-t)x} dx$$

Si $t < \lambda$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-(\lambda-t)x} dx \overset{c.1}{=} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^u}{(\lambda-t)^u \Gamma(u)} v^{p-1} e^{-v} dv =$$

$$\overset{*}{=} \frac{\lambda^u}{(\lambda-t)^u \Gamma(u)} \cdot \Gamma(u) = \frac{\lambda^u}{(\lambda-t)^u}$$

para todo $t < \lambda$.

Como la integral anterior existe, por consiguiente existe la función generatriz de momentos, en $(-\infty, \lambda)$, y viene dada por

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda^u}{(\lambda-t)^u \Gamma(u)} \cdot \Gamma(u) = \frac{\lambda^u}{(\lambda-t)^u} = [(1 - \frac{t}{\lambda})]^{-u}, \;\; t < \lambda$$

5. Exponencial

Si el número de sucesos aleatorios independientes que ocurren en un intervalo de tiempo es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, entonces el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del suceso 1, es una variable aleatoria que seguirá una distribución Gamma de parámetros λ, y 1. A dicha distribución Gamma se la conoce como distribución Exponencial de parámetro λ;

$$X \sim exp(\lambda) \Longleftrightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$$

siendo $f_X(x)$ su función de densidad, continua en todo su dominio.

Por lo tanto, dada su relación con la distribución Gamma, la función generatriz de momentos es:

$$M_X(t) = [(1 - \frac{t}{\lambda})]^{-1}, \ \ t < \lambda$$

Simplemente, tomamos la función generatriz de momentos de la Gamma y en lugar de $^{-n}$, sustituimos el n por 1.

6. Erlang

Si por otro lado, a diferencia del caso anterior, queremos medir el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del $n-$ésimo suceso, usaremos una variable aleatoria que seguirá una distribución Gamma de parámetros n y λ. A dicha distribución Gamma se la conoce como distribución de Erlang de parámetros n y λ;

$$X \sim \mathcal{E}(n, \lambda)$$

La podemoos ver también como una generalización de la exponencial. Por tanto, como en realidad una distribución Erlang es una Gamma, en la forma en la que lo hemos descrito en el párrafo anterior, simplemente, la función generatriz de momentos será:

$$M[e^{tX}] = [(1 - \frac{t}{\lambda})]^{-n}, \ \ t < \lambda$$

Donde se ha cambiado el parámetro de forma, u por n.

7. Beta

Previamente al cálculo de la función generatriz de momentos de una variable aleatoria continua que sigue una distribución **beta**, definimos la función beta, $\beta(p, q)$ como:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

También la podemos expresar en función de la función Gamma:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Una vez expuesto esto, una variable aleatoria X sigue una distribución beta de parámetros p y q si:

$$X \sim \beta(p,q) \Longleftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad , x \in (0,1), \quad , p,q > 0.$$

Procedamos pues a calcular la función generatriz de momentos de X. Dicha función existe puesto que, x solo puede tomar valores en el $(0,1)$,es decir, la variable está acotada. Por tanto,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 e^{tx} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \overset{*1}{=} \frac{1}{\beta(p,q)} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_0^1 x^{p+k-1}(1-x)^{q-1} dx \overset{*2}{=}$$

$$\overset{*2}{=} \frac{1}{\beta(p,q)} \sum_{k=0}^{+\infty} \beta(p+k,q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta(p+k,q)}{\beta(p,q)} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(p+k)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+k)\Gamma(p)} \frac{t^k}{k!}, \ t \in \mathbb{R}$$

Aclaraciones

*1: Por las propiedades de la integral y dado que la integral en su totalidad existe, hemos podido cambiar la integral en $0, 1$ de e^{tx}, por el desarrollo en serie.

*2: Se tiene en cuenta en esta igualdad la definición de la función beta.