Práctica 2. Diferenciabilidad

Ejercicios resueltos

1. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, de los campos escalares $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos de la siguiente forma, donde $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

(a)
$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \quad \forall (x,y) \in U, \qquad f(0,0) = 0$$

(b)
$$g(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \quad \forall (x,y) \in U, \qquad g(0,0) = 0$$

(c)
$$h(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad \forall (x,y) \in U, \qquad h(0,0) = 0$$

Solución

(a.1). Tenemos claramente que $f|_U \in C^1(U)$, por tratarse de una función racional. El conjunto $\{(0,0)\}$, con un solo punto, es cerrado, así que U es abierto. Por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, vemos que f es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U. De hecho,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2 + y^4) - 2x^3y}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2xy^5}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall (x,y) \in U \qquad y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2 + y^4) - 4x^2y^4}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{x^4 - 3x^2y^4}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall (x,y) \in U$$

(a.2). Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ es claro que f(x, 0) = f(0, y) = 0, luego f es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \,=\, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \,=\, 0 \qquad \text{ es decir}, \quad \nabla f(0,0) \,=\, (0,0)$$

(a.3). Con el fin de estudiar la diferenciabilidad de f en el origen, consideramos la función $\varphi: U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x,y) \in U$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\varphi(x,x) = \frac{x^3}{x^3 + x^5} = \frac{1}{1 + x^2}$$

De donde $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x,x)=1\neq 0$. Como uno de los límites radiales de φ en el origen no es 0, no se cumple que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y)=0$, luego f no es diferenciable en el origen.

1

Puesto que f es parcialmente derivable en \mathbb{R}^2 , si una de sus derivadas parciales fuese continua en el origen, entonces f sería diferenciable en el origen. Por tanto, ninguna de las dos derivadas parciales de f es continua en el origen.

(a.4). Observamos finalmente que f es continua en el origen, como vimos ya en la práctica 1. De hecho, para $(x,y) \in U$, es obvio que $x^2 \le x^2 + y^4$, luego

$$|f(x,y)| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^4} \le |y| \qquad \forall (x,y) \in U$$

de donde se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

En resumen, f es continua y parcialmente derivable en \mathbb{R}^2 , es diferenciable en U pero no en el origen. Ambas derivadas parciales de f son continuas en U, pero ninguna de ellas es continua en el origen.

(b.1). El mismo razonamiento usado para f prueba que g es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U. Esta vez,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^4)-2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2} \quad \forall (x,y) \in U \qquad y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y(x^2+y^4)-4x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} \quad \forall (x,y) \in U$$

(b.2). Puesto que g(x,0)=g(0,y)=0 para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$, vemos también que g es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

(b.3). Para $(x,y) \in U$, usando que $x^2 \le x^2 + y^4$, y también $|x^2 - y^4| \le x^2 + y^4$, obtenemos que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right| \le 2 |y| \frac{x^2 |x^2 - y^4|}{(x^2 + y^4)^2} \le 2 |y|$$

Deducimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$, luego $\frac{\partial g}{\partial y}$ es continua en el origen.

Como g es parcialmente derivable en \mathbb{R}^2 , y su segunda derivada parcial es continua en el origen, deducimos que f es diferenciable, luego continua, en el origen.

(b.4). Estudiemos la continuidad en el origen de la primera derivada parcial de g. Para ello usamos el cambio de variable $(x,y)=(t^2,t)\in\mathbb{R}^2$ con $t\in\mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $(t^2,t)\neq (0,0)$ para $t\neq 0$, y que $(t^2,t)\to (0,0)$ cuando $t\to 0$. Vemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^2,t) \,=\, \frac{2\,t^{\,2}\,t^{\,6}}{(2\,t^{\,4})^2} \,=\, \frac{1}{2} \qquad \forall \, t \in \mathbb{R}^*$$

Si fuese $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$, el cambio de variable nos daría $\lim_{t\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(t^2,t) = 0$, lo cual es falso, como acabamos de ver. Por tanto $\partial g/\partial x$ no es continua en el origen.

En resumen g es diferenciable, luego también continua, en todo el plano. Su segunda derivada parcial es continua en \mathbb{R}^2 , mientras que la primera es continua en U, pero no en el origen.

(c.1). El mismo razonamiento usado para f y g prueba que h es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U. Ahora tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \in U$$

y, por simetría,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \in U$$

(c.2) Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, de nuevo tenemos h(x, 0) = h(0, y) = 0, luego h es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$$

(c.2). Veremos que las derivadas parciales de h son continuas en el origen. Basta trabajar con una de ellas, puesto que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(y,x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Para todo $(x,y) \in U$, se tiene $y^4 \le (x^2 + y^2)^2$ luego

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \right| = 2 |x| \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} \le 2 |x| \qquad \forall (x,y) \in U$$

de donde claramente deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$$

es decir, $\frac{\partial h}{\partial x}$ es continua en el origen y, como ya se ha dicho, igual le ocurre a $\frac{\partial h}{\partial y}$. La condición suficiente para la diferenciabilidad nos dice que h es diferenciable en el origen.

En resumen, tenemos $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

2. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^3 (y-1)^2}{x^2 + |y-1|} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}, \qquad f(0,1) = 0$$

Solución

(a). Sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=1\}$, que es un conjunto cerrado, por ser la imagen inversa de $\{1\}$ por la función continua $(x,y)\mapsto y$, de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} , con lo que el conjunto $U=\mathbb{R}^2\setminus A$ es abierto. Vemos que $f\big|_U\in C^1(U)$, por ser el cociente de dos funciones de clase C^1 en U. Concretamente, el numerador es una función polinómica y el denominador es la suma de otra función polinómica con la función $(x,y)\mapsto |y-1|$, de U en \mathbb{R} , que es composición de otra función polinómica, que toma valores en \mathbb{R}^* , con el valor absoluto, una función de clase C^1 en \mathbb{R}^* . Como U es abierto, por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, deducimos que f es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U. Concretamente, para todo $(x,y)\in U$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(y-1)^2(x^2+|y-1|)-2x^4(y-1)^2}{(x^2+|y-1|)^2}$$

$$= \frac{x^2(y-1)^2(x^2+3|y-1|)}{(x^2+|y-1|)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3(y-1)(x^2+|y-1|)-x^3(y-1)^2(|y-1|/(y-1))}{(x^2+|y-1|)^2}$$

$$= \frac{x^3(y-1)(2x^2+|y-1|)}{(x^2+|y-1|)^2}$$

(b). Fijemos ahora un punto del conjunto A, que será de la forma (a,1) con $a \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos f(x,1) = f(a,1) = 0 de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,1) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,1) - f(a,1)}{x - a} = 0$$

Por otra parte, para $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se tiene $f(a,y) = \frac{a^3 (y-1)^2}{a^2 + |y-1|}$ de donde, si $a \neq 0$, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,1) \, = \, \lim_{y \to 1} \frac{f(a,y) - f(a,1)}{y-1} \, = \, \lim_{y \to 1} \frac{a^{\,3}\,(y-1)}{a^{\,2} \, + \, |\, y-1\,|} \, = \, 0$$

igualdad también válida para a=0, ya que f(0,y)=f(0,1)=0 para todo $y\in\mathbb{R}$. Por tanto, f es parcialmente derivable en todo punto de \mathbb{R}^2 y en los puntos de A se tiene $\nabla f(a,1)=(0,0)$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

(c). Veamos que las derivadas parciales de f son continuas en todo punto $(a,1) \in A$ con $a \in \mathbb{R}$. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, para la primera derivada parcial podemos usar, por ejemplo, las desigualdades $x^2 \le x^2 + |y-1|$ y $x^2 + 3|y-1| \le 3(x^2 + |y-1|)$. Suponiendo $y \ne 1$, tenemos:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \frac{x^2 (y-1)^2 (x^2 + 3|y-1|)}{(x^2 + |y-1|)^2} \le 3 (y-1)^2$$

desigualdad que es evidente cuando y=1, luego es válida para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De ella se deduce claramente que $\lim_{(x,y)\to(a,1)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,1)$, luego $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en el punto (a,1).

Para la otra derivada parcial, usamos que $2x^2+|y-1|\leq 2\left(x^2+|y-1|\right)$ y, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, obtenemos

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \frac{x^3 (y-1) (2x^2 + |y-1|)}{(x^2 + |y-1|)^2} \le 2|x| |y-1|$$

de donde $\lim_{(x,y)\to(a,1)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,1)$, así que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en (a,1).

En resumen, hemos probado que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

3. Probar que el campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^6 (x^2 + y^2)}{(y - x^2)^2 + x^6} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

es diferenciable en \mathbb{R}^2 .

Solución.

- (a). Considerando el abierto $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ es obvio que $f\mid_U\in C^1(U)$, pues se trata de una función racional. El carácter local de la diferenciabilidad nos dice que f es diferenciable en todo punto de U.
- **(b).** Observamos que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene f(x, 0) = f(0, y) = 0, luego f es parcialmente derivable en el origen con $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

A poco que se piense, el cálculo de las derivadas parciales de f en puntos de U es laborioso, luego el estudio de su continuidad en el origen no parece fácil. Aprovechando que sólo interesa la diferenciabilidad de f en el origen, la abordamos directamente.

Consideramos entonces la función $\varphi:U\to\mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0) | (x,y))}{\| (x,y) \|}$$

$$= \frac{x^6 (x^2 + y^2)}{((y-x^2)^2 + x^6) \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^6 \sqrt{x^2 + y^2}}{(y-x^2)^2 + x^6} \quad \forall x \in U$$

Usando que $x^6 \le (y-x^2)^2 + x^6$ obtenemos que

$$0 \le \varphi(x,y) \le \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

de donde se deduce evidentemente que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y)=0$, luego f es diferenciable en el origen y, en resumen, es diferenciable en \mathbb{R}^2 , como se quería.