Espacio Proyectivo

E espacio vectorial ; $\dim(E) = n+1$. El espacio proyectivo n-dimensional $P(E)$ sobre E se entiende como el conjunto cuyos puntos son las rectas vectoriales o direcciones en E. ($E^* = E \setminus \{\vec{0}\}$)

Relación de equivalencia $v \sim w \iff v = \lambda w,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$

Espacio proyectivo: $P(E) = E^*/\sim$, $\dim(P(E)) = n$

$[v] \in P(E)$ $\equiv$ punto de $P(E)$ determinado por la recta vectorial generada por $v \Rightarrow [v] = \mathcal{L}(\{v\})^* = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

Proyección cociente: $\pi : E^* \to P(E)$, $\pi(v) = [v]$

Observación: Si $U \subseteq E$ es subespacio vectorial con $\dim U = k+1$, $P(U)$ es un subconjunto de $P(E)$

Notación: $P(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{P}^n$

Variedad Proyectiva: Un subconjunto $X \subseteq P(E)$ es una variedad proyectiva si el conjunto

$\hat{X} := \pi^{-1}(X) \cup \{\vec{0}\}$ es un subespacio vectorial de E, o equivalentemente, $X = \pi(\hat{X}^*)$ para un subespacio vectorial $\hat{X}$ de E, donde como siempre $\hat{X}^* = \hat{X} \setminus \{\vec{0}\}$

Una variedad proyectiva se puede definir como el espacio proyectivo asociado a un subespacio vectorial $\hat{X}$ de E. $\dim X = \dim \hat{X} - 1$.

Si $\dim X = 0$ (punto proyectivo), $\dim X = 1$ (Recta proyectiva), $\dim X = 2$ (plano proyectivo)

$\dim X = \dim(P(E)) - 1 \Rightarrow$ hiperplano proyectivo.

Proposición: Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de variedades proyectivas $\Rightarrow \bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \emptyset$ ó una v. proyec. de P(E)

Definición: $S \subset P(E)$ subconjunto no vacío arbitrario. Llamamos $V(S)$ a la variedad proyectiva más pequeña de P(E) que contiene a S: $V(S) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, siendo $\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ la familia de variedades proyectivas que contienen a S. $V(S) = S \Leftrightarrow S$ es una variedad proyectiva.

Proposición: Si $S \subset P(E)$ es un subconjunto no vacío entonces $\widehat{V(S)} = \mathcal{L}\{\pi^{-1}(S)\}$

Definición: K+1 puntos, $X = \{p_1 = [v_1], \ldots, p_{K+1} = [v_{K+1}]\}$ son proyectivamente independientes si $\dim V(X) = K$, que equivale a que $\dim \widehat{V(X)} = \mathcal{L}(\{v_1, \ldots, v_{K+1}\}) = K+1$

Definición: X, Y variedades proyectivas de $P(E)$, la variedad suma de X e Y se denota por $X \vee Y$ y se define por $X \vee Y = V(X \cup Y)$. Se verifica que $\widehat{X \cup Y} = \hat{X} + \hat{Y}$

Propiedades:

i) $X, Y \subset P(E)$ variedades proyectivas, $\dim(X \vee Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$

ii) $V(S \cup T) = V(S) \vee V(T)$

iii) Por dos puntos $p, q \in P(E)$ pasa una única recta proyectiva: $V(\{p, q\}) = p \vee q$

iv) Dos rectas proyectivas distintas R y S en $P(E)$ (plano proyectivo) se cortan en un punto. Si $\dim(P(E)) > 2$, entonces R y S podrían ser disjuntas.

Definición: las coordenadas homogéneas de un punto $p \in P(E)$ en la base $B = \{v_0, \dots, v_n\}$ de E se definen como $p_B = \{\lambda v_B : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$, siendo v cualquier vector de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ tal que $v = \pi^{-1}(p)$. Luego, si $(x_0, \dots, x_n)$ son las coordenadas de v en B, las de p son $p_B = (x_0 : \dots : x_n)$ salvo λ, por lo que también puede ser $p_B = (\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n)$

Definición: B_1 y B_2 son bases de E, la matriz de cambio de base en $P(E)$ de B_1 a B_2 para coordenadas homogéneas se define como $M(Id_{P(E)}, B_1, B_2) = \mu \cdot M(Id_E, B_1, B_2)$ $\forall \mu \in \mathbb{R}^*$. Un punto $p \in P(E)$

está en $X \iff$ sus coordenadas homogéneas en la base B de E $\{v_0, \dots, v_n\}$ satisfacen el sistema

$$(I) = \begin{cases} a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + a_{n-k,1}x_1 + \dots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

que son las ecuaciones implícitas de $\hat{X}$ en la base B, siendo $\dim X = k$.

Proyectividades:

Definición: $f: P(E) \to P(E')$ es una proyectividad si existe $\hat{f} \in \mathcal{L}(E, E')$ tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_E"'] & E' \arrow[d, "\pi_{E'}"] \\ P(E) \arrow[r, "f"] & P(E') \end{tikzcd}$$

* $\hat{f}$ ap. lineal asociada a la proyectividad f

Proyectividad: $\hat{f}$ es la única, salvo multiplicarla por un escalar no nulo.

Propiedades:

- Toda proyectividad es inyectiva.
- $Id_{P(E)}$ es una proyectividad con aplicación lineal asociada Id_E

- Una proyectividad es biyectividad $\iff \hat{f}$ isomorfismo, en cuyo caso f^{-1} también es proy. con $\widehat{f^{-1}} = \hat{f}^{-1}$. Se les dice homografías.
- Todo espacio proyectivo $P(E)$ n-dimensional es homográfico $\mathbb{P}^n$
- Si X es variedad proyectiva y $f: P(E) \to P(E')$ una proyectividad, $f(X)$ es una variedad proyectiva de $P(E')$. $P(E)$ es homográfico a $P(E')$ vía f.

Definición: $f: P(E) \to P(E')$ proyectividad, B y B' son bases de E y E' respectivamente. La matriz de f en B y B' se define como: $M(f, B, B') := M(\hat{f}, B, B')$ salvo escalares no nulos.

Teorema: Sean $P(E)$, $P(E')$ espacios proyectivos con $\dim P(E) = n \leq m = \dim P(E')$ y sean $\{p_0, \dots, p_n\} \subset P(E)$, $\{p_0', \dots, p_n'\} \subset P(E')$ sistemas de puntos proyectivamente independientes. Entonces existe una proyectividad $f: P(E) \to P(E')$ tal que $f(p_i) = p_i'$ $i = 0, \dots, n$ ¡f no es única!
Y si $n = m$, f es homografía.

Corolario: Todo igual que en el teorema anterior, solo que ahora consideramos los puntos $q \in P(E)$, $q' \in P(E')$ tales que $\{p_0, \dots, p_n, q\}$, $\{p_0', \dots, p_n', q'\}$ no contengan $n+1$ puntos proyectivamente dependientes. Existe una única homografía $f: P(E) \to P(E')$ tal que $f(p_i) = p_i'$ $i = 0, \dots, n$ y $f(q) = q'$.

Definición: Sea $A \subseteq E^*$, podemos definir: $e : A \to P(E)$ $\quad e(v) = \pi(v)$ con $\pi : E^* \to P(E)$ la aplicación proyección. La aplicación e es conocida como el embebimiento canónico del espacio afín A en el espacio proyectivo $P(E)$.

Proposición: $e : A \to P(E)$ satisface las siguientes propiedades:

i) e es inyectiva.

ii) $A_\infty = P(E) \setminus e(A)$ es un hiperplano proyectivo con $\hat{A}_\infty = \vec{A}$ $\quad (P(E) = e(A) \cup A_\infty)$.

iii) $S = u + \vec{S}$ subespacio afín de A. $X_S = V(e(S)) \subseteq P(E)$

$\hat{X}_S = \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\{u\}) + \vec{S}$, en particular $S = \hat{X}_S \cap A$ y $\dim X_S = \dim S$

$X_S \setminus A_\infty = e(S)$ y $S_\infty = X_S \cap A_\infty$

Definición: $P(E) \equiv$ proyectivización de A como hiperplano afín de E.

$A_\infty \equiv$ hiperplano del infinito relativo al hiperplano afín A en E.

$S \subseteq A$ subespacio afín, $X_S \equiv$ proyectivización de S relativa al hiperplano afín A de E.

Escaneado con CamScanner

$S_\infty \equiv$ variedad del infinito de S relativa al hiperplano afín A en E.

Corolario: A hiperplano afín de E. R y S subespacios afines de A:

i) Si $R \cap S \neq \emptyset$, $X_R \cap X_S = X_{R\cap S}$, en particular $(R\cap S)_\infty = R_\infty \cap S_\infty$

ii) Si $R \cap S = \emptyset$, $X_R \cap X_S = R_\infty \cap S_\infty$

iii) $X_R \vee X_S = X_{S \vee R}$, en particular $(R \vee S)_\infty = R_\infty \vee S_\infty$

Corolario: $S, T \subseteq A$ subespacios afines:

1) S paralelo a $T \Rightarrow S_\infty \subset T_\infty \subset A_\infty$

2) S y T paralelos $\Rightarrow S_\infty = T_\infty \subset A_\infty$

Corolario: Dos rectas R y S en A distintas son paralelas si y solo si sus proyectivizaciones X_S y X_R relativas a A se cortan en un punto del hiperplano del infinito A_∞.

Para calcular la proyectivización de un subespacio en términos de ecuaciones implícitas:
Sea E un esp. vectorial con $\dim(E) = n+1$ y $A \subseteq E$ un hiperplano afín. Sea R un sistema de referencia de A con origen $e_0 \in A$ y base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ en $\vec{A}$.

Proposición: $R = \{e_0, B\}$. S subespacio afín $(n-k)$ dimensional de A con ec. implícitas respecto de R:

$$(I) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = b_k \end{cases}$$

entonces las ecuaciones implícitas de X_S en coordenadas homogéneas respecto de $\tilde{B}$ son:

$$(I) = \begin{cases} -b_1 x_0 + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}X_n = 0 \\ \vdots \\ -b_k x_0 + a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

y las de S_∞ son: $(I)_\infty = \begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$

Nota: Para los ejercicios será conveniente tener siempre en mente la conexión entre el afín euclídeo $\mathbb{R}^n$, el proyectivo $\mathbb{P}^n$ y el hiperplano del infinito:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{e} \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n_\infty \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

$$\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n_\infty \xrightarrow{e^{-1}} \mathbb{R}^n \quad (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Proyectivización de aplicaciones afines.

Sean E_1, E_2 dos espacios vectoriales, con $\dim E_1 = n+1 \leq m+1 = \dim E_2$. Fijemos un hiperplano afín $A_j \subseteq E_j^*$, $j=1,2$ y sea $g: A_1 \to A_2$ una aplicación afín inyectiva. La aplicación g admite una única extensión lineal $\ell_g: E_1 \to E_2$ que además es un monomorfismo.

Definición: Sea $g: A_1 \to A_2$ una aplicación afín inyectiva. A la proyectividad $f: P(E_1) \to P(E_2)$ inducida por el monomorfismo $\ell_g: E_1 \to E_2$ la llamaremos proyectivización de g. ℓ_g es una aplicación lineal asociada a f_g.

Proposición: E_j un espacio vectorial. $A_j \subset (E_j)^*$ un hiperplano afín, R_j un sistema de referencia en A_j y $\tilde{B}_j$ su base de E_j asociada, $j=1,2$. Si $f: P(E_1) \to P(E_2)$ es una proyectividad entonces equivale:

i) $\operatorname{Im} f \not\subseteq (A_2)_\infty$ y $f((A_1)_\infty) \subseteq (A_2)_\infty$

ii) $f = f_g$ para alguna aplicación afín inyectiva $g: A_1 \to A_2$

iii) $M(f, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \mu \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$ para algún $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ con $rg(A) = n$ y $\mu \in \mathbb{R}^*$

Corolario: Igual que antes pero con f una homografía:

i) $f((A_1)_\infty) = (A_2)_\infty$

ii) $f = f_g$ para alguna afinidad $g: A_1 \to A_2$

iii) $M(f, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \mu \tilde{A}$, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ y $\mu \in \mathbb{R}^*$

Corolario: $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación afín inyectiva (con $n \leq m$) con expresión matricial en las referencias canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:

$$M(g, R_0^n, R_0^m) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$$

La proyectivización $f_g: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ viene representada en las bases canónicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{R}^{m+1}$ por la matriz:

$$M(f_g, B_0^{n+1}, B_0^{m+1}) = \mu \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \quad \mu \neq 0$$