Práctica 3. Imagen de una función de dos variables

Ejercicios propuestos

En cada uno de los siguientes casos, calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$.

(1) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 2 \}$
$f(x,y) = x^2(y-1)^3 \quad \forall (x,y) \in A$

(2) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 - y^2 \}$
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x \quad \forall (x,y) \in A$

(3) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq x \leq 1 \}$
$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x \quad \forall (x,y) \in A$

Ejercicio 1

(1) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \le 2 \}$
$f(x,y) = x^2(y-1)^3 \quad \forall (x,y) \in A$

El conjunto A se trata de una elipse, luego es un conjunto cerrado y además acotado pues $A \subset \bar{B}((0,0),2)$. Esto último es cierto porque $2x^2+y^2 \le 2 \iff y^2 \le 2-2x^2$ $\iff y^2 \le 4-x^2 \iff 2-2x^2 \le 4-x^2 \iff -2 \le x^2$, lo cual se verifica. Como A es un conjunto cerrado y acotado, es compacto. Además es convexo, luego conexo.

Por ser $f(x,y) = x^2(y-1)^3$ una función polinómica, sabemos que es continua en $\mathbb{R}^2$ y en particular en A y por el mismo motivo será derivable en A. Por ser A compacto y conexo, y f continua, sabemos que $f(A)$ ha de ser un intervalo cerrado y acotado.

Estudiemos los puntos de $\mathring{A}$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(y-1)^3 = 0 \iff x=0 \text{ ó } y=1 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2(y-1)^2 = 0 \iff x=0 \text{ ó } y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \nabla f(x,y) = (2x(y-1)^3, 3x^2(y-1)^2) \\ = (0,0) \iff \text{es pto } (x,1),(0,y) \\ f(x,1) = 0 = f(0,y) \end{array}$$

Estudiemos la frontera a continuación. La frontera del conjunto A es la elipse $2x^2+y^2 = 2 \iff x^2 = \frac{2-y^2}{2}$. Luego, cualquier punto de la frontera verifica:

$\forall (x,y) \in Fr(A) \Rightarrow f(x,y) = \frac{2-y^2}{2}(y-1)^3$. Sea $h : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$

$$h(y) = \frac{2-y^2}{2}(y-1)^3 = \frac{2-y^2}{2}(y^2-2y+1)(y-1) = \frac{2-y^2}{2}(y^3-2y^2+y-y^2+2y-1)$$

$$= \frac{2-y^2}{2}(y^3-3y^2+3y-1) = \frac{1}{2}(2-y^2)(y^3-3y^2+3y-1) = \frac{1}{2}(2y^3-6y^2+6y-2-y^5+3y^4-3y^3+y^2)$$

$$= -\frac{y^5}{2} + \frac{3}{2}y^4 - \frac{y^3}{2} - \frac{5}{2}y^2 + 3y - 1$$

$$h'(y) = -\frac{5}{2}y^4 + 6y^3 - \frac{3}{2}y^2 - 5y + 3$$

	-5/2	6	-3/2	-5	3
1		-5/2	7/2	2	-3
	-5/2	7/2	2	-3	$\boxed{0}$
1		-5/2	1	3	
	-5/2	1	3	$\boxed{0}$	

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{-5} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{5}$$

$h(1) = 0$, $h\left(\frac{1+\sqrt{31}}{5}\right) = 0.00423$, $h\left(\frac{1-\sqrt{31}}{5}\right) = -4.08295$, $h(\sqrt{2}) = h(-\sqrt{2}) = 0$

Luego, $\operatorname{Im} f = [-4.08295,\ 0.00423]$

Ejercicio 2:

(2) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 - y^2 \}$
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x \quad \forall (x,y) \in A$

Si nos damos cuenta, A lo podemos expresar como intersección de dos conjuntos cerrados: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2-y^2\}$ y $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ = semiplano cerrado. $\Rightarrow A = B \cap H$. Como A es intersección finita de cerrados, es cerrado y además acotado pues está incluido en la bola abierta $B((0,1),3)$. Luego, es compacto. Además es convexo, luego conexo. La función f es polinómica y, por consiguiente, continua en $\mathbb{R}^2$ y en particular en A. Por el mismo motivo, es derivable en A. Por tanto, como A es compacto y conexo y, f continua, $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado.

Vamos a calcular la derivabilidad parcial en $\mathring{A}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 2 = 0 \iff x = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y = 0 \iff y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{único punto crítico } (1,0),\ f(1,0) = -1$$

Estudiemos ahora la frontera. Consideremos los arcos paramétricos:

$$\left.\begin{aligned} U &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 = x \leq 2 - y^2\} \\ V &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 2 - y^2,\ x \geq 0\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Fr(A) = A \setminus \mathring{A} = U \cup V$$

Sea $(0,y) \in U \Rightarrow f(0,y) = y^2$ con $y^2 \leq 2$, luego $\max f(U) = 2 = f(0, \pm\sqrt{2})$

Sea $(x,y) \in V \Rightarrow f(x,y) = x^2 + 2 - x - 2x = x^2 - 3x + 2$

$f'(x,y) = 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \Rightarrow \min(f(V)) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{9}{4} + y^2 - 3 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\min(f(V)) = -\frac{1}{4} = f\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Luego, los posibles extremos son:

$(1,0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$, $(0,+\sqrt{2})$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f(1,0) = -1$; $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$f(0,\sqrt{2}) = 2 = f(0,-\sqrt{2})$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = [-1, 2]$

Ejercicio:

(3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le x \le 1\}$

$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x \quad \forall (x,y) \in A$

El conjunto A podemos verlo como intersección de tres conjuntos:

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 1\} \equiv$ semiplano cerrado

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x\} \equiv$ conjunto cerrado

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y\} \equiv$ semiplano cerrado

$\Rightarrow A = H \cap C \cap B \Rightarrow$ intersección finita de cerrados $\Rightarrow$ cerrado.

Es claramente convexo, luego conexo. Además está acotado; está incluido en la bola $B = B((0,0),2)$. Por tanto, A es compacto. Por su parte, f, al ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}^2$ y, en particular en A, luego, A compacto y conexo y f continua $\Rightarrow f(A)$ intervalo cerrado y acotado $\Rightarrow \operatorname{Im} f = [\min f(A), \max(f(A))]$

Busquemos esos extremos:

Veamos la derivabilidad parcial de $\mathring{A} = \mathring{H} \cap \mathring{C} \cap \mathring{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < x < 1\}$

f diferenciable en $\mathring{A}$. Veamos puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - 1 = 0 \\ 2y + x = 0 \end{array}\right\} \to x = -2y = \frac{2}{3}$$

$$-4y + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

El único posible punto crítico es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \in A$. $\Rightarrow$ $f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

Estudiemos ahora la frontera de A: $Fr(A) = A \setminus \mathring{A}$. Consideremos los conjuntos:

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 = y \leq x \leq 1\}$

$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y = x \leq 1\}$

$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq x = 1\}$

Sea $(x,1) \in C_1 \Rightarrow f(x,1) = x^2 + 1$ con $-1 \leq x \leq 1$

$f'(x,1) = 2x = 0 \iff x = 0 \iff f(0,1) = 1$, $f(-1,1) = f(1,1) = 2$

$\Rightarrow \min(f(C_1)) = 1$ y $\max(f(C_1)) = 2$

Sea $(x,y) \in C_2 \Rightarrow f(x,y) = f(x,x) = x^2 + x^2 + x^2 - x = 3x^2 - x$; $-1 \leq x \leq 1$

$f(x,x) = 6x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{6} \iff f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 2$

$\Rightarrow \min(f(C_2)) = -\frac{1}{12}$, $\max(f(C_2)) = 4$

Sea $(1,x) \in C_3 \Rightarrow f(1,y) = 1 + y^2 + y - 1 = y^2 + y$ $\quad -1 \leq y \leq 1$

$f'(1,y) = 2y + 1 = 0 \iff y = -\frac{1}{2} \iff f\left(1, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$

Luego, $\min(f(A)) = -\frac{1}{3}$, $\max(f(A)) = 4 \Rightarrow Im(f) = \left[-\frac{1}{3}, 4\right]$

Ejercicio 1

Calcular la imagen de $f: A \to \mathbb{R}$ donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le 2y - y^2\}$ y $f(x,y) = x^2 + y(y^3-4) \quad \forall\, (x,y) \in A$

Comprobemos en primer lugar si A es compacto y conexo: $x^2 \le 2y - y^2 \iff$
$\iff x^2 - 2y + y^2 \le 0 \iff x^2 + (y-1)^2 \le 1 \Rightarrow A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$
$\Rightarrow$ A es la bola cerrada de centro $(0,1)$ y radio 1. $\Rightarrow$ cerrado y acotado.
A es un conjunto convexo, luego también es conexo.

Estudiamos ahora la continuidad de f: Como f es una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}^2$, luego, al ser A compacto y f continua $\Rightarrow f(A)$ es compacto; un intervalo cerrado y acotado.

Calculamos derivabilidad parcial en $\mathring{A}$. Por ser una función polinómica es derivable parcialmente en $\mathring{A}$. Calculamos puntos críticos. $\nabla f(x,y) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \iff x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4 = 0 \iff y = 1$$

$\Rightarrow$ El único punto crítico es el $(0,1)$
$\Rightarrow f(0,1) = -3$

Estudiamos a continuación la frontera del conjunto A: la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1 $\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \iff x^2 = 2y - y^2$
Para cualquier $(x,y) \in Fr(A)$ tenemos $f(x,y) = 2y - y^2 + y(y^3-4) = 2y - y^2 + y^4 - 4y$
$= y^4 - y^2 - 2y \Rightarrow f(Fr(A)) = Im(h)$; $h : [0,2] \to \mathbb{R} : h(y) = y^4 - y^2 - 2y$

h es derivable en $[0,2] \Rightarrow h'(y) = 4y^3 - 2y - 2 = 2(y-1)(2y^2+2y+1) = 0 \iff$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & & 4 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

$\iff y = 1. \Rightarrow$ Posibles extremos absolutos son $0, 1, 2 \Rightarrow h(0) = 0,\ h(1) = -2,\ h(2) = 8$

Luego, la imagen de h es $[-2,8]$.

$f(0,1)=-3$. $\Rightarrow f(A)=[\min\{-3,-2\}, \max\{-3,8\}]=[-3,8]$

Ejercicio 2.

Sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0\}$ y la función $f: A\to\mathbb{R}$; $f(x,y)=(x-2)^2+2y^2$ $\forall (x,y)\in A$. Calcular la imagen de f.

En primer lugar, comprobamos que A es compacto y conexo. A es la bola cerrada de centro $(1,0)$ y radio 2 $\Rightarrow$ cerrado y acotado, luego compacto. Además es convexo luego conexo.

f es una función polinómica y por lo tanto continua en $A\subset\mathbb{R}^2$. Luego, A compacto y conexo, f continua $\Rightarrow f(A)$ intervalo cerrado y acotado.

Es derivable en todo A° por ser también polinómica (Calculamos puntos críticos)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=2(x-2)=0 \iff x=2\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=4y=0 \iff y=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{El único punto crítico es el } (2,0)$$

Calculamos la frontera $Fr(A)$: la frontera de A es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 4 $\Rightarrow (x-1)^2+y^2=4 \iff y^2=4-(x-1)^2$. Cualquier punto de la frontera verifica: Si $(x,y)\in Fr(A) \Rightarrow f(x,y)=(x-2)^2+2(4-(x-1)^2)=(x-2)^2+8-2(x-1)^2$

$=x^2-\cancel{4x}+4+8-2x^2+\cancel{4x}-2 = -x^2+10$

Sea $h:[-1,\ ]\to\mathbb{R}^2$; $h(x)=-x^2+10$; $f(Fr(A))=Im(h)$

h derivable en $[-1,3]$; $h'(x)=-2x=0 \iff x=0$

Luego, los posibles extremos absolutos son $-1,0,3$; $h(-1)=9$, $h(0)=10$, $h(3)=1$

$Im(h)=[1,10]$

$f(2,0)=0 \quad \Rightarrow f(A)=[\min\{0,1\}, \max\{0,10\}]=[0,10]$.