18. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_1 = 7,$$
$$u_2 = 19,$$
$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2, \text{ si } n \geq 3$$

(sol. $x_n = 2^{n+2} + n^2 + n - 3$)

En primer lugar, notar que estamos ante una recurrencia no homogénea; la función de ajuste no es idénticamente nula. De hecho, se la podemos ver como $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + f(n) + g(n)$ con $f(n) = 2^n$ y $g(n) = 2$ y su solución es la suma de las soluciones de las recurrencias $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + f(n)$ y $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + g(n)$, por el Teorema 2.4.3 de la teoría del Tema 2.

Comenzamos el ejercicio hallando la ecuación característica de la recurrencia del enunciado: $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2$

$$0 = u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2 \qquad u = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \text{ (sol. doble)}$$

Por lo que tenemos ya las soluciones homogénea y particular:

Homogénea: $u_n^{(h)} = (c_1 + n c_2)(1^n) = c_1 + n c_2$ (por ser $u=1$ solución doble de la ecuación característica)

con c_1, c_2 constantes reales.

$x_n^{(p)} = n^m p(n) s^n$ Particular: Para $f(n) \Rightarrow s = 2, \; m = 0$ (2 no es raíz de la ec. caract.)

$g(n) = 1 \Rightarrow p(n) = c_3$

Para $g(n) \Rightarrow s = 1 \quad m = 2$ (1 es raíz doble de la ec. caract)

$g(n) = 2 \Rightarrow p(n) = n^2 c_4$

luego, $u_n^{(p)} = 2^n c_3 + n^2 c_4$ y por tanto: $u_n = c_1 + n c_2 + 2^n c_3 + n^2 c_4$

Aplicamos las condiciones iniciales:

$u_1 = 7 \Rightarrow 7 = c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4$

$u_2 = 19 \Rightarrow 19 = c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4$

Necesitamos al menos 2 condiciones más para poder calcular las constantes; las sacamos de la recurrencia inicial, que depende del valor de los 2 términos anteriores y así poder hallar u_3 y u_4:

$u_3 = 2u_2 - u_1 + 2^3 + 2 = 38 - 7 + 10 = 41$

$u_4 = 2u_3 - u_2 + 2^4 + 2 = 82 - 19 + 18 = 81$

Luego, teniendo en cuenta estas dos condiciones adicionales:

$$u_3 = 41 \Rightarrow 41 = c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 9c_4$$

$$u_4 = 81 \Rightarrow 81 = c_1 + 4c_2 + 16c_3 + 16c_4$$

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 7 &= c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 \\ 19 &= c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 \\ 41 &= c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 9c_4 \\ 81 &= c_1 + 4c_2 + 16c_3 + 16c_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 4 \\ c_4 = 1 \end{cases}$$

Concluimos por tanto que $u_n = -3 + n + 2^n \cdot 4 + n^2 = 2^{n+2} + n^2 + n - 3$