# Anotaciones interesantes Espacios Topológicos

Quintín Mesa Romero

November 2021

Si tenemos $X$ finito y la topología $T_{CF}$, entonces, el espacio toplógico $(X, T_{CF})$ es metrizable, pues en primer lugar, dado que todo subconjunto de $X$ es finito, $T_{CF} = T_D$, y, como $T_D = T_d$, donde $d$ es la distancia discreta, dicho espacio topológico es metrizable.

Si $X$ es infinito, dados $U, V \in T_{CF}$, $U^c \cup V^c \neq X$ (unión de conjuntos finitos, finita) $\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow (X, T_{CF})$ no es Hausdorff.

Todo espacio métrico es Hausdorff.

Si $X$ es infinito:

- $X$ numerable $\rightarrow (X, T_{CN})$ es metrizable, pues $T_{CN}$ coincide con la topología discreta y por lo tanto es Hausdorff.
- $X$ no es numerable $\rightarrow (X, T_{CN})$ no es Hausdorff porque dados dos abiertos $U, V$, $U^c \cup V^c \neq X$ (Unión de numerables es numerable) $\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$

En un espacio topológico Hausdorff, todo punto es cerrado
**Demostración:** Sea $x$ un punto de X tal que $\{x\} \in C_T \Rightarrow X \backslash \{x\} \in T \Rightarrow$ sea $y \in X \backslash \{x\} \Rightarrow y \neq x \exists U_x, U_y \in T$ tales que $U_x \cap U_y = \emptyset \Rightarrow x \notin U_y \Rightarrow U_y \subset X \backslash \{x\} \Rightarrow X \backslash \{x\} \in T \Rightarrow \{x\} \in C_T$.

Si $X$ es infinito, $(X, T_{CF})$ no es Hausdorff pero los puntos si son cerrados (recordemos que en este espacio topológico los conjuntos cerrados son los finitos), porque son conjuntos finitos. Esto prueba que un espacio topológico puede tener los puntos cerrados y no ser Hausdorff.

**Base de una topología** Subconjunto de la topología tal que todo abierto **no vacío** se puede expresar como unión de elementos de dicha base.

Si tengo una base $\mathbb{B}$ de una topología $T$. Entonces:

- $\forall x \in X \ \exists B \in \mathbb{B} : x \in B$
- $\forall B_1, B_2, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B1 \cap B_2$

**Teorema 1** Sea $X$ un conjunto, $\mathbb{B} \subset P(x)$ una familia de subconjuntos de $X$ tales que:

- $\forall x \in X \ \exists B \in \mathbb{B} : x \in B$
- $\forall B_1, B_2, \forall x \in B_1 cap B_2 \exists B_3 \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B1 \cap B_2$

Entonces existe en $X$ una toplogía $T$ tal que $\mathbb{B}$ es base de $T$

Como consecuencia del teorema salen muchas topología con nombre propio como la de **Sorgenfrey** o la de **Kuratowsky**

**Proposición interesante** Sea $X \neq \emptyset$. Sean $T, T^{'}$ topologías en $X$ y $B, B^{'}$ bases de $T, T^{'}$ respectivamente. Son equivalentes:

1. $T \subset T^{'}$
2. $\forall B \in \mathbb{B}$, $\forall x \in B$, $\exists B^{'} \in \mathbb{B}^{'} / x \in B^{'} \subset B$

Esta proposición la podemos ver con una interesante analogía con un camión lleno de gravilla:
Imaginemos que $X$ es un camión lleno de gravilla. Consideremos las pequeñas piedras como los elementos básicos de la topología $B$ de $\mathbb{B}$. Después de que se reduzcan a polvo, las partículas de polvo son los elementos básicos de la nueva topología $T^{'}(B^{'} \in \mathbb{B}^{'})$. La nueva topología es más fina que la anterior, pues contiene más conjuntos abiertos que $T$, y cada partícula de polvo ($B$) estaba contenida en una piedra ($B$).

**Topología generada por $S$.** Es la topología más gruesa que contiene a $S$. Se denota por $T(S)$ y se define como:
$T = \bigcap_{T' \in I} T^{'}$ donde $I = \{T^{'} \subset P(X)/T^{'} topologia, S \subset T^{'}\}$. Por un lema, $T$ es topología: La intersección de topologías es topología.

**Subbase de un topología $T$.** Un subconjunto $S \subset P(X)$ se dice que es subbase de la topología $T$ si las intersecciones **finitas** de elementos de $S$ forman una base de la topología. A la base que forman las intersecciones finitas de elementos de $S$ se la denota por $B(S)$, de tal forma que, si $S$ es subbase de $T$, entonces dado un $U \in T \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$, donde $B_i = s_1^i \cap ... \cap s_{k(i)}^i \forall i \in I$ y $\forall k(i) \in \mathbb{N} \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I}(s_1^i \cap ... s_{k(i)}^i)$
Por ejemplo si tenemos un conjunto $S = \{\emptyset, A, X\} \rightarrow B(S) = \{\emptyset, A, X\}$ es la familia de intersecciones finitas de elementos de $S$ y forma una base de la topología $T$ . Además, dicha topología $T$ ha de ser necesariamente $T(S)$: Usando el teorema anterior, dada esa familia de intersecciones finita, se comprueba que verifica las dos propiedades de dicho teorema y se obtiene que es base de una única topología $T$. Luego, se demuestra que esa única topología $T$ coincide con la topología generada por $S$.

**Base de entornos.** Sea $(X, T)$ un espacio topológico, $x \in X$. Diremos que $B_x \subset P(X)$ es base de entornos de $x$ si:

1. $B_x \subset N_x$ (Todo elemento de $Bx$ es entorno del punto $x$)
2. $\forall U \in N_x$, $\exists B \in B_x / B \subset U$

Para probar que un subconjunto de $X$ es una base entornos de un punto $x$, tenemos que ver en primer lugar que todo elemento de dicha familia es entorno del punto, y que para todo entorno del punto, hay un elemento de la familia contenido en dicho entorno.

**Propiedades interesante de clausura, interior y frontera**

1. $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$
2. $\overline{A} \in C_T$. Es el menor conjunto cerrado que contiene a $A$ (Si $F \in C_T$ y $A \subset F \Rightarrow \overline{A} \subset F$). Se demuestra viendo que el complementario es un abierto; viendo que $X \backslash \overline{A} = int(X \backslash A)$ o bien podemos reescribir esta desigualdad como: $X \backslash \overline{A} = ext(A)$
3. $A \in T \Longleftrightarrow A = A^\circ$. $A^\circ$ es el mayor conjunto abierto contenido en $A$
4. $A \in C_T \Longleftrightarrow A = \overline{A}.\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $A$.
5. $\overline{A} = A^\circ \cup fr(A)$ y además, $A^\circ \cap fr(A) = \emptyset$

6. $fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$. En particular $fr(A) \in C_T$

7. $\{A^\circ, fr(A), ext(A)\}$ constituye una partición de $X$

**Nota:** La clausura de la bola abierta coincide con la bola cerrada cuando, la distancia proviene de una norma. Por ejemplo, en un espacio métrico con cardinal mayor o igual que 2, con la distancia discreta, no se cumple.
Si tenemos otro espacio métrico, el interior de una bola cerrada es el mayo conjunto abierto contenido en la bola cerrada, luego, cualquier bola abierta que esté en la bola cerrada, va a estar contenida en el interior de la bola cerrada.

**Axiomas de separación**

T1 Direms que un espacio topológico $(X, T)$ verifica el primer axioma de separación cuando para cualesquiera $x, y \in X$,$x \neq y$, $\exists V_x \in N_x$ y $V_y \in N_y$ tales que $x \notin V_y$ y $y \notin V_x$. Un espacio topolóico es $T1 \iff$ todo punto es cerrado.

T2 Diremos que un espacio topológico $(X, T)$ verifica el segundo axioma de separación si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, $\exists V_x \in N_x$ y $V_y \in N_y$ tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.
Si nos damos cuenta, estos puntos $x, y$ son tales que verifican que $x \notin V_y$ y $y \notin V_x$, luego, esto nos lleva como consecuencia a que **todo espacio topológico T2, es T1**, y por consiguiente, a que **en todo espacio topológico T2, todo punto es cerrado**.

**Ejemplo interesante:** $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es $T1$ pero no es $T2$. Es T1 por el hecho de que todo punto es cerrado (los puntos son finitos, luego están en $C_{T_{CF}}$). Sin embargo, como $\mathbb{N}$ es infinito, no existen abiertos en $\mathbb{N}$ con intersección vacía, pues dados dos abiertos $U, V$, $U^c \cup V^c \neq \mathbb{N}$.
.

**Axiomas de numerabilidad**

AN-I Direms que un espacio topológico $(X, T)$ verifica el primer axioma de numerabilidad si cada punto $x \in X$ admite una base de entornos **numerable**.

AN-II Diremos que un espacio topológico $(X, T)$ verifica el segundo axioma de numerabilidad si $T$ admite una base numerable.

Una consecuencia de estos axiomas es que si un espacio topológico es AN-II, entonces es AN-I: Si suponemos que $(X, T)$ es AN-II, sea $B$ una base numerable de $T$. Dado un $x \in X, B(x) \subset B$, $B(x)$ (subconjuntos de un conjunto numerable, numerables)

**Ejemplos:**
$(X, T_D)$ espacio topológico discreto, $B_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos numerable $\Rightarrow$ AN-I.
Si $X$ es no numerable, entonces $(X, T_D)$, no es AN-II.
Sea $(X, d)$ un espacio métrico, $B_x = \{B(x, \frac{1}{r_i}) : i \in \mathbb{N}\}$ es base entornos numerable de $x$. Esto se debe a que se puede establecer una biyección entre $B(x)$ y los naturales.
Sea $(\mathbb{R}, T_u)$ es AN-II; $B = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{R}\}$ es numerable. Recordemos que los intervalos abiertos $(a, b)$ son en realidad bolas de centro $\frac{a+b}{2}$ y radio $\frac{b-a}{2}$, y las bolas abiertas forman una base de la topología, y, si particularizamos, una base de entornos numerable.

**Consecuencias:**

- Todo espacio métrico es $T2$ y $AN - I$
- Todo espacio topológico $T2$ es $T1$

- Todo espacio topológico es $T1$ si y solo si todo punto es cerrado.
- Todo espacio topológico $AN - II$ es $AN - I$, pero no todo $AN - I$ es $AN - II$
- Todo subespacio de un espacio topológico $AN - II$ es $AN - II$
- El espacio topológico $(X, T_t)$ es $AN - II$ porque la única base de abiertos contiene un único elemento
- El espacio topológico de Sorgenfrey $(X, T_S)$ no es $AN - II$ pero si es $AN - I$.