Ejercicio: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere la ley recurrente $x_{n+1} = \alpha x_n \ln(2+x_n^2)$. Estudiar el número de puntos fijos y su estabilidad en función de α.

Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ donde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = \alpha \cdot x \ln(2+x^2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calculemos en primer lugar los puntos fijos de f:

$$f(x) = x \iff x = \alpha x \ln(2+x^2) \iff x(1-\alpha\ln(2+x^2)) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \alpha \ln(2+x^2) = 1 \end{cases} \iff \ln(2+x^2) = \frac{1}{\alpha} \iff 2+x^2 = e^{\frac{1}{\alpha}} \iff$$

$$\iff x^2 = e^{1/\alpha} - 2 \iff x = \pm\sqrt{e^{1/\alpha}-2} \qquad \left(e^{1/\alpha}-2>0 \iff 0<\alpha\leq\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ Si } 0<\alpha<\frac{1}{\ln 2} \Rightarrow x^* = 0,\ x^* = \pm\sqrt{e^{1/\alpha}-2} \\ \bullet \text{ Si } \alpha = 0 \Rightarrow x^* = 0, \text{ único pto fijo} \\ \bullet \text{ Si } \alpha \in]-\infty, 0[\cup [\frac{1}{\ln 2}, +\infty[\Rightarrow x^* = 0 \text{ único punto fijo} \end{cases}$$

Una vez hallados los puntos fijos, procedemos a estudiar su estabilidad, en función del parámetro real α.

Para ello, comenzamos analizando los siguientes casos:

- $\alpha = 0 \Rightarrow x^* = 0$. Aplicamos el criterio de la primera derivada:

$$f'(x) = \alpha\ln(2+x^2) + \alpha x \frac{2x}{2+x^2} = \alpha\ln(2+x^2) + \frac{\alpha 2x^2}{2+x^2}$$

$$f'(0) = \alpha \ln 2 = 0 < 1 \Rightarrow \text{Asintóticamente estable.}$$

- $\alpha \in]0, \frac{1}{\ln 2}[$

→ $x^* = 0 \Rightarrow f'(0) = \alpha \ln 2$. Para $\alpha \in]0, \frac{1}{\ln 2}[$ se verifica que $0 < f'(0) < 1$

luego, $x^* = 0$ es asintóticamente estable.

→ $x^* = \sqrt{e^{1/\alpha}-2}$, $x^* = -\sqrt{e^{1/\alpha}-2}$ $\Rightarrow f'(\sqrt{e^{1/\alpha}-2}) = f'(-\sqrt{e^{1/\alpha}-2}) = \dfrac{e^{1/\alpha} + \alpha 2(e^{1/\alpha}-2)}{e^{1/\alpha}} > 1$

luego esto me dice que tanto $x^* = \sqrt{e^{1/\alpha}-2}$ como $x^* = -\sqrt{e^{1/\alpha}-2}$ son inestables.

•) $\alpha \in]-\infty, 0[\cup [\frac{1}{\ln 2}, +\infty[$

$x^* = 0$ es el único punto fijo. Aplicamos el criterio de la primera derivada:

$f'(0) = \alpha \ln(2)$

→ Si $\alpha \in]-\infty, -\frac{1}{\ln 2}[\Rightarrow |f'(0)| > 1 \Rightarrow x^* = 0$ es un punto fijo inestable.

→ Si $\alpha \in]-\frac{1}{\ln 2}, 0[\Rightarrow |f'(0)| < 1 \Rightarrow x^* = 0$ es asintóticamente estable.

→ Si $\alpha \in]\frac{1}{\ln 2}, +\infty[\Rightarrow |f'(0)| > 1 \Rightarrow x^* = 0$ es inestable.

→ $\begin{cases} \text{Si } \alpha = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow f'(0) = 1 \\ \text{Si } \alpha = -\frac{1}{\ln 2} \Rightarrow f'(0) = -1 \end{cases}$ ⇒ No da información acerca de la estabilidad del punto fijo

Hemos de recurrir a la segunda derivada:

$f''(x) = \frac{2\alpha x}{2+x^2} + \frac{8\alpha x}{(2+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow$ No aporta información, luego, recurrimos

a la tercera derivada:

$f'''(x) = \frac{2\alpha(2+x^2) - 2x \cdot 2x\alpha}{(2+x^2)^2} + \frac{8\alpha(2+x^2)^2 - 32\alpha x^2(2+x^2)}{(2+x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = 3\alpha$

Para $\alpha = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow f'''(0) > 0 \Rightarrow$ Inestable

Para $\alpha = -\frac{1}{\ln 2} \Rightarrow f'''(0) < 0 \Rightarrow$ Asintóticamente estable.