APUNTES
TEMA 4

Principio del mínimo

$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matriz simétrica y definida positiva, $b \in \mathbb{R}^N$
y $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$
entonces, f alcanza su mínimo y además, en un único vector;
la sol de $Ax = b$; $x = A^{-1} b$

A def positiva $\Rightarrow A$ regular ;

$$Ax = 0 \iff x^T A x = 0 \;\overset{(*)}{\Rightarrow}\; x = 0$$

(*) Por ser A definida positiva

Demo:

$x = A^{-1} b$, $y \in \mathbb{R}^N$

A es simétrica

$$f(y) - f(x) = \frac{1}{2} y^T A y - b^T y - \frac{1}{2} x^T A x + b^T x$$

$Ax = b$

$$= \frac{1}{2} y^T A y - x^T A y - \frac{1}{2} \underbrace{x^T A x + x^T A x}_{=}$$

$$= \frac{1}{2} y^T A y + \frac{1}{2} x^T A x - x^T A x$$

$$= \frac{1}{2} (y-x)^T A (y-x) > 0 \quad \text{si } x \neq y$$

A definida positiva $\rightsquigarrow$ f alcanza su mínimo en $x = A^{-1} b$

Condición suficiente (más general) : $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$

rango $(A) = N \iff$ columnas de A l. independientes

$\Rightarrow A^T A$ simétrica y definida positiva $(N \leq M)$

$A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, rango $(A) = N \iff$ col A l. i

¿ $\Downarrow$?

$A^T \cdot A$ sim y def +

•) $A^T \cdot A$ es simétrica

$$(A^T \cdot A)^T = A^T (A^T)^T = A^T \cdot A \checkmark$$

•) $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0 \Rightarrow x^T (A^T \cdot A) x > 0$ ¿?

$$x^T (A^T A) x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

De hecho, $\|Ax\|_2^2 = 0 \iff \|Ax\|_2 = 0 \iff Ax = 0$

$$0 = Ax = [a_1 | \cdots | a_N] \, x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_N$$

$\Downarrow$ $a_1, \ldots, a_N$ vectores l.I de $\mathbb{R}^N$

$x_i = 0$ con $i \in \{1, \ldots, N\}$

$\Updownarrow$

$\boxed{x = 0}$

Aproximación por mínimos cuadrados discreta

S subespacio vectorial $\mathbb{R}^M$

$$\text{Base de } S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{M1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1N} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{pmatrix} \right\}$$

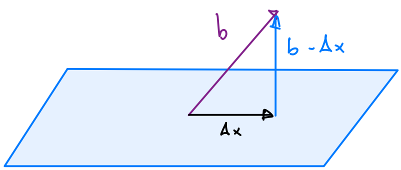
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = N$$

$$S = \{ Ax : x \in \mathbb{R}^N \}$$ Ecuaciones implícitas de S

$b \in S \Rightarrow Ax = b$ compatible

$b \notin S \Rightarrow Ax = b$ incompatible

¿Vector $Ax \in S$ más próximo a b?



1º) Resolver $A^TAx = A^Tb$

$\Downarrow$

x

2º) Solución problema: Ax

$$¿\exists\, x \in \mathbb{R}^N ; \; y \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \|Ax - b\|_2^2 \le \|Ay - b\|_2^2 \, ?$$

Sabiendo que $u^T \cdot u = \|u\|_2^2$ Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Minimizar f

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2 = (Ax - b)^T (Ax - b) = x^T A^T A x - 2 b^T A x + b^T b = 2\left(\frac{1}{2}\left(x^T (A^T A) x - (A^T b)^T x\right) + b^T b\right.$$

A^TA simétrica y definida positiva por el principio del mínimo

Ecuaciones normales : $A^TAx = A^Tb$

Ax mejor aproximación de b en S

Interpretación geométrica

S subespacio vectorial $\mathbb{R}$

Base de S $= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{M1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1N} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = N$$

$S = \{ Ax : x \in \mathbb{R}^N \}$ Ecuaciones implícitas de S

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto escalar usual en $\mathbb{R}^M$

Ecuaciones normales $A^TAx = A^Tb \iff A^T(b - Ax) = 0$

$$\forall j = 1, \dots, N \quad \left\langle \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}, b - Ax \right\rangle = 0$$

Coje todas las columnas de A y multiplico por $b-Ax$

$b - Ax \perp S \Rightarrow Ax$ proyección ortogonal de b sobre S

$$P_S(b) = Ax$$

$$\forall j = 1, \dots, N \qquad \left\langle \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}, \, b - \sum_{i=1}^{N} x_i \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

Vector que proyecto (b) –
– su proyección (Ax) es ⊥ a
los vectores de la base de S

Teorema de la mejor aproximación

$A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $rg(A) = N$, S subespacio vectorial de $\mathbb{R}^M$

$S = \{Ax : x \in \mathbb{R}^N\}$, $b \in \mathbb{R}^M$

$\exists ! \, x \in \mathbb{R}^N \, / \, \|Ax - b\|_2 = \min\{\|Ay - b\|_2 : y \in \mathbb{R}^N\}$

Ax caracterizado por $A^T A x = A^T b$

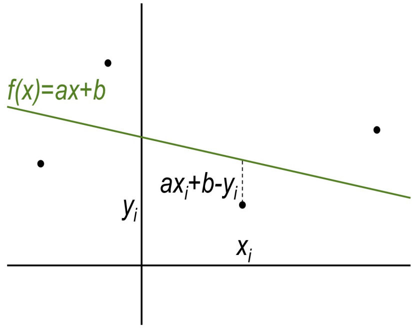
$$\Longleftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}, \, b - \sum_{i=0}^{N} x_i \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

Ajuste de datos mediante una recta o lineal

$f(x) = ax + b \quad ¿a, b?$

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=0}^{M} (a x_i + b - y_i)^2$$

$$\iff \text{minimiza} \left\| a\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2^2$$



$$\iff \text{minimiza} \left\| a\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

Esto en realidad es determinar el vector de S más próximo a y ; $P_S(y)$

Solución : $P_S(y) = ax + b1 \rightsquigarrow f(x) = ax + b$

Regla mnemotécnica

$y = ax + b \cdot 1$

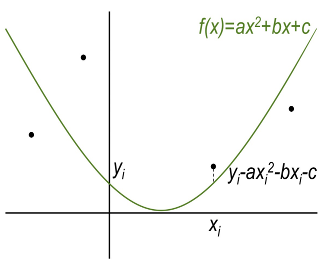
$P_S(y) = ax + b1$

$S = \text{lin}\{x, 1\} \to \vec{b} = 1$

$\hookrightarrow$ los x de los ptos

Ajuste de datos mediante una parábola o cuadrático

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ¿ a, b, c ?



$$\text{Minimizar} \sum_{i=0}^{M} (a x_i^2 + b x_i + c - y_i)^2$$

$$\iff \text{minimizar} \left\| a\begin{bmatrix} x_0^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_M^2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{minimizar} \left\| a\begin{bmatrix} x_0^2 \\ \vdots \\ x_M^2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2$$

$$\text{Solución}: P_S(y) = ax^2 + bx + c1 \rightsquigarrow f(x) = ax^2 + bx + c$$

Regla mnemotécnica

$y = ax^2 + bx + c1$

$P_S(y) = ax^2 + bx + c1$

$S = \text{lin}\{x^2, x, 1\}$

Aproximación por mínimos cuadrados general: caso continuo

E espacio vectorial real ; $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

producto escalar en E $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ con "$=$" $\Longleftrightarrow x = 0$

$\forall x, y \in E$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \equiv$ espacio euclídeo.

Ejemplos

En $\mathbb{R}^N \Rightarrow x, y \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$

En $C[a,b] \Rightarrow f, g \in C[a,b] \Rightarrow \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

Norma euclídea

$x \in E \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$,, $\|x\|_2$

En $\mathbb{R}^N \Rightarrow x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$

En $C([a,b]) \Rightarrow f \in C[a,b] \Rightarrow \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f(x) dx \int_a^b f(x) dx}$

$= \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$

Mejor aproximación en un espacio euclídeo arbitrario

¿ $\exists\, u \in S : w \in S \Rightarrow \|u - v\| \leq \|w - v\|$? con S subespacio vectorial de E

$\Updownarrow$

¿ $\exists\, u \in S : w \in S \Rightarrow \langle u - v, u - v \rangle \leq \langle w - v, w - v \rangle$? con v el vector proyectado

$$A = \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \cdots & \langle a_1, a_N\rangle \\ \vdots & & \\ \langle a_N, a_1\rangle & \cdots & \langle a_N, a_N\rangle \end{bmatrix}$$

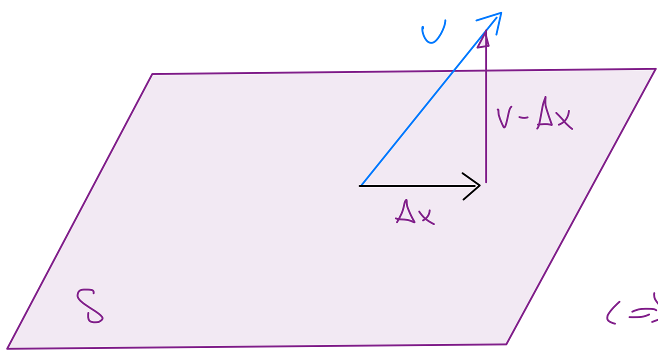
$$b = \begin{bmatrix} \langle a_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle a_N, v\rangle \end{bmatrix}$$

$$¿\ \exists\, x \in \mathbb{R}^N : y \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \leq \frac{1}{2} y^T A y - b^T y\ ?$$

$Ax = b \Rightarrow$ Ecuaciones normales

$u = \sum_{i=1}^{N} x_i a_i$ mejor aproximación de v a S

Interpretación geométrica



$$v - Ax = v - \sum_{i=1}^{N} x_i a_i$$

es $\perp$ a $S \iff \in S^{\perp}$

$\iff u = \sum_{i=1}^{N} x_i a_i$ es la

proyección ortogonal de v sobre S

$P_S(v) = u$

¿ x ?

$$\langle a_i, v - \sum_{j=1}^{N} x_j a_j \rangle = 0$$

Teorema de la mejor aproximación

Sean $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo, S un subespacio vectorial finito dimensional con base

$$\{a_1, \dots, a_N\}$$

y sea $v \in E$. Entonces existe un único vector $u \in S$ (mejor aproximación de v en S, proyección ortogonal de v sobre S) de forma que

$$\|u - v\| = \text{mín}\{\|w - v\| : \ w \in S\}.$$

De hecho, las coordenadas $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ del vector u en la base $\{a_1, \dots, a_N\}$ vienen caracterizadas por las ecuaciones normales

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde

$$\mathbf{A} := [\langle a_i, a_j\rangle]_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N\times N} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} := [\langle a_i, v\rangle]_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$$

i.e.,

$$i = 1, \dots, N \ \Rightarrow \ \left\langle a_i, v - \sum_{i=1}^N x_j a_j \right\rangle = 0.$$

Aproximación uniforme

Polinomios de Bernstein

$N \geq 1$ $f \in C[0,1]$, polinomio de Bernstein $B_N f$ de orden N para f definido $\forall x \in [0,1]$:

$$B_N f(x) = \sum_{i=0}^N \underbrace{f(i/N)}_{f \text{ en los nodos uniformemente distribuidos}} \binom{N}{i} x^i (1-x)^{N-i}$$

Teorema de Weierstrass (versión numérica)

$$f \in C([0,1]) \implies \lim_{N\to\infty} \|f - B_N f\|_\infty = 0$$

$$f \in C^1([0,1]) \implies \|f - B_N f\|_\infty \leq \frac{\|f'\|_\infty}{\sqrt{N}}$$