Cálculo II
(Grupo 1º A)
Relación de Ejercicios nº 6

Ejercicio 6.1: Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \frac{dx}{(1-x)^2}$ c) $\int (\operatorname{tg}^3(x) + \operatorname{tg}^5(x))\, dx$

d) $\int \operatorname{sen}^3(x)\, dx$ e) $\int \operatorname{tg}^2(x)\, dx$ f) $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx$

g) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx$ h) $\int \frac{x^2}{9+x^6} dx$ i) $\int \ln(x)\, dx$

j) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ k) $\int \operatorname{tg}(2x)\, dx$ l) $\int (x^2+5)e^{-x}\, dx$

ll) $\int x^3 \operatorname{sen}(3x)\, dx$ m) $\int x\ln(1+x^2) dx$ n) $\int \frac{x+1}{(x^4-1)} dx$

ñ) $\int \frac{x-2}{x(x+1)(x-1)} dx$ o) $\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx$ p) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+3} dx$

q) $\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^3(x)+2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)} dx$ r) $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x) dx$ s) $\int \sec(x)\, dx$

t) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ u) $\int \frac{1}{x[\ln^3(x)-2\ln^2(x)-\ln(x)+2]} dx$ v) $\int \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)} dx$

Ejercicio 6.2: Sean a y b dos números reales no nulos. Calcular:

a) $\int \frac{1}{a^2\operatorname{sen}^2(x)+b^2\cos^2(x)} dx$ b) $\int e^{ax}\cos(b\,x) dx$

Ejercicio 6.3: Obtener una fórmula recurrente para las siguientes integrales:

a) $\int x^n e^{-x}\, dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$

Ejercicio 6.4: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}^2(t)\, dt}{x^3}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{\operatorname{sen}(t)} dt}{x^2}$

Ejercicio 6.5: Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos(x)}\ \operatorname{sen} x\, dx$ c) $\int_1^2 \frac{x^2}{1-2x^3} dx$

d) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} dx$ e) $\int_0^1 x e^{ax^2+b}\, dx\ \ (a, b \in \mathbb{R})$ f) $\int_0^1 a^{2x}\, dx\ \ (a > 0)$

g) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2(x)} dx$ i) $\int_0^1 \frac{x}{x^4+3} dx$

j) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} dx$ k) $\int_0^1 e^x \cos(e^x)\, dx$ l) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$

ll) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ m) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{20+8x-x^2}} dx$ n) $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$

ñ) $\int_0^1 x^3 e^{2x}\, dx.$ o) $\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\, dx.$ p) $\int_1^e \ln(x)\, dx.$

q) $\int_a^b \frac{dx}{(x+a)(x+b)} dx\ (0 < a < b)$ r) $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$ s) $\int_1^2 \frac{x-1}{x(x^2+1)^2} dx$

Ejercicio 6.6: Estudiar la convergencia y, cuando la haya, calcular el valor las siguientes integrales:

a) $\int_a^{+\infty} x^n\, dx\ \ (a > 0)$ b) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\, dx\ \ (a \in \mathbb{R})$ e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx \quad (a, b \in \mathbb{R})$ f) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^8} dx$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}\, dx$ h) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen}(x)\, dx$ i) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx\ \ (n \in \mathbb{N})$

j) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$ k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$ l) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

ll) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$ m) $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx\ \ (\alpha \in \mathbb{R}, a < b)$ n) $\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx$

ñ) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ o) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ p) $\int_0^{\pi\backslash 2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}} dx$

q) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx.$ r) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ s) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Ejercicio 6.7: Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente integral converge, calculando el valor de la misma: $\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2\alpha} - \frac{\alpha}{x+1}\right) dx.$

Ejercicio 6.8: Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que integral converge, calculando el valor de la misma: $\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2+\beta x+\alpha}{x(2x+\alpha)} - 1\right) dx = 1.$

Ejercicio 6.9: Se define la función gamma como la función $\Gamma: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(i) Probar que dicha integral converge para $x > 0$ y diverge para $x \leq 0$.
(ii) Probar que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, para cada $x > 0$.
(iii) Deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6.10: Justificar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales (sin necesidad de resolverlas):

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5}dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx$ e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

g) $\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}dx$ h) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx$ i) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(x)}{x^m}dx \ \ (m \in \mathbb{N})$.