Distribución degenerada

Modelo probabilístico	Se observa una característica numérica que toma el mismo valor, c, en todos los resultados de un experimento.
Función masa de probabilidad	$P(X = x) = 1, \quad x = c$
Función de distribución	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$
Función generatriz de momentos	$M_X(t) = e^{tc}, \quad t \in \mathbb{R}$
Momentos	$m_k = E[X^k] = c^k$ y $\mu_k = E[(X - c)^k] = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$
Media y varianza	$m_1 = E[X] = c$ y $\mu_2 = Var[X] = 0$
Caracterización	X es degenerada si y sólo si $Var[X] = 0$. Demostración

Distribución uniforme discreta

Modelo probabilístico	Se considera un experimento aleatorio arbitrario, y se observa una característica numérica que toma un número finito de valores, $x_1, \ldots, x_n$, todos con la misma probabilidad.
Notación	$X \sim U(x_1, \ldots, x_n); \quad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
Función masa de probabilidad	$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \ldots, n$
Función de distribución	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{i-1}{n} & x_{i-1} \leq x < x_i, \quad i = 2, \ldots, n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$
Función generatriz de momentos	$M_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}, \quad t \in \mathbb{R}$
Momentos	$m_k = E[X^k] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ y $\mu_k = E[(X - m_1)^k] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$
Media y varianza	$m_1 = E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$ y $\mu_2 = Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$

Distribución de Bernoulli

Modelo probabilístico	*Experimento o prueba de Bernoulli*: experimento aleatorio con dos únicos resultados, E (éxito) y F (fracaso), con $P(E) = p$. Se considera la variable aleatoria $X = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre } E \\ 0 & \text{si ocurre } F. \end{cases}$
Notación y parámetros	$X \sim B(1,p); \ \ 0 < p < 1$
Función masa de probabilidad	$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \ \ x = 0, 1$
Función de distribución	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$
Función generatriz de momentos	$M_X(t) = pe^t + (1-p), \ \ t \in \mathbb{R}$
Momentos	$m_k = E[X^k] = p$ y $\mu_k = E[(X-p)^k] = (1-p)^k p + (-p)^k(1-p), \ \ \forall k \in \mathbb{N}$
Media y varianza	$m_1 = E[X] = p$ y $\mu_2 = Var[X] = p(1-p)$

Distribución binomial

Modelo probabilístico	Se realizan n repeticiones independientes de una misma prueba de Bernoulli con probabilidad p de éxito, y se mide el número de éxitos.
Notación y parámetros	$X \sim B(n,p); \ \ n \in \mathbb{N}, \ 0 < p < 1$
Función masa de probabilidad Gráficas	$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \ \ x = 0, 1, \ldots, n$ Obtención y verificación
Función de distribución	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & 0 \le x < n \\ 1 & x \ge n \end{cases}$
Función generatriz de momentos	$M_X(t) = \left(pe^t + (1-p)\right)^n, \ \ t \in \mathbb{R}$ Cálculo
Momentos	No hay una expresión genérica conocida.
Media y varianza	$m_1 = E[X] = np$ y $\mu_2 = Var[X] = np(1-p)$ Cálculo
Propiedad de simetría	$X \sim B(n,p) \ \Leftrightarrow \ Y = n - X \sim B(n, 1-p)$ Demostración
Tablas Manejo Cálculos	Proporcionan $P(X = x)$ para distintos valores de n y p.

Distribución de Poisson

Modelo probabilístico	Se considera un suceso que acaece de manera aleatoria en el tiempo o en el espacio de acuerdo a ciertas condiciones, y se mide el número de ocurrencias en un intervalo de tiempo dado, o región del espacio especificada.
Notación y parámetros	$X \sim \mathcal{P}(\lambda);\ \ \lambda > 0$
Función masa de probabilidad Gráficas	$P(X=x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!},\ \ x \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ Obtención y verificación
Función de distribución	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{[x]}\dfrac{\lambda^k}{k!} & x \geq 0 \end{cases}$
Función generatriz de momentos	$M_X(t) = \exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right),\ \ t\in\mathbb{R}$ Cálculo
Momentos	$m_1 = \lambda$ y $m_k = E[X^k] = \lambda\displaystyle\sum_{h=0}^{k-1}\binom{k-1}{h}m_h,\ \ \forall k>1$ Cálculo
Media y varianza	$m_1 = E[X] = \lambda$ y $\mu_2 = Var[X] = \lambda$ Cálculo
Relación con la binomial	$X_n \sim B(n,p_n) \ \Rightarrow\ \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ np_n\to\lambda}} P(X_n=x) = P(Y=x),\ \ x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, con $Y\sim\mathcal{P}(\lambda)$ Demostración
Tablas Manejo Cálculos	Proporcionan $P(X=x)$ para distintos valores de λ.

Distribución binomial negativa

Modelo probabilístico	Se realizan sucesivas repeticiones independientes de pruebas de Bernoulli idénticas, con probabilidad de éxito p, hasta que aparece el r-ésimo éxito, y se mide el número de fracasos.
Notación y parámetros	$X \sim BN(r,p);\ \ r\in\mathbb{N},\ 0<p<1$
Función masa de probabilidad Gráficas	$P(X=x) = \dbinom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r,\ \ x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ Obtención y verificación
Función de distribución	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ p^r\displaystyle\sum_{k=0}^{[x]}\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k & x\geq 0 \end{cases}$
Función generatriz de momentos	$M_X(t) = p^r\left(1-(1-p)e^t\right)^{-r},\ \ t<-\ln(1-p)$ Cálculo
Momentos	No hay una expresión genérica conocida.
Media y varianza	$m_1 = E[X] = \dfrac{r(1-p)}{p}$ y $\mu_2 = Var[X] = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$ Cálculo
Relación con la binomial	$X\sim BN(r,p) \ \Rightarrow\ P(X=x) = P(Y_x = r-1)$ con $Y_x \sim B(r+x-1,p)$ Demostración
Caso particular	Distribución geométrica ($r=1$)
Distribuciones relacionadas	**Distribución de Pascal:** Modela el número de pruebas independientes de Bernoulli necesarias para obtener exactamente r éxitos: $Y = X + r$ donde $X \sim BN(r,p)$.

Distribución hipergeométrica

Modelo probabilístico	Se considera una población de tamaño N y una subpoblación de tamaño N_1, se extrae una muestra aleatoria de tamaño n (sin reemplazamiento o simultáneamente), y se observa el número de individuos de la muestra que pertenecen a dicha subpoblación.
Notación y parámetros	$X \sim H(N, N_1, n);\quad N, N_1, n \in \mathbb{N},\ n, N_1 \leq N$
Función masa de probabilidad Gráficas	$P(X=x) = \dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}},\quad \text{máx}\,(0, n-(N-N_1)) \leq x \leq \text{mín}\,(n, N_1)$ Obtención y verificación
Función de distribución	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < \text{máx}\,(0, n-(N-N_1)) \\ \binom{N}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{[x]} \binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k} & \text{máx}\,(0, n-(N-N_1)) \leq x < \text{mín}\,(n, N_1) \\ 1 & x \geq \text{mín}\,(n, N_1) \end{cases}$
Función generatriz de momentos	$M_X(t) = \sum_{x=\text{máx}(0,n-(N-N_1))}^{\text{mín}(n,N_1)} e^{tx}\binom{N}{n}^{-1}\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x},\quad t \in \mathbb{R}$
Momentos	No hay una expresión genérica conocida.
Media y varianza	$m_1 = E[X] = n\dfrac{N_1}{N}$ y $\mu_2 = Var[X] = n\dfrac{N_1}{N}\left(1-\dfrac{N_1}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$ Cálculo
Relación con la binomial	$X_N \sim H(N, N_1, n),\ N_1 = pN \Rightarrow \lim_{N\to+\infty} P(X_N = x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x = 0, \ldots, n$ Demostración

$$P(X=x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\bar{X} = E[X] = n \cdot \frac{N_1}{N}$$

$$\frac{n(N-n)(N_1)(N-N_1)}{N^2(N-1)}$$

$$Var[X] = \frac{n(N-n)N_1(N-N_1)}{N^2(N-1)}$$