UNIVERSIDAD DE GRANADA

Actividad Evaluable 3. Probabilidad

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Autor:

Quintín Mesa Romero

Actividad Evaluable 3

Para cualesquiera $(a_1, ..., a_n) \in R^n$, calcular detalladamente, indicando las fórmulas aplicadas, la expresión de la varianza:

$$\exists E[X_i^2], i = 1, ..., n \Rightarrow \exists Var[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i]$$

$$Var[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Para demostrar la expresión de la varianza de una combinación lineal n-dimensional, comenzaremos recordando la expresión que tiene la varianza de una variable aleatoria X. Dada una variable aleatoria X, su varianza (momento centrado de orden 2) vendrá dada por:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Una vez visto el caso de la varianza de **una variable aleatoria arbitraria**, apliquemos esta misma expresión ahora a una **combinación lineal de n variables aleatorias**:

$$Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = E[(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)^2] - (E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i])^2$$

Analicemos la expresión resultante: comencemos desarrollando el primero de los sumandos ($E[(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)^2]$), dejando por ahora invariante el segundo:

$$E[(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)^2] - (E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i])^2 = E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j X_i X_j] - (E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i])^2 \overset{Li}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E[X_i X_j] - (E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i])^2$$

Notas

Li: En esta igualdad se aplica la propiedad de la linealidad de la esperanza:
Para cualesquiera $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\exists E[X_i] \Rightarrow \exists E[a_i X_i + b_i], \quad i = 1, ..., n$$

$$\Downarrow$$

$$\exists E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] + b_i.$$

A continuación, desarrollemos el sumando que anteriomente hemos dejado invariante usando también Li:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E[X_i X_j] - (E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i])^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E[X_i X_j] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E[X_i]E[X_j] =$$

combinamos las sumas en una sola (se puede dado que ambos sumandos son sumas con iguales índices) y sacamos factor común $a_i a_j$:

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j (E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j])$$

Llegados a este punto, hemos de analizar la expresión a la que hemos llegado. Hemos de notar que la expresión $E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$, resulta bastante familiar. En efecto, es la expresión de la **covarianza** de dos variables aleatorias X_i, X_j.

Observaciones

1. La covarianza de dos variables aleatorias, X, Y, viene dada por:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

2. Dada una variable aleatoria arbitraria, X,

$$Cov(X, X) = E[X^2] - E[X]^2 = Var(X)$$

Aplicando la definición de covarianza expuesta en la observación 1 en la expresión que andábamos desarrollando, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j (E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Aplicando la observación 2, obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j \neq i}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Observación

- En todo lo expuesto ha sido vital la hipótesis del enunciado, $\exists E[X_i^2], i = 1, ..., n$, para garatizar la existencia de la varianza de las variables con las que hemos ido trabajando.
- Nótese que los números reales a_i, $i \in \mathbb{R}$ pueden ser cualquiera.

En conclusión, hemos demostrado que si $\exists E[X_i^2], i = 1, ..., n$, entonces existe la varianza de la combinación lineal de las variables aleatorias X_i, $i = 1, ..., n$, para cualquier $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, con valor:

$$Var[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i \neq j}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Observación

Nótese que si las variables que están en juego son independientes, el valor de su **Covarianza** es **0**, luego, la expresión de la varianza de una combinación lineal de dichas variables aleatorias se reduce a:

$$Var[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$