# Tema 4

## 2.2. Logaritmos y exponenciales

En esta sección vamos a definir dos de las más importantes funciones de las matemáticas: la función logaritmo natural y la función exponencial. La siguiente desigualdad será de gran utilidad en lo que sigue.

**2.19 Proposición** (Desigualdad básica). *Cualesquiera sean los números reales positivos distintos $a,b$, y para todo número natural $n$, se verifica que*

$$\boxed{ab^n < \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}} \tag{2.5}$$

**Demostración**. En la desigualdad de las medias

$$\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1},$$

donde los $n+1$ números $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ son positivos y no todos ellos iguales, hagamos $a_1 = a$, $a_2 = \cdots = a_{n+1} = b$, con lo que obtenemos

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1} \tag{2.6}$$

desigualdad que es equivalente a la del enunciado sin más que elevar a la potencia de orden $n+1$.
□

Usaremos también el hecho elemental (ver ejercicios 48 y 56) de que para todo $a > 0$ es $\lim\{\sqrt[n]{a}\} = 1$ .

No está de más recordar que, dado $x \geqslant 0$ y $n \in \mathbb{N}$, representamos por $\sqrt[n]{x}$ al único número real mayor o igual que 0 cuya potencia $n$-ésima es igual a $x$. Naturalmente, $\sqrt[1]{x} = x$.

**2.20 Proposición.** *Para todo número real positivo $x \neq 1$ se verifica que la sucesión $\{n(\sqrt[n]{x} - 1)\}$ es estrictamente decreciente y convergente.*

**Demostración**. Basta hacer en (2.6) $a = 1$, $b = \sqrt[n]{x}$, para obtener que $\sqrt[n+1]{x} < \dfrac{n\sqrt[n]{x}+1}{n+1}$, es decir, $(n+1)\sqrt[n+1]{x} < n\sqrt[n]{x} + 1$; sumando ahora $-n-1$ en ambos lados resulta $(n+1)(\sqrt[n+1]{x} - 1) < n(\sqrt[n]{x} - 1)$, lo que prueba que la sucesión es estrictamente decreciente. Si $x > 1$ dicha sucesión converge por ser decreciente y estar minorada por cero. Si $0 < x < 1$ podemos escribir $n(\sqrt[n]{x} - 1) = -n(\sqrt[n]{1/x} - 1)\sqrt[n]{x}$, y como $\lim\{\sqrt[n]{x}\} = 1$, y $1/x > 1$, deducimos, por lo ya visto, que también hay convergencia en este caso. □

**2.21 Definición.** *La función **logaritmo natural**, también llamada **logaritmo neperiano** o, simplemente, logaritmo, es la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por*

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty}\{n(\sqrt[n]{x} - 1)\}.$$

El siguiente resultado es consecuencia de la proposición anterior y del teorema (2.14).

**2.22 Proposición.** *Para todo $x > 0$, $x \neq 1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:*

$$\log(x) = \text{ínf}\{n(\sqrt[n]{x}-1) : n \in \mathbb{N}\} < n(\sqrt[n]{x}-1) \tag{2.7}$$

**2.23 Teorema.** *Cualesquiera sean los números positivos $x, y$ se verifica que*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y); \ \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

*Además la función logaritmo es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.*

**Demostración**. Tomando límites en la igualdad

$$n(\sqrt[n]{xy}-1) = n(\sqrt[n]{x}-1)\sqrt[n]{y} + n(\sqrt[n]{y}-1)$$

y teniendo en cuenta que $\text{lím}\{\sqrt[n]{y}\} = 1$, obtenemos $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. Como, evidentemente, $\log(1) = 0$, haciendo en esta igualdad $x = 1/y$ deducimos que $\log(1/y) = -\log(y)$. Lo que, a su vez, implica que

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(x\frac{1}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

La desigualdad (2.7) implica que $\log(t) < 0$ para todo $t \in ]0,1[$. Si $x, y$ son números positivos tales que $x < y$, entonces $0 < x/y < 1$ por lo que $\log(x) - \log(y) = \log(x/y) < 0$, es decir, $\log(x) < \log(y)$, lo que prueba que la función logaritmo es estrictamente creciente. □

Nuestro propósitop ahora es probar que la función logaritmo es una biyección de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. Para ello bastará probar que es sobreyectiva ya que, al ser estrictamente creciente, es inyectiva. El siguiente resultado será de utilidad a este respecto.

**2.24 Lema.** *Sea $\text{lím}\{x_n\} = x$ cumpliéndose que $0 < x_n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica que $\text{lím}\{n(\sqrt[n]{x_n}-1)\} = \log(x)$.*

## El número e.

Dado $n \in \mathbb{N}$, haciendo en la desigualdad (2.5) $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{n}$, obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sustituyendo en (2.5) $n$ por $n+1$, $a = 1$, $b = n/(n+1)$ y pasando a inversos obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Hemos probado así que la sucesión $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente e $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es estrictamente decreciente. Además, como $x_1 \leqslant x_n < y_n \leqslant y_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que ambas sucesiones son acotadas y, al ser monótonas, son convergentes. Como $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ se sigue que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$. El valor común de este límite es un número real que se representa por la letra "e". Así, $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$ es el número real definido por:

$$\mathrm{e} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$$

y también

$$\mathrm{e} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \inf\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

En particular, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}} \tag{2.8}$$

Haciendo $n = 1$, $m = 6$ obtenemos una primera aproximación de e, $2 < \mathrm{e} < 3$.

**2.25 Proposición.** *Dado un número real $x \neq 0$ se verifica que*

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

*para todo número natural $n > -x$. Además la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y su límite es un número real positivo.*

**Demostración**. Para $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > -x$ se tiene que $1 + \frac{x}{n} > 0$. Haciendo en la desigualdad básica $a = 1$, $b = 1 + \frac{x}{n}$, obtenemos que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$. Hemos probado así que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es eventualmente estrictamente creciente y, según lo dicho en la observación 2.19, para probar que converge es suficiente probar que está acotada. Para ello sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geqslant |x|$. Se tiene que

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = \left|1+\frac{x}{n}\right|^n \leqslant \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{p}{n}\right)^n.$$

Sabemos, por lo ya visto, que $\left\{\left(1+\frac{p}{n}\right)^n\right\}$ es creciente, por lo que

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{p}{np}\right)^{np} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p < \mathrm{e}^p.$$

Deducimos así que $\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| < \mathrm{e}^p$ para todo $n\in\mathbb{N}$, lo que prueba que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ está acotada. Finalmente, como se indicó en la observación 2.19, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\} = \sup\left\{\left(1+\frac{x}{p+n}\right)^{p+n} : n\in\mathbb{N}\right\}$$

y, por tanto, $0 < \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$. □

**2.26 Definición.** La **función exponencial** es la función $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ definida para todo $x\in\mathbb{R}$ por:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}.$$

Observa que $\exp(1)=\mathrm{e}$, y que $\exp(0)=1$. .

**2.27 Teorema.** *La función logaritmo es una biyección de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa es la función exponencial.*

**Demostración**. Dado $t\in\mathbb{R}$, fijemos $p\in\mathbb{N}$, $p>-t$, y definamos

$$x_n = \frac{1}{2}\exp(t)\ \text{ para } 1\leqslant n\leqslant p,\ \ x_n = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n\ \text{ para } n\geqslant p+1.$$

Tenemos que $\lim\{x_n\} = \exp(t)$ y además $0 < x_n < \exp(t)$. Aplicamos ahora el lema 2.24 a dicha sucesión $\{x_n\}$ para obtener que

$$\lim\{n(\sqrt[n]{x_n}-1)\} = \log(\exp(t)).$$

Por otra parte, para todo $n\geqslant p+1$ se tiene que

$$n(\sqrt[n]{x_n}-1) = n\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n}-1\right) = n\left(1+\frac{t}{n}-1\right) = t,$$

Luego, por la unicidad del límite, ha de ser $t=\log(\exp(t))$. Hemos probado así que la función logaritmo es sobreyectiva y, como ya sabíamos, también es inyectiva. Queda así probado que dicha función es una biyección de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. La igualdad $\log(\exp(t))=t$ para todo $t\in\mathbb{R}$, nos dice ahora que la función exponencial es la biyección inversa de la función logaritmo. □

**2.28 Corolario.** *La función exponencial es estrictamente creciente en* $\mathbb{R}$ *y se verifica que*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

*cualesquiera sean los números reales* $x$ *e* $y$.

**Demostración**. Teniendo en cuenta que $x = \log(\exp(x))$, $y = \log(\exp(y))$ y que el logaritmo es estrictamente creciente, se deduce que si $x<y$ entonces ha de ser necesariamente $\exp(x)<\exp(y)$. De otra parte, como

$$\log(\exp(x+y)) = x+y = \log(\exp(x)) + \log(\exp(y)) = \log(\exp(x)\exp(y))$$

se sigue que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Haciendo en esta igualdad $x = -y$ obtenemos $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$ por lo que $\exp(x-y) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. □