APUNTES TEMA 1

Norma

E espacio vectorial real $E(\mathbb{R})$

Norma: aplicación $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tq:

1. $\|x\| \geq 0$ $\quad \forall x \in E$
   $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Si E admite norma $\Rightarrow$ $E \equiv$ espacio vectorial normado.

Ejemplos de normas

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

En particular cuando

$p = 2 \Rightarrow$ Norma Euclídea.

Norma del máximo: $\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,N} |x_j|$

¿Norma?

(n1) $\|x\|_\infty \geq 0$

$\|x\|_\infty = 0 \iff x = 0$

$\|x\|_\infty \geq 0$ obvio

$\|x\|_\infty = 0 \iff \max_{j=1\dots N} |x_j| = 0 \iff x = 0$

(n2) ¿ $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$?

$\Rightarrow \|x+y\|_\infty = \max_{j=1\dots N} |x_j + y_j| \leq \max_{j=1\dots N} (|x_j| + |y_j|)$

$\leq \max_{j=1,\dots,N} |x_j| + \max_{j=1,\dots,N} |y_j|$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

n3 ¿ $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$?

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,N} |\lambda x_j| = \max_{j=1,\dots,N} |\lambda| |x_j| =$$

$$= |\lambda| \max_{j=1,\dots,N} |x_j| = |\lambda| \|x\|_\infty$$

Luego, la norma del máximo es norma.

Norma de Frobenius: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{M \times N}$

Errores

- Absoluto : $\|x^* - x\|$

con $x \in E$ x^* aproximación de x

- Relativo : $\dfrac{\|x^* - x\|}{\|x\|}$

Distancia entre vectores

$$\forall x, y \in E, \quad dist(x,y) = \|x-y\|$$

(la norma permite hablar de conceptos topológicos)

Convergencia sucesión de vectores

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de vectores de E.

Se dice que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a $x_0 \in E$ si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ tq } \|x_n - x_{n_0}\| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = x_0 \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

Continuidad de una aplicación en espacios vectoriales normados

Sean X e Y sendos espacios vectoriales normados

Sea $f: X \to Y$. f es continua en $x_0 \in X$ si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tq } \left.\begin{array}{l} x \in X \\ \|x - x_0\| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Equivalencia entre normas

$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ se dice que son equivalentes si existen $c_1, c_2 > 0$ tales que:

$$c_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq c_2 \|\cdot\|$$

Teorema

Todas las normas en un espacio finito dimensional son equivalentes.

Proposición

$M, N \in \mathbb{N}$ y consideremos normas en $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$. $(\|\cdot\|)$

$$\forall A \in \mathbb{R}^{M\times N} \qquad \|A\| := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^N \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

$\Rightarrow$ Norma inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$ (por las normas en $\mathbb{R}^M$ y $\mathbb{R}^N$)

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^N\ \|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$, en particular $\|Ax\| \leq \|A\|\cdot\|x\|$

Norma 1

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{M} |a_{ij}| \qquad \forall\ A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Norma del máximo

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,M} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \qquad \forall\ A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}^{M \times N} \Rightarrow \|A\|_1 = \|A^t\|_\infty$$

Radio espectral de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. El radio espectral de A se define como:

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \wedge \det(A - \lambda I_N)\}$$

Norma matricial

Una norma en $\mathbb{R}^{N \times N}$ es matricial si:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \text{(Carácter submultiplicativo)}$$

En general, no toda norma en $\mathbb{R}^{N \times N}$ es matricial.

Toda norma en $\mathbb{R}^{N \times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$ es matricial.

Teorema

Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se verifica que:

$$\lim_{n \to \infty} A^n = 0 \iff \rho(A) < 1$$

$$\hookrightarrow \lim_{n \to \infty} A^n = 0 \iff \lim_{n \to \infty} P^{-1} D^n P = 0 \iff$$

$$\iff \lim_{n \to \infty} D^n = 0 \iff \rho(A) < 1$$

$D \equiv$ matriz diagonal de valores propios de A.

Corolario

Sean $N \geq 1$, $\|\cdot\|$ una norma matricial en $\mathbb{R}^{N \times N}$ y $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Se verifica que si $\|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1$

Que $\|A\| < 1$ es condición necesaria para que $\rho(A) < 1$

Problema bien planteado

Un problema P se dice que está bien planteado cuando es unisolvente y estable:

Unisolvente ≡ tiene una única solución, es decir, existe un único x_0 tal que $f(x_0) = y_0$

Estable ≡ x_0 depende continuamente de y_0

Si un problema P, para cada $y \in Y$ es unisolvente

$\iff$ f es biyectiva $\iff$ $\exists f^{-1} = g$ ≡ resolvente

$$f(x_0) = y_0 \iff g(y_0) = x_0$$

Idea intuitiva de estabilidad

Pequeñas perturbaciones de los datos y_0 corresponden pequeñas perturbaciones de la solución x_0.

Concepto de estabilidad

Condición que fuerce un control de los valores de las soluciones en función de los datos, de forma que pequeñas perturbaciones de y_0 generen perturbaciones pequeñas y controladas de x_0.

Estabilidad de la resolvente

Sean X, Y subconjuntos de espacios normados, $g: Y \to X$ e $y_0 \in Y$. Se dice que g es estable en y_0 cuando

$$\exists M, \delta > 0 ; \quad \sup_{y \in Y,\ 0 < \|y - y_0\| < \delta} \frac{\|g(y) - g(y_0)\|}{\|y - y_0\|} < M$$

g será estable si lo es $\forall y \in Y$

Estabilidad de un problema

P es estable en $y_0 \in Y$ si su resolvente $g: Y \to X$ lo es en dicho punto. Será estable si lo es $\forall y \in Y$.

Si g es estable en $y_0 \in Y$, es decir, si $\exists M, \delta > 0$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} y \in Y \\ |y - y_0| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < M|y - y_0|$$

$\Longrightarrow$ g es continua en y_0, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{l} y \in Y \\ |y - y_0| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

$\not\Longleftarrow$

Medida de estabilidad

- Condicionamiento relativo

Sea $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

Cond. relativo de g en y_0:

$$c(g, y_0) := \left| \frac{g'(y_0) \cdot y_0}{g(y_0)} \right|$$

Siempre que $y_0 \cdot g(y_0) \neq 0$

◦ Condicionamiento absoluto

Si $y_0 \cdot g(y_0) = 0 \Rightarrow c(g, y_0) := |g'(y_0)|$

Si en un problema P, la resolvente $\in C^1$ e $y_0 \in Y$ el condicionamiento relativo o absoluto de P son los de su resolvente en dicho punto.

◦ Problema bien condicionado $\Longleftrightarrow$ Condicionamiento pequeño.

◦ Problema mal condicionado $\Longleftrightarrow$ Condicionamiento grande.

Si $\|\cdot\| \equiv$ norma matricial en $\mathbb{R}^{N\times N}$ inducida por $\mathbb{R}^N$

$\Rightarrow$ condicionamiento $c(A)$ con $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$:

$$c(A) := \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

Sabemos que $\displaystyle\sup_{y_0 \neq 0} c(g, y_0) = \sup_{y_0 \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \, \|y_0\|}{\|A^{-1} y_0\|}$

$$= \sup_{y_0 \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \|A x_0\|}{\|x_0\|} = \|A^{-1}\| \|A\|$$

Mal condicionamiento del sistema ≡ condicionamiento de la matriz de coef. grande.

$\odot \Rightarrow c(A) \geq 1$

Sistema posicional y números máquina

Números máquina ≡ subconjunto finito de números reales con los que trabaja el ordenador.

Representación posicional de un número real:

$$x = (-1)^s \cdot \sum_{n=-M}^{N} x_n \cdot b^n$$

$b \equiv$ base

$(-1)^s \equiv$ signo

N y $-M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$x = (-1)^s \cdot (x_N \cdot x_{N-1} \cdots x_1 \cdot x_0 \cdot x_{-1} \cdot x_{-2} \cdots x_{-M})_b$$

Representación con punto flotante

$$(-1)^s \cdot b^e \sum_{n=1}^{t} a_n b^{-n} \iff$$

$$\iff (-1)^s \cdot (0.a_1 a_2 \cdots a_t)\, b^e = (-1)^s \cdot m \cdot b^{e-t}$$

$t \equiv$ nº cifras significativas. $(\ 0 \le a_n \le b-1\ )$

$m \equiv$ mantisa $= (\ a_1 \cdots a_t\ )$ $\quad 0 \le m \le b^t - 1$

$e \in \mathbb{Z} \equiv$ exponente , $\quad L \le e \le U \ ; \ L, U \in \mathbb{Z} \quad L \le U$

Sistema normalizado de punto flotante

Normalización $\Rightarrow$ $a_1 \neq 0$ $\quad$ ($a_1 \equiv$ cifra significativa principal)

$$\mathbb{F}(b, t, L, U) := \{0\} \cup \left\{ (-1)^s b^e \sum_{n=1}^{t} a_n b^{-n} \ : \ s = 0,1 \quad a_1 \neq 0 \right.$$

$$\left. 0 \le a_1 \cdots a_t \le b-1 \ , \ L \le e \le U \right\}$$

$b \equiv$ base , $\quad t \equiv$ nº cifras signif. $\quad L \equiv$ menor exp. $\quad U \equiv$ mayor exp.

Proposición

Sean $t \in \mathbb{N}$, $L, U \in \mathbb{Z}$ con $L \leq U$ y $x \in \mathbb{F}(b,t,L,U)$. Entonces:

- $-x \in \mathbb{F}(b,t,L,U)$
- $b^{L-1} \leq |x| \leq b^{U}(1-b^{-t})$
- $\mathrm{card}(\mathbb{F}(b,t,L,U)) = 2(b-1)b^{t-1}(U-L+1)+1$

Épsilon máquina

Para $\mathbb{F}(b,t,L,U)$, el épsilon máquina, ε_M, es la distancia entre el menor número de $\mathbb{F}(b,t,L,U)$ mayor que 1 y la propia unidad:

$$\varepsilon_M = b^{1-t}$$

* El resultado de operar dos números de un sistema de punto flotante no tiene por qué quedar dentro del sistema.

Truncatura

Sea $x = (-1)^s \cdot b^e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$. Su truncatura en:

$$tr(x) := (-1)^s \cdot (0.a_1 \cdots a_t) b^e \qquad tr(x) \in \mathbb{F}(b, t, \ell, U)$$

Redondeo

Sea $x = (-1)^s \cdot b^e \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$. Su redondeo en:

$$rd(x) := tr\left(x + (-1)^s \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b^e}{b^{t+1}} \right)$$

$$rd(x) = (-1)^s \cdot (0.a_1 \cdots a_{t-1} \cdot r_t) \cdot b^e$$

$$r_t := \begin{cases} a_t & \Leftrightarrow a_{t+1} < b/2 \\ a_t + 1 & \Leftrightarrow a_{t+1} \geq b/2 \end{cases}$$

Proposición

Sea $\mathbb{F}(b,t,L,U)$ y $x = (-1)^s \cdot b^e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n} \in \mathbb{R}$.

- $|x - tr(x)| \leq b^{e-t}$

$$|x - tr(x)| = b^e \sum_{n=t+1}^{\infty} a_n b^{-n} \leq b^e \cdot (b-1) \cdot \sum_{n=t+1}^{\infty} b^{-n}$$

$$= b^e \cdot (b-1) \cdot \frac{1/b}{1 - 1/b} = b^{e-t}$$

- $\dfrac{|x - tr(x)|}{|x|} \leq \varepsilon_M$

$$\frac{|x - tr(x)|}{|x|} \leq \frac{b^{e-t}}{b^e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}} \leq \frac{b^{e-t}}{b^e \cdot \frac{1}{b}}$$

$$= b^{1-t} = \varepsilon_M$$

- $|x - rd(x)| \leq \frac{1}{2} b^{e-t}$

$$|x - rd(x)| = b^{e} \cdot (0.a_1 \cdots a_t a_{t+1} \cdots) - (0.a_t \cdots r_t)$$

Si $a_{t+1} < b/2$, $a_t = r_t$

$$\Rightarrow |0.a_1 a_2 \cdots a_t a_{t+1} \cdots) - (0.a_1 \cdots r_t)| = (0.0 \cdots 0\, a_{t+1} \cdots)$$
$$\leq (0.0 \cdots 0 \tfrac{b}{2}) = \frac{b^{-t}}{2}$$

Si $a_{t+1} \geq b/2$, $r_t = a_t + 1$

$$\Rightarrow |0.a_1 \cdots a_t . a_{t+1} \cdots) - (0.a_1 \cdots r_t)| = \frac{1}{b^t} - \left(\frac{a_{t+1}}{b_{t+1}} + \cdots\right)$$
$$\leq \frac{1}{b^t} - \frac{b}{2b^{t+1}} \quad (b/2 \leq a_{t+1})$$
$$= \frac{b^{-t}}{2}$$

o $$\frac{|x - rd(x)|}{|x|} \leq \frac{\varepsilon_M}{2}$$

$$a_1 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq b^{e} \cdot b^{t-1} \Rightarrow \frac{|x - rd(x)|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2} b^{e-t}}{b^{e} \cdot b^{-1}}$$
$$= \frac{1}{2} b^{1-t} = \frac{1}{2} \varepsilon_M$$

Precisión máquina

Precisión máquina o unidad de redondeo ≡ cota que aparece en el error relativo del redondeo.

$$u := \frac{1}{2} b^{1-t} = \frac{1}{2} \varepsilon_M$$

$$b^{L-1} \leq |x| \leq b^U (1 - b^{-t}) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|x - tr(x)|}{|x|} \leq \varepsilon_M \\ \dfrac{|x - rd(x)|}{|x|} \leq u \end{cases}$$

Corolario

Dados $\mathbb{F}(b,t,L,U)$ y $x \in \mathbb{R}$ con $b^{L-1} \leq |x| \leq b^U(1 - b^{-t})$

$$rd(x) = (1 + \mu)x$$ (ε, una perturbación de x)

para cierto $\mu \in \mathbb{R}$ tq $|\mu| \leq u$

Operación máquina

$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ operación.

$\bullet_u : \mathbb{F}(b,t,\alpha,U) \times \mathbb{F}(b,t,\alpha,U) \longrightarrow \mathbb{F}(b,t,\alpha,U)$

$\bullet_u(x,y) := rd(x \bullet y) \quad \forall \; x,y \in \mathbb{F}(b,t,\alpha,U)$

Corolario

$\forall x,y \in \mathbb{F}(b,t,\alpha,U) \Rightarrow \bullet_u(x,y) = (1+\mu)\, x \bullet y$

$\forall \mu \in \mathbb{R}$ con $|\mu| \leq u$.