Práctica 1. Continuidad

Ejercicios resueltos

1. *Estudiar la continuidad de los campos escalares definidos por*

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^2+y^4} \qquad h(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *, con* $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 0$.

Solución

Estudiamos en paralelo las tres funciones, pues de esta forma se van presentando todas las situaciones explicadas en el resumen teórico.

1.1. Continuidad salvo en el origen

El conjunto $\{(0,0)\}$, con un sólo punto, es cerrado, luego $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es abierto. Las restricciones de f, g, h a U son funciones racionales, luego son continuas. Por el carácter local de la continuidad, concluimos que las tres funciones son continuas en todo punto de U . Sólo queda estudiar su comportamiento en el origen.

1.2. Límites parciales en el origen

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene claramente

$$f(x,0) = g(x,0) = h(x,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(0,y) = g(0,y) = h(0,y) = 0$$

de donde deducimos los límites parciales en el origen de las tres funciones:

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$$

y lo mismo ocurre con g y h . Por tanto, 0 es el único posible límite en el origen de las tres funciones.

1.3.a. Límites direccionales en coordenadas cartesianas

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^*$ se tiene claramente:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x \to 0} \frac{\lambda\,x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

luego existen todos los límites direccionales de f en el origen, pero no coinciden. Por ejemplo, para $\lambda = 1$ el límite direccional es $1/2$, pero es 0 para $\lambda = 0$. Por tanto, f no tiene límite en el origen.

El estudio de la continuidad del campo escalar f está ya concluido: es continuo en todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y no tiene límite, luego no es continuo, en el origen.

Veamos lo que ocurre con g y h. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^*$ se tiene

$$g(x, \lambda x) = \frac{\lambda x}{1 + \lambda^4 x^2} \qquad \text{y} \qquad h(x, \lambda x) = \frac{\lambda^2 x}{1 + \lambda^4 x^2}$$

de donde deducimos que

$$\lim_{x \to 0} g(x, \lambda x) = \lim_{x \to 0} h(x, \lambda x) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

luego los límites direccionales no nos dan nueva información.

1.3.b. Límites radiales en coordenadas polares

Obviamente habríamos llegado a las mismas conclusiones, sólo que con diferente notación, pero veámoslo. Para $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene

$$f(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho^2}, \quad \text{luego} \quad \lim_{\rho \to 0} f(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

Existen todos los límites radiales de f en el origen, pero no coinciden. Por ejemplo, para $\theta = 0$ el límite radial es 0, mientras que para $\theta = \pi/4$ es $1/2$. Por tanto f no tiene límite en el origen.

En cuanto a g y h, para $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in \mathbb{R}$, habríamos escrito

$$g(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^4\theta} \quad \text{y} \quad h(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^4\theta}$$

para concluir que

$$\lim_{\rho \to 0} g(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = \lim_{\rho \to 0} h(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = 0$$

luego existen todos los límites radiales de g y h en el origen, y coinciden.

1.4. Una acotación

Para $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene claramente

$$|g(x, y)| = \frac{x^2\,|y|}{x^2 + y^4} \leq |y|$$

de donde se deduce directamente que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x, y) = 0$. Por tanto, el campo escalar g es continuo en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Nótese que el estudio de los límites radiales y direccionales de g en el origen no era necesario. La acotación anterior nos da directamente la existencia de límite.

Una acotación similar se podría haber adivinado, de forma más mecánica, usando los cálculos hechos para los límites radiales en coordenadas polares. Para $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in \mathbb{R}$, habríamos escrito:

$$\left| g(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) \right| = \frac{\rho\,|\operatorname{sen}\theta|\,\cos^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^4\theta} \leq \rho\,|\operatorname{sen}\theta| \leq \rho$$

Si estábamos pensando en acotar la expresión del primer miembro, de forma que desaparezca la variable θ, es casi imposible que no se nos ocurra el tipo de acotación que hemos hecho. Por tanto, tomando $h(\rho) = \rho$ para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\big| g(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) \big| \leq h(\rho) \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, \rho \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad \lim_{\rho \to 0} h(\rho) \,=\, 0$$

de donde deducimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \,=\, 0\,.$

finidos por

$h(x,y) \,=\, \dfrac{x\,y^2}{x^2 \,+\, y^4}$

$0) = h(0,0) = 0\,.$

…ento de acotación de h, análogo al que hemos usado con g, no daría resultado.

…n último cambio de variable

… definición de h observamos que el exponente de la variable y, tanto en el numerador como en el denominador, es el doble que el de la variable x. Ello sugiere claramente la posibilidad de igualarlos mediante la sustitución $x = y^2$, o lo que es lo mismo, haciendo el cambio de variable $(x,y) = (t^2, t)$ con $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $(x,y) \to (0,0)$ cuando $t \to 0$ y $(x,y) \neq (0,0)$ para $t \neq 0$. Puesto que

$$\lim_{t \to 0} h\big(\, t^2\,,\, t\,\big) \,=\, \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2\,t^4} \,=\, 1/2$$

la regla de cambio de variable nos dice que $1/2$ es el único posible límite de h en el origen. Pero sabemos desde el principio que dicho límite sólo podía ser 0, así que h no tiene límite, luego no es continua, en el origen.

Nótese que esta última conclusión se podía haber obtenido conociendo un sólo límite parcial de h en el origen, sin necesidad de estudiar los límites direccionales.

En resumen, el campo escalar g es continuo en todo punto de $\mathbb{R}^2$, mientras que f y h son continuos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pero no en el origen. ■

2. *Estudiar la continuidad de la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada, para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, por:*

$$f(x,y) \,=\, \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{(x+y)^2}\, \operatorname{sen}(x+y) & \text{si} \quad x + y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x + y = 0 \end{cases}$$

Solución

2.a. Tomando $U \,=\, \mathbb{R}^2 \setminus A$, donde $A \,=\, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y = 0\}$, comprobamos que f es continua en U. El conjunto A es cerrado como imagen inversa de $\{0\}$ por una función polinómica, que es continua, luego U es abierto. La restricción de f a U es el producto de una función racional por la función $(x,y) \mapsto \operatorname{sen}(x+y)$, que es composición de una función polinómica con la función seno. Por tanto, $f\,\big|_U$ es continua, como producto de dos funciones continuas. Por el carácter local de la continuidad, f es continua en todo punto de U.

2.b. Consideremos un punto $(a,-a) \in A$ que no sea el origen, es decir, con $a \neq 0$. Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ se tiene

$$f(x,-a) = \frac{(x^2+a^2)}{x-a} \, \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ tal que $\{x_n\} \to a$. Entonces,

$$\text{de} \quad \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \quad \text{deducimos que} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen}(x_n - a)}{x_n - a} = 1$$

Por otra parte, $\{x_n^2 + a^2\} \to 2a^2 \neq 0$ luego la sucesión $\{(x_n^2+a^2)/(x_n-a)\}$ diverge y deducimos que $\{f(x_n,-a)\}$ también diverge. Por tanto, no existe el primer límite parcial de f en el punto $(a,-a)$. Así pues, f no tiene límite, luego no es continua, en ningún punto de A distinto del origen.

2.c. Para estudiar el comportamiento de f en el origen, el razonamiento anterior sugiere que, si un punto (x,y) se acerca al origen, de forma que $x+y$ tienda a cero más rápido que x^2+y^2, podemos conseguir que $f(x,y)$ tienda a ser tan grande como queramos. Hacemos pues el cambio de variable $(x,y) = \varphi(t) = (t, -t+t^3)$ con $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $(x,y) \to (0,0)$ cuando $t \to 0$ y $(x,y) \neq (0,0)$ para $t \neq 0$. Además, para $t \neq 0$ tenemos $x+y = t^3 \neq 0$, con lo cual

$$f\big(\varphi(t)\big) = f(t, -t+t^3) = \frac{2-2t^2+t^4}{t} \, \frac{\operatorname{sen} t^3}{t^3}$$

Como $\lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t^3/t^3 = 1$, vemos que $f \circ \varphi$ diverge en 0. La regla de cambio de variable nos dice que f no tiene límite, luego no es continua, en el origen.

En resumen, f es continua en un punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si, y sólo si, $a+b \neq 0$. ■

3. *Estudiar la continuidad del campo escalar* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definido, para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y \log(1+x^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Solución

3.a. Comprobamos primero que f es continua en todo punto de $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vemos que la restricción de f a U es el producto de una función racional por la función $(x,y) \mapsto \log(1+x^2)$, que es composición de una función polinómica que toma valores en $\mathbb{R}^+$ con la función logaritmo, que es continua en $\mathbb{R}^+$. Por tanto $f\big|_U$ es continua, como producto de dos funciones continuas. Como U es abierto, el carácter local de la continuidad nos dice que f es continua en todo punto de U.

3.b. Para estudiar el comportamiento de f en el origen, empezamos recordando que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{x^2} = 1$, luego la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^* \quad \text{y} \quad \varphi(0) = 1$$

es continua en el origen. Por definición de φ se tiene $\log(1+x^2) = x^2\,\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, igualdad que es obvia para $x = 0$, pues entonces ambos miembros se anulan. Así pues, dicha igualdad es válida para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que nos permite escribir:

$$f(x,y) = \frac{y\,x^2}{x^2+y^2}\,\varphi(x) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \tag{1}$$

y ya sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x) = \varphi(0) = 1 \tag{2}$$

Por otra parte, se tiene claramente

$$\left|\, \frac{x^2\,y}{x^2+y^2} \,\right| \le |\,y\,| \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

de donde deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \tag{3}$$

En vista de (1), (2) y (3), concluimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, luego f es continua en el origen.

En resumen, el campo escalar f es continuo en todo punto de $\mathbb{R}^2$. ■

4. *Dado* $\alpha \in \mathbb{R}$, *estudiar la existencia de límite en el punto* $a = (0,1,2)$ *del campo escalar* $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *definido por:*

$$f(x,y,z) = \frac{x(y-1)(z-2)}{\big(x^2+(y-1)^2+(z-2)^2\big)^{\alpha}} \qquad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$$

Solución

Para $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ con $u^2+v^2+w^2 = 1$, tenemos claramente

$$f\big((0,1,2)+\rho(u,v,w)\big) = \rho^{3-2\alpha}\,uvw \qquad \forall\,\rho \in \mathbb{R}^+$$

lo que nos lleva a distinguir los tres casos que siguen.

4.a. Si $\alpha > 3/2$, tenemos que $\rho^{3-2\alpha} \to +\infty$ cuando $\rho \to 0$, luego no existe el límite radial de f en $(0,1,2)$ en ninguna dirección (u,v,w) que verifique $uvw \neq 0$, de modo que f no tiene límite en el punto a.

4.b. Si $\alpha = 3/2$, para toda dirección (u, v, w) se tiene

$$\lim_{\rho \to 0} f\big((0,1,2) + (u,v,w)\big) \, = \, uvw$$

luego existen todos los límites radiales de f en a, pero no coinciden, de modo que f tampoco tiene límite en el punto a.

4.c. Si $\alpha < 3/2$, para toda dirección (u, v, w) tenemos $|uvw| \leq 1$ y por tanto:

$$\big| \, f\big((0,1,2) + \rho(u,v,w)\big) \, \big| \, = \, \rho^{3-2\alpha} \, |uvw| \, \leq \, \rho^{3-2\alpha}$$

Puesto que $\lim_{\rho \to 0} \rho^{3-2\alpha} \, = \, 0$, concluimos que $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} f(x,y,z) \, = \, 0$.

En resumen, f tiene límite en el punto a si, y sólo si, $\alpha < 3/2$, en cuyo caso, dicho límite es 0. ■

5. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, estudiar la existencia de límite en el origen del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definido por:*

$$f(x,y) \, = \, \frac{x^\alpha \, y^\beta}{x^2 + y^2 - xy} \qquad \forall \, (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

Solución

No estamos en la situación estudiada en el resumen teórico: la función f no está definida en $\mathbb{R}^2$. Usaremos el mismo método, convenientemente adaptado. Por ejemplo, en este caso no tiene sentido considerar límites parciales ni direccionales de f en el origen y trabajaremos sólo con ciertos límites radiales.

Concretamente, como f está definida en el primer cuadrante, sólo tiene sentido estudiar la existencia de los limites radiales de f en el origen, en las direcciones del primer cuadrante, que son las de la forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $0 < \theta < \pi/2$. Para que f tenga límite en el origen, han de existir los límites radiales en todas las direcciones mencionadas, y todos ellos han de coincidir. Pues bien, para $\theta \in]0, \pi/2[$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$, como $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, se tiene:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \, = \, \rho^{\alpha+\beta-2} \, \frac{\cos^\alpha\theta \, \operatorname{sen}^\beta\theta}{1 - \cos\theta \, \operatorname{sen}\theta} \, \neq \, 0$$

lo que nos lleva a distinguir los tres casos siguientes.

5.a. Si $\alpha + \beta < 2$, tenemos $\rho^{\alpha+\beta-2} \to +\infty$ cuando $\rho \to 0$, luego no existe ninguno de los límites radiales considerados y f no tiene límite en el origen.

5.b. Si $\alpha + \beta = 2$ existen todos los límites radiales considerados, pero no coinciden:

$$\lim_{\rho \to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \, = \, \frac{\cos^\alpha\theta \, \operatorname{sen}^\beta\theta}{1 - \cos\theta \, \operatorname{sen}\theta} \qquad \forall \, \theta \in]0, \pi/2[$$

y obviamente, la función de θ que aparece en el segundo miembro no es constante.

5.c. Supongamos finalmente que $\alpha+\beta>2$. Para $\theta\in]0,\pi/2[$ y $\rho\in\mathbb{R}^+$ se tiene

$$\left|\, f(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\right| \,\le\, \rho^{\alpha+\beta-2}\,\frac{1}{1-(1/2)\,\mathrm{sen}(2\theta)} \,\le\, 2\,\rho^{\alpha+\beta-2}$$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2}=0$ concluimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Esta conclusión se puede obtener con un razonamiento análogo al usado en el resumen teórico, pero también se puede razonar como sigue.

Para $x,y\in\mathbb{R}^+$, escribimos $(x,y)=(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ donde $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}\in\mathbb{R}^+$, y hemos tomado $\theta=\arccos(x/\rho)\in]0,\pi/2[$. Deducimos que:

$$\left|\, f(x,y)\,\right| \,=\, \left|\, f(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\right| \,\le\, 2\,\rho^{\alpha+\beta-2} \,=\, \left(\,x^2+y^2\,\right)^{(\alpha+\beta-2)/2}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\,x^2+y^2\,\right)^{(\alpha+\beta-2)/2} \,=\, 0$, deducimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \,=\, 0.$ ■

6. *Estudiar la continuidad del campo escalar* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definido por:*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y)\,\mathrm{sen}(1/x)\,\mathrm{sen}(1/y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^* \qquad \text{y}\\ f(x,0) &= f(0,y) \,=\, 0 \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Solución

6.a. Sean $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, xy=0\}$ y $U=\mathbb{R}^2\setminus A$. La restricción de f a U es continua por ser el producto de tres funciones continuas, una función polinómica y dos funciones que se obtienen componiendo una función racional con la función seno. Además A es cerrado por ser la imagen inversa de $\{0\}$ ç por una función polinómica. Por tanto U es abierto y podemos aplicar el carácter local de la continuidad para concluir que f es continua en todo punto de U.

6.b. Consideremos ahora un punto de la forma $(a,0)$ con $a\in\mathbb{R}^*$, y supongamos primeramente que $1/a$ no es múltiplo entero de π, es decir, $1/a\neq k\pi$ para todo $k\in\mathbb{Z}$, con lo que $\mathrm{sen}(1/a)\neq 0$. Para el segundo límite parcial de f en $(a,0)$ tenemos

$$f(a,y) \,=\, (a+y)\,\mathrm{sen}(1/a)\,\mathrm{sen}(1/y) \qquad \forall\, y\in\mathbb{R}^*$$

Consideramos entonces la sucesión $\{y_n\} = \big\{2/\big((2n+1)\pi\big)\big\}$, que verifica $\{y_n\}\to 0$ con $y_n\neq 0$ y $\mathrm{sen}(1/y_n)=(-1)^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como consecuencia obtenemos que

$$\{f(a,y_{2n})\}\to a\ \mathrm{sen}(1/a) \qquad \text{y} \qquad \{f(a,y_{2n-1})\}\to -a\ \mathrm{sen}(1/a)$$

Puesto que $a\ \mathrm{sen}(1/a)\neq 0$, concluimos que la sucesión $\{f(a,y_n)\}$ no es convergente. Esto prueba que no existe el segundo límite parcial de f en el punto $(a,0)$. Por tanto, f no tiene límite, luego no es continua, en dicho punto.

6.c. Como f es simétrica, es decir, $f(x,y)=f(y,x)$ para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$, tendremos el mismo resultado en los puntos de la forma $(0,b)$ con $b\in\mathbb{R}^*$ y $1/b\neq k\pi$ para todo $k\in\mathbb{Z}$, la función f tampoco es continua en estos puntos. De hecho, en ninguno de esos puntos existe el primer límite parcial de f.

6.d. Consideremos un punto $(a,0) \in \mathbb{R}^2$ donde $a \in \mathbb{R}^*$ y $1/a = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $r = |a| > 0$, fijamos $(x,y) \in B\big((a,0),r\big) \setminus \{(a,0)\}$, con lo que $x \neq 0$. Si $y \in \mathbb{R}^*$ tenemos

$$|f(x,y)| = |x+y|\,|\operatorname{sen}(1/x)|\,|\operatorname{sen}(1/y)| \leq |x+y|\,|\operatorname{sen}(1/x)|$$

desigualdad que es evidente cuando $y = 0$, luego es válida para todo $(x,y) \in B\big((a,0),r\big)$. Como quiera que

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} (x+y)\,\operatorname{sen}(1/x) = a\,\operatorname{sen}(1/a) = 0$$

deducimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0 = f(a,0)$, luego f es continua en $(a,0)$.

6.e. De nuevo por simetría, obtenemos que f es continua en todos los puntos de la forma $\big(0, 1/(k\pi)\big)$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

6.f. Estudiemos finalmente la continuidad de f en el origen. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $xy \neq 0$ tenemos claramente

$$\big|\,f(x,y)\,\big| = |x+y|\;|\operatorname{sen}(1/x)\,|\;|\operatorname{sen}(1/y)\,| \leq |x+y|$$

pero esta desigualdad es evidente cuando $xy = 0$ pues entonces $f(x,y) = 0$. Por tanto, la desigualdad es válida para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De ella se deduce claramente que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, luego f es continua en el origen.

En resumen, el campo escalar f es continuo en un punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si, y sólo si, se cumple alguna de cuatro condiciones siguientes:

$$a\,b \neq 0\,; \qquad b = 0 \;\text{ y }\; k\pi a = 1 \;\text{ con }\; k \in \mathbb{Z}\,;$$
$$a = 0 \;\text{ y }\; k\pi b = 1 \;\text{ con }\; k \in \mathbb{Z}\,; \qquad a = b = 0$$

■ ■ ■