Práctica 3. Imagen de una función de dos variables
Ejercicios resueltos

1. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 \leq 2y - y^2\} \quad \text{y} \quad f(x,y) = x^2 + y(y^3 - 4) \quad \forall\,(x,y) \in A$$

Solución

(a). Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene claramente

$$x^2 \leq 2y - y^2 \iff x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \iff x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

luego A es la bola cerrada de centro $(0,1)$ y radio 1 para la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. En particular A es un conjunto cerrado y acotado, luego compacto, y es también un conjunto convexo, luego conexo. Como f es continua, por ser una función polinómica, deducimos que $f(A)$ es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo cerrado y acotado.

(b). Es obvio que f es parcialmente derivable en A°, de nuevo por ser una función polinómica. Veamos los puntos críticos de f. Para $(x,y) \in A^\circ$, se tiene $\nabla f(x,y) = 0$ si y sólo si,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,x \qquad \text{y} \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4\,y^3 - 4$$

Vemos que $(0,1)$ es el único punto crítico, con $f(0,1) = -3$.

(c). Estudiemos ahora f en la frontera de A, que es la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1, un arco paramétrico, pero no necesitaremos ninguna parametrización. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene claramente

$$(x,y) \in \operatorname{Fr} A \iff x^2 + (y-1)^2 = 1 \iff y \in [0,2]\,,\ x^2 = 2y - y^2$$

Por tanto, para $(x,y) \in \operatorname{Fr} A$ obtenemos

$$f(x,y) = x^2 + y(y^3 - 4) = 2y - y^2 + y^4 - 4y = y^4 - y^2 - 2y$$

de donde se deduce que el conjunto $f\big(\operatorname{Fr} A\big)$ coincide con la imagen de la función $h : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(y) = y^4 - y^2 - 2y \qquad \forall\, y \in [0,2]$$

Esta función es derivable en $[0,2]$ con

$$h'(y) = 4y^3 - 2y - 2 = 2(y-1)(2y^2 + 2y + 1) \qquad \forall\, y \in [0,2]$$

Como, para $y \in [0,2]$ se tiene $2y^2 + 2y + 1 \geq 1 > 0$, vemos que $h'(y) = 0$ solamente para $y = 1$. Los posibles extremos absolutos de h son, por tanto, $0, 1$ y 2. Puesto que $h(0) = 0$, $h(1) = -2$ y $h(2) = 8$, la imagen de h es el intervalo $[-2, 8]$. Así pues, el máximo valor de f en $\operatorname{Fr} A$ es 8, que se alcanza en el punto $(0,2)$. El mínimo valor es -2 que se alcanza en los puntos $(1,1)$ y $(-1,1)$.
Finalmente, puesto que $f(0,1) = -3$, concluimos que $\max f(A) = \max\{-3, 8\} = 8$ y $\min f(A) = \min\{-3, -2\} = -3$ luego $f(A) = [-3, 8]$. ■

Ejercicio 1

Calcular la imagen de $f: A \to \mathbb{R}$ donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le 2y - y^2\}$ y
$f(x,y) = x^2 + y(y^3 - 4)$ $\forall (x,y) \in A$

Comprobemos en primer lugar si A es compacto y conexo: $x^2 \le 2y - y^2 \iff$
$\iff x^2 - 2y + y^2 \le 0 \iff x^2 + (y-1)^2 \le 1 \Rightarrow A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$
$\Rightarrow$ A es la bola cerrada de centro $(0,1)$ y radio 1. $\Rightarrow$ cerrado y acotado.
A es un conjunto convexo, luego también es conexo.

Estudiamos ahora la continuidad de f: Como f es una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}^2$, luego, al ser A compacto y f continua $\Rightarrow f(A)$ es compacto; un intervalo cerrado y acotado.

Calculamos derivabilidad parcial en $\mathring{A}$. Por ser una función polinómica es derivable parcialmente en $\mathring{A}$. Calculamos puntos críticos. $\nabla f(x,y) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \iff x = 0$$

$\Rightarrow$ El único punto crítico es el $(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4 = 0 \iff y = 1$$

$\Rightarrow f(0,1) = -3$

Estudiamos a continuación la frontera del conjunto A: la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1 $\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \iff x^2 = 2y - y^2$
Para cualquier $(x,y) \in Fr(A)$ tenemos $f(x,y) = 2y - y^2 + y(y^3 - 4) = 2y - y^2 + y^4 - 4y$
$= y^4 - y^2 - 2y \Rightarrow f(Fr(A)) = Im(h)$; $h : [0,2] \to \mathbb{R} : h(y) = y^4 - y^2 - 2y$

h es derivable en $[0,2] \Rightarrow h'(y) = 4y^3 - 2y - 2 = 2(y-1)(2y^2 + 2y + 1) = 0 \iff$

	4	0	-2	-2
1		4	4	2
	4	4	2	0

$\iff y = 1$. $\Rightarrow$ Posibles extremos absolutos son $0, 1, 2 \Rightarrow h(0) = 0,\ h(1) = -2,\ h(2) = 8$

Luego, la imagen de h es $[-2, 8]$

$f(0,1) = -3. \Rightarrow f(A) = [\min\{-3,-2\}, \max\{-3,8\}] = [-3, 8]$

Ejercicio 2.

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$ y la función $f: A \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = (x-2)^2 + 2y^2$ $\forall (x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

En primer lugar, comprobemos que A es compacto y conexo. A es la bola cerrada de centro $(1,0)$ y radio 2 $\Rightarrow$ cerrado y acotado, luego compacto. Además es convexo luego conexo.

f es una función polinómica y por lo tanto continua en $A \subset \mathbb{R}^2$. Luego, A compacto, conexo, f continua $\Rightarrow$ $f(A)$ intervalo cerrado y acotado.

Es derivable en todo A° por ser también polinómica (Calculamos puntos críticos)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2(x-2) = 0 \iff x = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y = 0 \iff y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{El único punto crítico es el } (2,0)$$

Calculamos la frontera $Fr(A)$: la frontera de A es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 4 $\Rightarrow$ $(x-1)^2 + y^2 = 4 \iff y^2 = 4 - (x-1)^2$. Cualquier punto de la frontera verifica: Si $(x,y) \in Fr(A) \Rightarrow f(x,y) = (x-2)^2 + 2(4-(x-1)^2) = (x-2)^2 + 8 - 2(x-1)^2$

$= x^2 - 4x + 4 + 8 - 2x^2 + 4x - 2 = -x^2 + 10$

Sea $h: [-1, \ ] \to \mathbb{R}^2$; $h(x) = -x^2 + 10$; $f(Fr(A)) = Im(h)$

h derivable en $[-1,3]$; $h'(x) = -2x = 0 \iff x = 0$

Luego, los posibles extremos absolutos son $-1, 0, 3$; $h(-1) = 9$, $h(0) = 10$, $h(3) = 1$

$Im(h) = [1, 10]$

$f(2,0) = 0 \Rightarrow f(A) = [\min\{0,1\}, \max\{0,10\}] = [0,10]$.

2. Se considera el conjunto $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \, , \ x \geq 0 \}$ y la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x-2)^2 + 2y^2$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

Solución.

(a). Es claro que $A = B \cap H$ donde B es la bola cerrada de centro $(1,0)$ y radio 2, y $H = \{(x,y) \ : \ x \geq 0\}$ el semiplano de la derecha cerrado. Entonces A es cerrado por ser intersección de cerrados, y acotado, por estar contenido en una bola, luego A es compacto. Por otra parte, es claro que B y H son conjuntos convexos, luego A también es convexo y, en particular, A es conexo. Puesto que f es continua, por ser una función polinómica, deducimos que $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado.

(b) Tenemos claramente

$$A^\circ \ = \ B^\circ \cap H^\circ \ = \ \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 < 4 \, , \ x > 0 \}$$

y f es diferenciable en A°, de nuevo por ser una función polinómica. Para $(x,y) \in A^\circ$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \iff \quad 2(x-2) = 4y = 0 \quad \iff \quad (x,y) = (2,0)$$

Como $f(2,0) = 0$ y $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in A$, está claro que $(2,0)$ es un mínimo absoluto de f, es decir, $\min f(A) = 0$. A partir de ahora sólo buscamos máximos absolutos de f.

(c). Tenemos claramente $\mathrm{Fr\,A} \ = \ A \setminus A^\circ \ = \ C_1 \cup C_2$ donde

$$C_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \, , \ x = 0 \} \ = \ \{(0,y) \ : \ y^2 \leq 3\} \qquad \text{y}$$
$$C_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 = 4 \, , \ x \geq 0 \}$$

Para $(0,y) \in C_1$ tenemos claramente $f(0,y) = 4 + 2y^2$ con $y^2 \leq 3$, luego

$$\max f(C_1) \ = \ 10 \ = \ f(0, \pm\sqrt{3})$$

Para $(x,y) \in C_2$ tenemos $y^2 = 4 - (x-1)^2$ luego

$$f(x,y) \ = \ (x-2)^2 + 2\big(4 - (x-1)^2\big) \ = \ 10 - x^2$$

y el máximo de f en C_2 se obtiene igualmente tomando $x = 0$ e $y = \pm\sqrt{3}$:

$$\max f(C_2) \ = \ 10 \ = \ f(0, \pm\sqrt{3})$$

Concluimos que $\max f(A) \ = \ \max f(\mathrm{Fr}\,A) \ = \ 10$, luego $f(A) \ = \ [\,0, 10\,]$. ■