Tema 12

4.10 Definición (Continuidad en un punto). Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse, con abuso del formalismo lógico, de la siguiente forma:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left.\begin{array}{c} |x-a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

4.11 Definición. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua por la izquierda (resp. por la derecha) en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $a - \delta < x \leqslant a$ (resp. $a \leqslant x < a + \delta$) se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

4.12 Definición (Continuidad en un conjunto). Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un conjunto $C \subset A$, si f es continua en todo punto de C.

4.13 Proposición. *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

a) f es continua en a.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$, *se verifica que* $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$.

Demostración. *a) $\Longrightarrow$ b)* Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$. Tenemos que probar que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en a, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in]a - \delta, a + \delta[\cap A$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Puesto que $\lim\{x_n\} = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que parta todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $x_n \in]a - \delta, a + \delta[$, como también $x_n \in A$, se sigue que $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$.

Para probar el recíproco probaremos que *no a) $\Longrightarrow$ no b)* Es decir, probaremos que si f no es continua en a entonces hay una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$ tal que $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(a)$. Que f no es continua en a quiere decir que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se verifica que hay algún punto $x_\delta \in]a - \delta, a + \delta[\cap A$ tal que $|f(x_\delta) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\delta_n = 1/n$ y sea $x_n \in]a - 1/n, a + 1/n[\cap A$ tal que $|f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$. Claramente $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$ y la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(a)$. □

En páginas 105-106 hay comentarios a la definición 4.10

4.14 Teorema. *Sean f, g funciones reales definidas en A. Se verifica que:*

a) Las funciones $f+g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

b) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en todo punto de A en el que g sea continua. En consecuencia, la función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula nunca es una función continua.

Demostración. [1] Supongamos que f y g son continuas en un punto $a \in A$. Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$ se verificará que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$ y $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$.

Entonces, en virtud del teorema 2.25, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim\{(f+g)(x_n)\} &= \lim\{f(x_n)+g(x_n)\} = \lim\{f(x_n)\} + \lim\{g(x_n)\} = f(a)+g(a) = (f+g)(a) \\ \lim\{(fg)(x_n)\} &= \lim\{f(x_n)g(x_n)\} = \lim\{f(x_n)\}\lim\{g(x_n)\} = f(a)g(a) = (fg)(a) \end{aligned}$$

Lo que prueba, por la proposición 4.13, que las funciones $f+g$ y fg son continuas en a.

Si, además, suponemos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, tenemos que:

$$\lim\left\{\frac{f}{g}(x_n)\right\} = \lim\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\} = \frac{\lim\{f(x_n)\}}{\lim\{g(x_n)\}} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a)$$

Lo que prueba, por la proposición 4.13, que la función f/g es continua en a. $\square$

4.16 Teorema (Continuidad de una función compuesta). *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$ y que g es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a. En particular, si g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en todo punto de A en el que f sea continua. Más en particular, la composición de funciones continuas es una función continua.*

Demostración. Como f es continua en $a \in A$, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$ se verificará que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$. Ahora, como g es continua en $f(a)$, se verificará que $\lim\{g(f(x_n))\} = g(f(a))$, es decir, $\lim\{(g \circ f)(x_n))\} = (g \circ f)(a)$. Por la proposición 4.13 concluimos que $g \circ f$ es continua en a. $\square$

4.18 Definición. Dados una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de* f *a* C que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto* C que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que una función $g : B \to \mathbb{R}$ es una *extensión* de f, si $B \supset A$ y f es la restricción de g al conjunto A, es decir $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Los conceptos de extensión y de restricción de una función son esencialmente el mismo: todo depende de que se mire "para arriba" o "para abajo".

4.20 Proposición (Localización de la continuidad). *Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ e I un intervalo abierto tal que $a \in I$. Supongamos que la restricción de f a $I \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en a.*

Demostración. Pongamos $g = f_{|I \cap A}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap (I \cap A)$ se verifica que $|f(x) - f(a)| = |g(x) - g(a)| < \varepsilon$. Como I es un intervalo abierto y $a \in I$, existe un $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$. Pongamos $\delta_1 = \min\{r, \delta\}$. Tenemos que $\delta_1 > 0$ y $]a-\delta_1, a+\delta_1[=]a-\delta, a+\delta[\cap]a-r, a+r[\subset]a-\delta, a+\delta[\cap I$, por lo que $]a-\delta_1, a+\delta_1[\cap A \subset]a-\delta, a+\delta[\cap (I \cap A)$, en consecuencia, para todo $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[\cap A$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. □

4.21 Proposición. *a) Cualquier restricción de una función continua es también continua.*

b) Cualquier extensión de una función continua en un intervalo abierto *es también* continua en dicho intervalo abierto.

c) Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.

Demostración queda planteada como ejercicio, según el libro

4.22 Teorema (Conservación local del signo). *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces hay un número $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $f(x)f(a) > 0$. Es decir, $f(x) > 0$ si $f(a) > 0$, o $f(x) < 0$ si $f(a) < 0$, en todo punto $x \in]a-r, a+r[\cap A$.*

Demostración. Supondremos que $f(a) > 0$. Podemos entonces tomar $\varepsilon = f(a)/2$ en (4.3) para obtener, en virtud de la continuidad de f en a, un $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x-a| < r$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$, lo que implica que $f(x) > f(a)/2 > 0$. El caso en que $f(a) < 0$ se reduce al anterior sin más que sustituir f por $-f$. $\square$