Ejercicio 9 Tema 1 LMD

Quintín Mesa Romero

April 2022

Ejercicio 9. Es cierto que de un número n_0 en adelante se tiene que $100^n < n!$. Encuéntrelo y demuestre por inducción lo dicho a partir de dicho número.

En primer lugar, vamos a hallar el número natural n_0 a partir del cual se tiene la desigualdad del enunciado. Dicho natural podría hallarse mediante un programa informático, en un lenguaje de programación cualquiera. El problema radica en que el tiempo de ejecución de dicho programa es demasiado elevado y, por tanto, no es la forma más eficiente de hallarlo. Por consiguiente, emplearemos varias técnicas matemáticas que ayudaran a encontrar el número que estamos buscando.

De forma manual podríamos ir probando la desigualdad para distintos valores de n. Pero a partir de 69, ni la calculadora es capaz de calcular el factorial. Por lo tanto, hemos de recurrir a alguna herramienta que nos permita manejar el factorial de forma cómoda y que no nos de problemas. Haremos uso de la fórmula de Stirling para la aproximación de factoriales grandes. La aproximación se expresa como: $lnn! \approx nln - n$. La fórmula de Stirling viende dada por:

$$lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n} = 1$$

la cual se reescribe a menudo como: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n$.

Pues bien, usando esta aproximación del factorial, vamos a empezar desarrollando la desigualdad hasta llegar a una desigualdad con la que poder trabajar de forma más cómoda y poder así hallar el natural que queremos:

$$100^n < n! \iff \frac{100^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n} < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n} \approx 1$$

$$\iff \frac{100^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n} < 1 \iff 100^n < \sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n$$

$$\iff nln(100) < \frac{1}{2}\cdot ln(2\pi n) + n\cdot(ln(n) - 1)$$

$$\iff 2n\cdot ln(10) - \frac{1}{2}\cdot ln(2\pi n) - n\cdot ln(n) < -n$$

$$\iff n < n\cdot ln(n) + \frac{1}{2}\cdot ln(2\pi n) - 2n\cdot ln(10) \tag{1}$$

Acabamos de obtener una desigualdad equivalente a la inicial, en la que no nos aparece la función factorial y con la cual resulta mucho más cómodo y factible hallar el número que perseguimos. Para ello, solo hace falta ir probando valores de n hasta que encontremos uno a partir del cual se verifique la desigualdad. Si verifica (1), verificará el desigualdad del problema.Veamos:

- Para $n = 200 \Rightarrow 200 > 142.19$, luego no verifica (1).

- Para $n = 250 \Rightarrow 250 > 232.75$, luego no verifica (1).
- Para $n = 270 \Rightarrow 270 < 271.89$, verifica (1).
- Para $n = 269 \Rightarrow 269 < 269.9028$, verifica (1).
- Para $n = 268 \Rightarrow 268 > 267.91$, no verifica (1).

Esto nos dice, claramente, que la desigualdad se verifica a partir de $n = 269$. Por consiguiente, podemos afirmar que el n_0 que buscamos no es otro que el 269.
Una vez hecho esto, demostremos por inducción que se tiene la desigualdad enunciada.

El razonamiento es por medio del principio de inducción matemática, razonando sobre $n \geq 269$ según el predicado $P(n)$ del tenor:

$$100^n < n!$$

Así pues:

- **Caso base:** Para $n = 269$, se tiene lo siguiente:

  $$269 < 269.9028 \iff 100^{269} < 269!$$

  por la equivalencia entre (1) y la desigualdad del predicado.
- **Hipótesis de inducción:** Supongamos como hipótesis de inducción que n es un natural, mayor o igual que 269, y que $P(n)$ es cierta, es decir que $100^n < n!$.
- **Paso de inducción:** En el paso de inducción comprobaremos que $P(n+1)$ es cierta. En efecto:

  $$100^{n+1} < (n+1)! \iff 100^n \cdot 100 < (n+1) \cdot n! \tag{2}$$

  Como $100 < (n+1) \forall n \geq 100 < 269$, aplicando la hipótesis de inducción y que el producto de números positivos conserva la desigualdad, se tiene que (2) es cierta para todo $n \geq 269$. Con lo cual $P(n+1)$ es cierta, luego, por el principio de inducción matemática tenemos que para todo número natural n mayor o igual que 269, $P(n)$ es cierta, como queríamos demostrar.