Tema 11

3.3. Series conmutativamente convergentes. Convergencia absoluta.

Hemos visto en el ejemplo 3.5 que permutando los términos de la serie armónica alternada podemos obtener una serie convergente pero con distinta suma. Esto nos dice que la serie armónica alternada no es “conmutativamente” convergente. Precisemos este concepto.

Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ la serie definida por la sucesión $\{a_n\}$. Dada una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definamos una sucesión $\{b_n\}$ por $b_n = a_{\pi(n)}$. En estas condiciones se dice que la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ se ha obtenido

permutando términos en la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Puedes comprobar que en el citado ejemplo 3.5, la permutación de términos realizada en la serie armónica alternada viene dada por la biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$\pi(3n-2) = 2n-1,\ \pi(3n-1) = 4n-2,\ \pi(3n) = 4n.$$

Se dice que una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **conmutativamente convergente**[1] si para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$, es convergente.

Observa que, tomando como biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ la identidad, si la serie $\sum a_n$ es conmutativamente convergente entonces ella misma *es convergente*. En otras palabras, una serie es conmutativamente convergente, cuando es convergente y también son convergentes todas las series que se obtienen de ella por reordenación de sus términos.

Recuerda que la suma de una serie de términos positivos convergente es igual al extremo superior del conjunto de todas las sumas parciales; es intuitivo que aunque permutemos los términos de la serie dicho extremo superior va a seguir siendo el mismo, esto quiere decir que las series de términos positivos convergentes van a ser conmutativamente convergentes. Veremos enseguida que, en efecto, esto es así. Pero antes conviene introducir un tipo particular de convergencia que

Se dice que una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ es convergente.

Recuerda que si una sucesión $\{x_n\}$ converge a x, entonces $\{|x_n|\}$ converge a $|x|$. Por tanto, si una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ converge, también converge la sucesión que se obtiene tomando valores absolutos $\{|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|\}$; pero esta sucesión ***no es igual*** a $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| = \{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$. Por eso *puede ocurrir que una serie sea convergente pero no sea absolutamente convergente*. La serie armónica alternada es un ejemplo de serie convergente que no es absolutamente convergente.

Observa que si una sucesión $\{a_n\}$ es tal que el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : a_n < 0\}$ es finito, es decir, existe $q\in\mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant q$ es $a_n = |a_n| \geqslant 0$, entonces, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente también es absolutamente convergente, pues se tiene:

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant q} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant q} |a_n| \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} |a_n| \text{ converge}.$$

Un razonamiento análogo prueba que si el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : a_n > 0\}$ es finito, entonces la convergencia de la serie equivale a su convergencia absoluta. Por tanto, para que una serie $\sum_{n\geqslant 1} a$ pueda ser convergente pero no ser absolutamente convergente los conjuntos $\{n\in\mathbb{N} : a_n > 0\}$ y $\{n\in\mathbb{N} : a_n < 0\}$ han de ser ambos infinitos.

3.27 Teorema. *Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente. Además, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente, entonces para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se verifica que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

Demostración. Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Por hipótesis $\sum |a_n| = \{B_n\}$ es convergente. Probaremos en primer lugar que la serie $\sum a_n = \{A_n\}$ también es convergente. Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy para $\{B_n\}$ nos dice que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|B_q - B_p\right| = \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todos } p, q\in\mathbb{N} \text{ tales que } q > p \geqslant n_0. \tag{3.8}$$

Deducimos que para todos $p, q\in\mathbb{N}$ tales que $q > p \geqslant n_0$ se verifica que

$$\left|A_q - A_p\right| = \left|a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Lo que prueba que la serie $\sum a_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.

Pongamos $A = \text{lím}\{A_n\}$, y sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0\in\mathbb{N}$ tal que se verifica (3.8) y además $\left|A_{n_0} - A\right| < \varepsilon/2$. Definamos

$$m_0 = \text{máx}\{j\in\mathbb{N} : \pi(j) \leqslant n_0\}, \quad F_m = \{\pi(k) : 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Para $m > m_0$, se verifica que $F_m \supsetneqq \{1, 2, \ldots, n_0\}$. Por tanto, el conjunto $H_m = F_m \setminus \{1, 2, \ldots, n_0\}$ no es vacío. Sea $p = \text{mín}(H_m)$, $q = \text{máx}(H_m)$. Tenemos entonces que $q > p - 1 \geqslant n_0$, y por tanto:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{m} a_{\pi(j)}-A\right| &= \left|\sum_{k\in F_m} a_k - A\right| = \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k\in H_m} a_k - A\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - A\right| + \sum_{k\in H_m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=p}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Hemos probado así que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$. □

El resultado recíproco es también cierto, es decir, se verifica que toda serie conmutativamente convergente es absolutamente convergente. Este resultado se puede precisar mejor. El siguiente teorema se debe a Riemann.

3.28 Teorema. *Sea $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea $\alpha\in\mathbb{R}$. Entonces existe una biyección $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)}$ es convergente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha.$$

En consecuencia, la convergencia absoluta es equivalente a la convergencia conmutativa. Por supuesto, para estudiar la convergencia absoluta de una serie, $\sum a_n$, se aplican los criterios de convergencia para series de términos positivos a la serie $\sum |a_n|$.

Nos queda por solucionar un problema; a saber: si una serie no converge absolutamente puede ocurrir que dicha serie sea convergente como, por ejemplo, le ocurre a la serie armónica alternada. ¿Cómo podemos estudiar la convergencia de una serie que no converge absolutamente? Pues usando criterios de convergencia no absoluta. Hay varios de tales criterios pero aquí solamente vamos a ver uno que se refiere a *series alternadas* que son aquellas en que los términos van alternando signos, como en la serie armónica alternada, es decir, son series de la forma $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ o $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ donde $a_n > 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

3.29 Proposición (Criterio de Leibniz para series alternadas). *Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente. Además, si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ y $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|S-S_n|\leqslant a_{n+1}$.*

Demostración. Probaremos que la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ es convergente. Teniendo en cuenta que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, deducimos las siguientes desigualdades:

$$S_{2n} \leqslant S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} = S_{2n+2} = S_{2n+1} - a_{2n-2} \leqslant S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$$

Hemos obtenido que para todo $n \in \mathbb{N}$ es: $S_{2n} \leqslant S_{2n+2} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$. Por tanto, la sucesión $\{S_{2n}\}$ es creciente y $\{S_{2n-1}\}$ es decreciente. Además, ambas están acotadas porque $S_2 \leqslant S_{2n} \leqslant S_{2n-1} \leqslant S_1$. Deducimos que dichas sucesiones convergen, y como $S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \to 0$, concluimos que $\{S_n\}$ converge.

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \text{lím}\{S_n\}$. Puesto que

$$S = \text{lím}\{S_{2n-1}\} = \text{ínf}\{S_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} = \text{lím}\{S_{2n}\} = \sup\{S_{2n} : n \in \mathbb{N}\},$$

se verifica que $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$, de donde:

$$0 \leqslant S - S_{2n} \leqslant a_{2n+1}, \quad \text{y} \quad -a_{2n} \leqslant S - S_{2n-1} \leqslant 0. \tag{3.9}$$

En consecuencia $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teniendo en cuenta la proposición 3.6, el criterio de Leibniz prueba que las series de la forma $\sum(-1)^{n+1}a_n$ donde $\{a_n\} \to 0$ y la sucesión $\{a_n\}$ *es monótona a partir de un cierto término en adelante*, son convergentes (aunque la acotación del error antes obtenida ya no tiene por qué ser válida).