Cálculo II
(Grupo 1º A)
Relación de Ejercicios nº 3

Ejercicio 3.1: Sea $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$. Dado $a \in \mathbb{R}$, expresar el polinomio $p(x)$ en potencias de $(x - a)$. Como aplicación, expresar en potencias de $(x - 2)$ el polinomio $p(x) = 6 + 7x - 3x^2 - 5x^3 + x^4$.

Ejercicio 3.2: Sea $f(x)$ una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en el origen es $P^f_{3,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en el origen de la función $g(x) = xf(x)$.

Ejercicio 3.3: Si el polinomio de Taylor de grado 3, centrado en el origen, de la función $f(x)$ es $P_{3,0}(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, calcular el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = e^{f(x)}$.

Ejercicio 3.4: Calcular el polinomio de Taylor de orden n, en el punto $= 0$ (desarrollo de Maclaurin) de las siguientes funciones:

(i) e^x (ii) $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (iii) $\cos x$
(iv) $\operatorname{sen}(x)$ (v) $\tan(x)$ (vi) $\operatorname{arc\,sen}(x)$
(vii) $\ln(1+x)$ (viii) $\operatorname{arc\,tg}(x)$

Ejercicio 3.5: Sean $f, g: I \to \mathbb{R}$ funciones $(n+1)$ veces derivables en el punto $a \in I$. Sea $h(x) = f(x)g(x)$ para cada $x \in I$. Demostrar que $P^h_{n,a}(x)$ se obtiene del polinomio producto $P^f_{n,a}(x)P^g_{n,a}(x)$ eliminando los términos de orden mayor estricto que n.

Ejercicio 3.6: Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función $(n+1)$ veces derivable en el punto $x = 0$ (que es interior a I). Sea $k \in \mathbb{N}$ y $h(x) = f(x^k)$. Demostrar que $P^h_{\cancel{n+k}\,nk,0}(x) = P^f_{n,0}(x^k)$.

Ejercicio 3.7: Calcular los siguientes límites (utilizando el desarrollo de Taylor):

(i) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^4}\left(2x\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt{1+x^2} - 2 - 2x - x^2\right)$ (ii) $\lim_{x\to0} \frac{(\tan x - \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - \frac{x^4}{2}}{x^6}$

(iii) $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)\operatorname{sen} x - x^2 + x^3}{x^3}$ (iv) $\lim_{x\to0} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2(x)}{1 - e^{-x^2}}$

(v) $\lim_{x\to0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x^n}$ (vi) $\lim_{x\to0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}}{x^n}$

(vii) $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}$ (viii) $\lim_{x\to0} \frac{e^x - \operatorname{sen}(x)}{e^x - 1 - x - x^2}$

Ejercicio 3.8: Estudiar el comportamiento en 0 y $\pm\infty$ de la función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^6}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right)$, para cada $x \in \mathbb{R}^*$.

Ejercicio 3.9: Probar que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, para todo $x \in [0, \pi]$.

Ejercicio 3.10: Calcular el polinomio de Taylor de orden 8 en el punto $x = 0$ de la función $\ln(1 + x^4)$.

Ejercicio 3.11: Calcular un valor aproximado, con un error menor que 10^{-2}, de los siguientes números reales: (i) $\sqrt[3]{7}$, (ii) $\operatorname{sen}\frac{1}{2}$, (iii) $\ln 3$, (iv) $\sqrt{e}$.

Ejercicio 3.12: Probar que la función $\ln x$ es cóncava hacia abajo. Deducir la Desigualdad de Young: si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, siendo $p > 1$, entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, para cada $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 3.13: Sean I y J intervalos, y $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ funciones cóncavas hacia arriba tales que $f(I) \subseteq J$. Probar que si g creciente entonces $g \circ f$ es cóncava hacia arriba. Deducir que la función $h : I \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = e^{f(x)}$ es cóncava hacia arriba.

Ejercicio 3.14: Dar un ejemplo que muestre que la composición de dos funciones cóncavas hacia arriba puede no ser cóncava hacia arriba.

Ejercicio 3.15: En cada uno de los siguientes casos, determinar los intervalos en los que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo:

(i) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$, (ii) $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$,

(iii) $f(x) = \ln(1 + x^2)$, (iv) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

Ejercicio 3.16: Demostrar que toda función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava hacia abajo y acotada es constante.

Ejercicio 3.17: Calcular los puntos de inflexión (si los hay) de las funciones

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ (ii) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 2x + 1$

Ejercicio 3.18: Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función cóncava hacia arriba. Probar que:

(i) Si f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in I$ entonces f tiene un mínimo absoluto en x_0.

(ii) Si f es derivable en I y $x_0 \in I$ es un punto crítico de f entonces f alcanza un mínimo absoluto en x_0.