# Apuntes Topología I

**Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas**

Autor:

Quintín Mesa Romero

# 1. Espacios Topológicos

**Definición 1.0.0** Sea $X$ un conjunto no vacío. Una toopología en $X$ es una familia $T$ de subconjuntos de $X$ ($T \subset P(X)$) que verifica las siguientes propiedades:

- 1. $\emptyset, X \in T$
- 2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U \in T$
- 3. $U_1, U_2, ..., U_k \in T \Rightarrow U_1 \cap ... \cap U_k \in T$ con $k \in \mathbb{N}$

A los elementos de una topología se les denomina conjuntos abiertos de la topología $T$.

**Definición 1.0.1** Un espacio topológico $(X, T)$ es un conjunto $X$ no vacío con una topología $T$ en $X$.

**Ejemplo 1.0.0** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y definamos $T_d = \{U \in X / \forall x \in X, \exists r > 0; B(x,r) \subset U\} \cup \{\emptyset\}$
La familia $T_d$ es una topología e $X$; $T_d$ es la topología asociada a la distancia $d$.

**Definición 1.0.2** Un espacio topológico $(X, T)$ es metrizable si existe una distancia $d$ en $X$ tal que $T_d = T$.

**Ejemplo 1.0.1** Sea $X$ un conjunto no vacío, $T_t = \{\emptyset, X\}$ constituye la topología trivial. Es la topología con la menor cantidad posible de conjuntos. Si $T$ es una topología en $X$, entonces $T_t \subset T$.

**Ejemplo 1.0.2** Sea $X$ un conjunto no vacío, $T_D = \{U / U \subset X\}$ es la topología discreta. Es la topología con la mayor cantidad posible de conjuntos. Si $T$ es una topología en $X$, entonces $T \subset P(x) = T_D$.

**Nota:** En general no existe una distancia $d$ tal que, dado un espacio topológico $(X, T)$, $T_d = T$.

**Propiedad 1.0.0** Sea $X \neq \emptyset$, $d =$ distancia discreta, $T_D =$ topología discreta en $X$. Entonces $T_d = T_D$. Por tanto, $(X, T_D)$ es metrizable.

**Demostración.** Queremos ver que $T_d = T_D$. La inclusión $T_d \subset T_D$ se sigue del ejemplo anterior. Falta ver que $T_D \subset T_d$. Sea $U \in T_D$. Si $U = \emptyset \Rightarrow U \in T_d$ por ser $T_d$ topología. Si por el contrario, $U \neq \emptyset \Rightarrow U = \bigcup_{x\in U}\{x\} = \bigcup_{x\in U} B(x, \frac{1}{2}) \in T_d$. Luego, acabamos de probar que si $U \in T_D \Rightarrow U \in T_d$. Por tanto $T_D \subset T_d$.

**Nota:** Las topologías $T_d$ y $T_D$ solo coinciden cuando y solo cuando $X = \{p\}$, es decir, cuando $X$ consta de un solo elemento.

**Ejemplo 1.0.3** Sea $X \neq \emptyset$. Tomamos $T_{CF} = \{U \subset X / U^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. La familia de conjuntos $T_{CF}$ es una topología. La llamaremos topología de loa complementos finitos.

**Demostración.** Veamos que se topología comprobando si verifica las tres propiedades características de una topología:

- 1. $\emptyset \in T_{CF}$, pues $X^c = \emptyset$ es finito (0 elementos) $\Rightarrow X \subset T_{CF}$
- 2. Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset T_{CF}$. Si $U_i = \emptyset \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \in T_{CF}$. Si por el contrario $\exists i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \neq \emptyset \Rightarrow U_{i_0}^c$ es finito. Sabemos que $U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow (\bigcup_{i\in I} U_i)^c \subset U_{i_0}^c$ es finito. Luego $(\bigcup_{i\in I} U_i)^c$ es finito, por ser subconjunto de un conjunto finito. Por tanto, $\bigcup_{i\in I} U_i \in T_{CF}$.

- 3. Sean $U_1, ..., U_k \in T_{CF} \Rightarrow U_1 \cap ... \cap U_k$. Si $\exists i \in I$ tal que $U_i = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap ... \cap U_k = \emptyset \in T_{CF}$. Supongamos que $\forall i \in IU_i \neq \emptyset \Rightarrow U_i^c$ es finito $\Rightarrow (U_1 \cap ... \cap U_k)^c = \bigcup_{i \in I} U_i^c$ es finito por ser unión de finitos.

**Nota:** Si $X$ es finito, $T_{CF}$ coincide con la topología discreta $T_D = P(x)$.

**Propiedad 1.0.1** Sean $U, V \in T_{CF}$, $U, V \neq \emptyset$. Si $X$ es infinito, $U \cap V \neq \emptyset \iff U^c \cup V^c \neq X$. Es decir, la unión de dos conjuntos finitos nunca pude ser un conjunto infinito.
Si $X$ es infinito, el espacio topológico $(X, T_{CF})$ no es metrizable, es decir, no existe una distancia $d$ tal que $T_d = T_{CF}$.
En un espacio métrico siempre podemos encontrar dos abiertos $U, V \in T_d$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$, a diferencia de en la topología $T_{CF}$, donde siempre podemos encontrar dos abiertos con interección no vacía.

**Definición 1.0.3** Un espacio topológico $(X, T)$ es Hausdorff (o verifica en axioma de separabilidad T2, o T2) cuando para todo par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$ existen dos abiertos $U_x, U_y \in T$ tales que

- 1. $x \in U_x$, $y \in U_y$
- 2. $U_x \cap U_y = \emptyset$

**Ejemplo 1.0.4**

- 1) Si $(X, d)$ es una espacio métrico, entonces $(X, d)$ es Hausdorff.
- 2) Si $X$ es infinito $(X, T_{CF})$ no es Hausdorff
- 3) Si $(X, T_D)$ es un espacio discreto, entonces es Hausdorff, pues si $x \neq y \Rightarrow U_x = \{x\}$, $U_y = \{y\} \in T_D$. Como $x \neq y$, $U_x \cap U_y = \emptyset$.
  Otra forma de ver que es Hausorff es teniendo en cuenta que es $(X, T_D)$ es metrizable. Si $d$ es la distacia discreta en $X$ entonces $T_d = P(X) = T_D$.

**Ejemplo 1.0.5** Sea $X \neq \emptyset$. Supongamos que $X$ es, al menos numerable (finito o infinito numerable). La topología de los complementos numerables es

$$T_{CN} = \{U \subset X / U^c numerable\}$$

Si $X$ es numerable, entonces $T_{CN} = T_D$: Si $U \subset X$ es cualquier conjunto, $U^c \subset X$. Como $X$ es numerabe y $U^c \subset X$, $U^c$ también es numerable $\Rightarrow U \in T_{CN} \Rightarrow T_{CN} = T_D$.
Si X no es numerable entonces $(X, T_{CN})$ no es Hausdorff.

**Definición 1.0.4** Sean $T_1, T_2$ topologías en $X$. Diremos que $T_1$ es más fina que $T_2$ si $T_2 \subset T_1$. También diremos que $T_2$ es más gruesa que $T_1$.

**Ejercicio**

Sea $X \neq \emptyset$, sea $A \subset X$. Definimos $T(A) = \{U \subset X / A \subset U\} \cup \{\emptyset\}$. Probar que $T(A)$ es una topología en X. Comprobar además:

- 1) Si $A = \emptyset \Rightarrow T(A) = T_D$
- 2) Si $A = X \Rightarrow T(A) = T_t$

¿Es $(X, T(A))$ Hausdorff?

**Ejercicio**

¿Cuántas topologías hay en un conjunto con dos elementos? ¿Y es uno con 3?

**Definición 1.0.5** Sea $(X, T)$ un espacio topológico. Diremos que $F \subset X$ es cerrado si $X \backslash F$, $(F^c)$ es abierto. A la familia de los conjuntos cerrados de $(X, T)$ la denotamos por $C_T$.

**Propiedad 1.0.2** Sea $(X, T)$ un espacio topológico. Entonces:

- 1. $\emptyset, X \in C_T$
- 2. Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset C_T \Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \in C_T$
- 3. Si $F_1, ..., F_k \in C_T \Rightarrow F_1 \cup ... \cup F_k \in C_T$

Demostración igual que en espacios métricos.

**Nota:** Si tenemos un conjunto $X$ y una familia $C \subset P(X)$ que cumple las tres propiedades anteriores, entonces existe una única topología $T$.

**Demostración.** Definimos $T = \{F^c/F \in C\}$. Como $C \in P(X)$ verifica las propiedades 1,2 y , simplemente pasando al complementario, se tiene que $T$ verifica dichas propiedades. Tenemos que ver que $C = C_T$. Sea $F \in C_T = \{\text{conjuntos cerrados de } (X,T)\} \Rightarrow F^c \in T = \{G^c/G \in C\} \Rightarrow \exists G \in C/F^c = G^c \Rightarrow \exists G \in C/F = G \Rightarrow F \in C$.
Sea ahora un $F \in C$. Queremos ver que $F \in C_T$. Pues bien, $F \in C_T \iff F^c \in T = \{G^c/G \in C\}$, por definición.

**Ejemplo 1.0.6**

- 1. Sea $(X, T_{CF}) \Rightarrow C_{T_{CF}} = \{F \in X/F \text{ es finito }\} \cup \{X\}$.
- 2. Sea $(X, T_D) \Rightarrow C_{T_D} = P(X)$.
- 3. Sea $(X, T_t) \Rightarrow C_{T_t} = \{\emptyset, X\} = T_t$
- 4. Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Los conjuntos cerrados son los puntos.
  **Demostración**: Sea $x_0 \in X \Rightarrow \{x_0\} \subset \bigcap_{r>0} \overline{B}(x_0, r)$. Hemos de probar la igualdad:
  Sea $y \in X; x_0 \neq y \Rightarrow d(x_0, y) = s > 0 \Rightarrow y \notin \overline{B}(x_0, s/2)$ (si lo estuviera, es decir, si $y \in \overline{B}(x_0, \frac{s}{2})$, $d(x_0, y) \leq \frac{s}{2} < s$), por tanto, $y \notin \bigcap_{r>0} \overline{B}(x_0, r)$. Concluiríamos por tanto que, si ningún punto distinto de $x_0$ está en la intersección de las bolas cerradas de centro $x_0$, entonces $\bigcap_{r>0} \overline{B}(x_0, r) = \{x_0\} \Rightarrow \{x_0\} \in C_T$.

**Propiedad 1.0.3** En un espacio topológico Hausdorff todo punto es cerrado.

**Demostración.** Sea $x_0 \in X, \{x_0\} \in C_T \iff X\backslash\{x_0\}$ es abierto. Sea $y \in X\backslash\{x_0\} \Rightarrow y \neq x_0 \Rightarrow \exists U_y, U^y_{x_0} \in T$ tales que $U_y \cap U^y_{x_0} = \emptyset \Rightarrow x_0 \notin U_y \Rightarrow U_y \subset X\backslash\{x_0\}$. Luego, $X\backslash\{x_0\} = \bigcup_{y\neq x_0} U_y \in T \Rightarrow \{x_0\} \in C_T$.

**Ejemplo 1.0.7** Sea $X$ un conjunto infinito, luego el espacio topológico $(X, T_{CF})$ no es Hausdorff (ya visto). Los puntos son conjuntos cerrados pues son finitos. Esto prueba que si en un conjunto los puntos son cerrados, el espacio topológico no tiene por qué ser Hausdorff.

**Definición 1.6** Si $(X, T)$ es un espacio topológico, una base de la topología $T$ es una familia $B \subset T$ con la propiedad de que todo conjunto abierto puede ser expresado como unión de elementos de $B$.

$$\forall U \in T, \exists\{B_i\}_{i\in I} \subset B; U = \bigcup_{i\in I} B_i$$

**Ejemplo 1.0.7**

- 1. Sea $(X, d)$ un espacio métrico, $B = \{B(x, r)/x \in X, r > 0\}$ es una base de $T_d$.
- 2. Sea la familia $\overline{B} = \{\overline{B}(x, r)/x \in X, r > 0\}$. Esta familia no es, en general, una base de la topología $T_d$. Aunque sabemos que todo abierto de $T_d$ se puede expresar como unión de bolas cerradas. En general, las bolas cerradas no son conjuntos abiertos. En general $\overline{B} \notin T_d$
- 3. En un epacio topológico $(X, T_D)$, $B = \{\{x\}/x \in X\} \subset T_D$, $\emptyset \neq U \in T_D \Rightarrow U = \bigcup_{x\in U}\{x\}$. Cualquier base de $(X, T_D)$ debe contener a $B$.

**Definición 1.0.7** Sea $(X, T)$ un espacio topológico. Diremos que $B \subset P(X)$ es base de $T$ si:

- 1. $B \subset T$
- 2. Todo elemento de $T$ no vacío se puede expresar como unión de elementos de $B$

**Ejercicio**

Sea $(X,d)$ un espacio métrio. Sea $r>0$. Definimos $B_{r_0}=\{B(x,r)/x\in X, 0<r<r_0\}$. Probar que la familia $B_{r_0}$ es base de la topología $Td$ $\forall r_0>0$.
Si $d=$ distancia discreta en $X$, entonces $B_{\frac{1}{2}}=\{B(x,r)/x\in X, 0<r<\frac{1}{2}\}=\{\{x\},x\in X\}$

**Propiedad 1.0.4** Sea $(X,T)$ un espacio topológico, $B$ una base de la topología $T$. Entonces:

- $\forall x\in X$, $\exists B\in B$ tal que $x\in B$
- $\forall B_1,B_2\in B$, $\forall x\in B_1\cap B_2$, $\exists B_3\in B/\ x\in B_3\subset B_1\cap B_2$

**Demostración.**

- 1. Sea $X\in T\Rightarrow\exists\{B_i\}_{i\in I}\subset B$ tal que $X=\bigcup_{i\in I}B_i$. Dado un $x\in X=\bigcup_{i\in I}B_i\Rightarrow\exists i_0\in I$ tal que $x\in B_{i_0}$. Tomamos $B=B_{i_0}$.
- 2. Sea $X\in B_1\cap B_2\in T$ tal que $\exists\{B_j\}_{j\in J}$; $B_1\cap B_2=\bigcup_{j\in J}B_j$. Entonces,
  - Dado un $X\in B_1\cap B_2=\bigcup_{j\in J}B_j\supset B_{j_0}$
  - $\exists j_0\in J$ tal que $\exists B_{j_0}=B_3\subset B_1\cap B_2$

**Teorema 1.0.0**

Sea $X$ un conjunto, $\mathbb{B} \subset P(X)$ una familia de subconjuntos de $X$ tales que:

- $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B$
- $\forall B_1, B_2 \in \mathbb{B}$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces existe en $X$ una única topología $T$ tal que $\mathbb{B}$ es base de $T$.

**Demostración**

Definimos en primer lugar

$$T = \{U \in X / \forall x \in U, \exists B \in \mathbb{B}; x \in B \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

Entonces,

- $T_1 : \emptyset \in T$ (por definición), $X \in T$ por 1 ($\forall x \in X$, $\exists B \in B$ tal que $x \in B \subset X$).
- $T_2$ : Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subset T$
  - Si $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$, como $\emptyset \in T \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$
  - Si $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in T$, $\exists B \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B \subset U_{i_0}$. Por tanto, $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$
- $T_3$ : Sean $U_1, U_2 \in T$,
  - Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$
  - Si $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x \in U_1$, $x \in U_2 \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B_1 \subset U_1$ y $x \in B_2 \subset U_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Luego, $\exists B_3 \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$.
    Si ahora consideramos tres subconjuntos $U_1, U_2, U_3 \in T$,, por inducción,

    $$(U_1 \cap U_2) \cap U_3 \in T$$

    Para $k$ conjuntos,

    $$U_1 \cap ... \cap U_k = (U_1 \cap ... \cap U_{k-1}) \cap U_k$$

    Luego, $U_1, ..., U_k \in T$

Por tanto hemos probado que existe una topología. Ahora veamos que $\mathbb{B}$ es base de dicha topología $T$. Para ello, tenemos que comprobar que:

- 1) $\mathbb{B} \subset T$ Sea $B \in \mathbb{B}$. Se tiene $\forall x \in B, x \in B \subset \mathbb{B}$ (se toma B = U) $\Rightarrow B \subset T$.
- 2) Todo $U \in T \backslash \{\emptyset\}$ es unión de elementos de $\mathbb{B}$ Sea $U \in T$ no vacío. Sea $x \in U \Rightarrow \exists B_x \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B_x \Rightarrow U$ es unión de elementos de la base $\mathbb{B}$.

Veamos por último la unicidad de $T$:
Sea $T^{'}$ otra topología en $X$ tal que $\mathbb{B}$ es base de $T^{'}$. Veamos que $T^{'} = T$. Comprobemos $T \subset T^{'}$. Sea $U \in T \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i \in T^{'}] \Rightarrow T \subset T^{'}$.
Annálogamente, se demuestra que $T^{'} \subset T$, concluyendo así que $T^{'} = T$.

**Ejemplo 1.0.8: Topología de Sorgenfrey o del límite anterior.**

Consideremos el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, $\mathbb{B} = \{[a, b)/a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. La familia de intervalos $\mathbb{B}$ es base de una topología en $\mathbb{R}, T_S$, a la que llamaremos topología de Sorgenfrey. Verificamos las dos propiedades del teorema anterior:

- 1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in [x, x + 1) \in \mathbb{B}$
- 2. Sean $B_1 = [a_1, b_1)$, $B_2 = [a_2, b_2) \in \mathbb{B}$. Sea $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$. Entonces, $B_1 \cap B_2 = [max\{a_1, a_2\}, min\{b_1, b_2\})$. Luego, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$

**Ejemplo 1.0.9: Topología de Kuratowski**

Sea $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos $B_k = \{(a,b)\backslash : a < b\} \cup B_u$. Veamos que $B_k$ es base de una topología en $\mathbb{R}$.

- 1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1, x+1) \in B_u \Rightarrow x \in (x-1, x+1) \in B_k$.
- 2. Sean $B_1$, $B_2 \in B_k$. Hay tres posibilidades:
  - 1) $B_1 = (a,b)$, $B_2 = (c,d)$.
    En este caso, dado un $x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1 \cap B_2 = (max\{a,c\}, min\{b,d\}) \in B_1 \subset B_k$. Se toma $B_3 = B_1 \cap B_2$.
  - 2)$B_1 = (a,b)$, $B_2 = (c,d)\backslash K$ o $B_1 = (a,b)\backslash K$, $B_2 = (a,b)$.
    Se tiene que, $x \in B_1 \cap B_2 = ((a,b) \cap ((c,d) \cap K^c)) = ((a,b) \cap (c,d)) \cap K^c = (max\{a,c\}, min\{b,d\})\backslash K \in K \subset B_2 \subset B_k$.
  - 3) $B_1 = (a,b)\backslash K, B_2 = (c,d)\backslash K$.
    Se verifica lo siguiente:
    $x \in B_1 \cap B_2 = ((a,b) \cap K^c) \cap ((c,d) \cap K^c) = ((a,b) \cap (c,d)) \cap K^c \in B_2 \subset B_k$

Como se cumplen todas las propiedades, por el Teorema 1.0, $\exists!$ topología $T_k$ en $\mathbb{R}$ tal que $B_k$ es base de $T_k$.

**Nota:** Recordemos que las bolas abiertas en $\mathbb{R}((a,b) = B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}))$ son base de la topología usual $T_u$. Llamaremos $B_u = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

**Proposición 1.0.0** Sea $X \neq \emptyset$. Sean $T, T^{'}$ topologías en $X$ y $\mathbb{B}, \mathbb{B}^{'}$ bases de $T, T^{'}$ respectivamente. Son equivalentes:

- 1. $T \subset T^{'}$
- 2. $\forall B \in \mathbb{B}$, $\forall x \in B$, $\exists B^{'} \in \mathbb{B}^{'}$ tal que $x \in B^{'} \subset \mathbb{B}$

**Demostración.**
$1 \Rightarrow 2$ Sean $B \in \mathbb{B}$, $x \in B \in \mathbb{B} \subset T \subset T^{'}$. Como $B \in T^{'}$ y $\mathbb{B}^{'}$ es base de $T^{'}$ $\Rightarrow *$ $\exists B^{'} \in \mathbb{B}^{'}$ tal que $x \in B^{'} \subset \mathbb{B}$.

$2 \Rightarrow 1$ Sea $U \in T$. Queremos ver que $U \in T^{'}$. Como $\mathbb{B}$ es base de $T \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$.
Veamos que 2 implica que cada $B_i$ pertenece a $T^{'}$:
Fijamos un $i \in I$. Si $x \in B_i \in \mathbb{B}$, por 2, $\exists B_x^{'} \in \mathbb{B}^{'}$ tal que $x \in B_x^{'} \subset B_i \Rightarrow B_i = \bigcup_{x \in B_i} B_x^{'} \in T^{'}$. Por lo tanto, $U = \bigcup_{i \in I} B_i \in T^{'}$.

**Nota (*)** Esto se puede hacer porque:

$$B \in T^{'} \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i \in I} : B = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in B_{i_0}^{'} \subset \bigcup_{i \in I} B_i^{'} = B$$

**Nota:** Estando en las mismas condiciones de la proposición anterior, si $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{'}$, la condición 2 se cumple trivialmente, pues, dados $B\mathbb{B}, x \in B \Rightarrow B \in \mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{'}$, podemos tomar $B^{'} = B$ y $x \in B = B^{'} \subset \mathbb{B}$.

**Propiedad 1.0.5** $T_u \subset T_k$, $T_u \subset T_s$.

**Demostración.** $T_u \subset T_k$ se sigue de que $\mathbb{B}_k = B_1 \cap B_2 = \mathbb{B}_u \cup B_2 \supset B_u \Rightarrow T_u \subset T_k$.
Por su parte, para la inclusión $T_u \subset T_s$, sea $B = (a,b)$, con $a < b$, un elemento de $\mathbb{B}u$ y $x \in (a,b)$. Queremos encontrar $B^{'} \in \mathbb{B}_s$ tal que $x \in B^{'} \subset (a,b)$. Tomando $B^{'} = [x,b)$, $x \in [x,b) \subset (a,b)$.

**Ejercicio**

Probar que $T_u \neq T_k$, $T_u \neq T_s$, $T_k \not\subset T_s$, $T_s \not\subset T_k$.

**Corolario 1.0.0**

Supongamos que $\mathbb{B}, \mathbb{B}^{'}$ son bases de $T$ y $T^{'}$, entonces equivalen:

- 1) $T = T^{'}$
- 2)
  - 2.1) $\forall B \in \mathbb{B}$, $\forall x \in \mathbb{B}$, $\exists B^{'} \in \mathbb{B}^{'}$: $x \in B^{'} \subset \mathbb{B}$ $(T \subset T^{'})$.
  - 2.2) $\forall B^{'} \in \mathbb{B}^{'}$, $\forall x \in \mathbb{B}^{'}$, $\exists B \in \mathbb{B}$: $x \in B \subset \mathbb{B}^{'}$ $(T^{'} \subset T)$.

**Lema 1.0.0**

Si $X$ es un conjunto y $\{T_i\}_{i \in I}$ es una familia de topologías en $X$. Entonces,

$$T = \bigcap_{i \in I} T_i = \{U \subset X : U \in T_i, \forall i \in I\}$$

es una topología en $X$.

**Demostración**

- 1. $\emptyset, X \in T_i$, $\forall i \in I \Rightarrow \emptyset, X \in T$.
- 2. Sean $\{U_j\}_{j \in J} \subset T \Rightarrow U_j \in T_i$, $foralli \in I$, $\forall j \in J \Longrightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \in T_i$, $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \in T$.
- 3. Sean $U_1, ..., U_k \in T \Rightarrow U_1, ..., U_k \in T_i$, $\forall i \in I \Rightarrow U_1 \cap ... \cap U_k \in T_i$, $\forall i \in I \Rightarrow U_1 \cap ... \cap U_k \in T$ (aplicando la definición de $T$.

**Proposición 1.0.1** Sea $S \subset P(X)$. Existe una topología $T(S)$ (topología generada por $S$) en $X$ tal que $S \subset T(S)$. Además, si $T^{'}$ es otra topología que contiene a $S$, entonces $T^{'} \supset T(S)$ ($T(S)$ es la topología más gruesa que contiene a $S$).

**Demostración.** Sea $I = \{T^{'} \subset P(X) : T^{'}$ topología, $S \subset T^{'}\}$. Definimos la familia $T = \bigcap_{T^{'} \in I} T^{'}$. Por el lema anterior, $T$ es una topología. Si $U \in S \Rightarrow U \in T^{'}$, $\forall T^{'} \in I \Rightarrow S \subset T$. Llamando $T(S) = T$, tenemos que $S \subset T(S)$. Si $T^{'}$ es otra topología que contiene a $S \Rightarrow T^{'} \in I \Rightarrow T(S) = \bigcap_{\tilde{T} \in I} \tilde{T} \subset T^{'}$.

**Definición 1.0.8** Diremos que $S \subset P(X)$ es una subbase de la topología $T$ si las interseccionnes finitas de los elementos de $S$ forman una base de la topología. A esta base la llamaremos $\mathbb{B}(\mathbb{S})$ de la topología $T$. Si $S$ es subbase de $T$, entonces $U \in T \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$, con $B_i \in \mathbb{B}(\mathbb{S})$, $B_i = S_1^i \cap ... \cap S_{k(i)}^i$, con $k(i) \in \mathbb{N}$. Depende del $B_i \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I}(S_1^i \cap ... \cap S_{k(i)}^i$.

**Proposición 1.0.2** Sea $S \subset P(X)$ tal que para todo $x \in X$ existe un $V \in S$ tal que $x \in V$. Entonces $S$ es una subbase de $T(S)$.

**Demostración.** Definimos $B = \{\bigcap_{i \in I} U_i : U_i \in S, I \text{ finito}\}$ (a priori no sabemos lo que es $B$. Hemos de probar:

- 1. $B$ es base de una topología $T$ en $X$
- 2. Comprobar que $T = T(S)$

Comecemos probando **1**:
Para todo $x \in X$, $\exists V \in S$ tal que $x \in V$. Como $S \subset B \Rightarrow V \in B$ (primera propiedad de base de una topología). Sean ahora $B_1$ y $B_2 \in B$, y sea $x \in B_1 \cap B_2$. Escribimos $B_1 = V_1^1 \cap ... \cap V_{k(i)}^1$ con $V_j^1 \in S$, y $B_2 = V_1^2 \cap ... \cap V_{k(i)}^2$ con $V_j^2 \in S$. Entonces, $B_1 \cap B_2 = (V_1^1 \cap ... \cap V_{k(i)}^1) \cap (V_1^2 \cap ... \cap V_{k(i)}^2) \in B$ por ser intersección finita de elementos de $S$.Tomando $B_3 = B_1 \cap B_2$ tenemos $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$. Luego hemos probado **1**.

A continuación, probemos la segunda afirmación: En primer lugar sabemos que $T$ contiene a $B$, pero a su vez, $B$ está formada por intersecciones finitas de elementos de $S$, luego se tiene $S \subset B \subset T \Rightarrow T(S) \subset T$.
Por último veamos que $T \subset T(S)$:
Sea $U \in T \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i\in I} \subset B$ tal que $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Cada $B_i = V_1^i \cap ... \cap V_{k(i)}^i$ con $V_j^i \in S \Rightarrow U = \bigcup_{i\in I}(V_1^i \cap ... \cap V_{k(i)}^i)$.
Como $S \subset T(S)$, para todo $i \in I$, $V_1^i \cap ... \cap V_{k(i)}^i \in S \subset T(S)$ y como $T(S)$ es un topología, $B_i = V_1^i \cap ... \cap V_{k(i)}^i \in T(S)$ y $U = \bigcup_{i\in I} B_i \in T(S) \Rightarrow U \in T(S)$. Por lo tanto, queda probado que $T \subset T(S)$ y, por consiguiente, $T = T(S)$.

## 1.1. Entornos. Interior y clausura de un un conjunto

**Definición 1.1.0** Sea $(X, T)$ un espacio topológico. Diremos que $U \subset X$ es un entorno de $x \in X$ si existe un conjunto abierto $A$ tal que $x \in A \subset U$.

**Definición 1.1.1** Dados $(X, T)$, $x \in X$, llamaremos $N_x$ a la familia de entornos de $x$ (N de Neighbourhood).

- $N_x \neq \emptyset$ porqu $X \in N_x$.
- Si $U \in T$ y $x \in U \Rightarrow U \in N_x$ (los conjuntos abiertos que contienen a $x$ son entornos de $x$).

**Definición 1.1.2** Sean $(X, T)$ un espacio topológico, $x \in X$. Diremos que $B_x \subset P(X)$ es base de entornos de $x$ si:

- 1. $B_x \subset N_x$
- 2. $\forall U \in N_x$, $\exists B \in B_x$: $B \subset U$

**Ejercicio**

Sea $(X, T_D)$, $x \in X$, $N_x = \{U \subset X : x \in U\}$. Probar que $B_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos de $x$.

**Ejemplo 1.1.0** Sea $(X, d)$un espacio métrico. Sea $T_d$ la topología asociada a la distancia $d$. Dado un $x \in X$, $B_x = \{B(x, r), r > 0\}$ son base de entornos de $x$.
**Demostración:** Sea $V \in N_x \Rightarrow \exists U \in T_d : x \in U \subset V \Rightarrow \exists r > 0$: $B(x, r) \subset U \subset V \subset N_x$.

**Ejemplo 1.1.1** Las bolas cerradas $\overline{B}(x, r)$ con $r > 0$ son entornos de $x$ (centro de la bola). ¿Es $\overline{B}_x = \{\overline{B}(x, r), r > 0\}$ base de entornos de $x$?
Sea $V \in N_x \Rightarrow \exists U \in T_d : x \in U \subset V \Rightarrow \exists r > 0$ tal que $\overline{B}(x, \frac{r}{2}) \subset B(x, r) \subset V$ ($\overline{B}(x, \frac{r}{2}) \in \overline{B}_x$).

**Ejemplo 1.1.2** Sea $\{r_i\}_{i\in I}$ una sucesión de radios (números reales positivos) que converge a $0 \iff \forall \epsilon > 0$, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < r_i < \epsilon$, $\forall i \geq i_0$. Veamos que $B(\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \{B(x, r_i) : i \in \mathbb{N}\}$:
Sea $V \in N_x \Rightarrow \exists U \in T_d$ tal que $x \in U \subset V \Rightarrow \exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U \subset V \Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N}$: $r_{i_0} < r \Rightarrow B(x, r_{i_0}) \subset B(x, r) \subset U \subset V$.

**Lema 1.1.0**

Sea $(X,T)$ un espacio topológico, $x \in X$:

- 1) $x \in V, \forall V \in N_x$
- 2) Si $V_1, V_2 \in N_x$ entonces $V_1 \cap V_2 \in N_x$
- 3) Si $V \in N_x$ y $V \subset U$ entonces $U \in N_x$
- 4) Si $V \in N_x$, $\exists U \in N_x$ tal que $U \subset V$ y $U \in N_y$, $\forall y \in U$

**Demostración**

- **2)** Si $V_1, V_2 \in N_x \Rightarrow \exists U_1, U_2 \in T$ tales que $x \in U_1 \subset V_1$ y $x \in U_2 \subset V_2 \Rightarrow x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2 \in N_x$
- **3)** Si $V \in N_x \Rightarrow \exists W \in T$ tal que $x \in W \subset V$. Por hipótesis $V \subset U \Rightarrow x \in W \subset V \subset U \Rightarrow U \in N_x$
- **4)** Si $V \in N_x \Rightarrow \exists W \in T$ tal que $x \in W \subset V$. Tomamos $U = W$. Como sabemos que $U \in T$, se verifica $U \in N_y$ para todo $y \in U$, pues un abierto es entorno de cada uno de sus puntos. Como $U$ es entorno de cada uno de sus puntos y $U \in V \Rightarrow V \in N_y$, $\forall y \in U$.

**Definición 1.1.3** Sea $(X,T)$ un espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto interior de $A$ si existe un entorno $U \in N_x$ tal que $U \subset A$. El interior de $A$ de denota por $int(A)$ ó $A^\circ$

**Definición 1.1.4** Sea $(X,T)$ un espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto adherente si de $A$ si para todo $U \in N_x$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$. La clausura o adherencia de $A$ se representa por: $cl(A)$ ó $\overline{A}$

**Definición 1.1.5** Sea $(X,T)$ un espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto frontera si para todo $U \in N_x$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A^c \neq \emptyset$. Todo punto frontera es adherente. Los puntos interiores no son puntos frontera. En definitiva, un punto $x$ es frontera cuando todo entorno de $x$ tiene puntos de $A$ y del complementario. La frontera de $A$ se representa por: $fr(A)$ ó $\sigma A$

**Definición 1.1.6** $x \in X$ es un punto de acumulación de $A$ si $\forall U \in N_x$, se verifica que $(U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. El conjunto de puntos de acumulación de $A$ se denota por $A^{'}$

**Definición 1.1.7** $x \in X$ es un punto aislado de $A$ si $\exists U \in N_x$ tal que $U \cap A = \{x\}$. El conjunto de puntos aislados de $A$ se denota por $ais(A)$.

**Definición 1.1.8** $x \in X$ es un punto exterior de $A$ si $x$ es un punto interior de $A^c$ $(\exists U \in N_x : U \in A^c)$. El conjunto de puntos exteriores de $A$ se denota por $ext(A)$.

**Propiedad 1.1.0** Dado $A \in X$ se verifica $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$.

**Demostración**

- $A^\circ \subset A \Rightarrow$ Sea $x \in A^\circ \Rightarrow \exists U \in N_x$: $x \in U \subset A \Rightarrow x \in A$.
- $A \subset \overline{A} \Rightarrow$ Sea $x \in A \Rightarrow \forall U \in N_x$, $U \cap A \supset \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$.

**Propiedad 1.1.1** Sea $A^\circ \in T$. Además si $U \in T$ y $U \subset A$, entonces $U \subset A^\circ$ (es el mayor conjunto abierto contenido en $A$).

**Demostración** Si $A^\circ = \emptyset \Rightarrow A^\circ \in T$. Supongamos por el contrario que $A^\circ \neq \emptyset$ entonces, tomamos $x \in A^\circ \Rightarrow \exists U \in N_x$ tal que $U \subset A \Rightarrow \exists V \in N_x$ tal que $U \in N_y$ para todo $y \in V \Rightarrow U \in N_y$, $\forall y \in V \Rightarrow y \in A^\circ$, $\forall y \in V \Rightarrow V \subset A^\circ \Rightarrow \exists W_x \in T$ tal que $W_x \subset V \subset A^\circ \Rightarrow A^\circ = \bigcup_{x\in A^\circ} W_x \Rightarrow A^\circ \in T$.
Comprobemos que es el más grande:
Sea $U \in T$ tal que $U \subset A$. Si $x \in U$ como $U \in N_x \Rightarrow x \in A^\circ \Rightarrow U \subset A^\circ$.

**Propiedad 1.1.2** Sea $\overline{A} \in C_T = \{$conjuntos cerrados en $(X, T)\}$. Además, si $F \in C_T$ y $A \subset F$, entonces $\overline{A} \subset F$ (la clausura de $A$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $A$.

**Demostración** El cierre verifica $\overline{A} \in C_T \iff X\backslash\overline{A} \in T$.
Sea $x \in X\backslash\overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists U \in N_x$ tal que $U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \subset X\backslash A$. Como además se verifica, y es fácil verlo, $xX \in \backslash\overline{A} \iff x \in int(X\backslash A) \Rightarrow X\backslash\overline{A} = int(X\backslash A) \Rightarrow X\backslash\overline{A} \in T \Rightarrow \overline{A} \in C_T$.
Probemos la segunda propiedad: Sea $F$ cerrado $\Rightarrow X\backslash A \supset X\backslash F \Rightarrow int(X\backslash A) \supset X\backslash F \Rightarrow \overline{A} \subset F$.

**Corolario 1.1.0**

- 1. $A \in T \iff A = A^\circ$
- 2. $A \in C_T \iff A = \overline{A}$

**Demostración**

- 1. $\Longleftarrow$ Si $A = A^\circ \Rightarrow A \in T$
  $\Rightarrow A \in T$. Siempre $A^\circ \subset A$. Además, $A^\circ$ es el mayor conjunto abierto contenido en $A$, $A \in T$, $A \subset A \Rightarrow A \subset A^\circ$. Por tanto, $A = A^\circ$.
- 2. $\Longleftarrow$ Si $A = \overline{A}$, como $\overline{A} \in C_T \Rightarrow A \in C_T$.
  $\Rightarrow A \in C_T$. Siempre $A \subset \overline{A}$. Además, $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $A.A \in C_T$, $\overline{A} \supset A \Rightarrow A = \overline{A}$

**Nota:** La igualdad $X\backslash\overline{A} = int(X\backslash A)$ podemos reescribirla como: $X\backslash\overline{A} = ext(A) \Rightarrow \{\overline{A}, ext(A)\}$ es una partición de $X$.

**Propiedades 1.1.3**

- 1. $\overline{A} = A^\circ \cup \sigma A$, $A^\circ \cup \sigma A = \emptyset$
- 2. $\sigma A = \overline{A} \cap \overline{(X\backslash A)}$. En particular $\sigma A \in C_T$
- 3. $\{A^\circ, \sigma A, ext(A)\}$ es una partición de $X$.

**Demostración**

- 1. $\overline{A} = A^\circ \cup \sigma A$.
  Sabemos que $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$. Veamos que $\sigma A \subset \overline{A}$: sea $x \in \sigma A \Rightarrow \forall U \in N_x, U \cap A \neq \emptyset$ (y $U \cap A^c) \neq \emptyset$) $\Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow A^\circ \cup \sigma A \subset \overline{A}$.
  Sea $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall U \in N_x$, $U \cap A \neq \emptyset$. Si además $U \cap A^c \neq \emptyset$, $\forall U \in N_x \Rightarrow x \in \sigma A$.
  Si la condición anterior no se cumple, $\exists U \in N_x$, $U \cap A^c = \emptyset \Rightarrow U \subset (A^c)^c = U \cap A \Rightarrow x \in A^\circ$.
  Hemos obtenido por tanto que $x \in \sigma A$ y que $x \in A^\circ$. En definitiva, que $x \in \sigma A \cup A^\circ$. El punto está en la frontera o en el interior de $A$.
  Luego, $\overline{A} \subset A^\circ \cup \sigma A$.

  Probemos ahora que $\sigma A \cap A^\circ = \emptyset$. Para ello, sea $x \in \sigma A \Rightarrow \forall U \in N_x$, $U \cap A^c \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta que $U \cap A^c = \emptyset \iff U \subset A$ y que $U \cap A^c \neq \emptyset \iff U \not\subset A \Rightarrow \sigma A \subset A^c \Rightarrow \sigma A \cap A^\circ = \emptyset$.
- 2. $\sigma A = \overline{A} \cap \overline{(X\backslash A)}$:
  Sea $x \in \sigma A \iff \forall U \in N_x$. Se verifica lo siguiente:

- $U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$
- $U \cap (X \backslash A) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{(X \backslash A)}$.

En definitiva, $x \in \overline{A} \cap \overline{(X \backslash A)}$.

- 3. Se sigue de que $\{\overline{A}, ext(A)\}$ es una partición de $A$ y $\{A^{\circ}, \sigma A\}$ es una partición de $\overline{A}$.

**Ejemplo 1.1.3** Sea $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ y definamos la distancia $d(x,y) = \|y - x\|$.
Se verifica $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r) \Rightarrow int(\overline{B}(x,r)) = B(x,r)$. Para que esta propiedad se cumpla la distancia debe proceder de una norma.

**Ejemplo 1.1.4** Sea el espacio métrico $(X,d)$, donde $d \equiv$ distancia discreta y $\#X \geq 2$.
Sea $x \in X$, $B(x,1) = \{x\}$, $\overline{B}(x,1) = X$.
$\overline{B(x,1)} \equiv$ menor conjunto cerrado que contiene a $B(x,1) \Rightarrow \overline{B(x,1)} \subset \overline{B}(x,1)$. Como $T_d$ es la topología discreta, $\{x\} \in C_{T_d} \Rightarrow \overline{\{x\}} = \{x\} \Rightarrow \overline{B(x,1)} = \{x\}$. Pero $\overline{B}(x,1) = X \neq \{x\} = \overline{B(x,1)} \Rightarrow \overline{B}(x,1) \not\subset \overline{B(x,1)}$.

Si $(X,d)$ es un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$, entonces $int(\overline{B}(x,r))$ es el mayor conjunto abierto contenido en $\overline{B}$. Pero $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r) \Rightarrow B(x,r) \Rightarrow int(\overline{B}(x,r))$.

Si $d \equiv$ distancia discreta en $X$ y $\# \geq 2 \Rightarrow B(x,1) = \{x\}$, $\overline{B}(x,1) = X \Rightarrow int(\overline{B}(x,1)) = \overline{B}(x,1) = X$. Por tanto, $B(x,1) = \{x\} \not\subset X = int(\overline{B}(x,r))$.

## 1.2. Axiomas de separación y numerabilidad

**Definición 1.2.0** Diremos que un espacio topológico $(X,T)$ es $T_1$ si $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$, $\exists V_x \in N_x$, $V_y \in N_y$ tales que $x \notin V_y$, $y \notin V_x$.

**Propiedad 1.2.0** Un espacio topológico $(X,T)$ es $T_1 \iff$ todo punto de $X$ es cerrado.

**Demostración.**

$\Rightarrow$ Supongamos que el espacio topológico $(X,T)$ es $T_1$. Fijemos un punto $x \in X$. Veamos que $\{x\}$ es cerrado comprobando que $X \backslash \{x\}$ es abierto. Para ello, veamos que $int(X \backslash \{x\}) = X \backslash \{x\}$. Sea $y \in X \backslash \{x\}$ $(y \neq x)$. Como $(X,T)$ es $T_1$, $\exists V_x \in N_x$, $V_y \in N_y$: $x \notin V_y$, $y \notin V_x \Rightarrow \{x\} \cap V_y = \emptyset \Rightarrow V_y \subset X \backslash \{x\} \Rightarrow y \in int(X \backslash \{x\})$

$\Leftarrow$ Supongamos que todo punto de $X$ es cerrado. Veamos que $(X,T)$ es $T_1$. Para ello, tomemos $x, y \in X$, $x \neq y$. (*) Por hipótesis $\{x\}$ es cerrado $\Rightarrow X \backslash \{x\} \in T$. Como $y \neq x$, $y \in X \backslash \{x\}$. Como $X \backslash \{x\}$ es abierto, coincide con su interior $\Rightarrow \exists V_y \in N_y$ tal que $V_y \in X \backslash \{x\}$. Razonando de forma análoga a partir de (*), encontramos $V_x \in N_x$ tal que $y \notin V_x$.

**Definición 1.2.1** Diremos que un espacio topológico $(X,T)$ es $T_2$ (o Hausdorff) si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists V_x \in N_x$, $V_y \in N_y$ tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

**Consecuencias**

1. Todo espacio $T_2$ es $T_1$.
2. En un espacio $T_2$ todo punto es cerrado.

**Ejemplo 1.2.0** El espacio topológico $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es $T_1$ pero no es $T_2$ (porque dos abiertos no vacíos siempre se cortan). Es $T_1$ porque todo punto es cerrado.

**Definición 1.2.2** Diremos que $(X, T)$ verifica el primer axioma de numerabilidad, o que es $AN - I$ si cada punto de $X$ admite una base de entornos numerable.

**Definición 1.2.3** Diremos que $(X, T)$ verifica el segundo axioma de numerabilidad, o que es $AN - II$ si admite una base numerable.

**Ejemplo 1.2.1** Sea $(X, T_D)$ un espacio topológico discreto.

- $B_x = \{\{x\}\}$ base de entornos $\Rightarrow (X, T_D)$ es $AN - I$ (porque $B_x$ es numerable; es finita).
- Si $X$ es no numerable, entonces $(X, T_D)$ no es $AN - II$. Sea $\mathbb{B}$ una base de $T$. Si $x \in \{x\}$, $\{x\} \in T_D \Rightarrow \{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i$, $Bi \in \mathbb{B} \Rightarrow \exists B_{i_0}$ tal que $x \in B_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} B_i = \{x\} \Rightarrow \{x\} \subset B_{i_0} \subset \{x\} \Rightarrow B_{i_0} = \{x\} \Rightarrow \{x\} \in \mathbb{B} \Rightarrow$ **(*)**$\{\{x\} : x \in I\} \subset \mathbb{B}$.

  **(*)**: No es numerable si $X$ no lo es $\Rightarrow \mathbb{B}$ no es numerable.

**Lema 1.2.0**

Si $\mathbb{B}$ es base de $T$. Entonces, $B(x) = \{B \in \mathbb{B} : x \in B\}$ es base de entornos abiertos de $x$ para todo $x \in X$.

**Demostración**

1. $B(x) \in N_x$ (los elementos de $B(x)$ son conjuntos abiertos que contienen a $x$).
2. Sea $U \in N_x \Rightarrow \exists A \in T$ tal que $x \in A \subset U$. Como $A \in T \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{B}/$ $A = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists i_0 \in I/\ x \in B_{i_0} \subset A \subset U | B_{i_0} \in B(x)$, $B_{i_0} \subset U$.

**Corolario 1.2.0**

Si $(X, T)$ es $AN - II$, entonces es $AN - I$.

**Demostración**

Sea $\mathbb{B}$ una base numerable de $T$, $x \in X \Rightarrow B(x) \subset \mathbb{B}$. Por tanto, $B(x)$ es numerable.

**Ejemplo 1.2.2** Sea $(X, d)$ un espacio métrico, $B_x = \{B(x, \frac{1}{r_i})\}$ es base de entornos numerable de $x \Rightarrow$ es $AN - I$.

**Consecuencias**

- Tdodo espacio métrico es $AN - I$
- $AN - I \not\Rightarrow AN - II$
- $AN - II \Rightarrow AN - I$

**Ejemplo 1.2.3** $(\mathbb{R}, T_u)$ es $AN - II$.
La familia $\mathbb{B} = \{(a, b) : a, c \in \mathbb{R}\}$ es base numerable. Comprobémoslo:
Sea $A \in T_u$. Sea $x \in A \Rightarrow \exists m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (m_1, m_2) \subset A$, $m_1 < x < m_2$. Existen $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ tales que $m_1 < a_x < b_x < m_2 \Rightarrow x \in (a_x, b_x) \subset (m_1, m_2) \subset A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} (a_x, b_x) \Rightarrow A$ es unión de elementos de $\mathbb{B}$. $\mathbb{B}$ es base numerable de $T_u$.

# 2. Aplicaciones Continuas

**Notación y propiedades importantes**

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre continuos

$f^{-1}$ puede verse como la aplicación inversa de $f$, siempre y cuando $f$ sea biyectiva o como la imagen inversa de $f$

Dado $V \subset Y \Rightarrow f^{-1} = \{x \in X : f(x) \in V\}$

1. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$
2. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} V_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$
3. $f^{-1}(X \backslash V) = X \backslash f^{-1}(V)$
4. $f(f^{-1}(V)) \subset V$
5. $V \subset f^{-1}(f(V))$
6. $f(X \backslash f^{-1}(U^{'})) \subset Y \backslash U^{'}$

Sea en lo que sigue, $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos.

**Definición 2.0.0** Diremos que $f$ es continua si $\forall V \in T^{'}$, se tiene que $f^{-1}(V) \in T$.

**Definición 2.0.1** Sea $x_0 \in X$. Diremos que $f$ es continua en un punto, $x_0$, si $\forall V^{'} \in N^{'}_{f(x_0)}$, $\exists V \in N_{x_0}$ tal que $f(V) \subset V^{'}$.

**Proposición 2.0.0** Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre todo espacio topológico $(X, T)$, $(Y, T^{'})$. Equivalen:

1. $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es continua.
2. $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es continua en $x_0$, $\forall x_0 \in X$.

**Demostración**

- $1 \Rightarrow 2 \|$ Fijamos un $x_0 \in X$. Veamos que $f$ es continua en $x_0$.
  Tomemos $V^{'} \in N^{'}_{f(x_0)}$. Por definición de entorno, $\exists U^{'} \in T^{'}$ tal que $f(x_0) \subset U^{'} \subset V^{'}$. Como $f$ es continua por hipótesis, y $U^{'} \in T^{'}$, entonces $f^{-1}(U) \in T$.
  Sabemos que $x_0 \in f^{-1}(U^{'}) \iff f(x_0) \in U$ y $f^{-1}(U^{'}) \in T$, luego, $V = f^{-1}(U^{'}) \in N_{x_0} \Rightarrow f(V) = f(f^{-1}(U^{'})) \subset U^{'} \subset V^{'}$.
  Por tanto, como $x_0 \in X$ y $V^{'} \in N^{'}_{f(x_0)}$ eran arbitrarios, $f$ es continua en todo $x_0 \in X$.

- $2 \Leftarrow 1 \|$ Sea $U^{'} \in T^{'}$. Consideremos el conjunto $f^{-1}(U^{'})$. Queremos ver que $f^{-1}(U^{'}) \in T$. Para ello, probamos que todo punto $x_0 \in f^{-1}(U)$ es un punto interior.
  Teniendo en cuenta que $U^{'} \in T^{'}$ y que $f(x_0) \in U^{'} \Rightarrow U^{'} \in N^{'}_{f(x_0)}$ y, por hipótesis, como $f$ es continua en $x_0$, $\exists V \in N_{x_0}$ tal que $f(V) \subset U^{'} \Rightarrow f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U^{'}) \Rightarrow V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U^{'}) \Rightarrow x_0 \in int(f^{-1}(U^{'})) \Rightarrow f^{-1}(U^{'}) \in T \Rightarrow f$ es continua.

**Ejemplo 2.0.0** La aplicaión $I_{d_x} : (X, T) \longrightarrow (X, T)$ es continua. Veámoslo:
Sea $V \in T \Rightarrow (I_{d_x})^{-1}(V) = \{x \in X : I_{d_x}(x) \in V\} = \{x \in X : x \in V\} = V \in T$.

**Ejemplo 2.0.1** La aplicaión $I_{d_x} : (X, T_1) \longrightarrow (X, T_2)$ es continua $\iff \forall V \in T_2$, $(I_{d_x})^{-1}(V) \in T_1 \iff \forall V \in T_2$, $V \in T_1 \iff T_2 \subset T_1 \iff T_1$ es más fina que $T_2$.

**Ejemplo 2.0.2** Sean las aplicaciones $f_1(x) : (X_1, T_1) \longrightarrow (X_2, T_2)$, $f_2(x) : (X_2, T_2) \longrightarrow (X_3, T_3)$ continuas.

Entonces, $f_2 \circ f_1 : (X_1, T_1) \longrightarrow (X_3, T_3)$ es continua:
Dado un $V \in T_3$, $(f_2 \circ f_1)^{-1}(V) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(V)) \in T_1$.

**Ejercicio**

Si $f_1(x) : (X_1, T_1) \longrightarrow (X_2, T_2)$ es continua en $x_1 \in X_1$ y $f_2(x) : (X_2, T_2) \longrightarrow (X_3, T_3)$ es continua en $f_1(x_1)$, entonces $f_2 \circ f_1 : (X_1, T_1) \longrightarrow (X_3, T_3)$ es continua en $x_1$.

**Proposición 2.0.1** Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Sea $x_0 \in T$ y sean $B_{x_0}$, $B_f(x_0)^{'}$ bases de entornos de $x_0$ en $(X, T)$ y de $f(x_0)$ e $(Y, T^{'})$, respectivamente. Son equivalentes:

1. $f$ es continua en $x_0$
2. $\forall B^{'} \in B^{'}_{f(x_0)}$, $\exists B \in B_x$ tal que $f(B) \subset B^{'}$.

**Demostración**

- $1 \Rightarrow 2 \|$ $B_f(x_0)^{'} \subset N^{'}_{f(x_0)}$ y $B_{x_0} \subset N_{x_0}$. Sea $B^{'} \in B_f(x_0)^{'} \subset N^{'}_{f(x_0)}$. Por hipótesis, $\exists V \in N_{x_0}$ tal que $f(V) \subset B^{'}$. Como $B_{x_0}$ es base de entornos de $x_0 \Rightarrow \exists B \in B_{x_0}$ tal que $B \subset V \Rightarrow f(B) \subset f(V) \subset B^{'}$.
- $1 \Leftarrow 2 \|$ Sea $V^{'} \in N^{'}_{f(x_0)}$. Como $B^{'}_{f(x_0)}$ es base de entornos de $f(x_0)$, $\exists B^{'} \in B^{'}_{f(x_0)}$ tal que $B^{'} \subset V^{'}$.Por hipótesis, $\exists B \in B_{x_0}$ tal que $f(B) \subset B^{'} \subset V^{'}$. Como $B_{x_0} \subset N_{x_0}$ podemos tomar $V = B \in N_{x_0}$. Por tanto, $f(V) = f(B) \subset B^{'} \subset V^{'}$.

**Ejemplo 2.0.3** Sean $(X, d)$, $(Y, d^{'})$ espacios métricos, la aplicación $f : X \longrightarrow Y$, y el punto $x_0 \in X$. Sean las bases de entornos

$$B_{x_0} = \{B(x, r) : r > 0\}$$

$$B^{'}_{f(x_0)} = \{B^{'}(f(x_0, r)) : r > 0\}$$

La aplicación $f : (X, T_d) \longrightarrow (Y, T_{d^{'}}$ es continua en $x_0 \in X$ sí y solo sí $\forall B^{'} \in B^{'}_{f(x_0)}$, $\exists B \in B_{x_0}$ tal que $f(B) \in B^{'}$.
Dar un elemento de $B^{'}_{f(x_0)}$ o de $B_{x_0}$ es equivalente a dar el radio de la bola:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B^{'}(f(x_0), \epsilon)$$

Escojo

$$x^{'} \in B(x_0, \delta) \Rightarrow d(x_0, x^{'}) < \delta \Rightarrow d^{'}(f(x_0), f(x^{'})) < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x_0, x^{'}) < \delta \Rightarrow d^{'}(f(x_0), f(x^{'})) < \epsilon$$

**Nota Importante**

Todas las aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $x_0$ en el sentido del Cálculo I ($\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0/$ $|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$) son continuas en $x_0$ como aplicaciones de $(\mathbb{R}, T_u)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$. Por ejemplo: polinomios, trigonométricas...

**Proposición 2.0.2** Sean $(X, T)$,$(Y, T^{'})$ espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Son equivalentes:

1. $f$ es continua.
2. $f^{-1}(C^{'}) \in C_T$, $\forall C^{'} \in C_{T^{'}}$.
3. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall A \subset X$.

**Demostración**

- $1 \Rightarrow 2\|$ Sea $C^{'} \in C_{T'}$. Queremos ver que $f^{-1}(C^{'}) \in C_T \iff X\backslash f^{-1}(C^{'}) \in T$.
Pero $X\backslash f^{-1}(C^{'}) = f^{-1}(X\backslash C^{'})$. Como $C^{'} \in C_{T'}$, $Y\backslash C^{'} \in T^{'}$ y por hipótesis $f$ es continua $\Rightarrow$ $f^{-1}(Y\backslash C^{'}) = X\backslash f^{-1}(C^{'}) \in T \Rightarrow f^{-1}(C^{'}) \in C_T$.

- $2 \Leftarrow 1\|$ Se demuestra análogamente, cambiando abierto por cerrado en la demostración (se deja como ejercicio).

- $1 \Rightarrow 3\|$ Supongamos que $f$ es continua. Veamos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Sea $y \in f(\overline{A}) \Rightarrow \exists x \in \overline{A} : f(x) = y$. Sabemos que $f$ es continua en $x$. Elegimos $V^{'} \in N_y^{'}$. Entonces, $\exists V \in N_x$ tal que $f(V) \subset V^{'}$.
Como $x \in \overline{A}$ y $V \in N_x \Rightarrow \emptyset \neq V \cap A \Rightarrow \emptyset \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset V^{'} \cap f(A) \Rightarrow \emptyset \neq V^{'} \cap f(A)$.
Por tanto, $y \in \overline{f(A)} \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

- $3 \Leftarrow 1\|$ Sea $U^{'} \in T^{'}$. Queremos ver que $f^{-1}(U^{'}) \in T \iff X\backslash f^{-1}(U^{'}) \in C_T$. Para ello, veamos que $X\backslash f^{-1}(U^{'}) = \overline{X\backslash f^{-1}(U^{'})}$. Como $X\backslash f^{-1}(U^{'}) \subset \overline{X\backslash f^{-1}(U^{'})}$, solo nos queda probar la inclusión inversa. Para facilitar la notación, llamaremos $A = X\backslash f^{-1}(U^{'})$. Como suponemos que 3) se verifica, sabemos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Por tanto, $f(\overline{X\backslash f^{-1}(U')}) \subset \overline{f(X\backslash f^{-1}(U'))} \subset \overline{Y\backslash U'} = Y\backslash U^{'} \in C_{T'} \Rightarrow \overline{X\backslash f^{-1}(U')} \subset f^{-1}(Y\backslash U^{'}) = X\backslash f^{-1}(U^{'}) \Rightarrow f^{-1}(U^{'}) \in T$.

**Ejemplo 2.0.4** Sea la aplicación $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$.

- Si $T$ es la topología discreta, entonces $f$ es continua. Veámoslo:
Si $U^{'} \in T^{'} \Rightarrow f^{-1}(U^{'}) \subset X$. Como $T$ es la topología discreta, todos los conjuntos son abiertos. Concretamente, $f^{-1}(U^{-1}) \in T$.

- Si $T$ es la topología trivial, entonces $f$ es continua. Veámoslo:
$T^{'} = \{\emptyset, Y\}$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T$ y $f^{-1}(Y) = X \in T$.

**Ejemplo 2.0.5** Sea la aplicación $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$. Supongamos que $f$ es constante ($\exists y_0/\ f(x) = y_0$, $\forall x \in X$), entonces $f$ es continua. Comprobación:
Sea $U^{'} \in T^{'}$

$$f^{-1}(U^{'}) = \{x \in X : f(x) \in U^{'}\} = \begin{cases} \emptyset & si \quad y_0 \notin U^{'} \\ \\ X & si \quad y_0 \in U^{'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(U^{'}) \in T$$

**Ejemplo 2.0.6** Sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ constante ($\exists y_0/\ f(x) = y_0, \forall x \in X$), $(X, T)$ espacio topológico, $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$.
Sea $T_A = \{U \cap A : U \in T\}$. Sea la aplicación inclusión

$$i_A : A \longrightarrow X : i_A(a) = a, \forall a \in A$$

$$i_A : (A, T_A) \longrightarrow (X, T)$$

es una aplicación continua, pues, dado $U \in T$, $i_A^{-1}(U) = \{a \in A : a \in U\} = U \cap A \in T_A$.
La aplicación inclusión es siempre una aplicación continua si consideramos $T_A$.

**Ejemplo 2.0.7** Sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ una aplicación continua y $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$.
La restricción de $f$ al conjunto $A$ es la aplicación $f_{|A} : A \longrightarrow Y$ definida por $f_{|A}(a) = f(a)$,$\forall a \in A$.
Veamos que $f_{|A} : (A, T_A) \longleftarrow (Y, T^{'})$ es continua.
Para demostrarlo, observemos que $f_{|A} = f \circ i_A : A \longrightarrow X \longrightarrow Y$. Sabemos que ambas tienen el mismo dominio ($A$) y codominio ($Y$). Visto esto, fijémonos ahora en que $a \in A$, $f_{|A}(a) = f(a) = f(i_A(a)) = (f \circ i_A)(a)$.
Si $f$ es continua, como sabemos que $i_A : A \longrightarrow X$ es continua, entonces, la composición $f \circ i_A : A \longrightarrow Y$ es continua $\Rightarrow f_{|A} = f \circ i_A$ es continua.

**Ejemplo 2.0.8** Sea la aplicación $f:(X,T)\longrightarrow(Y,T^{'})$. Supongamos que $X\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$, $U_\alpha\in T$, $\forall\alpha\in I$. Entonces, $f_{|U_\alpha}$ es continua $\forall\alpha\in I\iff f$ es continua.
Comprobación:

- $\Leftarrow \|$ Ejemplo 4
- $\Rightarrow$ Sea $V\in T^{'}$. Por hipótesis $f^{-1}_{|U_\alpha}(V)\in T_{U_\alpha}$, $\forall\alpha\in I$.
  $f^{-1}_{|U_\alpha}(V)=\{x\in U_\alpha/\ f(x)\in V\}=\{x\in U_\alpha/\ x\in f^{-1}(V)\}=U_\alpha\cap f^{-1}(V)$.
  $U_\alpha\cap f^{-1}(V)\in T_{U_\alpha}$, $\forall\alpha\in I\rightsquigarrow U_\alpha\cap f^{-1}(V)=U_\alpha\cap W_\alpha$, $W_\alpha\in T\Rightarrow$ intersección de abiertos: $U_\alpha\cap f^{-1}(V)\in T\Rightarrow f^{-1}(V)=f^{-1}(V)\cap X=f^{-1}(V)\cap(\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(f^{-1}(V)\cap U_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(f^{-1}_{|U_\alpha}(V))\in T$.

**Nota:** En este ejemplo, no podemos cambiar $U_\alpha\in T$ por la hipótesis $U_\alpha\in C_T$. Si eso fuera cierto y $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mathbb{R}=\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$, con $\{x\}\in C_{T_U}\Rightarrow f_{|\{x\}}:(\{x\},T_{u|\{x\}})\longrightarrow(\mathbb{R},T_u)$ es continua por ser constante $\Rightarrow f$ continua, y eso valdría para cualquier función real. Pero podemos encontrar numerosos contraejemplos, por lo que habríamos llegado a un absurdo.

**Ejemplo 2.0.9** Sea la aplicación $f:(X,T)\longrightarrow(Y,T^{'})$. Supongamos que $X=C_1\cup...\cup C_k$, $k\in\mathbb{N}$, $C_i\in C_T$, $\forall i\in\Delta_k$.
Entonces, $f_{|C_i}$ es continua $\iff f$ es continua. Comprobación:

- $\Leftarrow \|$ Cierta siempre
- $\Rightarrow \| f$ continua $\iff f^{-1}(C^{'})\in C_T, \forall C_{'}\in C_{T^{'}}$. Sea $C^{'}\in C_{T^{'}}$, $f^{-1}(C^{'})=f^{-1}(C^{'})=f^{-1}(C^{'})\cap X=f^{-1}(C^{'})\cap(\bigcup_{i=1}^k C_i)=\bigcup_{i=1}^k(f^{-1}(C^{'})\cap C_i)=\bigcup_{i=1}^k f^{-1}_{|C_i}(C^{'})$.
  $f^{-1}_{|C_i}(C^{'})=F_i\cap C_i\in C_T$, con $F_i,C_i\in C_T\Rightarrow\bigcup_{i=1}^k f^{-1}_{|C_i}(C^{'})\in C_T$.

**Definición 2.0.2** Una aplicación $f:(X,T)\longrightarrow(Y,T^{'})$ entre dos espacios topológicos es:

1. Abierta si $f(U)\in T^{'}$, $\forall U\in T$.
2. Cerrada si $f(C)\in C_{T^{'}}$, $\forall C\in C_T$.

**Definición 2.0.3** Una aplicación $f:(X,T)\longrightarrow(Y,T^{'})$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y $f^{-1}$ (aplicación inversa) es continua.

**Ejemplo 2.0.10** Sean $X$ un conjunto, $T_1\subset T_2$, $T_1\neq T_2$ topologías en $X$.

$$I_{d_x}:(X,T_2)\longrightarrow(X,T_1)\text{ es biyectiva y continua }(T_1\subset T_2).$$

$$I_{d_x}^{-1}:(X,T_1)\longrightarrow(X,T_2)\text{ no es continua }(T_2\not\subset T_1).$$

Es por esto por lo que en un homeomorfismo es muy necesario recalcar la condición $f^{-1}$ continua, porque $f$ continua y biyectiva no lo garantiza.

**Nota**

"Un topólogo no puede diferenciar una rosquilla de una taza".

Un espacio topológico puede deformarse en otro mediante un homeomorfismo. Aquellos espacios que se relacionan así se llaman homeomorfos y serán el mismo topológicamente.

**Definición 2.0.4** Un invariante topológico es una propiedad que se preserva por homeomorfismos. Dos espacios topológicos tales que existe un homeomorfismo entre ellos tienen los mismos invariantes topológicos.

**Nota:** Si $f$ es biyectiva, $f^{-1}$ es continua $\Longleftrightarrow (f^{-1})^{-1}(U) \in T^{'}, \forall U \in T \Longleftrightarrow f(U) \in T^{'}, \forall U \in T \Longleftrightarrow f$ abierta. Por tanto, $f$ es homeomorfismo si $f$ es biyectiva, continua y abierta.

**Definición 2.0.5** Diremos que $(X, T)$ es homeomorfo a $(Y, T^{'})$ si existe un homeomorfismo $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$. Lo indicaremos por $(X, T) \approx (Y, T^{'})$.

**Propiedades 2.0.0** "Ser homeomorfo a" es una relación de equivalencia en el conjunto de los espacios topológicos.

- **Reflexiva:** $(X, T) \approx (X, T)$.
- **Simétrica:** $(X, T) \approx (Y, T^{'}) \Rightarrow (Y, T^{'}) \approx (X, T)$.
- **Transitiva:** $(X, T) \approx (Y, T^{'})$ y $(Y, T^{'}) \approx (Z, T^{''}) \Rightarrow (X, T) \approx (Z, T^{''})$.

**Definición 2.0.6** Dos conjuntos tienen el mismo cardinalsi existe una aplicación biyectiva etre ellos.

**Ejemplo 2.0.11** "Tener el mismo cardinal" es un invariante topológico. Si $(X, T) \approx (Y, T^{'})$, entonces $X$ es $Y$ tienen el mismo cardinal.

**Ejemplo 2.0.12** La propiedad de Hausdorff es un invariante topológico.
Si $(X, T)$ es $T_2$ y $(X, T) \approx (Y, T^{'})$ entonces $(Y, T^{'})$ es $T_2$. Veámoslo:
Si $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es un homeomorfismo y $x \in X$, $f(N_x) = \{f(U)/U \in N_x\} = N^{'}_{f(x)}$.
Sea $U \in N_x \Rightarrow \exists W \in T$ tal que $x \in W \subset U \Rightarrow f(x) \in f(W) \subset f(U) \Rightarrow f(U) \in N^{'}_{f(x)} \Rightarrow f(N_x) \subset N^{'}_{f(x)}$.
$N^{'}_{f(x)} \subset f(N_x)$ se prueba usando $f^{-1}$ $(f^{-1}(N^{'}_{f(x)}) \subset N_x \Longleftrightarrow N^{'}_{f(x)} \subset f(N_x)$.

**Ejercicio**

Probar que si $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es homeomorfismo entonces $f$ es cerrada.

**Ejercicio**

Sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es homeomorfismo. Probar lo siguiente:
1. Sea $x \in X$, $B_x$ base de entornos de $x \Rightarrow f(B_x) = \{f(B)/B \in B_x\}$ es base de entornos de $f(x)$.
2. Si $\mathbb{B}$ es base de $T$, entonces $f(\mathbb{B}) = \{f(B)/B \in \mathbb{B}\}$ es base de $T^{'}$.

**Consecuencia**

Las propiedaes $AN-I$, $AN-II$ son invariantes topológicos.
- $AN-I \|$ Todo puto admite una base de entornos numerable.
  Supongamos que $(X, T)$ es $AN-I$ y $(X, T) \approx (Y, T^{'})$. Sea $y \in Y$, $\exists x \in X$ tal que $y = f(x)$. Como $(X, T)$ es $AN-I$ existe una base numerable de entornos $B_x$ de $x \Rightarrow f(B_x)$ es base de entornos de $y$. Además, es numerable $\Rightarrow (Y, T^{'})$ es $AN-I$.
- $AN-II \|$ Se deduce fácilmente de 2 (se deja como ejercicio).

Plantaemos a continuación el siguiente problema:
Sea $X$, $R$ una relación de equivalencia y $X/R$ el conjunto cociente. Definamos $\pi : X \longrightarrow X/R$ tal que $x \longmapsto \overline{x} = [x]$.

Supongamos $(X,T)$ un espacio topológico. ¿Qué topología puedo poner en $X/R$ de manera que $\pi$ sea continua?
Por ejemplo, la trivial, ¿cuál es aquella lo más fina posible?
Veamos distintos ejemplos y escenarios para situarnos:

1. $f : X \longrightarrow Y$ aplicación con $(X,T)$ un espacio topológico. ¿Cuál es la topología más fina en $Y$ que hace continua a $f$? La topología trivial en $Y$ hace continua a $f$, pero es la más gruesa posible.
2. $f_i : X_i \longrightarrow Y$ con $i \in I$ aplicación, con $(X_i, T_i)$ espacio topológico. ¿Cuál es la topología más fina en $y$ que hace continua a todas las $f_i$?
   Veámoslo todo a continuación.

**Proposición 2.0.3** Sea $f_i : X_i \longrightarrow Y$, $i \in I$ una familia de alicaciones. Supongamos que $(X_i, T_i)$ es un espacio topológico, $\forall i \in I$. Entonces:

$$T^{'} = \{V \subset Y / f_i^{-1}(V) \in T_i : \forall i \in I\}$$

es una topología en $Y$ que verifica lo siguiente:

1. $f_i : (X_i, T_i) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es continua $\forall i \in I$.
2. Si $T^{''}$ es otra topología en $Y$ tal que $f_i : (X_i, T_i) \longrightarrow (Y, T^{''})$ es continua $\forall i \in I$, entonces, $T^{''} \subset T^{'}$.
   Es decir, $T^{'}$ es la topología más fina que hace continua a $\{f_i\}_{i \in I}$.

**Demostración**

- $T^{'}$ es topología:
  1) $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_i$, $\forall i \in I$, $f_i^{-1}(Y) = X_i \in T_i$, $\forall i \in I \Rightarrow \emptyset, Y \in T^{'}$.
  2) Sea $\{V_j\}_{j \in J} \subset T^{'} \Rightarrow f_i^{-1}(V_j) \in T_i$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$
     ($i$ fijo), $f_i^{-1}(\bigcup_{j \in J} V_j) = \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(V_j) \in T_i \Rightarrow f_i^{-1}(\bigcup_{j \in J} V_j) \in T_i$, $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{j \in J} V_j \in T^{'}$.
  3. Sea $V_1, ..., V_k \in T^{'} \Rightarrow f_i^{-1}(V_j) \in T^{'}$, $\forall i \in I$, $\forall j \in \Delta_k$
     ($i$ fijo), $f_i^{-1}(V_1 \cap ... \cap V_k) = f_i^{-1}(V_1) \cap ... \cap f_i^{-1}(V_k) \in T_i$, $\forall i \in I \Rightarrow V_1 \cap ... \cap V_k \in T^{'}$.

1. $f_i : (X_i, T_i) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es continua $\forall i \in I$.
   Sea $V \in T^{'}$, $f_i^{-1}(V) \in T_i$ Sí, por definición de $T^{'}$.
2. Supongamos que $T^{''}$ es otra topología en $Y$ tal que $f_i : (X_i, T_i) \longrightarrow (Y, T^{''})$ es continua $\forall i \in I$.
   Sea $V \in T^{''} \Rightarrow f_i^{-1}(V) \in T_i$, $\forall i \in I \Rightarrow T^{''} \subset T^{'} \Rightarrow T^{'}$ la mas fina.

**Definición 2.0.6** La $T^{'}$ definida en la proposición 2.0.3 se hace llamar Topología Asociada a la familia de aplicaciones $\{f_i\}_{i \in I}$.

**Definición 2.0.7** Si $(X,T)$ es un espacio topológico y $R$ una relación de equivalencia en $X$, la Topología Cociente $T/R$ es la topología final para la aplicación $\pi : (X,T) \longrightarrow X/R$:

$$T/R = \{V \subset X/R : \pi^{-1}(V) \in T\}$$

**Propiedad 2.0.1 Universal de la topología final** Sea $f_i : X_i \longrightarrow X$ una familia de aplicaciones ($i \in I$), $T_i$ una topología en $X_i$, $T$ la topología inducida por $f_i : (X_i, T_i) \longrightarrow X$.
Sea $(Y, T^{'})$ otro espacio topológico, y $g : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Entonces $g : (X,T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es continua si y solo si, $g \circ f_i : (X_i, T_i) \Rightarrow (Y, T^{'})$ es continua $\forall i \in I$.
**Demostración**

- $\Rightarrow \|$ $g$ continua $\Rightarrow g \circ f_i$ continua (composición de continuas).

- $\Leftarrow \|$ Supongamos que $g \circ f_i$ es continua $\forall i \in I$. Sea $V \in T^{'}$, queremos ver que $g^{-1}(V) \in T \iff f_i^{-1}(g^{-1}(V)) \in T_i$, $\forall i \in I \iff (g \circ f_i)^{-1}(V) \in T$, $\forall i \in I$.

**Ejemplo 2.0.13** Sea $(X, T)$ un espacio topológico, $R$ una relación de equivalencia en $X$ y $\pi : X \longrightarrow X/R$ la proyección a $X/R$.
La topología final para $\pi : (X, T) \longrightarrow X/R$ es, por definición, la topología cociente $T/R$:

$$g : (X/R, T/R) \longrightarrow (Y, T^{'}) \text{ continua} \iff g \circ \pi : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'}) \text{ continua.}$$

¿Cuál es la topología más gruesa en $X$ que hace continuas a todas estas aplicaciones?

Supongamos que $I = \{1\}$. Llamemos $f = f_1 : X \longrightarrow (X_1, T_1)$. Para que la función $f : (X, T) \longrightarrow (X_1, T_1)$ sea continua, debe verificarse $\{f^{-1}(V)/V \in T_1\} \subset T$ (se puede comprobar que es topología). Como estamos buscando la topología con la menor cantidad posible de abiertos que hace continua a la aplicación $f$, tomamos $T = \{f^{-1}(V)/V \in T_1\}$. La llamaremos Topología Inicial para $f : X \longrightarrow (X_1, T_1)$.

Si ahora consideramos el proble general ($I$ arbitrario), tenemos $f_i : X \longrightarrow (X_i, T_i)$, $\forall i \in I$. Cualquier topología $T$ en $X$ que haga continuas a estas aplicaciones tiene que cumplir la propiedad $V_i \in T_i \Rightarrow f_i^{-1}(V_i) \in T \Rightarrow S = \{f_i^{-1}(V_i)/V_i \in T_i \text{ para algún } i \in I\} \subset T$. Pero esta, por lo general, no es topología. Sea $T(S) = \bigcap_{S \subset T} T$ la topología más gruesa en $X$ que contiene a $S$. A $T(S)$ la llamaremos topología inicial para la familia de aplicaciones $f_i : X \longrightarrow (X_i, T_i)$.

Hablando de bases y subbases...
Si $S \subset P(X)$ y $\bigcup_{K \in S} U = X \Rightarrow \{U_i, ..., U_k/k \in \mathbb{N},\, U_i \in S,\, \forall i \in \Delta_k\} = \mathbb{B}(S)$ es base de $T(S)$. Como en nuestro caso, $X = f_i^{-1}(X_i) \Rightarrow X \in S \Rightarrow \bigcup_{U \in S} U = X$.
Por tanto, $\mathbb{B} = \mathbb{B}(S) = \{f_i^{-1}(V_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_k}^{-1}(V_{i_k})/k \in \mathbb{N}, i_j \in I, j \in \Delta_k, V_{i_j} \in T_{i_j}, j \in \Delta_k\}$ es base de $T(S)$.

## 2.1. Espacios Producto

**Ejemplo 2.1.0 Espacio Producto.** Sea $k \geq 2$, $(X_1, T_1), ..., (X_k, T_k)$ espacios topológicos (pueden ser iguales, o no). El producto cartesiano $X_1 \times ... \times X_k$ es el conjunto $X_1 \times ... \times X_k = \{(x_1, ..., x_k)/x_i \in X_i, i \in \Delta_k\}$.
La aplicación $p_i : X_1 \times ... \times X_k \longrightarrow X_i$ es la aplicación i-ésima o proyección sobre el i-ésimo factor. Así, $(x_1, .., x_i, .., x_k) \longmapsto x_i$.

La topología inicial para las aplicaciones $p_i : X_1 \times ... \times X_k \longrightarrow (X_i, T_i)$, $i \in \Delta_k$ es la topología producto en $X_1 \times ... \times X_k$. La denotaremos por $T_1 \times .... \times T_k$.
De este modo, tendríamos $p_i : (X_1 \times ... \times X_k, T_1 \times ... \times T_k) \longrightarrow (X_i, T_i)$, $i \in \Delta_k$ continua.
Si $A_i \subset X_i$, $\forall i \in \Delta_k$, definimos $A_1 \times ... \times A_k \subset X_1 \times ... \times X_k$ como el conjunto $A_1 \times ... \times A_k = \{(a_1, ..., a_k)/a_i \in A_i, \forall i \in \Delta_k\}$.
Tomamos $p_1^{-1}(A_1) = \{(x_1, ..., x_k) : p_1((x_1, ..., x_k)) \in A_1\} = A_1 \times X_2 \times ... \times X_k$.
Deducimos por tanto que $A_1 \times A_2 = p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2)$.

**Propiedad 2.1.0** En las condiciones anteriores, $A_i \subset X_i, \forall i \in \Delta_k$, $A_1 \times ... \times A_k = p_1^{-1}(A_1) \cap ... \cap p_k^{-1}(A_k)$.
**Demostración:** $(x_1, ..., x_k) \in A_1 \times ... \times A_k \iff x_i \in A_i$, $\forall i \in \Delta_k \iff (x_1, ..., x_k) \in p_i^{-1}(A_i)$, $\forall i \in \Delta_k \iff (x_1, ..., x_k) \in p_1^{-1}(A_1) \cap ... \cap p_k^{-1}(A_k)$.

Una base de la topología producto es:

$$B = \{p_1^{-1}(U_1) \cap ... \cap p_k^{-1}(U_k)/U_i \in T_i \forall i \in \Delta_k\} = \{U_1 \times ... \times U_k/U_i \in T_i \forall i \in \Delta_k\}$$

Una base $B$ de $T_1 \times ... \times T_k$ está formada por productos de abiertos en las topologías $T_i$.

**Ejemplo 2.1.1** En el espacio $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, T_u \times T_u)$, la familia $B = \{U \times V : U, V \in T_u\}$ es base de $T_u \times T_u$ ($U$ y $V$ pueden ser iguales, o no).

**Propiedad 2.1.1 Universal de la Topología Inicial.** Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, $X$ un conjunto, $f_i : X \longrightarrow X_i$, $i \in I$ una familia de aplicaciones. Supongamos que $T$ e la topolgía inicial para la familia $f_i : X \longrightarrow (X_i, T_i)$. Si $(Z, T^{'})$ es otro espacio topológico y $g : Z \longrightarrow X$ una aplicacion, entonces $g : (Z, T^{'}) \longrightarrow (X, T)$ es continua si y solo si, $f_i \circ g : (Z, T^{'}) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua $\forall i \in I$.
**Demostración:**

- $\Rightarrow$ Si $g$ es continua, como $f_i : (X, T) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua $\forall i \in I$, entonces $f_i \circ g : (Z, T^{'}) \longrightarrow (X_i, T_i)$, también será continua por ser composición de continuas, $\forall i \in I$.
- $\Leftarrow$ Supongamos ahora que $f_i \circ g$ es continua $\forall i \in I$. Tomamos $U \in T$ y veamos si $g^{-1}(U) \in T^{'}$. Sea $\{B_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{B}$ tal que $U = \bigcup_{j \in J} B_j \Rightarrow g^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} g^{-1}(B_j)$. Si probamos que $g^{-1}(B_j) \in T^{'}$, $\forall j \in J$, tendriamos que $g^{-1}(U) \in T^{'}$(unión de abiertos de $T^{'}$).
  Sea $B \in \mathbb{B}$. Comprobemos que $g^{-1}(B) \in T^{'}$. Si $B \in \mathbb{B}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ y $\exists i_1, ..., i_k \in I$, $U_{i_1} \in T_{i_1}, ..., U_{i_k} \in T_{i_k}$ tales que $B = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \rightsquigarrow g^{-1}(B) = g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})) = g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})) \cap ... \cap g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})) = (f_{i_1} \circ g)^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap (f_{i_k} \circ g)^{-1}(U_{i_k}) \in T^{'}$ por ser intersección finita de elementos de $T^{'}$.

**Nota**

La inversa de cualquier aplicación respeta la unión arbitraria, la intersección arbitraria y el complementario.

**Proposición 2.1.0** Sean $(X_1, d_1), ..., (X_k, d_k)$ con $k \geq 2$ espacios métricos. Se define en $X \times X$, donde $X = X_1 \times ... \times X_k$ las aplicaciones (para $x = (x_1, ..., x_k)$ e $y = (y_1, ..., y_k)$):

- $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq k}\{d_i(x_i, y_i)$
- $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{k} d_2(x_i, y_i)$
- $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i, y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$

Entonces $d_\infty$, $d_2$, $d_1$ son distancias en $X$ y son métricamente equivalentes. Además, $T_{d_\infty} = T_{d_1} \times ... \times T_{d_k}$. También $T_{d_\infty} = T_{d_1} = T_{d_2}$.

La demostración se deja como ejercicio.

**Ejemplo 2.1.2** Sea $\mathbb{R}^2$, $T_u = T_{d_2} = T_d \times T_d$, con $(\mathbb{R}, d)$, distancia usual. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{2} d(x_i, y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$, donde $d_2$ es la distancia tal y como se define para el producto de espacios métricos. Por su parte, $T_u$ en $\mathbb{R}^2$ es la topología asociada a la distancia euclídea, que coincide con la distancia $d_2$ tal y como la hemos definido al comienzo de esta sección $\Rightarrow T_u = T_{d_2}$. Pero acabamos de ver que $T_{d_2} = T_d \times T_d$. Entonces $T_{d_2}$ es una topología producto y tiene todas las propiedades de una topología producto. En particular, $f : (X, T) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, T_u)$ es continua si y solo si, $p_i \circ f : (X, T) \longrightarrow (\mathbb{R}, T_d)$ es continua, $\forall i = 1, 2$.
Por ejemplo, $f : (\mathbb{R}, T_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, T_u)$ tal que $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ es continua porque $p_1 \circ f = \cos$ y $p_2 \circ f = \sin$, que son aplicaciones continuas de $(R, T_u)$ en $(R, T_u)$.

**Ejemplo 2.1.3** En $\mathbb{R}^n$, $T_u = T_d \times ... \times T_d$, $T_d = T_u$ en $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Por tanto, $(\mathbb{R}^n, T_u)$ es un espacio producto.

**Propiedad 2.1.2** Sabemos que las aplicaciones $p_i : (X_1 \times ... \times X_k, T_1 \times ... \times T_k)$ son continuas $\forall i \in \Delta_k$. Son además abiertas, $\forall i \in \Delta_k$.
**Demostración:** Sea $\mathbb{B} = \{U_1 \times ... \times U_k / U_i \in T_i,\ \forall i \in \Delta_k\}$ una base de $T_1 \times ... \times T_k$. Tenemos que $p_i(U_1 \times ... \times U_k) = U_i \in T_i$. Hemos probado que $p_i(B) \in T_i$, $\forall B \in \mathbb{B}$. Si $U \in T_1 \times ... \times T_k$, $\exists \{B_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{B}$ tal que $U = \bigcup_{j\in J} B_j \Rightarrow p_i(U) = p_i(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} p_i(B_j) \in T_i$.

**Ejemplo 2.1.4** Las proyecciones en un espacio producto no son cerradas en general.
Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, T_d \times T_d)$, con $d$ la distancia usual en $\mathbb{R}^2$. Sea el conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$, cerrado en $(\mathbb{R}^2, T_d \times T_d)$. Pero $p_1(C) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ no es cerrado en $(\mathbb{R}, T_d)$, pues $\{0\} \notin T_d$.
Veamos entonces que $C$ es cerrado. Para ello, solo hace falta comprobar que la aplicación $h : (\mathbb{R}^2, T_d \times T_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, T_d)$ definida por $h(x,y) = x \cdot y$ es continua. En este caso $C = h^{-1}(\{1\})$. Como $\{1\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, T_d)$, entonces $h^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / h(x,y) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y = 1\} = C$ es cerrado.
Veamos ahora que $h(x,y) = x \cdot y$ es continua: $h(x,y) = x \cdot y = p_1(x,y) \cdot p_2(x,y) = (p_1 \cdot p_2)(x,y)$. Que $h$ es continua se sigue del lema siguiente.

**Lema 2.1.0**

Sean $f, g : (X,T) \longrightarrow (\mathbb{R}, T_d)$ aplicaciones continuas de un espacio topológico $(X,T)$ en $(\mathbb{R}, T_d)$. Definimos $f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (suma y producto de $f$ y $g$) como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,$\forall x \in \mathbb{X}$.

Entonces $f+g$ y $f \cdot g$ son continuas.

**Propiedad 2.1.3** Sean $(X_1, T_1), ..., (X_k, T_k)$ espacios topológicos. Sea $\mathbb{B}_i$ base de $T_i$, $\forall i \in \Delta_k$. Entonces, $\mathbb{B}_1 \times ... \times \mathbb{B}_k = \{B_1 \times ... \times B_k / B_i \in \mathbb{B}_i,\ \forall i \in \Delta_k\}$ es una base de $T_1 \times ... \times T_k$.
**Demostración:** Sea $U \in T_1 \times ... \times T_k$ y sea $x \in U$. Para probar que $\mathbb{B}_1 \times ... \times \mathbb{B}_k$ es base, basta con encontrar un $B \in \mathbb{B}_1 \times ... \times \mathbb{B}_k$ tal que $x \in B \subset U$. Como $\{U_1 \times ... \times U_k / U_i \in T_i,\ \forall i \in \Delta_k\}$ es base de $T_1 \times ... \times T_k$, $\exists U_1 \in T_1, ..., U_k \in T_k$ tales que $x \in U_1 \times ... \times U_k \subset U$. Teniendo que cuenta que $x = (x_1, ..., x_k)$, $x_i \in U_i$, $i \in \Delta_k$, como $\mathbb{B}_i$ es base de $T_i$, existe $B_i \in \mathbb{B}_i$ tal que $x_i \in B_i \subset U_i$. Entonces, $x = (x_1, ..., x_k) \in B_1 \times ... \times B_k \subset U_1 \times ... \times U_k \subset U$.

**Propiedad 2.1.4** Sean $(X_i, T_i)$, $i \in \Delta_k$ espacios topológicos, y sean $A_i \in X_i$, $\forall i \in \Delta_k$. Entonces, $\overline{A_1 \times ... \times A_k} = \overline{A_1} \times ... \times \overline{A_k}$.
**Demostración:** Sea $x \in X_1 \times ... \times X_k$. Sabemos que $\{U_1 \times ... \times U_k / U_i \in T_i,\ \forall i \in \Delta_k\} = \mathbb{B}$ es base de $T_1 \times ... \times T_k$ y que $\mathbb{B}(x) = \{U \in \mathbb{B} / x \in U\}$ es base de entornos de $x$. Sabemos tambien que $x \in \overline{A_1 \times ... \times A_k} \Longleftrightarrow B \cap (A_1 \times ... \times A_k) \neq \emptyset$, $\forall B \in \mathbb{B}(x)$. Por su parte, $x = (x_1, ..., x_k) \in \overline{A_1 \times ... \times A_k} \Longleftrightarrow (U_1 \times ... \times U_k) \cap (A_1 \times ... \times A_k) = \emptyset$, $\forall U_i \in T_i$ tal que $x_i \in U_i \Longleftrightarrow (U_1 \cap A_1) \times ... \times (U_k \cap A_k) \neq \emptyset$, $\forall U_i \in T_i$ tal que $x_i \in U_i \Longleftrightarrow U_i \cap A_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \Delta_k$, $\forall U_i \in T_i$ tal que $x_i \in U_i \Longleftrightarrow x_i \in \overline{A_i}$, $\forall i \in \Delta_k \Longleftrightarrow x = (x_1, ..., x_k) \in \overline{A_1} \times ... \times \overline{A_k}$.

## 2.2. Espacios cociente

**Definición 2.2.0** Sea $f : (X,T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Diremos que es una identificación si $T^{'}$ es la topología final para $f$ y supongamos $f$ sobreyectiva.

**Ejemplo 2.2.0** Si $(X,T)$ es un espacio topológico y $R$ una relación de equivalencia, la aplicación proyección $p : (X,T) \longrightarrow (X/R, T/R)$ es una identificación.
Si $f : (X,T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es una aplicación y $T^{'}$ es la topología final para $f$, entonces $V \in T^{'} \Longleftrightarrow f^{-1}(V) \in T$. $T^{'} = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \subset T\}$.

**Definición 2.2.1** Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que $U \subset X$ es $f$-Saturado si $U = f^{-1}(f(U))$.

Dado un $x \in U \Rightarrow f(x) \in f(U) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(U))$. Entonces la parte relevante de esta definición es la inclusión $f^{-1}(f(U)) \subset U$.
Si un conjunto es $f-$Saturado $\Rightarrow U = f^{-1}(f(U)) = f^{-1}(\bigcup_{x \in U} f(\{x\}) = \bigcup_{x \in U} f^{-1}(f(\{x\})) \Rightarrow$ si $x \in U$, todos los puntos de $X$ con la misma imagen que $x$ pertenecen a $U$.

**Definición 2.2.2** Una aplicación $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es casi-abierta si la imagen de todo abierto $U \in T f-$Saturado es abierto en $T$.

**Definición 2.2.3** Una aplicación $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es casi-cerrada si la imagen de todo abierto $U \in T f-$Saturado es cerrado en $T$.

**Proposición 2.2.0** Sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ una aplicación sobreyectiva. Entonces $f$ es una indentificación si y solo si es continua y casi-abierta (o casi-cerrada).
**Demostración:**

- $\Rightarrow$ Supongamos que $f$ es identificación. Entonces, $f$ es continua puesto que $T^{'}$ es la topología final. Veamos que $f$ es casi-abierta. Para ello, sea $U \in T$ un conjunto $f-$Saturado. Queremos ver que $f(U) \in T^{'}$. Como $T^{'}$ es la topología final para $f$, $f(U) \in T^{'} \iff f^{-1}(f(U)) \in T$. Como $U$ es $f-$Saturado, $U = f^{-1}(f(U)) \in T$ (ya que $U$ es abierto).
- $\Leftarrow$ Supongamos que $f$ es continua y casi-abierta. Para comprobar que $f$ es una identificación, tenemos que ver que $f$ es sobreyectiva (lo es por hipótesis) y que $T^{'} = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$. Como $\{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$ es la topología final para $f$, y $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es continua, entonces $T^{'} \subset \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$.
  Veamos ahora la otra inclusión. Sea $V \subset Y$ tal que $f^{-1}(V) \in T$. El conjunto $f^{-1}(V)$ es saturado (hay que comprobar que $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(f(f^{-1}(V)))$. Como $f$ es casi-abierta, $f(f^{-1}(V)) \in T^{'}$. Pero $V = f(f^{-1}(V))$ por ser $f$ sobreyectiva. Por tanto, $V \in T^{'}$. Concluimos que $T^{'} = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\} \Rightarrow T^{'}$ es la topología final para $f$ y $f$ es identificación.

**Definición 2.2.4** Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación, podemos definir en $X$ la relación de equivalencia $R_f$ por:

$$xR_f x^{'} \iff f(x) = f(x^{'})$$

Definimos la aplicación $\tilde{f} : X/R_f \longrightarrow Y$ tal que $\tilde{f}([x]) = f(x)$.
La aplicación $\tilde{f}$ siempre es inyectiva ($\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x^{'}]) \Rightarrow f(x) = f(x^{'}) \Rightarrow xR_f x^{'} \Rightarrow [x] = [x^{'}]$). Además, $\tilde{f}$ también es sobreyectiva $\iff f$ es sobreyectiva ($f(X) = \tilde{f}(X/R_f)$.
De todo esto concluimos que, si $f : X \longrightarrow Y$, es sobeyectiva, entonces $\tilde{f} : X/R_f \longrightarrow Y$ es biyectiva.

**Teorema 2.2.0**

Sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ una aplicación sobreyectiva entre espacios topológicos. Entonces $\tilde{f} : (X/R_f, T/R_f) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es un homeomorfismo si y solo si $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es una identificación.

**Demostración**

- $\Leftarrow$ Supongamos que $f$ es una identificación y veamos que $\tilde{f}$ es homeomorfismo. Por un lado, $\tilde{f}$ es sobreyctiva porque $f$ lo es, y siempre es inyectiva $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ es biyectiva. Además, $\tilde{f} : (X/R_f, T/R_f) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es continua $\Longleftrightarrow$ $\tilde{f} \circ \pi : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es continua. Pero $\pi \circ \tilde{f} = f$, que es continua por ser identificación. Solo nos falta comprobar que $\tilde{f}$ es abierta. Para ello, tomemos un $V \in T/R_f \Rightarrow \pi^{-1}(V) \in T$, $f(\pi^{-1}(V)) = \{f(x) : x \in \pi^{-1}(V)\} = \{\tilde{f}(\pi(x)) : \pi(x) \in V\} = \tilde{f}(V)$.
  Si probamos que $\pi^{-1}(V)$ es $f-$Saturado, como $f$ es casi-abierta por ser identificación, $f(\pi^{-1}(V)) \in T^{'} \Rightarrow \tilde{f}(V) \in T^{'}$. Entonces $V \in T/R_f \Rightarrow \tilde{f}(V) \in T^{'}$, lo que implica que $\tilde{f}$ es abierta. Como $\tilde{f}$ es continua, biyectiva y abierta, es homeomorfismo.
- $\Rightarrow$ Supongamos que $\tilde{f}$ es homeomorfismo y veamos que $f$ es una identificación (continua y casi-abierta). Como $\pi \circ \tilde{f} = f$, $f$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Queda ver que $f$ es casi-abierta. Para ello, sea $V \in T$ un abierto $f-$Saturado. Queremos ver que $f(V) \in T^{'}$. Como $f(V) = \tilde{f}(\pi(V))$, si probamos que $\pi(V) \in T/R_f$ habriamos terminado porque $\tilde{f}$ es un homeomorfismo, y $\tilde{f}(\pi(V)) \in T^{'}$. Pues bien: $\pi(V) \in T/R_f \Longleftrightarrow \pi^{-1}(\pi(V)) \in T$. Como $V$ es $f-$Saturado, veamos que $V = \pi^{-1}(\pi(V))$:
  Si $x \in V \Rightarrow \pi(x) \in \pi(V) \Rightarrow x \in \pi^{-1}(\pi(V)) \Rightarrow V \subset \pi^{-1}(\pi(V))$. Busquemos la otra inclusión:
  Sea $x \in \pi^{-1}(\pi(V)) \Rightarrow \pi(x) \in \pi(V) \Rightarrow \exists x^{'} \in V$ tal que $\pi(x) = \pi(x^{'})$. Por tanto, si $x \in \pi^{-1}(\pi(V))$, $\exists x^{'} \in V$ tal que $f(x) = f(x^{'}) \Rightarrow x \in V$.

**Propiedad 2.2.0** Sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ una aplicación continua y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$ que converge al punto $x \in X$. Entonces, $f(x_i) \longrightarrow f(x)$.
**Demostración:** Sea $V \in N^{'}_{f(x)}$. Como $f$ es continua en $x$, $\exists U \in N_x$ tal que $f(U) \subset V$. Como $x_i \longrightarrow x$, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U$, $\forall i \geq i_0 \Rightarrow f(x_i) \in f(U) \subset V$, $\forall i \geq i_0$.

**Ejercicio**

Sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ una aplicación con la siguiente propiedad:
*Si* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ *converge a* $x \in X$, *entonces* $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset Y$ *converge a* $f(x)$.
Probar que $f$ es continua si $(X, T)$ es $AN-I$.

# 3. Espacios Conexos y Compactos

## 3.1. Espacios conexos

**Definición 3.1.0** Sea $(X, T)$ un espacio topológico. Diremos que es conexo si **no** existen $A, B \in T$ tales que:

1. $A, B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = X$
3. $A \cap B = \emptyset$

**Ejemplo 3.1.0** El espacio topológico $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, (T_u)_{\mathbb{R}\backslash\{0\}})$ no es conexo dado que $\mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y $(-\infty, 0) \cap (0, +\infty) \neq \emptyset$.

**Nota:** Intuitivamente, un espacio topológico conexo no se puede partir en trozos abiertos.

**Nota:** Si existen $A, B \subset X$ tales que $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B = X\backslash A$ y $A = X\backslash B$.
Si $A, B \in T$ son tales que $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, entonces $A, B \in C_T$. En la definición de conjuntos conexos, podemos cambiar abierto por cerrado:

$$(X, T) \text{ es conexo si } \nexists F, G \in C_T \text{ tales que } F, G \neq \emptyset,\ F \cup G = X,\ F \cap G = \emptyset.$$

**Definición 3.1.1** Un subconjunto $C \subset X$ es conexo si $(C, T_C)$ es conexo. Si $(C, T_C)$ es conexo, $\nexists A, B \in T_C$ tales que $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = C$, $A \cap B = \emptyset$.

- Si $A \in T_C \Rightarrow \exists U \in T$ tal que $A = U \cap C$
- Si $B \in T_C \Rightarrow \exists V \in T$ tal que $B = V \cap C$
- Si $(C, T_C)$ es conexo, no existen $U, V \in T$ tales que
  - 1. $U \cap C$, $V \cap C \neq \emptyset$
  - 2. $(U \cap C) \cup (V \cap C) = C \iff C \subset U \cup V$
  - 3. $(U \cap C) \cap (V \cap C) = \emptyset \iff U \cap V \cap C = \emptyset$

**Ejemplo 3.1.1** Un intervalo es un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ verificando:

- Si $x, y \in I$ entonces $[x, y] = \{x + t \cdot (y - x)/t \in [0, 1]\} \subset I$
- Si $J \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces $J$ no es conexo, $\exists x, y \in J$, con $x < y$ tales que $x < z$ y $z \notin J$.

Sean $U = (-\infty, z)$,$V = (z, +\infty)$ ambos abiertos de $T_u$. Tomamos $x \in U \cap J \Rightarrow U \cap J \neq \emptyset$ e $y \in V \cap J \Rightarrow V \cap J \neq \emptyset$. Luego, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap V \cap J = \emptyset$ y $J \subset \mathbb{R}\backslash\{z\} = (-\infty, z) \cup (z, +\infty) = U \cup V$. Todo esto equivale a que si $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo $\Rightarrow$ conexo.

**Ejemplo 3.1.2** Sea $(X, T)$ un espacio topológico verificando: si $A, B \in T$, $A, B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $(X, T)$ es conexo.

1. $(X, T_t)$: el único abierto no vacío es $X$
2. $(X, T_{CF})$: $X$ infinito, $A = X\backslash F_1$, $B = X\backslash F_2 \Rightarrow A \cap B = X\backslash(F_1 \cap F_2) = (F_1 \cap F_2)^c \neq \emptyset$
3. $(X, T_{CN})$: $X$ no numerable, $A = X\backslash N_1$, $B = X\backslash N_2 \Rightarrow A \cap B = X\backslash(N_1 \cap N_2) \neq \emptyset$.

**Ejemplo 3.1.3** Sea el espacio topológico $(X, T_D)$, $T_D$ = topología discreta.

- Si $\#X = 1$, $(X = \{p\}) \Rightarrow T_D = T_t \Rightarrow (X, T_D)$ conexo.
- Si $\#X \geq 2$, sean $x, y \in X$, $x \neq y$, $A = \{x\} \in T_D$ y $B = X \backslash \{x\} \in T_D \Rightarrow A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, luego:

$$(X, T_D) \text{ conexo} \iff X \text{ tiene un solo punto}$$

**Teorema 3.1.0**

En $(\mathbb{R}, T_u)$ un subconjunto es conexo si y solo si es un intervalo.

**Demostración**

- $\Leftarrow$ Ya se ha probado anteriormente
- $\Rightarrow$ Sea $I \subset \mathbb{R}$. Supongamos que $I$ es un intervalo y que no es conexo, y busquemos la reducción al absurdo. Existen $A, B \in (T_u)_I$ tales que $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = I$, $A \cap B = \emptyset$. Sean $a \in A$, $b \in B$. Como $a \neq b$ porque $A \cap B = \emptyset$, supongamos que $a < b$, sin pérdida de generalidad alguna. Sea $z = sup\{A \cap [a, b]\}$. Entonces, existe una sucesión $\{z_i\} \subset A \cap [a, b]$ que converge a $z$ em $(\mathbb{R}, T_u)$. Entonces, $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset A$ y $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [a, b] \subset I$ (por ser $a \in A \subset I$, $b \in B \subset I$, con $I$ intervalo). Como $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow z$ en $(\mathbb{R}, T_u)$ y $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset I$, entonces $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow z$ en $(I, (T_u)_I) \Rightarrow z \in \overline{A}$, pero $A = \overline{A}$ en $(T_u)_I$ porque $I \backslash A = B \in (T_u)_I \Rightarrow z \in \overline{A} = A \Rightarrow z \in A$. Como $z \in A \in (T_u)_I$, $\exists \epsilon > 0$ tal que $(z - \epsilon, z + \epsilon) \cap I \subset A$. Como $a < b$, tomamos $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $a + \epsilon < b$. Así, $[z, z + \epsilon) \subset A \cap [a, b] \Rightarrow z \neq sup\{A \cap [a, b]\}$, lo cual es una contradicción. Dicha contradicción proviene de suponer que $I$ es un intervalo no conexo, luego si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces es conexo.

**Corolario 3.1.0**

$(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo.

**Demostración**

$\mathbb{R}$ es un intervalo.

**Ejemplo 3.1.4** Sea el espacio topológico $(X, T)$, conexo y $T^{'} \subset T$. Entonces, $(X, T^{'})$ es conexo. Si $(X, T^{'})$ no es conexo, existen $A, B \in T^{'}$ tales que:

1. $A, B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = X$
3. $A \cap B = \emptyset$

Como $T^{'} \subset T$, entonces $A, B \in T$ que verifican 1,2,3 $\Rightarrow (X, T)$ es no conexo, lo cual es una contradicción.

**Ejemplo 3.1.5** Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}, T_S)$. El conjunto $\mathbb{B}_S = \{[a, b)/a < b\}$ no es conexo. Para verlo, tomemos $A = (-\infty, 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, 0) \in T_S$ y $B = [0, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n) \in T_S$. Ambos conjuntos verifican: $A, B \neq \emptyset$, $\mathbb{R} = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (\mathbb{R}, T_S)$ no es conexo.

**Lema 3.1.0**

Sea $(X, T)$ un espacio topológico. Equivalen:

1. $(X, T)$ es conexo.
2. Cualquier aplicación continua de $(X, T)$ en un espacio topológico discreto es constante.
3. Cualquier aplicación continua de $(X, T)$ en $(\{0,1\}, T_D)$ es constante.

**Demostración**

- $1 \Rightarrow 2$ Sea $(Y, T_D)$ un espacio topológico discreto y sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T_D)$ una aplicación continua. Queremos ver que $f$ es constante. Supongamos que no lo es. Sean $y_0, y_1 \in Im(f)$, con $y_0 \neq y_1$ y sean $U = \{y_0\} \in T_D$, $V = Y \backslash \{y_0\} \in T_D$.
  Se tiene que $U, V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = Y$. Si llamamos $A = f^{-1}(U)$, $B = f^{-1}(V)$, entonces $A, B \in T$ porque $f$ es continua.
  $A = f^{-1}(U)$, $B = f^{-1}(V) \neq \emptyset$, $A \cup B = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(Y) = X$, $A \cap B = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow (X, T)$ no es conexo (hemos razonado por el contrarrecíproco).
- $2 \Rightarrow 3$ $(\{0,1\}, T_D)$ es un caso particular de 2.
- $3 \Rightarrow 1$ Supongamos que $(X, T)$ no es conexo. Existen entonces $A, B \in T$ tales que $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$. Definimos $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ por la igualdad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X \backslash A = B \end{cases}$$

  $f : (X, T) \longrightarrow (\{0,1\}, T_D)$ es continua: $T_D = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}, \{1\}\}$
  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0,1\}) = X$, $f^{-1}(\{1\}) = A$, $f^{-1}(\{0\}) = B$, $\emptyset, X, A, B \in T$. Por tanto, $f : (X, T) \longrightarrow (\{0,1\}, T_D)$ es continua y no constante.

**Corolario 3.1.1**

Sea $(X, T)$ un espacio topológico, $A \subset X$ un subconjunto conexo. Sea $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces, $B$ es un subconjunto conexo. En particular, si $A$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

**Demostración**

Sea $f : (B, T_B) \longrightarrow (\{0,1\}, T_D)$ una aplicación continua. Queremos ver que $f$ es constante. Sea la composición $f_{|A} = i_A \circ f$ $(i_A : (A, T_A) \longrightarrow (B, T_B))$. Como $f_{|A} : (A, T_A) \longrightarrow (\{0,1\}, T_D)$ es continua y $A$ es conexo, entonces, $f_{|A}$ es constante. Es decir, $f(A)$ es un punto de $\{0,1\}$. Como $f$ es continua, se tiene que $f(\overline{A}^B) \subset \overline{f(A)} = f(A) = \{\text{un punto}\}$.
$\overline{A}^B = \overline{A} \cap B \Rightarrow f(B) = f(\overline{A}^B) \subset \overline{A} = f(A) = \{\text{un punto}\} \Rightarrow f(B)$ es un punto $\Rightarrow f$ es constante. Entonces, $(B, T_B)$ es conexo.

**Teorema 3.1.1**

Si $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es una aplicación entre dos espacios topológicos y $(X, T)$ es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de $(Y, T^{'})$.

**Demostración**

Sea $g : (f(X), T^{'}_{f(X)}) \longrightarrow (\{0,1\}, T_D)$ continua y sea $\tilde{f} : (X, T) \longrightarrow (f(X), T^{'}_{f(X)})$ también continua ($f$ continua $\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}$continua). La composición $g \circ \tilde{f} : (X, T) \longrightarrow (\{0,1\}, T_D)$ también es continua. Como $(X, T)$ es conexo, $g \circ \tilde{f}$ es constante $\Rightarrow g(\tilde{f}(x)) = z_0 \in \{0,1\}, \forall x \in X \Rightarrow g(y) = z_0$, $\forall y \in f(X) \Rightarrow g$ constante. Entonces, $f(X)$ subconjunto conexo de $(Y, T^{'})$.

**Corolario 3.1.2**

Si $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T')$ es un homeomorfismo y $(X, T)$ es conexo, entonces, $(Y, T')$ es conexo.

**Demostración**

Como $f$ es continua y sobreyectiva y $(X, T)$ es conexo, entonces, $f(X) = Y$ es un subconjunto conexo de $(Y, T')$. Es decir, $(Y, T')$ es conexo.

**Nota**

La conexión es un invariante topológico.

**Teorema 3.1.2 (Bolzano o del valor intermedio)**

Sea $f : (X, T) \longrightarrow (\mathbb{R}, T_u)$ una función continua. Supongamos que $(X, T)$ es conexo. Si $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ verifican que $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$ entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) = \alpha$.

**Demostración**

Como $f$ es continua y $(X, T)$ es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto de $(\mathbb{R}, T_u)$. Entonces, $f(X)$ es un intervalo, $f(x), f(y) \in f(X)$. Si $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$ entonces $\alpha \in f(X)$, y existe un $z \in X$ tal que $f(z) = \alpha$.

**Observación**

Ni la unión ni la intersección de conjuntos conexos son necesariamente conjuntos conexos.

**Ejemplo 3.1.6** Sea $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$. $A, B$ son conexos en $(\mathbb{R}, T_u)$ por ser intervalos. Sin embargo, $A \cup B = [0, 1] \cup [2, 3]$ no es un intervalo y, por tanto, no es conexo. En $(\mathbb{R}, T_u)$ la intersección de dos intervalos es, o el vacío, o bien otro intervalo.

**Ejemplo 3.1.7** En el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, T_u)$, sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1,\ x \leq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0\} \Rightarrow A \cap B = \{(0, 1), (0, -1)\}$. Dado que $(T_u^2)_{A \cap B}$ =topología discreta, no es conexo ya que los espacios discretos lo son solo cuando tienen un punto.
Veamos que $A, B$ son conexos. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ la aplicación dada por $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$. Sabemos que $f$ es continua de $(\mathbb{R}, T_u)$ en $(S^1, (T_u^2)_{S^1})$.

$$A = f([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]), B = f([\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

**Lema 3.1.1**

Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos conexos de un espacio topológico $(X, T)$,

1. Si existe un $i_0 \in I$ tal que $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo.
2. Si $I = \mathbb{N}$ y $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo.

**Nota**

Si $A, B$ son subconjuntos conexos de un espacio topológico y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.

**Demostración**

1. Sea $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ y sea la aplicación $f : (C, T_C) \longrightarrow (\{0,1\}, T_D)$ continua, con $f_{|C_i}$ constante $\forall i \in I$. En particular, $f_{|C_{i_0}}$ es constante e igual a 0 ($f(x) = 0$, $\forall x \in C_{i_0}$).
   Sea ahora $z \in C = \bigcup_{i\in I} C_i \Rightarrow \exists i \in I / z \in C_i$. Por hipótesis, existe $z_0 \in C_i \cap C_{i_0}$ tal que $f(z) = 0$ y como $f_{|C_i}$ es constante, $z, z_0 \in C_i$, entonces $f(z) = f(z_0) = 0$. Por tanto, $f$ es constante.
2. Sea obtiene de 1:
   Sean $E_1 = C_1$, $E_2 = C_1 \cup C_2$, $E_3 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$,...,$E_k = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k$. Definimos $C = \bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$.
   Cada $E_i$ es conexo. $E_1 = C_1$ es conexo, $E_2 = C_1 \cup C_2$ es conexo, dado que $C_1$ es conexo y $C_2$ corta a $C_1$, $E_3 = (C_1 \cup C_2) \cup C_3$ conexo dado que $C_1 \cup C_2$ es conexo y $C_3$ corta a $C_2$ (y por tanto a $C_1 \cup C_2$. Además, $E_1 \cap E_i = E_1 \neq \emptyset$. Aplicando 1: $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = \bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.

**Teorema 3.1.3**

Sean $(X_i, T_i)$ con $i \in \{1, ..., k\}$ espacios topológicos. Entonces, $(X_1 \times ... \times X_k, T_1 \times ... \times T_k)$ es conexo si y solo si $(X_i, T_i)$ es conexo para todo $i \in \{1, ..., k\}$.

**Demostración**

Si el producto es conexo, como $\pi_i : (X_1 \times ... \times X_k, T_1 \times ... \times T_k) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua y sobreyectiva, entonces $(X_i, T_i)$ es conexo.
Supongamos ahora que $(X_i, T_i)$ es conexo, $\forall i \in \{1, ..., k\}$. Veamos que el producto es conexo por inducción sobre $k$:

$k = 2$ Veamos que $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ es conexo. Sea $x_1 \in X_1$, fijo. Sea $R(x_1) = \{x_1\} \times X_2$. Veamos que $(X_2, T_2) \approx (R(x_1), (T_1 \times T_2)_{R(x_1)})$.
Sea $f : X_2 \longrightarrow R(x_1)$ definida por $f(z) = (x_1, Z)$ y $g : R(x_1) \longrightarrow X_2$ definida por $g(x_1, z) = z$. Funciones tales que $f \circ g = Id_{R(x_1)}$ y $g \circ f = Id_{X_2}$, es decir, son inversas.
La función $g$ la podemos ver como $g = \pi_{2|R(x_1)}$, que es continua. Considerando la inclusión $i_{R(x_1)} : R(x_1) \longrightarrow X_1 \times X_2$, $f$ será continua $\Longleftrightarrow i_{R(x_1)} \circ f$ es continua $\Longleftrightarrow \pi_1 \circ i_{R(x_1)} \circ f =$ aplicación constantemente $x_1$, y $\pi_2 \circ i_{R(x_1)} \circ f = Id_{X_2}$.
Luego, $f$ es biyectiva, continua y $f^{-1} = g \Rightarrow f$ es un homeomorfismo. Por tanto, $X_2 \approx R(x_1)$, y como $X_2$ es conexo, $R(x_1)$ es un subconjunto conexo de $X_1 \times X_2$.

Razonando de forma similar, $\forall x_2 \in X_2$, $X_1 \approx \mathcal{L}(x_2) = X_1 \times \{x_2\}$. Entonces, $\{\mathcal{L}(x_2) : x_2 \in X_2\} \cup \{R(x_1)\}$ es una familia de conjuntos conexos de $X_1 \times X_2$ y $\mathcal{L}(x_2) \cap R(x_1) = \{(x_1, x_2)\} \neq \emptyset$. Usando el resultado de teoría anterior:

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_2\in X_2} \mathcal{L}(x_2) = (\bigcup_{x_2\in X_2} \mathcal{L}(x_2)) \cup R(x_1) \Rightarrow X_1 \times X_2 \text{ conexo.}$$

Supongamos ahora que el productos de $k-1$ espacios topológicos conexos es conexo. Si $(X_1, T_1), ..., (X_k, T_k)$ son espacios topológicos conexos, entonces,

$(X_1 \times ... \times X_k, T_1 \times ... \times T_k) \approx ((X_1 \times X_2 \times ... \times X_{k-1}) \times X_k, (T_1 \times ... \times T_{k-1}) \times T_k))$ es conexo por ser producto de 2 conexos.

**Definición 3.1.2** Sea $(X, T)$ un espacio topológico $x \in X$. La componente conexo de $(X, T)$ que contiene al punto $x$ es el conjunto:

$$C_x = \bigcup \{A : A \subset X \ conexo\ , x \in A\}$$

$C_x$ es la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a $x$.

**Propiedades:**

1. $C_x$ es conexo y $x \in C_x$. De hecho, es el mayor conjunto conexo que contiene a $x$.
2. Si $A$ es conexo y $x \in A$, entonces $A \subset C_x$.
3. $\overline{C_x} = C_x$.
4. Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, entonces $C_x = C_y$. Los componentes conexos forman una partición.
5. Si $A$ es abierto y cerrado y $x \in A$ entonces $C_x \subset A$.

**Demostración:**

1. $C_x$ es unión de conjuntos que contienen a $x \Rightarrow x \in C_x$. Como $\{x\}$ es conexo y $x \in \{x\}$, entonces $x \in R(x) = \{A \subset X \text{ conexo} : x \in A\}$ $(C_x = \bigcup_{A\in R(x)} A) \Rightarrow C_x$ es unión de los subespacios de $R(x)$ que contienen a $\{x\} \in R(x) \Rightarrow C_x$ conexo.
2. $A \subset X$ conexo y $x \in A$, entonces $A \subset C_x$.
   $A \in R(x) \Rightarrow A \subset \bigcup_{B\in R(x)} B = C_x$.
3. $\overline{Cx} = C_x$ (siempre que $C_x \subset \overline{C_x}$).
   $\overline{C_x}$ es conexo, $x \in C_x \subset \overline{C_x} \Rightarrow \overline{C_x} \subset R(x) \Rightarrow \overline{C_x} \subset \bigcup_{B\in R(x)} B = C_x$.
4. Sea $z \in C_x \cap C_y \Rightarrow C_x \cap C_y$ es conexo. Además, $x \in C_x \subset C_x \cup C_y \Rightarrow C_x \cup C_y \subset C_x \Rightarrow C_y \subset C_x$.
   Intercambiando $x, y$, obtenemos que $C_x \subset C_y$.
5. Si $C_x \not\subset A$. Existe $z \in C_x$ tal que $z \notin A \Rightarrow C_x \cap A^c \neq \emptyset$.
   $C_x = C_x \cap X = C_x \cap (A \cup A^c) = (C_x \cap A) \cup (C_x \cap A^c)$ $(x \in (C_x \cap A),\ y \in (C_x \cap A^c)$.
   $C_x \cap A \neq \emptyset \neq C_x \cap A^c$, $A, A^c \in T \Rightarrow C_x \cap A, C_x \cap A^c \in T_{C_x}$ y como $C_x = (C_x \cap A) \cup (C_x \cap A^c) \neq \emptyset \Rightarrow C_x$ no es conexo, lo que es una contradicción.

**Ejemplo 3.1.8**

1. $(X, T)$ conexo $\Rightarrow C_x = X$, $\forall x \in X$.
2. Sea $(X, T)$ un espacio topológico tal que los únicos conjuntos cerrados son los puntos. Si $x \in X \Rightarrow C_x = \{x\}$.
   - En $(\mathbb{R}, T_S)$ cumple esta propiedad: dados $x, y \in \mathbb{R}$, $\exists z \in (x, y)$ tal que considerando los conjuntos $(-\infty, z)$, $[z, +\infty)$, la componente conexa es $C_z = \{z\}$.
   - $(X, T_D)$.
   - $(\mathbb{Q}, (T_u)_{\mathbb{Q}})$. Dados $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $q_1 < q_2$, sea $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $q_1 < r < q_2$. $\mathbb{R}\backslash\{r\} = (-\infty, r) \cup (r, +\infty)$. Si $A \subset \mathbb{Q}$ y $q_1$,$q_2 \in A$, con $q_1 \neq q_2 \Rightarrow A \subset (-\infty, r) \cup (r, +\infty)$.
3. En $(\mathbb{R}, T_S)$, $C_x = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ que no es abierto (los componentes conexos no son, en general, conjuntos abiertos).
4. Si $(X, T)$ tiene una cantidad finita de componentes conexos entonces los componentes conexos son conjuntos abiertos:
   $\{C_1, ..., C_k\}$ = comp.conexos de $X$, $C_i = X\backslash(\bigcup_{j=1, j\neq i}^{k} C_j)$ unión finita de cerrados.

**Teorema 3.1.4**

Sea $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ un homeomorfismo, $x \in X$. Entonces $f(C_x) = C_{f(x)}$.

**Demostración**

Como $f$ es continua, $C_x$ conexo $\Rightarrow f(C_x)$ conexo y continua en $f(x)$. Por tanto, $f(C_x) \subset C_{f(x)}$. Ahora, como $f^{-1}$ también es homeomorfismo, por el mismo argumento de antes, $f^{-1}(C_x) \subset C_x \Rightarrow C_{f(x)} \subset f(C_x)$.

**Corolario 3.1.3**

El cardinal del conjunto de componentes conexos de un espacio topológico es un invariante topológico.
Si $f : (X, T) \longrightarrow (Y, T^{'})$ es homeomorfismo, $f$ induce una biyección entre los conjuntos de componentes conexos de $X$ e $Y$.

**Definición 3.1.3** Un arco en un espacio topológico $(X, T)$ es una aplicación continua

$$\gamma : ([0, 1], (T_u)_{[0,1]}) \longrightarrow (X, T).$$

$\gamma(0)$ es el origen del arco y $\gamma(1)$ son extremos. Si $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$ diremos que el arco $\gamma$ conecta a $x$ e $y$.

**Definiición 3.1.4** Un espacio topológico $(X, T)$ es conexo por arcos si $\forall x, y \in X$, existe un arco que conecta $x$ e $y$.

**Proposición 3.1.0** Todo espacio conexo por arcos es conexo.
**Demostración:** Fijamos un $x_0 \in X$. Sea $x \in X$ arbitrario. Sea $\gamma_x : [0, 1] \longrightarrow X$ un arco que conecta $x_0$ con $x$. Sea $C_x = \gamma_x([0, 1])$. $C_x$ es conexo y contiene a $x_0$ y a $x$. Entonces, $X = (\bigcup_{x\in X} C_x) \cup \{x\} \Rightarrow (X, T)$ conexo.

**Ejemplo 3.1.9** El recíproco del resultado anterior no es cierto:
Sea $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, continua. Pues bien, $\mathbb{R}^2 \supset G(f) = \{(x, f(x)) : x \in (0, 1]\} \approx (0, 1]$ conexo, $(0, 0) \in \overline{G(f)}$, $(\frac{1}{k\pi}, 0) \in G(f) \longrightarrow (0, 0) \Rightarrow G(f) \subset G(f) \cup \{(0, 0)\} \subset \overline{G(f)}$.

## 3.2. Espacios compactos

**Definición 3.2.0** Sea $A \subset X$ un conjunto. Una familia de conjuntos de $X$, $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de $A$ si $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Si $A = X$, entonces $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

**Definición 3.2.1** Si $(X, T)$ es un espacio topológico, $A \subset X$, diremos que un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de $A$ es abierto si $U_i \in T$, $\forall i \in I$.

**Definición 3.2.2** Dado un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de $A$, un subrecubrimiento es una subfamilia $\{U_j\}_{j\in J}$ con $J \subset I$ tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

**Definición 3.2.3** Un espacio topológico es compacto si, dado un recubrimiento abierto de un espacio topológico se puede extraer un subrecubrimiento finito.

**Ejemplo 3.2.0** Sea $(X, T)$ un espacio topológico y $\#$ finito (hay una cantidad finita de abiertos). Entonces $(X, T)$ es compacto. Comprobémoslo:
$T = \{A_1, ..., A_k\}$, y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto. Sea $M = \{m \in \{1, ..., k\}/\exists i \in I; A_m = U_i\}$ tal que $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{m\in M} A_m$. Para cualquier $m \in M$, elijo $i(M) \in I$ tal que $A_m = U_i(m)$, $J = \{i(m)/m \in M\}$, con $J \subset I$, finito y $\bigcup_{j\in J} U_j = \bigcup_{m\in M} U_{i(m)} = \bigcup_{m\in M} A_m = X$.

**Ejemplo 3.2.1** Si $X$ es finito $(X, T)$ es compacto. Se deduce de los anterio teneniendo en cuenta que $T \subset \mathbb{P}(X)$ y $\#\mathbb{P}(\mathbb{X}) = 2^{\#X}$.

**Ejemplo 3.2.2** $(X, T_D)$ es compacto $\Longleftrightarrow X$ es finito:

- $\Leftarrow$ Probado en el ejemplo anterior.
- $\Rightarrow$ Sea $\{U_x\}_{x\in X}$ el recubrimiento abierto, $U_x = \{x\}$, $\forall x \in X$.
  Si $(X, T)$ es compacto, existe $J = \{x_1, ..., x_k\} \subset X = I$ tal qu $X = \bigcup_{x\in J} U_x = \bigcup_{x\in\{x_1,...,x_k\}} = \{x_1\} \cup ... \cup \{x_k\} = \{x_1, ..., x_k\}$.

**Ejemplo 3.2.3** $(\mathbb{R}, T_u)$ no es compacto:
$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n, n)$, $U_n = \{(-n, n)/n \in \mathbb{N}\}$. Si podemos extraer un subrecubrimiento finito $\Rightarrow \mathbb{R} \subset (-n_1, n_1) \cup ... \cup (-n_k, n_k) = (-max\{n_1, ..., n_k\}, max\{n_1, ..., n_k\})$, lo cual no está acotado, luego hemos terminado.

**Ejemplo 3.2.4** Un espacio métrico $(X, d)$ compacto es acotado $(X = B(x, r))$:
Fijamos un $x_0 \in X$. La familia $\{B(x_0, r)/r > 0\}$ es un recubrimiento abierto de $X$. Si $X$ es compacto, $\exists r_1, ..., r_k$ tales que $X = B(x_0, r_1) \cup ... \cup B(x_0, r_k) = B(x_0, r)$ con $r = max\{r_1, ..., r_k\}$.

**Definición 3.2.4** Sea $(X, T)$ un espacio topológico. Diremos que $A \subset X$ es un subconjunto compacto si $(A, T_A)$ es compacto.

**Propiedad 3.2.0** Sea $(X, T)$ un espacio topológico, $A \subset X$. Son equivalentes:

1. $(A, T_A)$ es compacto.
2. De todo recubrimiento de $A$ por abiertos de $X$ se puede extraer un subrecubrimiento finito.

**Demostración:**

- $1 \Rightarrow 2$ Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $A$ por abiertos de $T$. Sea $V_i = U_i \cap A$, $\forall i \in I \Rightarrow A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow A = (\bigcup_{i\in I} U_i) \cap A = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap A) = \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow \{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $A$ por abiertos de $T_A$. Por 1, existe $J \subset I$ finito tal que $A = \bigcup_{j\in J} V_j \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.
- $2 \Rightarrow 1$ Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $A$ por abiertos de $T_A$. Por la definición de $T_A$, para cada $i \in I$, existe un $U_i \in T$ tal que $V_i = U_i \cap A \Rightarrow A = \bigcup_{i\in I} V_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ con $U_i \in T \Rightarrow$Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de $A$ por abiertos de $X$. Por 2, existe $J \subset I$ finito tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j \Rightarrow A = (\bigcup_{j\in J} U_j) \cap A = \bigcup_{j\in J}(U_j \cap A) = \bigcup_{j\in J} V_j$.

**Teorema 3.2.0**

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces $([a, b], (T_u)_{[a,b]})$ es un espacio topológico compacto ($[a, b]$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, T_u)$).

**Nota**

$(a, b) = \bigcup_{a\ suf.grande}(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}) \Rightarrow (a, b)$ compacto.

**Demostración**

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $[a, b]$ por abiertos de $(\mathbb{R}, T_u)$. Sea $r = sup\{r \in [a, b]/[a, r]$ se puede recubrir por una cantidad finita de conjuntos $U_i\} = supA$.
Veamos que $s = b$ y que $s \in A$:

- $s < a$: Si $a \in [a, b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $a \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in T_u$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset U_{i_0}$. En particular, tomando $r \in \mathbb{R}$ tal que $a < r < a + \epsilon$, entonces $[a, r] \subset (a-\epsilon, a+\epsilon) \subset U_{i_0}$, y $r \in A$, $\forall a < r < a+\epsilon \Rightarrow (a, a+\epsilon) \subset A \Rightarrow s = sup(A) \geq a+\epsilon > a$.

- $s = b$: Supongamos que $s < b \Rightarrow s \in [a,b) \subset [a,b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I$ tal que $s \in U_{i_0}$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $[s-\epsilon, s+\epsilon] \subset U_{i_0}$. Como $s - \epsilon < s$, el conjunto $[a, s-\epsilon]$ puede recubrirse por una cantidad finita de abiertos $U_{i_1}, ..., U_{i_k}$ del recubrimiento (hemos tomado $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $s - \epsilon > a$). Entonces, $[a,s] = [a, s-\epsilon] \cup [s-\epsilon, s] \subset (U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_k}) \cup U_{i_0}$.
  Pero $[a, s+\epsilon] = [a, s-\epsilon] \cup [s-\epsilon, s] \subset (U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_k}) \cup U_{i_0}$. Esto implica que $s + \epsilon \in A$, lo cual es una contradicción pues $s = sup(A) < s + \epsilon$.
- $b \in A$: Sabemos que $b = sup(A)$. Elegimos $U_{i_0} \in \{U_i\}_{i\in I}$ tal que $b \in U_{i_0}$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $[b-\epsilon, b+\epsilon] \subset U_{i_0}$. Si $b \in A$no hay nada que probar. Si $b \notin A$, como $b = sup(A)$, podemos tomar $\epsilon$ para que $b - \epsilon \in A$.
  $[a,b] = [a, b-\epsilon] \cup [b-\epsilon, b]$, como $b - \epsilon \in A \Rightarrow \exists U_{i_1}, ..., U_{i_k}$ tales que $[a, b-\epsilon] \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_k}$. Entonces, $[a,b] \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_k} \cup U_{i_0}$.

**Definición 3.2.5** Sea $X$ un conjunto y $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de $X$.Diremos que $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita si $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ para todo $J \in I$, siendo $J$ finito.

**Teorema 3.2.1**

Sea $(X,T)$ un espacio topológico. Son equivalentes:

1. $(X,T)$ es compacto.
2. Toda familia de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

**Demostración**

- $1 \Rightarrow 2$ Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Supongamos por contradicción que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \Rightarrow X = (\bigcap_{i\in I} F_i)^c = \bigcup_{i\in I} F_i^c \Rightarrow \{F_i^c\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $X$. Como $(X,T)$ es compacto, $\exists J \subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J} F_j^c \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{j\in J} F_j$, lo cual es una contradicción porque $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por tanto $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.
- $2 \Rightarrow 1$ Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $(X,T)$. Queremos ver que $\exists J \subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J} U_j$. Supongamos que $\forall J \subset I$, $X \neq \bigcup_{j\in J} U_j \Rightarrow \bigcap_{j\in J} U_j^c \neq \emptyset$, $\forall J \subset I$ finito. La familia de cerrados $\{U_i^c\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i^c \neq \emptyset \Rightarrow X \neq \bigcup_{i\in I} U_i$, lo cual es una contradicción, pues $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de $X$.

**Ejemplo 3.2.5** Sea $\{[a_i, b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos cerrados ($a_i \leq b_i$) tales que $[a_i, b_i] \subset [a_{i-1}, b_{i-1}]$, $\forall i \geq 2$ (decreciente). Entonces, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} [a_i, b_i] \neq \emptyset$. $\{[a_i, b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ son cerrados en el espacio compacto $([a_1, b_1], (T_u)_{[a_1,b_1]})$.

**Proposición 3.2.0** Sea $f : (X,T) \longrightarrow (Y,T^{'})$ una aplicació continua. Si $(X,T)$ es compacto, entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de $(Y,T^{'})$. En particular, si $f$ es homeomorfismo y $(X,T)$ es compacto, entonces $(Y,T^{'})$ es compacto.
**Demostración:** Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $f(X)$ por abiertos de $(Y,T^{'})$.
$f(X) \subset \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow X \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) \Rightarrow \{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $X$. Como $(X,T)$ es compacto, $\exists J \subset I$ finito tal que $X \subset \bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j) \Rightarrow f(X) \subset f(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)) \subset \bigcup_{j\in J} V_j$.

**Proposición 3.2.1**

1. Si $(X,T)$ es compacto y $F \subset X$ es cerrado, entonces $F$ es un subconjunto compacto de $X$.
2. Si $(X,T)$ es Hausdorff y $K \subset X$ es un subconjunto compacto de $X$, entonces $K$ es cerrado.
3. Si $f : (X,T) \longrightarrow (Y,T^{'})$ es continua, $(X,T)$ es compacto e $(Y,T^{'})$ es Hausdorff, entonces $f$ es una aplicación continua.

**Demostración:**

1. Tomamos $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto (por abiertos de $X$) de $F$. Entonces, $\{U_i\}_{i\in I}\cup\{X\backslash F\}$ es un recubrimiento abierto de $X$. Como $X$ es compacto, existe $J\subset I$ finito tal que $X\subset(\bigcup_{j\in J}U_j)\cup(X\backslash F)\Rightarrow F\subset\bigcup_{j\in J}U_j$.

2. Queremos ver que $K$ es cerrado $\Longleftrightarrow X\backslash K$ es abierto. Vamos a ver que $\forall x\in X\backslash K$ $(x\notin K)$, existe $U\in T$ tal que $x\in U$, $U\cap K=\emptyset(U\subset(X\backslash K))$.
   Fijamos un $x\in X\backslash K$. Para todo $y\in X\backslash K$, $(x\neq y)$, existen dos abiertos $U_y$, $V_y$ tales que $x\in V_y$, $y\in U_y$, $U_y\cap V_y\neq\emptyset$.
   $\{U_y\}_{y\in}$ es un recubrimiento abierto de $K$. Como $K$ es compacto, $\exists y_1,...,y_r\in K$ tal que $K\subset U_{y_1}\cup...\cup U_{y_r}=U$.
   Definimos $V=V_{y_1}\cap...\cap V_{y_r}\in T$, $x\in V$. $K\cap V\subset U\cap V=(U_{y_1}\cup...\cup U_{y_r})\cap V=(U_{y_1}\cap V)\cup...\cup(U_{y_r}\cap V)\subset(U_{y_1}\cap V_{y_1})\cup...\cup(U_{y_r}\cap V_{y_r})=\emptyset\cup...\cup\emptyset=\emptyset$.

3. Se sigue de 1 y 2: Si $F\subset X$ es cerrado, como $X$ es compacto, $F$ es compacto por 1; $f(F)$ es compacto por ser $f$ continua y por 2, $f(F)$ es cerrado (compacto en $T^{'}$).

**Teorema 3.2.2. Teorema de Tijonov**

$X_1\times...\times X_k$ compacto $\Longleftrightarrow X_i$ compacto $\forall i\in\{1,...,k\}$.

**Lema 3.2.0 (del tubo)**

Sea $(X_2,T_2)$ un espacio topológico compacto, $(X_1,T_1)$ un espacio topológico arbitrario. Dados $x_1\in X_1$, $A\in T_1\times T_2$ tal que $\{x_1\}\times X_2\subset A$, entonces, $\exists W\in T_1$ tal que $\{x_1\}\times X_2\subset W\times X_2\subset A$.

**Demostración**

Como $A$ es abierto de $T_1\times T_2$, para cada $z\in X_2$ tomamos $U_z\in T_1$, $V_z\in T_2$ tales que

$$(x_1,z)\in U_z\times V_z\subset A$$

La familia $\{V_z\}_{z\in X_2}$ es un recubrimiento abierto del espacio compacto $(X_2,T_2)$. Existe entonces un subconjunto finito $F\subset X_2$ tal que $\{V_z\}_{z\in F}$ es un recubrimiento de $X_2$. Si

$$W=\bigcap_{z\in F}U_z$$

entonces

$$\{x_1\times X_2\subset W\times(\bigcup_{z\in F}U_z)\subset\bigcup_{z\in F}U_z\times V_z\subset A.$$

**Demostración**

Si $X_1\times...\times X_k$ es compacto $\Rightarrow x_i=p_i(X_1\times...\times X_k)\Rightarrow X_i$ compacto., $\forall i\in\{1,...,k\}$, por ser la imagen de un espacio compacto por una proyección continua.
Supongamos ahora que todos los espacios $(X_i,T_i)$ son compactos. Probamos que el espacio producto es compacto por inducción sobre $k$. Al igual que en la demostración de que el producto de epacios conexos es conexo basta con considerar el caso $k=2$.
Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $X_1\times X_2$. Para cada $x\in X_1$, el subconjunto $\{x\}\times X_2$ es compacto, por lo que existe $J(x)\subset I$ finito tal que

$$\{x\}\times X_2\subset\bigcup_{i\in J(x)}U_i.$$

Usando el lema del tubo,existe $W_x \in T_1$ tal que

$$\{x\} \times X_2 \subset W_x \times X_2 \subset \bigcup_{i \in J(x)} U_i.$$

La familia $\{W_x\}_{x \in X_1}$ es un recubrimiento abierto del espacio compacto $X_1$. Por tanto, existe $F \subset X_1$ finito tal que

$$X_1 \subset \bigcup_{x \in F} W_x$$

Tenemos entonces que

$$X_1 \times X_2 \subset \bigcup_{x \in F} W_x \times X_2 \subset \bigcup x \in F( \bigcup_{i \in J(x)} U_i)$$

que es recubrimiento finito de $\{U_i\}_{i \in I}$.

**Teorema 3.2.3 (Heine-Borel-Lebesgue)**

Un subconjunto $K \in \mathbb{R}^n$ con la topología usual es compacto si y solo si es cerrado y acotado (para la distancia euclídea).

**Demostración**

Supongamos que $K$ es compacto. Entonces, $K$ es acotado para la distancia euclidea, que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$, y $K$ es cerrado por ser $\mathbb{R}^n$ un espacio Hausdorff.
Supongamos ahora que $K$ es cerrado y acotado para la distancia euclídea. Entonces existe un $r > 0$ tal que

$$K \subset \prod_{i=1}^{n} [-r, r].$$

Por el teorema de Tijonov, $\prod_{i=1}^{n} [-r, r]$ es compacto. Como $K$ es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto.

**Corolario 3.2.0**

Sea $(X, T)$ un espacio topológico compacto, y sea $f : (X, T) \longrightarrow (\mathbb{R}, T_u)$ una aplicación continua. Entonces existen $x_{min}$, $x_{max} \in X$ tales que

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

para todo $x \in X$. Es decir, la aplicación $f$ alcanza un mínimo y máximo.

**Demostración**

Como $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ con la topología usual, es cerrado y acotado por el teorema de Heine-Borel-Lebesgue. Por tanto, existen $a = min(f(X))$, $b = max(f(X))$. Como $a, b \in f(X)$, existen $x_{min}$,$x_{max} \in X$ tales que $a = f(x_{min})$, $b = f(x_{max})$.