Práctica 4. Funciones implícitas

Ejercicios propuestos

1. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z\,x^3 + w^2\,y^3 &= 1 \\ 2\,z\,w^3 + x\,y^2 &= 0 \end{aligned}$$

define dos funciones implícitas $z = z(x, y)$ y $w = w(x, y)$, diferenciables en un entorno de $(0, 1)$, verificando que $z(0, 1) = 0$ y $w(0, 1) = 1$. Probar también que la función $(x, y) \mapsto \big(z(x, y)\,,\, w(x, y)\big)$ es inyectiva en un entorno de $(0, 1)$.

2. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} t\,\cos x + x\,\cos y + y\,\cos t &= \pi \\ t^2 + x^2 + y^2 - t\,x &= \pi^2 \end{aligned}$$

define funciones implícitas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, derivables en un entorno del origen, con $x(0) = 0$ e $y(0) = \pi$. Calcular $x'(0)$ e $y'(0)$.

3. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^3\,u - y\,u^3 + x\,v^3 - y^3\,v &= 0 \\ \big(x^2 + y^2\big)\big(u^4 + v^4\big) + 2\,u\,v &= 0 \end{aligned}$$

define funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1, 0)$, con $u(1, 0) = 1$ y $v(1, 0) = -1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1, 0)$.

Ejercicio 1

1. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z\,x^3 + w^2 y^3 &= 1 \\ 2\,z\,w^3 + x\,y^2 &= 0 \end{aligned}$$

define dos funciones implícitas $z = z(x,y)$ y $w = w(x,y)$, diferenciables en un entorno de $(0,1)$, verificando que $z(0,1) = 0$ y $w(0,1) = 1$. Probar también que la función $(x,y) \mapsto \big(z(x,y)\,,\, w(x,y)\big)$ es inyectiva en un entorno de $(0,1)$.

Sea el abierto $\Omega = \mathbb{R}^4$. Definimos la función $F:(F_1,F_2):\Omega \to \mathbb{R}^2$, de forma que para cualesquiera x,y,z,w

$$F_1(x,y,z,w) = zx^3 + w^2y^3 = 1$$

$$F_2(x,y,z,w) = 2zw^3 + xy^2 = 0$$

Claramente, $F(0,1,0,1) = (0,0)$. Las funciones F_1 y F_2 son de clase C^1 en $\mathbb{R}^4$ dado que ambas son funciones polinómicas. Por lo tanto, $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$. En todo punto $p = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ se tiene:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(p) = 3x^2z \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(p) = 3y^2w^2 \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(p) = x^3 \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial w}(p) = 2wy^3$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(p) = y^2 \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) = 2yx \quad , \quad \frac{\partial F_3}{\partial z}(p) = 2w^3 \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial w}(p) = 6zw^2$$

Calculamos las derivadas parciales en $(0,1,0,1) = p_0$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(p_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(p_0) = 3 \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(p_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial w}(p_0) = 2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(p_0) = 1 \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(p_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_3}{\partial z}(p_0) = 2 \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial w}(p_0) = 0$$

La matriz jacobiana que nos interesa es la siguiente:

$$JF(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, el Teorema de la función implícita nos dice que el sistema del enunciado define funciones implícitas $z = z(x,y)$ y $w = w(x,y)$ que son diferenciables en un abierto $U \in \mathbb{R}^2$ con $z(0,1) = 0$ y $w(0,1) = 1$. Ahora, para todo $(x,y) \in U$, el sistema del enunciado nos dice que:

$$z(x,y)\,x^3 + w(x,y)^2\,y^3 - 1 = 0$$

$$2z(x,y)\,w(x,y)^3 + xy^2 = 0$$

Tenemos dos funciones idénticamente nulas en U, cuyas derivadas también deben ser idénticamente nulas:

En $X \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 z(x,y) + x^3 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 w(x,y) \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ 2\dfrac{\partial z}{\partial x} w(x,y)^3 + 6z(x,y) \cdot w(x,y)^2 \dfrac{\partial w}{\partial x} + y^2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ 2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}$$

En $Y \Rightarrow \begin{cases} x^3 \dfrac{\partial z}{\partial y} + 2y^3 w(x,y) \dfrac{\partial w}{\partial y} + 3y^2 \cdot w(x,y)^2 \\ 2\dfrac{\partial z}{\partial y} w(x,y)^3 + 6z(x,y)\,w(x,y)^2 \dfrac{\partial w}{\partial y} + 2yx = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial w}{\partial y} + 3 = 0 \\ 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

2. Probar que el sistema de ecuaciones

$$t\cos x + x\cos y + y\cos t = \pi$$
$$t^2 + x^2 + y^2 - tx = \pi^2$$

define funciones implícitas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, derivables en un entorno del origen, con $x(0) = 0$ e $y(0) = \pi$. Calcular $x'(0)$ e $y'(0)$.

Tomamos el abierto $\Omega = \mathbb{R}^3$. Definimos la función $F:(F_1,F_2):\Omega \to \mathbb{R}$ de forma que para cualquier punto $p=(x,y,t)$:

$$F_1(p) = t\cos x + x\cos y + y\cos t - \pi$$
$$F_2(p) = t^2 + x^2 + y^2 - tx - \pi^2$$

Claramente, $F(0,\pi,0) = (0,0)$. Por otra parte, tanto F_1 como F_2 son de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ dado que son una función polinómica por coseno (F_1) y una función polinómica (F_2). Por lo tanto, en todo punto $p=(x,y,t)\in\mathbb{R}^3$ se tiene:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(p) = -t\,\mathrm{sen}\,x + \cos y, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(p) = -x\,\mathrm{sen}\,y + \cos t, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t}(p) = \cos x - y\,\mathrm{sen}\,t$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(p) = 2x - t, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) = 2y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t}(p) = 2t - x$$

Calculamos ahora las derivadas parciales en el punto $(0,\pi,0) = p_0$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(p_0) = -1 \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(p_0) = 1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t}(p_0) = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(p_0) = 0 \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(p_0) = 2\pi \quad \frac{\partial F_2}{\partial t}(p_0) = 0$$

La matriz Jacobiana que nos interesa → $JF(p_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2\pi & 0 \end{pmatrix}$

Se verifica que $\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix} = 2\pi \neq 0$

Luego, por el Teorema de la función implícita, el sistema del enunciado define funciones implícitas $x = x(t)$, $y = y(t)$ diferenciables en un abierto $U \subset \mathbb{R}$; $x(0) = 0$, $y(0) = \pi$. Ahora, $\forall t \in U$ tenemos:

$$\begin{cases} t\cos x(t) + x(t)\cos y(t) + y(t)\cos t - \pi = 0 \\ t^2 + x(t)^2 + y(t)^2 - t\,x(t) - \pi^2 = 0 \end{cases}$$

Tenemos dos funciones idénticamente nulas cuya derivada tienen que ser también nula. Entonces se tiene:

$$\begin{cases} \cos x(t) - t\,\mathrm{sen}\,x(t)\cdot x'(t) + x'(t)\cos y(t) - x(t)\,y'(t)\,\mathrm{sen}\,y(t) + y'(t)\cos t - \mathrm{sen}\,t\,y(t) = 0 \\ 2t + 2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) - x(t) - t\,x'(t) = 0 \end{cases}$$

$t = 0$
$x(t) = 0$
$y(t) = \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x'(0) + y'(0) = 0 \Rightarrow x'(0) = 1 \\ 2\pi y'(0) = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \end{cases}$$

3. Probar que el sistema de ecuaciones

$$x^3 u - y u^3 + x v^3 - y^3 v = 0$$
$$(x^2 + y^2)(u^4 + v^4) + 2uv = 0$$

define funciones implícitas $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1,0)$, con $u(1,0) = 1$ y $v(1,0) = -1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1,0)$.

Sea el abierto $\Omega = \mathbb{R}^4$. Definimos la función $F:(F_1,F_2):\Omega \to \mathbb{R}^2$, de tal forma que para cualquier $x,y,u,v \in \mathbb{R}$:

$$F_1(x,y,u,v) = x^3u - yu^3 + xv^3 - y^3v$$
$$F_2(x,y,u,v) = (x^2+y^2)(u^4+v^4) + 2uv$$

Claramente, $F(1,0,1,-1) = (0,0)$. Las funciones F_1 y F_2 son de clase C^1 en $\mathbb{R}^4$ dado que se trata de funciones polinómicas, luego $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$. En todo punto $p = (x,y,u,v) \in \Omega$ se tiene:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(p) = 3x^2u + v^3, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(p) = u^3 - 3y^2v, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u}(p) = x^3 - 3u^2y, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v}(p) = 3v^2x - y^3$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(p) = 2x(u^4+v^4), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) = 2y^2(u^4+v^4), \quad \frac{\partial F_2}{\partial u}(p) = 4u^3(x^2+y^2) + 2v$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v}(p) = 4v^3(x^2+y^2) + 2u$$

Calculamos las derivadas parciales en $p_0 = (1,0,1,-1)$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(p_0) = 2 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(p_0) = -1 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial u}(p_0) = 1 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial v}(p_0) = +3$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(p_0) = 4 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(p_0) = 0 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial u}(p_0) = 2 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial v}(p_0) = -2$$

La matriz Jacobiana que nos interesa es:

$$JF(p_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dado que $\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow$ el teorema de la función implícita nos dice que el sistema del enunciado define funciones implícitas $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ diferenciables en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$; $u(1,0) = 1$ y $v(1,0) = -1$. Se tiene entonces $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x^3 u(x,y) - y u(x,y)^3 + x v(x,y)^3 - y^3 v(x,y) = 0 \\ (x^2+y^2)(u(x,y)^4 + v(x,y)^4) + 2u(x,y)v(x,y) = 0 \end{cases}$$

Tenemos dos funciones idénticamente nulas cuya derivadas también lo son. De esta forma tenemos $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

En x: $$\begin{cases} 3x^2 u(x,y) + x^3 u'(x,y) - 3y u(x,y)^2 \cdot u'(x,y) + v(x,y)^3 + 3x v(x,y)^2 \cdot v'(x,y) - y^3 v'(x,y) = 0 \\ 2x u(x,y)^4 + 4x^2 u(x,y)^3 \cdot u'(x,y) + 2x v(x,y)^4 + 4x^2 v(x,y)^3 + y^2 \cdot 4u(x,y)^3 + y^2 4v(x,y)^3 + 2u'(x,y)v(x,y) \\ + 2v'(x,y)u(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) = (1,0) \\ u(1,0) = 1 \\ v(1,0) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3 \overset{+u'(1,0)}{-1} + 3v'(1,0) = 0 \Rightarrow u'(1,0) + 3v'(1,0) = -2 \\ 2 + 4u'(1,0) + 2 - 4 - 2u'(1,0) - 2v'(1,0) \Rightarrow 2u'(1,0) - 2v'(1,0) = -4 \end{cases}$$

En x $\Rightarrow u'(1,0) = -2$, $v'(1,0) = 0$

En y: $$\begin{cases} x^3 u'(x,y) - u(x,y)^3 - 3y u(x,y)^2 \cdot u'(x,y) + 3v(x,y)^2 x v'(x,y) - 3y^2 v(x,y) - y^3 v'(x,y) = 0 \\ 4u(x,y)^3 x^2 \cdot u'(x,y) + 4x^2 v(x,y)^3 \cdot v'(x,y) + 2y u(x,y)^4 + 4y^2 u(x,y)^3 \cdot u'(x,y) + 2y v(x,y)^4 + 4y^2 v(x,y)^3 \cdot v'(x,y) \\ + 2u'(x,y)v(x,y) + 2u(x,y)v'(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(1,0) = 1 \\ v(1,0) = -1 \\ (x,y) = (1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u'(x,y) - 1 + 3v'(x,y) = 0 \\ 4u'(x,y) - 4v'(x,y) + 2v'(x,y) - 2u'(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} v'(x,y) = 1/4 \\ u'(x,y) = 1/4 \end{array}$$