Ejercicios Teóricos

1.- Prueba que todo espacio métrico compacto es completo.

Solución

2.- Sea $C \subset R^2$ un abierto y convexo y $f: C \to R$ una aplicación diferenciable con derivadas parciales acotadas. Prueba que f es lipschitziana. ¿Qué ocurre lo mismo en R^N?

Solución

3.- Sea E un subconjunto no vacío de R^N (dotado de la norma usual). Prueba que equivalen las siguientes condiciones:

i) E es compacto.
ii) Todo campo escalar continuo $f: E \to R$ verifica que el conjunto $f(E)$ tiene mínimo.

4.- Sea $C \subset R^2$ cerrado no acotado, $f: C \to R$ continua tal que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty, esto\ es, \forall M \in R\ \exists k \in R: x \in C, \|x\| \geq k \Longrightarrow f(x) \geq M$$

Prueba que f tiene un mínimo absoluto.

5.- Sea X un espacio normado. Probad que para cualesquiera $x, y \in X - \{0\}$ se tiene:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{máx\{\|x\|, \|y\|\}}$$

6.- Consideramos al aplicación $(/): C([0,1])xC([0,1]) \to R$ definida por

$$(f/g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Prueba que la aplicación anterior es un producto escalar en $C([0,1])$, donde $C([0,1])$ es el espacio de funciones reales continuas en $[0,1]$.

Solución

7.- Sea (E,d) un espacio métrico. Se define $\rho: ExE \to R$ de la forma

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad x,y \in E$$

Comprueba que ρ es una distancia en E. Prueba además que para que ambas distancias coinciden las sucesiones convergentes.

Solución

8.- .- Prueba que si (E,d) un espacio métrico y $\emptyset \neq A \subset E$, entonces la aplicación $d_A: E \to R$ dada por $d_A(x) = d(x,A)$ es continua.

Indicación: Prueba que $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y) \;\; \forall x,y \in E$.

Solución

9.- Sean A y B conjuntos no vacios de un espacio normado X, se define

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Prueba que:

(a) Si A es abierto entonces $A+B$ también es abierto.

(b) Si A es cerrado y B es compacto entonces $A+B$ es cerrado.

Solución

10.- Sea R^N con la norma usual- Probar las siguientes afirmaciones:

a) Dado un conjunto $C \in R^N$, C es compacto si y solo si, cualquier función continua $f: C \to R$ está acotada.

b) Una sucesión $\{x_n\} \in R^N$ converge a $x \in R^N$, si y solo si, se verifican las dos condiciones siguientes: $\|x_n\| \to \|x\|$ y $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ para todo $y \in R^N$.

Solución

11.- Sea Ω subconjunto abierto de un espacio normado X y $f,g: \Omega \to R$ funciones diferenciables en un punto $a \in \Omega$.Suponiendo que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, probar que la función $h: \Omega \to R$ definida por $h(x) = {f(x)}/{g(x)}$ $x \in \Omega$ es diferenciable en el punto a.

12.- Sea Ω subconjunto abierto de un espacio normado X y $f, g: \Omega \to R$ funciones diferenciables en un punto $a \in \Omega$. Probad que la función $h: \Omega \to R$ definida por $h(x) = f(x)g(x)$ $x \in \Omega$ es diferenciable en el punto a.

Solución

Ejercicios De Topología

1.- Calcular el interior, cierre, frontera y acumulación de los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^m : n, m \in N \right\} \subset R$$

$$B = \{(x, y) \in R^2 : x \in R \setminus Q \;\; y \in Q\} \subset R^2$$

$$C = \{(x, y, z) \in R^3 : x \in [0,1] \cap Q \;\; y \in (0,1), z \in]0,1]\} \subset R^3$$

2.- Para los siguientes subconjuntos, describir la adherencia, el interior, la frontera y los puntos de acumulación:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\} \qquad B = N \qquad C = Q \quad E = R^2 \quad F = \bar{B}(a, r) \; de \; R^N$$

Solución

3.- En los siguientes casos, describe el interior, la adherencia y el conjunto de los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{e^n}, 2^n \right) : n \in N \right\} \; de \; R^2$$

$$B = \{(x, -2) : x \in R\} \cup \{(x, y) \in R^2 : y > x^2\}$$

Ejercicios De V/F

1.- Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Existe un subconjunto abierto de R^2 que es completo (para la distancia euclídea).

(b) La restricción a un conjunto acotado de un campo escalar de C^1 definido en R^3 es una función lipschitziana.

(c) Consideramos los campos escalares u, v y f definidos en R^2 por

$$u(x,y) = e^x + y \quad v(x,y) = arctg(x^2 + y^2) \quad f(x,y) = \sqrt{1 + u^2 + v^4}$$

Entonces se verifica que

$$\frac{\delta f}{\delta x}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(d) Toda función continua entre espacios métricos verifica que la imagen inversa de un conjunto compacto es un conjunto compacto.

2.- Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Toda función continua conserva abiertos y acotados.

(b) Sea $C \subset R^3$ no vacío, $f(x) = d(x, C)\ \forall x \in R^3$, ¿$f$ es uniformemente continua?

(c) Sean $f, g: R^2 \to R$ diferenciables, $h(x,y) = f(x,y)g(x,y)$. Entonces h es diferenciable y además

$$\nabla h(x,y) = g(x,y)\nabla f(x,y) + f(x,y)\nabla g(x,y) \quad \forall (x,y) \in R^2$$

(d) El polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 2 + 2(x+y) + 2x^2 + 2xy + y^2 \quad \forall (x,y) \in R^2 \ \ siendo\ f(x,y) = x^2 + 2e^{x+y}$$

3.- Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Todo espacio métrico compacto es completo.

(b) Todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.

(c) Todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico es compacto.

4.- Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Toda función continua entre espacios métricos verifica que la imagen inversa de un conjunto cerrado y acotado es un conjunto cerrado y acotado.

(b) Sea f un campo escalar de C^1 en una bola abierta centrada en 0 y de radio 2. ¿Es una función lipschitziana en la bola cerrada unidad?

(c) Consideramos los campos escalares u, v y f definidos en R^2 por

$$u(x,y) = e^x + y \quad v(x,y) = arctg(x^2 + y^2) \quad f(x,y) = \sqrt{1 + u^2 + v^4}$$

Entonces se verifica que

$$\frac{\delta f}{\delta x}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(d) Sea $A \subset R^n$ un abierto $f: A \to R^n$ un campo vectorial de $C^1(A)$ tal que $det\big(J_f(x)\big) \neq 0$ para todo $x \in A$. Entonces f es abierta.

Ejercicios De Continuidad y Diferenciabilidad

1.- Dado $n \in N$, estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = (x+y)^n sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\} \quad f(0,0) = 0$$

2.- Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad, del campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 arctg\dfrac{y}{x} - y^2 arctg\dfrac{x}{y} & si\ xy \neq 0 \\ 0 & si\ xy = 0 \end{cases}$$

Calcula, en caso de que existan, $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

3.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} sen(x+y) & si\ x \neq -y \\ 0 & si\ x = -y \end{cases}$$

(a) Si $s \in R$, estudia la existencia de límite de f en $(s,-s)$ y su valor (si existe).
(b) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución

4.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x sen(x^2-y)}{x^2-y} & si\ x^2 \neq y \\ x & si\ x^2 = y \end{cases}$$

(a) ¿Es f continua en $(0,0)$?
(b) Estudiar la existencia de primeras derivadas parciales de f en $(0,0)$.
(c) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución

5.- Estudiar la continuidad del campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|+|y-1|}{xy-1} & si\ xy \neq 1 \\ 0 & si\ xy = 1 \end{cases}$$

Solución

6.- Estudia la existencia del límite en (0,0) de las siguientes funciones y calcula su valor cuando exista

$$(a) f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad (b)\ f(x,y) = \frac{x^3 - x^2}{x^2+y^2}$$

$$(c)\ f(x,y) = \frac{ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{|x|+|y|} \qquad (d)\ f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

Solución

7.- Prueba que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ln(1+x^2+y^4)}{x^2+y^4} = 1$$

Solución

8.- Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funcio0nes definidas en A y la existencia del límite en el punto α.

$(a)\ A = R^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \alpha = (0,0) \quad f(x,y) = \dfrac{e^{x^2} e^{y^2} - 1}{x^2+y^2}$

$(b)\ A = R^+ x\, R^+ \quad \alpha = (0,0) \quad f(x,y) = \dfrac{1-cos(x+y)}{x^2+y^2+2xy}$

$(c) A = R^+ x\, R^+ \quad \alpha = (0,0) \quad f(x,y) = (1+xy)^{\frac{1}{xy}}$

Solución

9.- Para cada $\alpha \in R^+$, estudia la continuidad, diferenciabilidad y continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f: R^2 \to R$ dado por

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2} \quad si\ (x,y) \neq (0,0) \qquad f(0,0) = 0$$

10.- Estudia la continuidad, diferenciabilidad y continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f: R^3 \to R$ dado por

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad si\ (x,y,z) \neq (0,0,o) \qquad f(0,0,0) = 0$$

Solución

11.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} xysen\left(\dfrac{x-y}{2(x+y)}\right) & si\ x+y \neq 0 \\ 0 & si\ x+y = 0 \end{cases}$$

(a) Estudiar continuidad y diferenciabilidad de f.
(b) Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Solución

12.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xseny - ysenx}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en (0,0).
(b) Estudia si f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución

13.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{senx - seny}{x-y} & si\ x \neq y \\ cosx & si\ x = y \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) Estudia si f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución

14.- Sea el campo escalar $f\colon R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en R^2.
(b) Probar que f es diferenciable en R^2.

15.- Sea el campo escalar $f\colon R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \cos\dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en R^2.
(b) Probar que f es diferenciable en R^2.¿Es de clase uno en R^2?

16.- Sea el campo escalar $f\colon R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{x^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.¿Es de clase uno en $(0,0)$?

17.- Sea el campo escalar $f\colon R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\, sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.¿Es de clase uno en $(0,0)$?

Solución

18.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x^2+y)(x^2+y^2)} & si -x^2 \neq y \\ 0 & si\ -x^2 = y \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

Solución

19.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x-y} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

20.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x-y} & si\ x \neq y \\ x+y & si\ x = y \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

21.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 + x^2 sen\dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

22.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4 - x^4y}{x^3 + y^3} & si\ x \neq -y \\ 0 & si\ x = -y \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?
(c) ¿Es diferenciable en $D_{12}f(0,0) = D_{21}f(0,0)$?

23.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 sen\dfrac{1}{y} & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) Probar que f diferenciable en $(0,0)$. ¿Es de clase uno en $(0,0)$?

24.- Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\} \quad f(0,0) = 0$$

25.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)sen\dfrac{1}{x+y} & si\ x + y \neq 0 \\ 0 & si\ x + y = 0 \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
(b) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

26.- Dado $n \in N$, estudiar la continuidad y la diferenciabilidad, del campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \frac{y^n senx}{x^2 + y^2} \quad (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\} \quad f(0,0) = 0$$

27.- Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \frac{xcosy - ycosx - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\} \quad f(0,0) = 0$$

28.- Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x^6 \sqrt{x^2 + y^2}}{(y - x^2)^2 + x^4} \quad (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\} \quad f(0,0) = 0$$

Solución

29.- Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y + x^3}{x^2 + y^2} \quad (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\} \quad f(0,0) = 0$$

30.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{3/2}}{x^2 - xy + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudiar continuidad y diferenciabilidad de f en $(0,0)$ y en $(1,0)$.
(b) Calcular $\nabla f(1,1)$.

31.- Sea $\Omega \subset R^2$ un abierto y $f: \Omega \to R$ una función continua con derivadas parciales y tal que $\nabla f: \Omega \to R^2$ está acotada. Prueba que f es continua. Justifica que la función $f: R^2 \to R$ dada por

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad si\ (x,y) \neq (0,0) \qquad f(0,0) = 0$$

verifica las hipótesis del resultado anterior, y sin embargo, no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución

32.- Comprueba que la función $f: R^2 \to R$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^4} \quad si\ (x,y) \neq (0,0) \qquad f(0,0) = 0$$

es continua en $(0,0)$, tiene derivadas direccionales en $(0,0)$ según el vector $(x,y) \in R^2/\{(0,0)\}$, pero no es diferenciable en $(0,0)$.

33.- Calcula, en caso de que exista., el siguiente límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y} arctg(x^2+y^2) \qquad y \neq 0$$

34.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{cosx - cosyy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudiar si f es de clase uno en R^2.
(b) Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.¿Es f es de clase dos en R^2?

Ejercicios de la Regla de la Cadena y Polinomio de Taylor

1.- Sea un campo escalar $f\colon R^2 \to R$ diferenciable. definimos $g\colon R^2 \to R$ por

$$g(t,s) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2) \quad (s,t) \in R^2$$

Prueba que

$$t\frac{\delta g}{\delta s} + s\frac{\delta g}{\delta t} = 0$$

2.- Sea $z = cos(xy) + e^{y-1}cosx$, donde $x = u^2 + v, y = u - v^2$. Calcula $\frac{\delta z}{\delta u}$ en el punto $(1,1)$.

Solución

3.- Sea $z = f(x,y)$, donde $f\colon R^2 \to R$ es una función diferenciable. Si $x = u^2 + v^2, y = {}^{u}/_{v}$, calcula las derivadas parciales de primer orden de z respecto de u y v en función de las derivadas parciales de z respecto de x e y.

4.- Sea $u = x^4 + y^2z^3 + \varphi\left({}^{x}/_{y}\right)$ donde $\varphi\colon R^2 \to R$ es una función derivable. Supongamos que $x = 1 + rse^t, y = rs^2e^{-t}, z = r^2s\ sent$. Si $\varphi'\left({}^{3}/_{2}\right) = -1$, calcula $\frac{\delta u}{\delta s}(2,1,0)$.

5.- Sea un campo escalar $f\colon R \to R$ derivable. Definimos

$$F(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2 - y^2}\right)$$

Comprueba que se verifica la igualdad

$$(x^2 + y^2)\frac{\delta F}{\delta x} + 2xy\frac{\delta F}{\delta y} = 0$$

6.- Sea un campo escalar $f: R^2 \to R$ diferenciable y $z = f(x, y)$. Si $x = \rho cos\theta, y = \rho sen\theta$, calcula $\frac{\delta f}{\delta x}$ y $\frac{\delta f}{\delta y}$. Prueba que se verifica

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2 = \left(\frac{\delta z}{\delta \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\delta z}{\delta \theta}\right)^2$$

7.- Sea un campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por

$$f(x, y) = 1 + x - x^2 + 2xy - 2y^3 + 3x^2y$$

Calcula el polinomio de Taylor de f de orden 2 en $a = (0,0)$, el polinomio de orden 3 en el mismo punto y el polinomio Taylor de f de orden 2 en $a = (1,1)$.

Ejercicios de Extremos

1.- Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x, y) = (x-2)^2 + 2y^2$ para todo $(x, y) \in A$. Calcular la imagen de f.

2.- Sea el campo escalar $f: R^2 \to R$ definido por $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2 \ \forall (x, y) \in R^2$

(a) Calcula los extremos relativos de f.
(b) Calcula los extremos absolutos de la restricción f en $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

3.- Calcula la imagen de la función $f: A \to R$ donde $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 - y^2\}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$$

4.- Calcula la imagen de la función $f: A \to R$ donde $A = \{(x, y) : -1 \leq y \leq x \leq 1\}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x$$

5.- Clasifica los puntos críticos de los siguientes campos escalares:

(a) $f(x, y) = 2xy - 2x^3y - yx^2 + x^3y^2$
(b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
(c) $f(x, y) = cosx\ cosy$
(d) $f(x, y) = -xy + 2x^3y - xy^2 - 2x^3y^2$
(e) $f(x, y) = 2x + y + x^2 + xy + y^3$
(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz - x - y - z$

6.- Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 : -1 \leq y \leq x \leq 1\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x$ para todo $(x, y) \in A$. Calcular la imagen de f.

7.- Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 \leq 2y - y^2\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x, y) = x^3 + y(y^3 - 4)$ para todo $(x, y) \in A$. Calcular la imagen de f.

8.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

9.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = xy(x^2 + y^2)$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

10.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

11.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y - 5 \leq 0, x - y - 1 \leq 0\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2y + 2$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

12.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = x^2y^2$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

13.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

14.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

15.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + 4y^2 \leq 16, x \geq 0\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - 6y^2$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

16.- Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq y \leq x, x \leq 1\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x,y) = 3x^2y^2 + y^3 - 12x - 15y$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

17.- Calcular los extremos relativos de $f: R^2 \to R$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

18.- Calcular los extremos relativos de $f: R^2 \to R$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + \alpha xy \quad \alpha \in R$$

19.- Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y la función $f: A \to R$ definida por $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x$ para todo $(x, y) \in A$. Calcular la imagen de f.

20.- Calcula la imagen de la función $f: A \to R$ donde

$$A = \{(x, y): x^2 + y^2 - 2x - 3 \leq 0\} \quad f(x, y) = x^3 + 3y^2$$

Ejercicios de Teoremas de la Función Implícita e Inversa

1.- Prueba que el sistema de ecuaciones

$$x^2e^u + yv^3 = 1 \quad x^2y + uv^2 = 0$$

define a las funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ implícitamente en un entorno de $(0,1)$ de manera que $u(0,1) = 0$ y $v(0,1) = 1$. Calcula las derivadas parciales (de primer orden) de u y de v en $(0,1)$. ¿Es el campo vectorial $(x,y) \to \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ un difeomorfismo de alguna bola abierta centrada en $(0,1)$ sobre su imagen?

2.- Sea $f: R^3 \to R^3$ el campo vectorial definido por

$$f(x,y,z) = (x - xy, xy - xyz, xyz) \ \ \forall (x,y,z) \in R^3$$

Justifica que el conjunto $\Omega = \{(x,y,z): xy \neq 0\}$ es un abierto de R^3 y que f es un difeomorfismo de Ω en $f(\Omega)$. Calcula la matiz jacobiana de f^{-1} en $(0,0,1)$.

3.- Justifica que cada una de las siguientes funciones es un difeomorfismo de clase C^∞sobre su imagen:

$$f(\rho cos\theta cos\varphi, \rho cos\vartheta sen\varphi, \rho sen\varphi) \ \forall (\rho,\vartheta,\varphi) \in R^+ x]-\pi,\pi[x \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$g(x,y) = (x - y, xy) \quad \forall (x,y) \in \{(x,y): x + y > 0\}$$

4.- Prueba que existe una función φ derivable en I, donde I es un intervalo abierto tal que se verifica

$$1 - \varphi(x)e^x + xe^{\varphi(x)} = 0 \ \ \forall x \in I$$

Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 de φ en 0.

5.- Justifica que existen dos abiertos A y B de R^2 difeomorfos tales que $(1,1) \in A$,$(0,1) \in B$ y para cada $(x,y) \in A$ existe un único $(x,y) \in B$ tal que se verifica

$$xe^u + ye^v = 1 + e \quad ue^x + ve^y = 0$$

Calcula la matriz jacobiana de la aplicación $(x,y) \to \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ en el punto $(1,1)$ y la matriz jacobiana de la aplicación inversa en $(0,1)$.

6.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de la función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación:

$$yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0$$

Particulariza en el punto $(x, y) = (1,0)$.

7.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de la función $z = f(x, y)$ en el punto $(2,1)$, siendo $z(2,1) = 2$ definida implícitamente por la ecuación:

$$3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0$$

8.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de la función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación:

$$z^3 + ze^x + cosy = 0$$

9.- Justifica que las dos igualdades

$$xu - yv + e^u cosv = 1 \quad xv + yu + e^u v = 0$$

definen implícitamente a u y a v en un entorno del punto $(0,0)$ en el que se verifica

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

10.- Probar que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2uv = 0 \\ x^3 + y^3 + u^3 - v^3 = 0 \end{cases}$$

permite definir funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, en un entorno del punto $(1, -1)$, con $u(1, -1) = v(1, -1) = 1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1, -1)$.

11.- Indica qué condición debe cumplir a para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ux^2 + vy + au - 1 = 0 \\ xy^2 + 2uv^3 + av - a = 0 \end{cases}$$

defina funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, en un entorno del punto $(0,1)$, con $u(0,1) = 0, v(0,1) = 1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(0,1)$. Y probar que tiene una inversa local en un entorno abierto del $(0,1)$. Sea F dicha inversa local, calcula la matriz jacobiana de F en $(0,1)$.

12.- Justifica que la ecuación:

$$xyz + sen(z - 6) - 2(x + y + x^2 + y^2) = 0$$

defina a z como función implícita de (x, y), en un entorno del punto $(1,1)$, con $z(1,1) = 0$. Comprueba que $(1,1)$ es un punto crítico de la función $z = z(x, y)$ y clasifícalo.

13.- Probar que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ux^2 + y^2v^3 = 4 \\ x^2y + uv^2 = 0 \end{cases}$$

defina funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, en un entorno del punto $(0,2)$, con $u(0,2) = 0, v(0,2) = 1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(0,2)$.

14.- Probar que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u + v + x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ u^2 + v^2 + u - 2xyz = 0 \end{cases}$$

defina funciones implícitas $u = u(x, y, z)$ y $v = v(x, y, z)$, en un entorno del punto $(0,0,0)$, con $u(0,0,0) = -{}^1/_2, v(0,0,0) = {}^1/_2$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(0,0,0)$.

Solución

15.- Justifica que la ecuación:

$$ln(x^2+y^2) - 2arctg\frac{x}{y} = 0$$

defina a x como función implícita de y, en un entorno del punto $(0,1)$, con $x(1)=0$. Calcular $x'(1)$ y $x''(1)$.

16.- Sea la función $f: A \to R$

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{2}, \frac{x^2-y^2}{2}\right)$$

donde $A = \{(x,y) \in R^2 : x > 0, y > 0\}$. Probar que para todo punto de $f(A)$ existe un entorno donde f admite función inversa, y calcular dicha función.

17.- Probar que

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+x+y+z}, \frac{y}{1+x+y+z}, \frac{z}{1+x+y+z}\right)$$

es un difeomorfismo de clase uno en

$$A = \{(x,y,z) \in R^3 : 1+x+y+z \neq 0\}$$

18.- Probar que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2z + 2yt^2 + xy = 0 \\ z^2y + 3zt + tx^2 = 1 \end{cases}$$

defina funciones implícitas $z = z(x,y)$ y $t = t(x,y)$, en un entorno del punto $(1,0)$, con $z(1,0) = 0, t(1,0) = 1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1,0)$. Sea g la función implícita que se obtiene. ¿Es g localmente inversible en $(1,0)$?

19.- Probar que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y^5x + yu^5 + zv^5 = 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1 \end{cases}$$

defina funciones implícitas $u = u(x,y,z)$ y $v = v(x,y,z)$, en un entorno del punto $(0,1,1)$, con $u(0,1,1) = 1, v(0,1,1) = 0$. Además calcular

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(0,1,1)$$

20.- Sabiendo que g es una función continua con $g(0) = 3$, justifica que la igualdad

$$\int_{x^2-1}^{xy} g(t)dt + x^2y = 0$$

define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(1,0)$. Calcula $y'(1)$.

21.- Prueba que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} xe^v + yu - u^2 = 0 \\ xycosv + x^2 - u^2 = 1 \end{cases}$$

defina funciones implícitas $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, en un entorno del punto $(2,1)$, con $u(2,1) = 2, v(2,1) = 0$. Calcular $D_2u(2,1)$ y $D_2v(2,1)$.