GEOMETRÍA III
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Primer Control (18/11/2021)

1. Consideremos un espacio afín real $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$ con $\dim \mathcal{A} = 3$, dos puntos distintos $p, q \in \mathcal{A}$ y un plano T en $\mathcal{A}$. Probar que los dos enunciados siguientes son equivalentes.

   (a) El punto medio $m_{pq} \in T$.

   (b) Existe una única simetría afín $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $f(p) = q$ y $f|_T = \mathrm{Id}_T$.

   Encontrar la expresión matricial en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$ de la única simetría afín $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que fija todos los puntos del plano $T = (0,-1,0) + L\{(1,0,0),(0,1,1)\}$ y satisface $f(-1,1,0) = (3,-1,2)$. Dada la recta S con ecuaciones implícitas

$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 2x_1 + x_2 + 1 = 0$$

   en $\mathcal{R}_0$, calcular además las ecuaciones implícitas de $f(S)$.

2. *Consideremos la transformación* $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por la expresión matricial

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 4 & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -2 & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right).$$

   Probar que f es un movimiento rígido del espacio afín euclidiano usual $\mathbb{R}^3$ y calcular sus elementos geométricos.

3. Sea $T = \{a, b, c\}$ un triángulo en un plano euclidiano $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle\, , \rangle)$ con ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ en los vértices a, b, c respectivamente. Probar que son equivalentes:

   Trivial a) $d(a,b) = d(a,c)$.

   b) $\hat{B} = \hat{C}$.

   c) La mediatriz R_a y la mediana M_a del vértice a son coincidentes.

   Como consecuencia, probar que si $d(a,b) = d(a,c) = d(b,c)$ (esto es, T es equilátero) entonces el vértice a y el baricentro B de T determinan unívocamente los vertices b y c.

Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

GEOMETRÍA III

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Final Convocatoria Ordinaria (19/01/2022, Aula G-06)

1. Denotemos por $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ los espacios afines de los polinomios reales en la variable x de grado ≤ 2 y las matrices simétricas reales de orden 2, respectivamente.

   Dados los subespacios afines
   $$S = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \colon p'(1) = 1\} \quad \text{y} \quad T = \{A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \colon \text{Traza}(A) = -1\},$$
   probar que existe una afinidad $f \colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tal que $f(S) = T$ y $f(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Si $\mathcal{R}_0 = \{0, \{1, x, x^2\}\}$ y $\mathcal{R}_0' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$ denotan las correspondientes referencias usuales de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$y $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, determinar

   a) $M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0')$ y

   b) las ecuaciones implícitas de $f^{-1}(R)$ para $R = \{A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \colon \text{Traza}(A - \mathrm{I}_2) = 0\}$.

2. En un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \overrightarrow{\ }, \langle\, ,\, \rangle)$ con $\dim \mathcal{A} = 3$ consideramos dos puntos p_1, p_2 y una recta R tales que $\mathrm{d}(p_1, R) = \mathrm{d}(p_2, R) > 0$. Probar que existe un único movimiento rígido directo $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $f(R) = R$ y $f(p_1) = p_2$, describiendo su naturaleza y elementos geométricos.

   Como consecuencia, probar que dados los puntos $p_1 = (0, 0, -2)$, $p_2 = (-1, 1, 1)$ y la recta
   $$R = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 - x_1 - 1 = x_3 - x_2 + 1 = 0\}$$
   del espacio afín euclidiano $\mathbb{R}^3$, existe un único movimiento helocoidal $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(R) = R$ y $f(p_1) = p_2$. Calcular $M(f, \mathcal{R}_0)$, donde $\mathcal{R}_0$ es la referencia canónica o usual de $\mathbb{R}^3$.

3. Consideremos la recta $R = (-1, 0) \vee (0, 1)$ en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, y definamos para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el lugar de puntos $C_\lambda = \{p \in \mathbb{R}^2 \colon \mathrm{d}(p, R) = \mathrm{d}(p, (\lambda, -\lambda))\}$, donde $\mathrm{d}(\cdot\, , \cdot)$ indica distancia euclídea.

   a) Probar que C_λ es una cónica para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y clasificarla afínmente.

   b) Encontrar una referencia de $\mathbb{R}^2$ en la que la cónica C_1 (para $\lambda = 1$) adopta su forma reducida o canónica.

4. Si E_1, E_2 son espacios vectoriales reales de dimensión 3 y $X_1, X_2, X_3 \subset P(E_1)$, $Y_1, Y_2, Y_3 \subset P(E_2)$ son tripletas de rectas proyectivas *distintas dos a dos* concurrentes, esto es, tales que
   $$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{p\}, \quad Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = \{q\}$$
   para ciertos puntos $p \in P(E_1), q \in P(E_2)$, probar que existe una homografía $f \colon P(E_1) \to P(E_2)$ tal que $f(X_j) = Y_j$, $j = 1, 2, 3$.

   Como aplicación, dadas las rectas en $\mathbb{R}^2$
   $$R_1 = \{(x_1, x_2) \colon x_1 = 0\}, \quad R_2 = \{(x_1, x_2) \colon x_2 = 1\}, \quad R_3 = \{(x_1, x_2) \colon x_1 + x_2 = 1\},$$
   $$S_1 = \{(x_1, x_2) \colon x_1 - x_2 = 0\}, \quad S_2 = \{(x_1, x_2) \colon x_1 - x_2 = 1\}, \quad S_3 = \{(x_1, x_2) \colon x_1 - x_2 = -1\},$$
   probar que existe una homografía $f \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $f(X_{R_j}) = X_{S_j}$, $j = 1, 2, 3$. Calcular $M(f, B_0)$, donde B_0 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $X_R \subseteq \mathbb{P}^2$ representa la proyectivización de R para todo subespacio afín $R \subseteq \mathbb{R}^2$.

Toda la asignatura (duración 3 horas): Preguntas 1 ó 2 (a elegir), 3 y 4
Segundo Parcial (duración 2 horas): Preguntas 3,4
Todas las preguntas tienen el mismo valor