UNIVERSIDAD DE GRANADA

Ejercicios Voluntarios Probabilidad

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Autor:

Quintín Mesa Romero

Ejercicio 1

Una urna contiene 10 bolas de las que 8 son blancas. Se extraen al azar sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas obtenidas. Determina:

- La distribución de probabilidad de X.
- La función de probabilidad de X.
- Las siguientes probabilidades: obtener como máximo una bola blanca, obtener como mínimo una bola blanca.
- El número esperado de bolas blancas y su probabilidad.

Indicación: Obtener la función masa de probabilidad asociada al experimento aleatorio.

Sea Ω el espacio muestral del experimento; los posibles resultados que se pueden obtener del experimento "sacar dos bolas blancas sucesivamente y sin reemplazamiento"

$$\Omega = \{BB, BX, XB, XX\}$$

Sea $\mathcal{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aleatoria "Número de bolas blancas obtenidas de la urna", dada por:

$$\mathcal{X}(BB) = 2,\ \mathcal{X}(BX) = \mathcal{X}(XB) = 1,\ \mathcal{X}(XX) = 0$$

Hallemos su distribución de probabilidad:
Sea $P_{\mathcal{X}} : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$ dada por:

$$P_{\mathcal{X}}(2\ bolas\ blancas) = P(BB) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

$$P_{\mathcal{X}}(1\ bola\ blanca) = P(BX) + P(XB) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{45}$$

$$P_{\mathcal{X}}(0\ bolas\ blancas) = P(XX) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

A continuación, hallaremos la función de distribución de $\mathcal{X}$. Esto es, la función $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ dada por:

$$F_{\mathcal{X}}(x) = P_{\mathcal{X}}[X \leq x] \Rightarrow F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{45} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{17}{45} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Calculemos a continuación las probabilidades que se nos piden en el penúltimo apartado:

- Probabilidad de obtener como máximo una bola blanca. Esto es,

$$P_{\mathcal{X}}[\mathcal{X} \leq 1] = F_{\mathcal{X}}(1) = \frac{17}{45}$$

- Probabilidad de obtener como mínimo una bola blanca:

$$P_{\mathcal{X}}[1 \leq x \leq 2] = F_{\mathcal{X}}(2) - F_{\mathcal{X}}(1^-) = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$$

Por último, el número esperado de bolas blancas y su probabilidad. Hemos de calcular la esperanza de $\mathcal{X}$. Por ser $\mathcal{X}$ una variable aleatoria discreta,

$$E[\mathcal{X}] = \sum_{x \in E_{\mathcal{X}}} x P_{\mathcal{X}}(x) = 0 \cdot \frac{1}{45} + 1 \cdot \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{8}{5} = 1.6$$

Esto quiere decir, que se espera que se extraigan aproximademante 2 bolas blancas de la urna. Y su probabilidad,

$$P_{\mathcal{X}}(\frac{8}{5}) = 0$$

Ejercicio 2

El tiempo (en horas) transcurrido entre dos paradas por averías en las máquinas es una variable aleatoria, $\mathcal{X}$, continua con función de densidad dada por:

$$f(x) = ax^2 \; si \; 0 \leq x \leq 2; f(x) = 0 \; , con \; a \in \mathbb{R}$$

Determina:

- El valor de la constante a.
- La función de distribución de X.
- El tiempo máximo que con probabilidad 0.95 puede transcurrir entre dos paradas.
- El tiempo medio esperado que puede transcurrir entre dos paradas y la dispersión de la distribución respecto a este.

Sea $\mathcal{X} \equiv$ "tiempo transcurrido en horas entre dos paradas por averías en las máquinas" una variable aleatoria continua.
Por ser f la función de densidad de una variable aleatoria continua, f es no negativa e integrable, con

$$\int_0^2 f(x)dx = 1$$

Teniendo en cuenta esta propiedad, podemos hallar el valor del parámetro a sin más que integrando la función y despejando:

$$\int_0^2 a \cdot x^2 \; dx = [\frac{a \cdot x^3}{3}]_0^2 = \frac{a \cdot 8}{3} = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{3}{8}$$

Hallemos ahora la función de distribución de la función:

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z) \; dz = \int_{-\infty}^{x} \frac{3 \cdot z^2}{8} \; dz = [\frac{z^3}{8}]_{-\infty}^{x} = \frac{x^3}{8}$$

A continuación, pasemos a hallar el tiempo máximo que con probabilidad 0.95 puede transcurrir entre dos paradas. Para ello hacemos,

$$F_{\mathcal{X}}(x) = 0.95 \Rightarrow \frac{x^3}{8} = 0.95 \Longleftrightarrow x = 1.966 \; horas$$

Por último, calculemos el tiempo medio esperado que puede transcurrir entre dos parada; la esperanza matemática de esta variable continua:

$$E[\mathcal{X}] = \int_0^2 x \cdot f(x)\ dx = \int_0^2 \frac{3}{8} \cdot x^3\ dx = [\frac{3x^4}{32}]_0^2 = 1.5\ horas$$

Se espera que transcurra un tiempo medio de 1.5 horas entre dos paradas.

Para medir la dispersión respecto de dicho tiempo medio, vamos a calcular la varianza de $\mathcal{X}$, previo cálculo de $E[\mathcal{X}^2]$:

$$E[\mathcal{X}^2] = \int_0^2 x^2 \cdot f(x)\ dx = \int_0^2 \frac{3}{8} \cdot x^4\ dx = [\frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5}]_0^2 = 2.4\ horas^2$$

$$Var(\mathcal{X}) = E[\mathcal{X}^2] - (E[\mathcal{X}])^2 = \frac{3}{20} = 0.15$$

La varianza es pequeña, lo que me dice que los tiempos de espera no se dispersan mucho la la media.