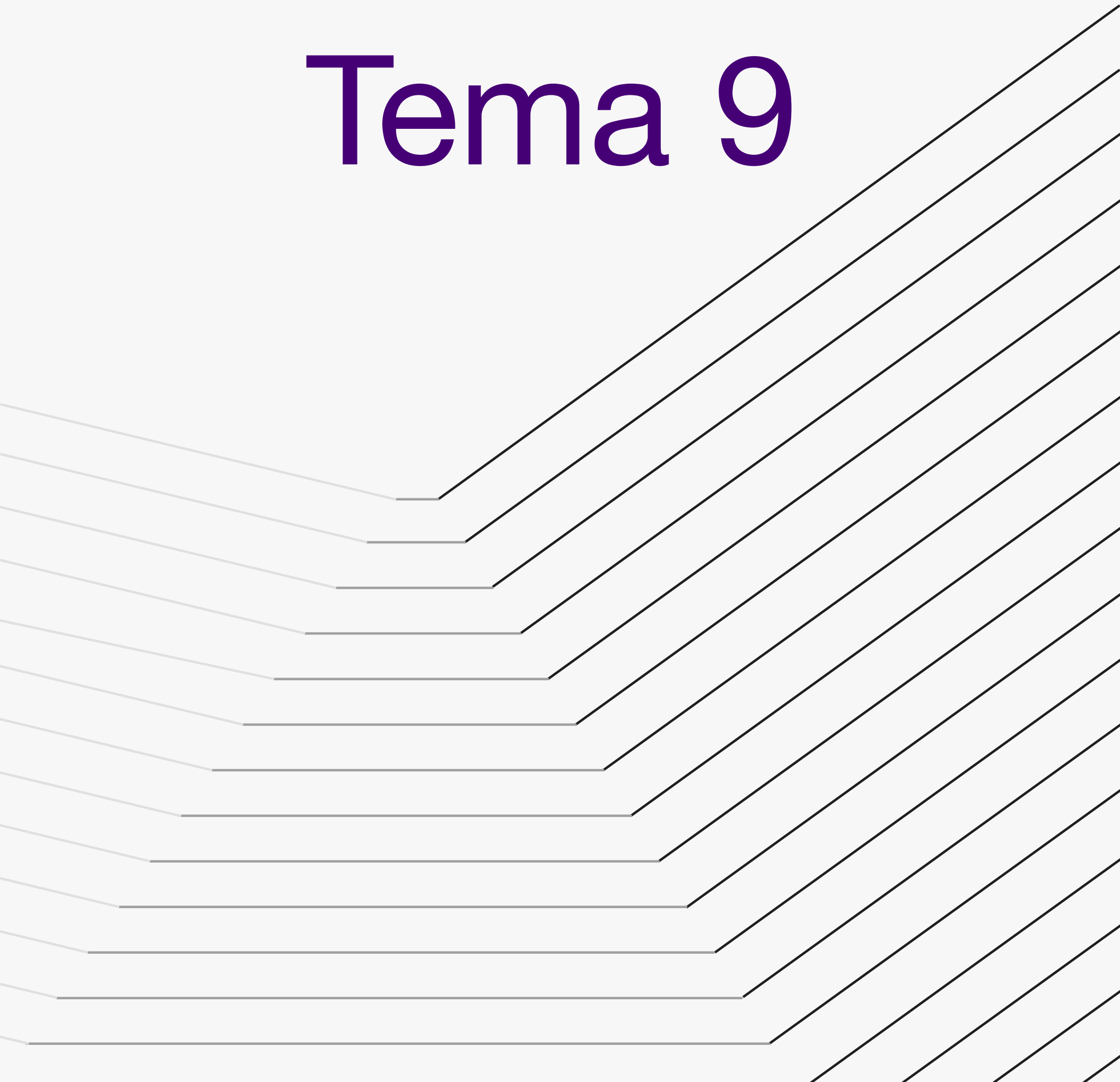


Tema 9



3.12 Proposición (Criterio básico de comparación). Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n \geq 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n \geq 1} b_n$ es divergente.

Demostración. Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Las hipótesis hechas implican que para todo $n > k$ es $A_n \leq B_n + A_k$. Deducimos que si $\{B_n\}$ está mayorada también lo está $\{A_n\}$. \square

3.14 Proposición (Criterio límite de comparación). Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- a) Si $L = +\infty$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ es divergente también $\sum_{n \geq 1} a_n$ es divergente.
- b) Si $L = 0$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ es convergente también $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente.
- c) Si $L \in \mathbb{R}^+$ las series $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

En particular, si dos sucesiones de números positivos, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son asintóticamente equivalentes, las respectivas series, $\sum a_n$ y $\sum b_n$ ambas convergen o ambas divergen.

3.16 Proposición (Criterio de condensación de Cauchy). Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. Se verifica que las series $\{A_n\}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

ambas convergen o ambas divergen.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} A_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \leq \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} = B_n \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}B_n &= \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} \leq \\ &\leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &= A_{2^n}\end{aligned}$$

Las desigualdades $A_n \leq B_n$ y $B_n \leq 2A_{2^n}$, implican, en virtud del criterio básico de convergencia, que las series $\sum_{n \geq 1} a_n = \{A_n\}$ y $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} = \{B_n\}$ ambas convergen o ambas divergen. \square

Para poder usar los criterios de comparación, necesitamos conocer ejemplos de series convergentes con las que poder comparar una serie dada. Unas series de términos positivos muy útiles para comparar con otras series son las siguientes.

3.17 Proposición (Series de Riemann). *Dado un número real α , la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ se llama serie de Riemann de exponente α . Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.*

Demostración. Si $\alpha \leq 0$, entonces la sucesión $\{1/n^\alpha\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ es divergente. Si $\alpha > 0$, aplicando el criterio de condensación con $a_n = 1/n^\alpha$, obtenemos que

$$\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n \geq 0} (2^{1-\alpha})^n$$

es una serie geométrica de razón $2^{1-\alpha}$, por lo que será convergente si, y sólo si, $2^{1-\alpha} < 1$, o, equivalentemente, $\alpha > 1$. \square

3.19 Proposición (Series de Bertrand). *La serie $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge si $\alpha > 1$ cualquiera sea β , y también si $\alpha = 1$ y $\beta > 1$. En cualquier otro caso es divergente.*

Demostración. Sabemos que cualesquiera sean $\rho > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^\mu}{n^\rho} = 0.$$

Supongamos que $\alpha > 1$ y sea λ un número verificando que $1 < \lambda < \alpha$. Podemos escribir:

$$n^\lambda \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = \frac{(\log n)^\mu}{n^\rho}$$

donde $\rho = \alpha - \lambda$ y $\mu = -\beta$. Deducimos así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\lambda \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = 0.$$

Puesto que la serie $\sum \frac{1}{n^\lambda}$ es convergente, el criterio límite de comparación implica que la serie

$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ es convergente.

Si $\alpha < 1$ un razonamiento parecido muestra que la serie diverge cualquiera sea β .

Sea ahora $\alpha = 1$. Entonces, si $\beta \leq 0$, tenemos que $\frac{1}{n(\log n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 3$, y el criterio de comparación implica que la serie es divergente. Sea, pues, $\beta > 0$. Podemos aplicar el criterio de condensación con $a_n = \frac{1}{n(\log n)^\beta}$. Tenemos que:

$$\sum_{n \geq 2} 2^n a_{2^n} = \sum_{n \geq 2} 2^n \frac{1}{2^n (\log(2^n))^\beta} = \frac{1}{(\log 2)^\beta} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\beta}$$

es una serie que converge si, y sólo si, $\beta > 1$; y el criterio de condensación nos dice que lo mismo le ocurre a la serie $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\log n)^\beta}$. □