Tema 1

A8 [Axioma del continuo o de Dedekind] Dados subconjuntos no vacíos A y B de números reales tales que todo elemento de A es menor o igual que todo elemento de B, se verifica que existe un número real $z \in \mathbb{R}$ que es mayor o igual que todo elemento de A y menor o igual que todo elemento de B.

Simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{c} \emptyset \neq A \subset \mathbb{R},\ \emptyset \neq B \subset \mathbb{R} \\ a \leqslant b \ \ \forall a \in A,\ \forall b \in B \end{array}\right\} \Longrightarrow \ \exists z \in \mathbb{R} \ \text{ verificando que } \ a \leqslant z \leqslant b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

1.1.1. El principio del supremo. Intervalos

El axioma de Dedekind es muy intuitivo pero poco operativo. Usualmente se utilizan versiones equivalentes del mismo que vamos a exponer seguidamente.

1.8 Definición. Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Un número $v \in \mathbb{R}$ se dice que es un *mayorante o cota superior* de E si $x \leqslant v$ para todo $x \in E$.

ii) Un número $u \in \mathbb{R}$ se dice que es un *minorante o cota inferior* de E si $u \leqslant x$ para todo $x \in E$.

iii) Si hay algún elemento de E que también sea mayorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *máximo* de E y lo representaremos por $\max(E)$.

iv) Si hay algún elemento de E que también sea minorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *mínimo* de E y lo representaremos por $\min(E)$.

v) Un conjunto de números reales que tiene algún mayorante se dice que está *mayorado o acotado superiormente*.

vi) Un conjunto de números reales que tiene algún minorante se dice que está *minorado o acotado inferiormente*.

vii) Un conjunto de números reales que está mayorado y minorado se dice que está *acotado*.

1.9 Teorema (Principio del supremo)**.** *Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.*

Demostración. Sea A un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Sea B el conjunto de todos los mayorantes de A. Por hipótesis, B es no vacío. Para todos $a \in A$ y $b \in B$ se verifica que $a \leqslant b$. En virtud del axioma del continuo, existe $z \in \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant z \leqslant b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. La desigualdad $a \leqslant z$ para todo $a \in A$ nos dice que z es un mayorante de A, por lo que $z \in B$. La desigualdad $z \leqslant b$ para todo $b \in B$, nos dice ahora que z es el mínimo de B. □

Razonando por analogía tú debes probar el siguiente resultado.

1.10 Teorema (Principio del ínfimo). *Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.*

1.11 Definición. Sea E un conjunto de números reales no vacío.

i) Si E está mayorado se define el *supremo o extremo superior* de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

ii) Si E está minorado se define el *ínfimo o extremo inferior* de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\text{ínf}(E)$.

1.12 Observaciones. Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el supremo de E quiere decir, por definición, que:

1. $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.
2. Ningún número menor que β es mayorante de E, es decir, para cada $u < \beta$ hay algún $x \in E$ tal que $u < x$.

   Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

   Para cada $\varepsilon > 0$ hay hay algún $x_\varepsilon \in E$ tal que $\beta - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Observa que las desigualdades $z \geqslant x$ $(\forall x \in E)$ son equivalentes a la desigualdad $z \geqslant \sup(E)$.

$$\boxed{z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)} \tag{1.4}$$

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de E quiere decir, por definición, que:

a) $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in E$.

b) Ningún número mayor que α es minorante de E, es decir, para cada $v > \alpha$ hay algún $x \in E$ tal que $x < v$.

   Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

   Para cada $\varepsilon > 0$ hay hay algún $x_\varepsilon \in E$ tal que $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

Observa que las desigualdades $z \leqslant x$ $(\forall x \in E)$ son equivalentes a la desigualdad $z \leqslant \text{ínf}(E)$.

$$\boxed{z \leqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \leqslant \text{ínf}(E)} \tag{1.5}$$

1.22 Proposición.

a) *Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.*

b) *Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.*

Demostración. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y mayorado. En virtud del principio del supremo hay un número $\beta \in \mathbb{R}$ que es el mínimo mayorante de E. Puesto que $\beta - 1 < \beta$, debe haber algún $z \in E$ tal que $\beta - 1 < z$ y, claro está, $z \leqslant \beta$. Supongamos que los elementos de E son números enteros, $E \subseteq \mathbb{Z}$, y probemos que, en tal caso, debe ser $z = \beta$. Si fuera $z < \beta$ tendría que haber algún $w \in E$ tal que $z < w \leqslant \beta$ pero entonces el número $w - z$ es un entero positivo tal que $w - z < 1$ lo cual es contradictorio. En consecuencia $z = \beta \in E$ y β es el máximo de E.

Análogamente se prueba, debes hacerlo, que un conjunto no vacío y minorado de enteros tiene mínimo. □

Como consecuencia del apartado b) deducimos el siguiente resultado.

1.23 Proposición (Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$)**.** *Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.*

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo, obtenemos como consecuencia inmediata del apartado a) el siguiente resultado.

1.24 Proposición (Propiedad arquimediana)**.** *Dado cualquier número real se verifica que hay números naturales mayores que él.*

1.33 Proposición. *Dados $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\sqrt[k]{n}$ o bien es un número natural o bien es irracional.*

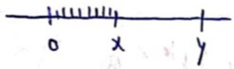
1.34 Definición. Un conjunto A de números reales se dice que es *denso* en un intervalo I, si entre dos números reales cualesquiera de I siempre hay algún número real que está en A. En particular, A es denso en $\mathbb{R}$ si en todo intervalo abierto no vacío hay puntos de A.

1.35 Proposición. *Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.*

Demostración de que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

Sean x, y ; $x < y$

Sea $n \in \mathbb{N}$ $\quad n > \frac{1}{y-x} \Rightarrow \frac{1}{n} < y - x$



$$m = \max\{ q \in \mathbb{Z} : q \leq nx \}$$

$$m \leq nx \Rightarrow \frac{m}{n} \leq x \leq$$

$$nx < m+1$$

$$x < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \qquad x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$

Sea $r \in \mathbb{Q}$: $x - \sqrt{2} < r < x + \sqrt{2} \Rightarrow x < \underset{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}{\underset{\wedge}{r + \sqrt{2}}} < y$