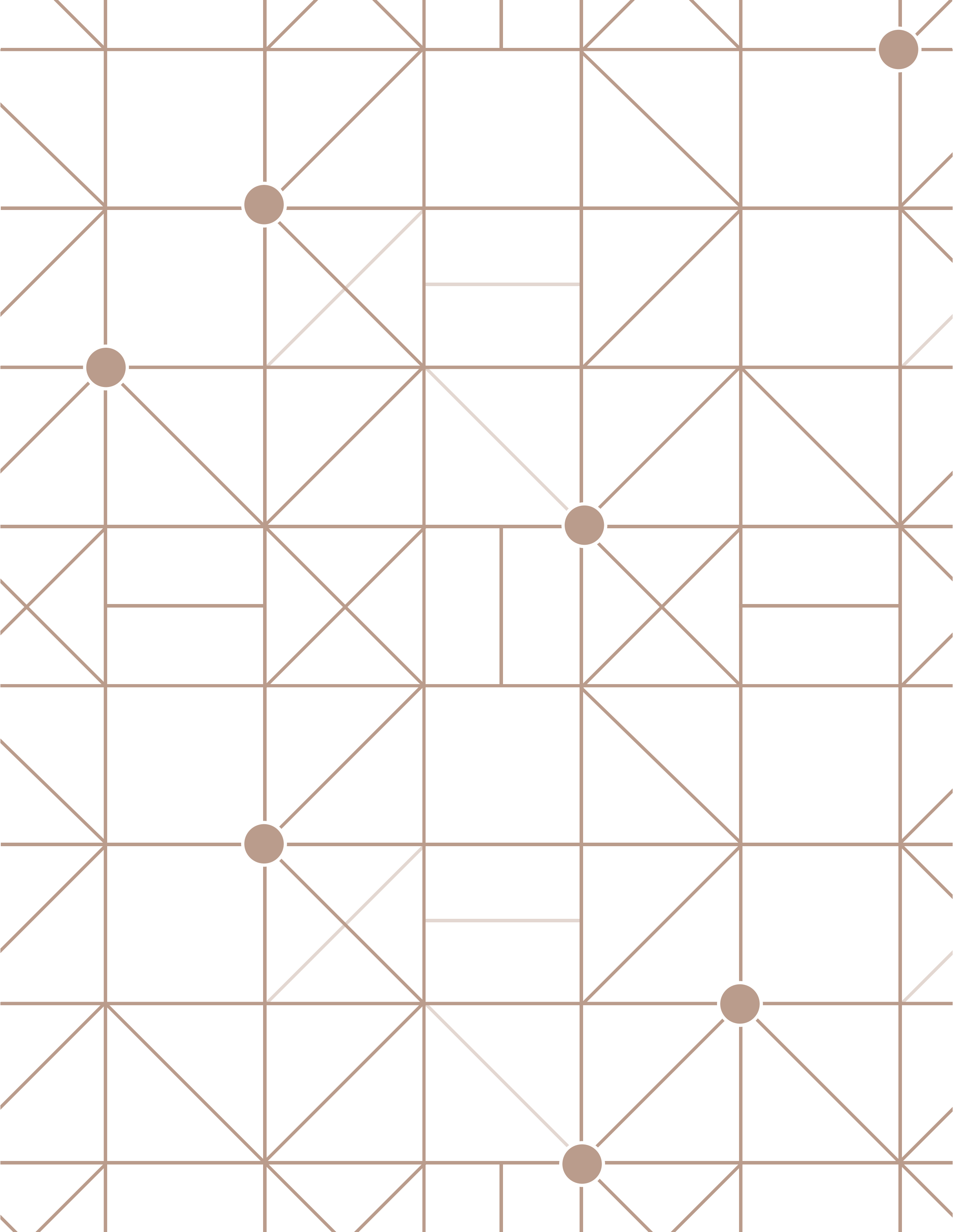

Ejercicio 1

Clasifica la cónica $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 7y^2 - 6xy + 10x + 2y + 9 = 0\}$

Claramente, $M_{R_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$ núcleo cuadrático es $N_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

Calculamos polinomio característico de $N_{R_0}(H)$, sabiendo que, dado que $R_H = 2 = r_H$, estamos en el caso I.

$$P(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -3 \\ -3 & -7-t \end{vmatrix} = t^2 + 6t - 7 - 9 = t^2 + 6t - 16 = (t-2)(t+8)$$

$\Rightarrow t = -8,\ t = 2$ son valores propios de $N_{R_0}(H)$. Luego, $S_H = s_H = |t - s| = |1 - 1| = 0$

Por tanto, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y H consiste de 2 rectas secantes.

Pasos a seguir:

1. Encontrar $M_{R_0}(H)$
2. Encontrar $N_{R_0}(H)$
3. Calcular R_H, r_H y determinar caso
4. Calcular polinomio caract. de $N_{R_0}(H)$
5. Determinar S_H y s_H
6. Deducir matriz equival. y clasific.

Encontrar un sistema de referencia en el que adopte su ecuación reducida.

Lo primero será encontrar una base B_1 en la que $N_{R_0}(H)$ adopte su forma de Sylvester. Calculamos así los subespacios propios asociados a los valores propios -8 y 2

$$V_{-8} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}(\{(1,3)\})$$

$$V_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}(\{(3,-1)\})$$

Normalizando vectores tenemos una base ortonormal $B_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3), \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)\right\}$ y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $N_{R_0}(H)$ se alcanza con la base ortogonal

$$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{10}}(1,3), \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{10}}(3,-1)\right\} = \left\{\frac{1}{4\sqrt{5}}(1,3), \frac{1}{2\sqrt{5}}(3,-1)\right\}$$

Sea $R_1 = \{(0,0), B\}$ un sistema de referencia. $M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_1, R_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{4\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \end{array}\right)$

$$M_{R_1}(H) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_1, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_1, R_0)$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4\sqrt5} & \frac{3}{4\sqrt5} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt5} & \frac{-1}{2\sqrt5} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4\sqrt5} & \frac{3}{2\sqrt5} \\ 0 & \frac{3}{4\sqrt5} & -\frac{1}{2\sqrt5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 7/\sqrt5 & 2/\sqrt5 \\ \hline \frac{7}{\sqrt5} & 1 & 0 \\ 2/\sqrt5 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ H en R_1 viene representada por los ceros del polinomio: $x^2 - y^2 + \frac{14}{\sqrt5}x + \frac{4}{\sqrt5}y + 9 = 0$

Completamos cuadrados: $(x + 7/\sqrt5)^2 - (y - 2/\sqrt5)^2 = 0$

Haciendo el cambio de variable $x_1 = x + 7/\sqrt5$ e $y_1 = y - 2/\sqrt5$ tenemos así un nuevo sistema de referencia R_2 tal que la matriz de la cónica H en ese sistema de referencia es: $\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow H \equiv x_1^2 - y_1^2 = 0$

Si queremos determinar de forma explícita el sistema de referencia R_2:

$$M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{7}{\sqrt5} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt5} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_1, R_0) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt5} & \frac{1}{4\sqrt5} \\ 1 & \frac{-1}{2\sqrt5} & \frac{3}{4\sqrt5} \end{array}\right)$$

Encontrar un isomorfismo afín de $\mathbb{R}^2$ que lleve a su ecuación reducida

$$M_{R_2}(H) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Para toda afinidad $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sabemos que

$M_{R_0}(f(H)) = M(f^{-1}, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(f^{-1}, R_0)$, esto es, $M(f^{-1}, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(f^{-1}, R_0) \in M_{R_0}(f(H))$

Luego, si elegimos la única f tal que

$$M(f, R_0)^{-1} = M(f^{-1}, R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt5} & \frac{1}{4\sqrt5} \\ 1 & \frac{-1}{2\sqrt5} & \frac{3}{4\sqrt5} \end{array}\right)$$

$$M_{R_0}(f(H)) = M(f^{-1}, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(f^{-1}, R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0) \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0) = M_{R_2}(H)$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ejercicio 2

Clasifica la cónica $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -39 - 18x + 9x^2 + 12xy + 8y + 4y^2 = 0\}$

Tomamos como sistema de referencia el usual, R_0.

$$M_{R_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} -39 & -9 & 4 \\ \hline -9 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow N_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_H = 1 \\ R_H = 3 = r_H + 2 \Rightarrow \text{Caso III} \end{cases}$$

Calculamos los valores propios de $N_{R_0}(H)$: $p(t) = \begin{vmatrix} 9-t & 6 \\ 6 & 4-t \end{vmatrix} = 36 - 13t + t^2 - 36$
$= t^2 - 13t = t(t-13)$

Valores propios: 0 y 13 $\Rightarrow S_H = \sigma_H = 1 \Rightarrow$ Forma reducida de H ~

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow H \text{ es una parábola.}$$

Encontrar un sistema de referencia en el que adopte su forma canónica:

$$\left.\begin{array}{l} V_{13} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}(\{(3,2)\}) \\ V_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}(\{(2,-3)\}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Base outonormal: } B = \left\{\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2), \frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3)\right\}$$

La base en la que se alcanza la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $N_{R_0}(H)$ es:

$$B_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{13}}(3,2), (2,-3)\right\} = \left\{\frac{1}{13}(3,2), (2,-3)\right\}$$

Sea el sistema de referencia $R_1 = \{(0,0), B_1\}$

$$M_{R_1}(H) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_1, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_1, R_0) = \left(\begin{array}{c|cc} -39 & -\frac{19}{13} & -30 \\ \hline -\frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego H viene representada en R_1 por los ceros del polinomio $x^2 - \frac{38}{13}x - 60y - 39 = 0$

Completamos cuadrados: $\left(x - \frac{19}{13}\right)^2 - 60y - \frac{6952}{169} = 0$

Hacemos cambio de variable: $x_1 = x - \frac{19}{13}$ e $y_1 = -30y - \frac{3476}{169}$ y surge así un nuevo sistema de referencia R_2; H viene represent. en R_2 por los ceros de $x_1^2 + 2y_1 = 0$

y por tanto: $M_{R_2}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Si queremos una determinación más explícita del sistema de referencia:

$$M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -19/13 & 1 & 0 \\ \frac{-3475}{160} & 0 & -30 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 19/13 & 1 & 0 \\ \frac{-1778}{2535} & 0 & -1/30 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_1, R_0) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{-2624}{2535} & 3/13 & -1/15 \\ \frac{1928}{845} & 2/13 & 1/10 \end{array}\right)$$

Encontrar un isomorfismo afín de $\mathbb{R}^2$ que lleve a su ecuación reducida.

$$M_{R_2}(H) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Toda afinidad $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisface:

$$M_{R_0}(f(H)) = M(f^{-1}, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(f^{-1}, R_0)$$

luego, $M(f^{-1}, R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(f^{-1}, R_0) \in M_{R_0}(f(H))$. Bastará tomar la única f tal que $M(f, R_0)^{-1} = M(f^{-1}, R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0)$.

Es decir, $$M(f, R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, R_2, R_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{-19}{13} & 3 & 2 \\ \frac{-3426}{169} & \frac{-50}{13} & \frac{90}{13} \end{array}\right)$$

Ejercicio 3: Clasifica las siguientes cónicas:

a) $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0 \equiv H$

Consideramos el sistema de referencia R_0

$$M_{R_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Núcleo cuadrático de } H \text{ en } R_0 : N_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico de $N_{R_0}(H) \Rightarrow p(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2 - 2t + t + t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (t+2)(t-3) = 0$

Valores propios -2 y 3 $\Rightarrow t = 1 = s \Rightarrow |t-s| = 0 = s_H$

$R_H = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3 \qquad r_H = 2 \Rightarrow R_H = r_H + 1 = 3 \; . \; S_H = s_H = 0$

$$\hat{p}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 3 & -1 \\ 3 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t) - 12 - (2-t) - 9(-1-t) - 4(1-t) =$$

$$= (2 - 3t + t^2)(-1-t) - 12 - 2 + t + 9 + 9t - 4 + 4t =$$

$$= -2 - 2t + 3t + 3t^2 - t^2 - t^3 + 14t - 9 =$$

$$= -11 + 15t + 2t^2 - t^3$$

Aplicando Regla de Descartes, deducimos que $t = 2$, $s = 1 \Rightarrow s_H = 1$

Luego, $R_H = r_H + 1 = 3$ y $S_H = s_H + 1 \Rightarrow$ Parábola

cu matriz eq: $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ hipérbola afín