UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Actividades Evaluables Probabilidad

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Autor:

Quintín Mesa Romero

Actividad Evaluable 1

Se denota $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ el espacio probabilístico base. Se considera la siguiente definición de medida de probabilidad:

Definición 1

$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$, es una función de probabilidad si satisface los siguientes tres axiomas:

A1 $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$

A2 $P(\Omega) = 1$

A3 Para cualquier secuencia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ de sucesos disjuntos

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

Demostrar, a partir de la definición anterior, las siguientes propiedades:

a) $P(\emptyset) = 0$.
b) Probabilidad del suceso complementario: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
c) Aditividad finita para procesos disjuntos: $P(\bigcup_{n=1}^{N}) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$.
d) Probabilidad de la diferencia y monotonía: $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, $P(A - B) = P(A) - P(B)$, $P(B) \leq P(A)$.
e) $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
f) Principio de inclusión-exclusión para la unión finita de sucesos no disjuntos.
g) Subaditividad: $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.
h) Desigualdad de Boole: $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^c)$.

Vamos a comenzar demostrando en primer lugar, la propiedad del apartado b con objeto de poder demostrar justo a continuación, el apartado a. He optado por hacerlo en ese orden porque me era más fácil y además, no hay nada especificado en el enunciado que nos obligue a demostrar todo en orden.

b) **Probabilidad del suceso complementario:** $P(A^c) = 1 - P(A)$

Sabemos, por la definición de medida de probabilidad que se nos da en el enunciado, que $P(\Omega) = 1$ y que $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$. Luego, dado un suceso $A \in \mathcal{A}$ se verifica que:

$$P(\Omega) = P(A \cap A^c) \overset{A3}{=} P(A^c) + P(A) \overset{A2}{=} 1 \iff P(A^c) = 1 - P(A)$$

Se ha aplicado en la segunda igualdad el axioma 3 de la definición porque A y A^c son sucesos claramente disjuntos. En la tercera, se ha podido aplicar el segundo axioma: $P(\Omega) = 1$, quedando así demostrado este primer apartado.

a) $P(\emptyset) = 0$

Para abordar este apartado, hemos de tener en cuenta que, efectivamente, $\emptyset = \Omega^c$, luego, podemos aplicar el resultado previamente demostrado, ayundándonos también de los axiomas 1 y 2 de la definición:

$$P(\emptyset) \overset{b)}{=} 1 - P(\Omega) \overset{A2}{=} 1 - 1 = 0$$

Por el axioma 1 tiene sentido que sea 0 dicha probabilidad, pues la probabilidad de un suceso es mayor o igual que 0.

c) **Aditividad finita para procesos disjuntos:** $P(\bigcup_{n=1}^{N}) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de sucesos tal que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $A_n = \emptyset$. Entonces, por el axioma 3 de la definición, se verifica:

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = P(A_1 \cup ... \cup A_N \cup \bigcup_{n>N}^{\infty} \emptyset) = P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) \overset{A3}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = P(A_1)+...+P(A_N)+\sum_{n>N}^{\infty} P(\emptyset) =$$

$$= P(A_1) + ... + P(A_N) + 0 = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$$

En la tercera igualdad se puede aplicar el axioma 3 de la definición porque los sucesos de la sucesión que hemos definido son todos disjuntos dos a dos.

d) Probabilidad de la diferencia y monotonía: $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, $P(A-B) = P(A) - P(B)$, $P(B) \leq P(A)$.

Por lo demostrado en $b)$ y por los axiomas de la definición se verifica:

$$P(A-B) = P(A \backslash B) = P(A \cap B^c) = P((A^c \cap B)^c) \overset{b)}{=}$$
$$\overset{b)}{=} 1 - P(A^c \cup B) \overset{A3}{=} 1 - P(A^c) - P(B) \overset{b)}{=} 1 - (1 - P(A)) - P(B) = P(A) - P(B)$$

e) $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Para hallar cuanto vale la probabilidad de la unión de dos sucesos no necesariamente disjuntos, hemos de distinguir dos casos:

- Caso $A \cap B = \emptyset$ (sucesos disjuntos): Ya se ha demostrado en el apartado $c)$.
- Caso $A \cap B \neq \emptyset$: Dados dos sucesos, $A, B \in \mathcal{A}$, con elementos comunes, vamos a hacer la siguiente división de subconjuntos:

$$A = A^{'} \cup (A \cap B) \qquad B = B^{'} \cup (A \cap B)$$

Por el apartado $c)$ anteriormente demostrado, como tenemos conjuntos disjuntos:

$P(A) = P(A^{'} \cup (A \cap B)) = P(A^{'}) + P((A \cap B))$ *y* $P(B) = P(B^{'} \cup (A \cap B)) = P(B^{'}) + P((A \cap B))$

Luego, $$P(A) + P(B) = P(A^{'}) + P(B^{'}) + 2P((A \cap B)). \text{ (*)}$$

Por otro lado, por lo deducido del apartado $c)$, se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A^{'} \cup B^{'} \cup (A \cap B)) \overset{c)}{=} P(A^{'}) + P(B^{'}) + P(A \cap B) \overset{(*)}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

f) **Principio de inclusión-exlusión para la unión finita de sucesos no disjuntos**

Demostrar el principio de inclusión-exclusión para la unión finita de sucesos no disjuntos, teniendo bajo el brazo los apuntes de 1º de Juan Antonio Maldonado, es equivalente a demostrar que

$$P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) - \sum_{i_1,i_2=1,i_1<i_2}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1,i_2,i_3=1,i_1<i_2<i_3}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) +$$

$$+ ... + (-1)^{N+1} P(\bigcap_{i=1}^{N} A_i)$$

Para probar esto, llevaremos a cabo un razonamiento por inducción sobre N, comenzando en el caso base N=2:

- **Caso N=2:** demostrado en el apartado anterior.
- **Hipótesis de inducción:** Supongamos lo que pretendemos demostrar cierto para N y demostremos que se verifica para $N+1$:

$$P(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i) = P((\bigcup_{i=1}^{N} A_i) \cup A_{N+1}) \overset{e)}{=} P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) + P(A_{N+1}) - P((\bigcup_{i=1}^{N} A_i) \cap A_{N+1}) \overset{*}{=}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) + P(A_{N+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{N}(A_i \cap A_{N+1}))$$

$*$ = Aplicamos la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección.

Como la propiedad que intentamos demostrar se está suponiendo cierta para la unión de N sucesos, aplicamos dicha hipótesis y nos queda:

$$P(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i) = [\sum_{n=1}^{N} P(A_n) - \sum_{i_1,i_2=1,i_1<i_2}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1,i_2,i_3=1,i_1<i_2<i_3}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) +$$

$$+ ... + (-1)^{N+1} P(\bigcap_{i=1}^{N} A_i) + P(A_{N+1}) -$$

$$-\overset{*}{[} \sum_{i_1=1}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{N+1}) - \sum_{i_1,i_2=1,i_1<i_2}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{N+1}) + ... + (-1)^{N+1} P(\bigcap_{i=1}^{N+1} A_i)]$$

$\overset{*}{[}$: Aquí aparecen las sumas de las probabilidades de intersecciones dos a dos, tres a tres ,etc., que no aparecen en el primer []; las probabilidades de las intereccciones A_{N+1} con el resto de sucesos, por tanto, redondeando las sumas se tiene que:

$$P(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i) = [\sum_{n=1}^{N+1} P(A_n) - \sum_{i_1,i_2=1,i_1<i_2}^{N+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1,i_2,i_3=1,i_1<i_2<i_3}^{N+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) +$$

$$+ ... + (-1)^{N+2} P(\bigcap_{i=1}^{N+1} A_i)$$

g) Subaditividad: $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Para demostrar esta propiedad, comencemos definiendo una sucesión de sucesos $\{A^{'}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_1^{'} = A_1$ y $A_n^{'} = A_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$ para todo $n \geq 2$, construyendo así una sucesión de sucesos mutuamente exluyentes pues, cada suceso $A_n^{'}$ solo tiene elementos de A_n que no están en los A_j con $n > j$. Dichos sucesos verifican que $A_n^{'} \subseteq A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y además $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{'} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Luego,

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{'}) \overset{A3}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^{'}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

h) Desigualdad de Boole: $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^c)$.

Dada una sucesión de sucesos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, teniendo en consideración propiedades características del Álgebra de Boole, se tiene:

$$P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = P((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c)^c) = 1 - P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c) \overset{g)}{\geq} 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A^c)$$

En concreto se han usado las leyes de De Morgan para poder proceder en la demostración.