Ejercicio Ergodicidad:

Estudia la ergodicidad de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tengamos en consideración la definición de matriz ergódica:

Una matriz, A, es ergódica si $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m > 0$

Es decir, será ergódica si podemos encontrar alguna potencia de A estrictamente positiva.

Calculemos en primer lugar A^2

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.02 & 0 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0.09 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0.12 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.06 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0.02 & 0.09 \end{pmatrix}$$

Calculemos A^3

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.02 & 0 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0.09 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0.12 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.06 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0.02 & 0.09 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.024 & 0.072 & 0.012 & 0.06 \\ 0.027 & 0.002 & 0 & 0.018 & 0.027 \\ 0.028 & 0.004 & 0 & 0.024 & 0.012 \\ 0 & 0.018 & 0.018 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0.031 & 0.039 & 0.005 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^4

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.024 & 0.072 & 0.012 & 0.06 \\ 0.027 & 0.002 & 0 & 0.018 & 0.027 \\ 0.028 & 0.004 & 0 & 0.024 & 0.012 \\ 0 & 0.018 & 0.018 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0.031 & 0.039 & 0.005 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0168 & 0.0042 & 0.0017 & 0.0146 & 0.0072 \\ 0.0002 & 0.0117 & 0.0189 & 0.0027 & 0.0006 \\ 0.0004 & 0.0074 & 0.019 & 0.0028 & 0.002 \\ 0.0054 & 0.0004 & 0 & 0.0036 & 0.0054 \\ 0.0109 & 0.001 & 0 & 0.0078 & 0.0093 \end{pmatrix}$$

Como observamos, conforme vamos aumentando m, el número de 0 en la matriz A^m va disminuyendo. Se prevé que en algún momento $A^m > 0$. Veámoslo:

Calculemos A^5:

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 0.0168 & 0.0042 & 0.0017 & 0.0146 & 0.0072 \\ 0.0002 & 0.0117 & 0.0189 & 0.0027 & 0.0006 \\ 0.0004 & 0.0074 & 0.019 & 0.0028 & 0.002 \\ 0.0054 & 0.0004 & 0 & 0.0036 & 0.0054 \\ 0.0109 & 0.001 & 0 & 0.0078 & 0.0093 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00078 & 0.00508 & 0.0108 & 0.00204 & 0.00126 \\ 0.00495 & 0.00072 & 0.00018 & 0.0038 & 0.00351 \\ 0.00444 & 0.00092 & 0.00036 & 0.00364 & 0.00252 \\ 0.00004 & 0.00234 & 0.00378 & 0.00054 & 0.00012 \\ 0.0001 & 0.00435 & 0.00747 & 0.00103 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

Vemos que para $m = 5$, $A^m > 0$, luego, por la definición de matriz ergódica, podemos afirmar que la matriz del enunciado es ergódica.

En este caso, se ha tenido la suerte de haber encontrado un m ; $A^m > 0$ relativamente pequeño y por lo tanto no ha costado tanto trabajo ver que la matriz es ergódica, pero, claramente, no es la forma más eficiente para hacerlo a mano ⇒ habría que usar los criterios de ergodicidad.