Topología I. Convocatoria ordinaria

Doble grado en ingeniería informática y matemáticas

9 de febrero de 2022

1.– En $\mathbb{R}$ se considera la topología: $U \subset [-1,1]^c$

$$T = \{U \subset \mathbb{R} : U \cap [-1,1] = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

Depende del punto

a) Describir los cerrados de $(\mathbb{R}, T)$. Dado $x \in \mathbb{R}$, encontrar una base de entornos mínima de x en $(\mathbb{R}, T)$. abc plos que no separ Base no numerable

b) ¿Es $(\mathbb{R}, T)$ un espacio Hausdorff? ¿Verifica $(\mathbb{R}, T)$ el segundo axioma de numerabilidad?

c) Calcular la clausura, el interior y la frontera de $(-2, 3)$ en $(\mathbb{R}, T)$.

d) En $(\mathbb{R}, T)$ se considera la relación de equivalencia R dada por xRy si y solo si $x = y$ ó $x, y \in [-1, 1]$. Probar que $(\mathbb{R}/R, T/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, T')$ donde $T' = \{U \subset \mathbb{R} : 0 \notin U\} \cup \{\mathbb{R}\}$. ↳ pensar poco cual es el homeomorf

e) Encontrar dos subconjuntos compactos en $(\mathbb{R}, T)$ cuya intersección no sea compacto en $(\mathbb{R}, T)$.

2.– Definir un subespacio compacto de un espacio topológico y probar las siguientes afirmaciones:

a) Un subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.

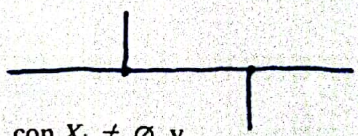
b) Todo subespacio compacto de un espacio topológico Hausdorff es cerrado.

3.– Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

a) Sean A_1 y A_2 dos subespacios propios (distintos del espacio total) de un espacio topológico (X, T) que son homeomorfos. ¿Es cierto que los subespacios $X \setminus A_1$ y $X \setminus A_2$ son también homeomorfos? Conexión.

b) Estudiar la conexión del siguiente subconjunto de $(\mathbb{R}^2, T_u)$:

$$X = \big\{\{x\} \times [0,1] : x \in \mathbb{Q}\big\} \cup \big\{\{x\} \times [-1,0] : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big\}.$$



c) Para $i = 1, 2$ se consideran los espacios topológicos (X_i, T_i) e (Y_i, T_i'), con $X_i \neq \emptyset$, y las aplicaciones $f_i : (X_i, T_i) \to (Y_i, T_i')$. Probar que si $f_1 \times f_2 : (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2) \to (Y_1 \times Y_2, T_1' \times T_2')$ definida por:

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

es cerrada entonces f_i es cerrada para $i = 1, 2$.

Primera pregunta: 4.5 puntos

Segunda pregunta: 2.5 puntos

Tercera pregunta: 3 puntos

Todos los apartados tienen la misma valoración

Duración del examen: 3 horas

Topología I. Convocatoria ordinaria

Doble grado en ingeniería informática y matemáticas

14 de enero de 2022

circunferencia concéntrica centro origen y [illegible]

1.– Para todo $R \geqslant 0$, consideramos el conjunto $S_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = R\}$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Se considera la topología T en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B} = \{S_R : R \geqslant 0\}$.

a) Estudiar cuando el conjunto $\{x_0\}$, con $x_0 \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, es cerrado en $(\mathbb{R}^2, T)$.

b) Demostrar que $(\mathbb{R}^2, T)$ es AN-I pero no AN-II. (Ninguna base de T es numerable).

c) Calcular la clausura, el interior y la frontera en $(\mathbb{R}^2, T)$ del conjunto $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |b| \leqslant 1\}$. Banda limitada por dos rectas paralelas

d) Probar que A es conexo en $(\mathbb{R}^2, T)$ si y sólo si existe $R \geqslant 0$ tal que $A \subset S_R$. Determinar las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, T)$.

e) Demostrar que A es compacto en $(\mathbb{R}^2, T)$ si y sólo si existe $J \subset [0, +\infty)$ finito tal que $A \subset \bigcup_{R \in J} S_R$.

2.– Enunciar y demostrar el teorema de Tijonov. Si se hace uso del lema del tubo, entonces éste debe enunciarse y probarse previamente.

3.– Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

a) Decidir si los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, T_u)$ son homeomorfos entre sí dos a dos:
- $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\| < 4\}$,
- $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant \|x\| \leqslant 4\}$,
- $A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

b) Sean (X_1, T_1) y (X_2, T_2) espacios topológicos. Para $i = 1, 2$, sea R_i una relación de equivalencia en X_i tal que la proyección $p_i : (X_i, T_i) \to (X_i/R_i, T_i/R_i)$ es abierta. Demostrar que

$$(X_1 \times X_2/R, T_1 \times T_2/R) \cong (X_1/R_1, T_1/R_1) \times (X_2/R_2, T_2/R_2),$$

donde R es la relación de equivalencia en $X_1 \times X_2$ definida por

$$(x_1, x_2)\, R\, (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 R_1 y_1 \text{ y } x_2 R_2 y_2.$$

construir homeomorfismo natural y probar homeomorfismo

c) Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre espacios topológicos tal que $f(A)$ es conexo en (Y, T') para cada A conexo en (X, T). ¿Es f continua?

Primera pregunta: 4,5 puntos

Segunda pregunta: 2,5 puntos

Tercera pregunta: 3 puntos

Todos los apartados tienen la misma valoración

Duración del examen: 3 horas