

# Tema 10



**3.21 Proposición (Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)).** Supongamos que  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Si  $\limsup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

b) Si  $\liminf \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \ell > 1$  o si hay un número  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq k$  es  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , entonces  $\{a_n\}$  no converge a cero y por tanto  $\sum_{n \geq 1} a_n$  no es convergente.

Cuando se verifica que

$$\liminf \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \leq 1 \leq \limsup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que  $\lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$  entonces:

a) Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.

b) Si  $L > 1$  o si  $L = +\infty$ , la sucesión  $\{a_n\}$  no converge a cero y por tanto la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  no es convergente.

Cuando  $L = 1$  la serie puede ser convergente o divergente.

**Demostración.** a) Sea  $\lambda$  un número tal que  $L < \lambda < 1$ . La definición de límite superior de una sucesión:

$$L = \lim\{\beta_n\} = \inf\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{donde} \quad \beta_n = \sup \left\{ \frac{a_{k+1}}{a_k} : k \geq n \right\}$$

implica que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se verifica que  $L \leq \beta_n < \lambda$ . Como en particular,  $L \leq \beta_{n_0} < \lambda$ , para todo  $n \geq n_0$  se tiene que:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} \leq \lambda^{n-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}} \lambda^n.$$

Como  $0 < \lambda < 1$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} \lambda^n$  es convergente. Deducimos, en virtud del criterio de comparación, que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

b) Supongamos que  $\ell < +\infty$ . Sea  $\lambda$  un número tal que  $1 < \lambda < \ell$ . La definición de límite inferior de una sucesión:

$$\ell = \lim\{\alpha_n\} = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{donde} \quad \alpha_n = \inf \left\{ \frac{a_{k+1}}{a_k} : k \geq n \right\}$$

implica que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se verifica que  $\lambda < \alpha_n \leq \ell$ . Obtenemos, al igual que antes, que para todo  $n \geq n_0$  es  $a_n \geq \frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}} \lambda^n$ . Como  $\lambda > 1$  se sigue que la sucesión  $\{a_n\}$  diverge positivamente y, con mayor razón, la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge positivamente.

Si hay un número  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq k$  es  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , entonces la sucesión  $\{a_n\}$  es creciente a partir del lugar  $k$  y no puede ser convergente a cero por lo que la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.

Finalmente, si  $\ell = +\infty$  entonces  $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \rightarrow +\infty$  y, por tanto, la sucesión  $\{a_n\}$  es eventualmente creciente y no puede ser convergente a cero por lo que la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente. .  $\square$

**3.23 Proposición (Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)).** Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y sea

$$\limsup \{ \sqrt[n]{a_n} \} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

a) Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

b) Si  $L > 1$  o si  $L = +\infty$  o si hay un número  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq k$  es  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , entonces  $\{a_n\}$  no converge a cero y por tanto la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.

En el caso de que  $\limsup \{ \sqrt[n]{a_n} \} = 1$  la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que  $\lim \{ \sqrt[n]{a_n} \} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$  entonces:

a) Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.

b) Si  $L > 1$  o si  $L = +\infty$ , entonces  $\{a_n\}$  no converge a cero y por tanto la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.

En el caso de que  $\lim \{ \sqrt[n]{a_n} \} = 1$  la serie puede ser convergente o divergente.

**Demostración.** a) Sea  $\lambda$  un número tal que  $L < \lambda < 1$ . La definición de límite superior:

$$L = \lim\{\beta_n\} = \inf\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{donde} \quad \beta_n = \sup\{\sqrt[k]{a_k} : k \geq n\}$$

implica que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  es  $L \leq \beta_n < \lambda$ . En particular  $\beta_{n_0} < \lambda$ . Lo que implica que  $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$ , es decir  $a_n \leq \lambda^n$ , para todo  $n \geq n_0$ . Puesto que  $0 < \lambda < 1$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} \lambda^n$  es convergente y, en virtud del criterio de comparación, se sigue que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

b) Sea  $L \in \mathbb{R}^+$  con  $L > 1$ . Entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que  $1 < L \leq \beta_n$ , lo que implica que 1 no es mayorante del conjunto  $\{\sqrt[k]{a_k} : k \geq n\}$ , es decir, hay algún  $k \geq n$  tal que  $1 < \sqrt[k]{a_k}$  y, por tanto,  $1 \leq a_k$ . Resulta así que para todo  $n \in \mathbb{N}$  hay algún  $k \geq n$  tal que  $a_k > 1$ . Por tanto, la sucesión  $\{a_n\}$  no converge a cero y, en consecuencia, la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.

Finalmente, si  $L = +\infty$ , la sucesión  $\{\sqrt[n]{a_n}\}$  no está mayorada y, con mayor razón, tampoco lo está  $\{a_n\}$ , por tanto, la sucesión  $\{a_n\}$  no converge a cero y, en consecuencia, la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.  $\square$

**Comparación de los criterios del cociente y de la raíz.** En la proposición 2.62 vimos que:

$$\underline{\lim} \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \leq \underline{\lim} \{\sqrt[n]{a_n}\} \leq \overline{\lim} \{\sqrt[n]{a_n}\} \leq \overline{\lim} \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

Estas desigualdades implican que siempre que el criterio del cociente proporciona información sobre la convergencia de una serie, el criterio de la raíz también proporciona dicha información. Pero puede ocurrir que el criterio del cociente no proporcione información y el de la raíz sí. Un ejemplo de ello lo proporciona la siguiente serie. Sean  $0 < a < b < 1$  y definamos  $x_{2n} = a^{2n}$ ,  $x_{2n-1} = b^{2n-1}$ . La serie  $\sum x_n$  es una serie de términos positivos claramente convergente porque  $x_n \leq b^n$  y la serie  $\sum b^n$  es convergente porque es una serie geométrica de razón  $0 < b < 1$ . Como, evidentemente,  $\limsup \sqrt[n]{x_n} = b < 1$ , el criterio de la raíz nos dice que la serie  $\sum x_n$  es convergente. Por otra parte, como:

$$\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \frac{b^{2n+1}}{a^{2n}} = b \left( \frac{b}{a} \right)^{2n} \rightarrow +\infty, \quad \frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \frac{a^{2n}}{b^{2n-1}} = b \left( \frac{a}{b} \right)^{2n} \rightarrow 0$$

deducimos que  $\underline{\lim} \left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} = 0$  y  $\overline{\lim} \left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} = +\infty$ , por lo que el criterio del cociente no informa sobre la convergencia de la serie  $\sum x_n$ .

Cuando  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , también es  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ . En esta situación los criterios del cociente y de la raíz no proporcionan información suficiente sobre el comportamiento de la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$ . Por ejemplo, para las series de Riemann,  $a_n = 1/n^\alpha$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  cualquiera sea  $\alpha$ . Observa que *estos criterios solamente pueden proporcionar información sobre la convergencia de series que pueden compararse con una serie geométrica*.

El siguiente criterio suele aplicarse cuando fallan los anteriores.

**3.25 Proposición (Criterio de Raabe (1832)).** *Supongamos que  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y pongamos  $R_n = n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ . Supongamos que  $\lim\{R_n\} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .*

- i) *Si  $L > 1$  o  $L = +\infty$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.*
- ii) *Si  $L < 1$  o  $L = -\infty$  o si existe algún  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $R_n \leq 1$  para todo  $n \geq k$ , entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.*

**Demostración.** i) Las hipótesis hechas implican que existen  $\alpha > 1$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que para todo  $k \geq n_0$  es  $R_k \geq \alpha$ . Sea  $\delta = \alpha - 1 > 0$ . Tenemos que:

$$R_k - 1 = (k - 1) - k \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \delta \quad (k \geq n_0),$$

por lo que

$$a_k \leq \frac{1}{\delta} ((k - 1)a_k - ka_{k+1}) \quad (k \geq n_0).$$

Sumando estas desigualdades desde  $k = n_0$  hasta  $k = n > n_0$ , obtenemos que:

$$\sum_{k=n_0}^n a_k \leq \frac{1}{\delta} ((n_0 - 1)a_{n_0} - na_{n+1}) < \frac{1}{\delta} (n_0 - 1)a_{n_0}.$$

Por el criterio básico de convergencia para series de términos positivos, deducimos que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

ii) Si  $R_n \leq 1$  para todo  $n \geq k$ , entonces  $(n - 1)a_n - na_{n+1} \leq 0$  y resulta que la sucesión  $\{na_{n+1}\}$  es creciente para  $n \geq k$ , luego  $na_{n+1} \geq ka_{k+1}$ , es decir, para todo  $n \geq k$  es  $a_{n+1} \geq ka_{k+1} \frac{1}{n}$  y, por el criterio de comparación, deducimos que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.  $\square$

El criterio de Raabe suele aplicarse cuando el criterio del cociente no proporciona información, es decir, cuando  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ . En tal caso la sucesión:

$$R_n = n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = -n \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

es de la forma  $v_n(u_n - 1)$  donde  $v_n = -n$  y  $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ . Aplicando el criterio de equivalencia logarítmica tenemos que:

$$\lim \{R_n\} = L \iff \lim \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{-n} = \lim \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^n = e^L$$

con los convenios usuales para los casos en que  $L = \pm\infty$ .

**3.26 Proposición (Forma alternativa del criterio de Raabe).** Sea  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y supongamos que  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ . Pongamos  $S_n = \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^n$ .

i) Si  $S_n \rightarrow e^L$  con  $L > 1$  o si  $S_n \rightarrow +\infty$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

ii) Si  $S_n \rightarrow e^L$  con  $L < 1$  o si  $S_n \rightarrow 0$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.

Los criterios de convergencia que acabamos de estudiar hacen siempre hipótesis sobre la sucesión  $\{a_n\}$  para obtener información sobre el comportamiento de la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$ . Ya dijimos antes que esto es típico del estudio de las series. Pero no lo olvides; no estamos estudiando la sucesión  $\{a_n\}$  sino la sucesión  $\sum_{n \geq 1} a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ .