1 En un modelo matricial se obtuvo la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0.8 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.82 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia si esta matriz proviene de un modelo de Leslie.

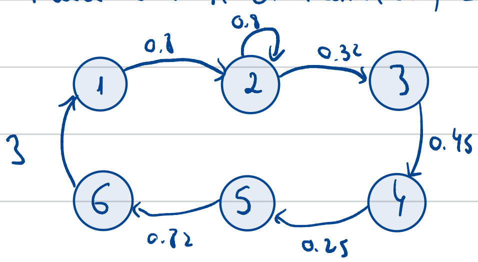
(b) Estudia si es transitiva.

(c) Estudia si tiene valor propio dominante.

a) Una matriz de Leslie es de la forma: $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Si la matriz del ejercicio fuera de Leslie, sería de la forma de $\mathcal{L}$, y si observamos por ejemplo el elemento A_{22} del enunciado es $0.8 \neq 0$. Luego A no proviene de un modelo Leslie.

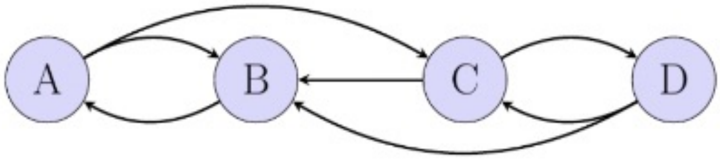
b) Para ver si es transitiva, obtengamos en primer lugar el grafo:



A la vista del grafo, podemos hacer el recorrido $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$. En particular podemos ir de cualquier nodo a cualquier otro $\Rightarrow$ Transitiva.

c) Como es transitiva y $\exists i : A_{ii} > 0 : A_{22} = 0.8 \Rightarrow A$ es ergódica. Al ser ergódica, el radio espectral, $\rho(A)$ es V.P.D

2 Dado el siguiente esquema de páginas web,



calcula la importancia (pagerank) al nivel 0.6 de cada una de las páginas.

Obtengamos en primer lugar la matriz de enlaces:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de Google: $G_\alpha = \alpha \tilde{M} + \frac{1-\alpha}{N} \cdot \mathbb{1} = 0.6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{0.4}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow G_\alpha = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Hallemos la importancia de cada página web resolviendo el sistema $G_\alpha \vec{r} = \vec{r}$ con $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.1x + 0.7y + 0.1z + 0.1t = x \\ 0.4x + 0.1y + 0.4z + 0.4t = y \\ 0.4x + 0.1y + 0.1z + 0.4t = z \\ 0.1x + 0.1y + 0.4z + 0.1t = t \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Impongamos que $\|\vec{r}\|_1 = 1$

$\Rightarrow$ Sol: $\left(\frac{37}{130}, \frac{4}{13}, \frac{40}{169}, \frac{289}{1690} \right) \equiv$ Importancia de las 4 páginas web

Usando la calculadora (quitando la primera ecuación por ejemplo entre todas (5 ec. frente a 4 incógnitas)).