CÁLCULO II

(1º del Doble Grado en Matemáticas e Informática)

Granada, 3 de mayo de 2021

T.VM

1. (1 punto). Demostrar que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

2. (2 puntos). Sea $a > 0$.

(i) Determinar (en función del parámetro a) la imagen de la función $f_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f_a(x) := x \ln a - a \ln x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Determinar los valores de $a > 0$ que son tales que $x \ln a \geq a \ln x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

3. (2.5 puntos). Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 4 - x^2$.

(i) Estudiar la concavidad de f. ¿Posee algún punto de inflexión? Justifíquese la respuesta.

(ii) Determinar el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ cuya recta tangente corta en el primer cuadrante tanto al eje OX como al eje OY, determinando un triángulo de área mínima.

4. (3 puntos).

(i) Calcular el polinomio de Taylor de orden 10 centrado en el origen de las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$.

$\frac{\pi}{18} \leq \frac{1}{5}$

n pequeña

(ii) Determinar $P_{3,0}^{\operatorname{sen}(x)}(\frac{\pi}{18})$ y $P_{3,0}^{\cos(x)}(\frac{\pi}{18})$ y dar una estimación del error cometido al aproximar $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{18})$ y $\cos(\frac{\pi}{18})$ por dichos valores, respectivamente (esto es una aproximación del seno y el coseno del ángulo de 10^0).

(iii) Haciendo uso del polinomio de Taylor calcular $\lim_{x\to 0} \frac{(2x - \operatorname{sen}(x))(\cos(x) - 1)}{x^3}$.

5. (1.5 puntos). Calcular

L'Hôp

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right).$$

CÁLCULO II

Doble Grado en Informática y Matemáticas

1. (2 puntos). Justificar de forma razonada si las siguientes funciones son, o no, uniformemente continuas y/o lipschitzianas.

   (i) $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x\ln(x)$, para cada $x \in]0,1[$.

   (ii) $F : [1,3] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_1^x g(t)dt$, donde $g : [1,3] \to \mathbb{R}$ es una función monotona.

2. (1 punto). Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}((\frac{n+1}{n})^2 + (\frac{n+2}{n})^2 + \ldots + (\frac{n+n}{n})^2)$.

3. (2 puntos). Determinar para qué valores de $a > 0$, el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = a$, es igual a 1.

Pistarla → 4. (2 puntos). Calcular al longitud de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

5. (2 puntos). Sea $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) := \int_0^x e^{t^2} dt$. Estudiar su monotonía, y determinar su imagen. Calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2 + \int_0^x e^{2t^2} dt}{\int_0^{\sqrt{x}} te^{2t^4} dt}.$$

No hacer integral → 6. (1 punto). Demostrar que $0 \le \int_2^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx \le \frac{1}{2}$

Granada, 2 de junio de 2020.