Práctica 1. Continuidad

Ejercicios propuestos

1. Estudiar la existencia de límite en el origen para los campos escalares definidos, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por

$$\textbf{(a)} \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\textbf{(b)} \quad g(x,y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2}$$

$$\textbf{(c)} \quad h(x,y) = \frac{\log(1 + x^4)\, \operatorname{sen}^2 y}{y^4 + x^8}$$

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, como se indica:

$$\textbf{(a)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

$$\textbf{(b)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - y^2} & \text{si} \quad x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si} \quad x^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\textbf{(c)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$$

$$\textbf{(d)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} \operatorname{arc\,tg}(x^2 + y^2) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia de límite en el origen para el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x^n\, y^n}{x^2\, y^2 + (x-y)^2} \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

4. Dados $\alpha, b \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto $(0, b)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

5. Dado $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, estudiar la existencia de límite en el punto u del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{u\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{|x-a| + |y-b| + |z-c|} \qquad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{u\}$$

1. Estudiar la existencia de límite en el origen para los campos escalares definidos, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por

$$\textbf{(a)} \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\textbf{(b)} \quad g(x,y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2}$$

$$\textbf{(c)} \quad h(x,y) = \frac{\log(1 + x^4) \operatorname{sen}^2 y}{y^4 + x^8}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación.

Calculemos los límites iterados:

$y \neq 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$

$x \neq 0 \quad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} = 1$

Como los límites iterados no coinciden, el límite no existe.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$ indet.

Calculemos los límites iterados:

$y \neq 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} = 0$

$x \neq 0 \quad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} = 0$

Los límites iterados no me aportan mucha información, solo que de poseer un límite, este sería el 0

Procedamos ahora por acotación:

$|g(x,y) - \alpha| = \left|\dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|\operatorname{sen} y| \leq |\operatorname{sen} y|$

$\lim\limits_{y\to 0} |\operatorname{sen} y| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} = 0$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\log(1+x^4)\operatorname{sen}^2 y}{y^4+x^2} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminación)

Límites iterados:

$y \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^4)\operatorname{sen}^2 y}{y^4+x^2} = 0$, $\quad x \neq 0 \quad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\log(1+x^4)\operatorname{sen}^2 y}{x^8+y^4} = 0$. Posible límite en 0.

Hacemos un cambio de variable

$$\varphi(t) = (t, t^2) \quad ; \quad f(\varphi(t)) = f(t,t^2) = \frac{\log(1+t^4)\,\mathrm{sen}^2 t^2}{2t^8} = \frac{t^4\,\mathrm{sen}^2 t^2}{2t^8}\cdot \psi(t)$$

donde $\psi(t) = \dfrac{\log(1+t^4)}{t^4}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 t^2}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to 0} \psi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t^4)}{t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{4t^3}{1+t^4}}{4t^3} = 1$$

Luego, $\lim\limits_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. $(1/2 \neq 0)$.

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la continuidad del campo escalar $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, como se indica:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si} \quad x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si} \quad x^2 = y^2 \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}\operatorname{arc\,tg}(x^2+y^2) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

Sea $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y=0\}$. A es la imagen inversa por f del $\{0\}$, luego, A es cerrado, por tanto, $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ es abierto. Por el carácter local de la continuidad, $f|_U = \dfrac{x+y}{x-y}$ es racional y por tanto continua en U. Como U es abierto, entorno de todos sus puntos, f es continua, en U.

Falta ver qué ocurre con los puntos tales que $x=y$, de la forma (a,a)

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x+a}{x-a} = \dfrac{2a}{0} = +\infty$ No existe límite $\Rightarrow$ No continua en (a,a) con $a \neq 0$

En el $(0,0)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\neq 0}} \dfrac{x+y}{x-y} = -1$, $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{x+y}{x-y} = 1$. Los límites iterados no coinciden. el límite no existe, luego, no es continua en $(0,0)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. A es la imagen inversa por f del $\{0\}$, luego A es cerrado, por tanto, $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ es abierto. $f|_U = \frac{x^3 - y^3}{xy}$, por el carácter local de la continuidad es continua en U, luego, f es continua en U.

Veamos los puntos de la forma $(a,0)$, $(0,a)$, $(0,0)$, que son aquellos que no están en U.

$y = 0$, $\lim_{x \to a} \frac{x^3}{0} = +\infty$ no existe

$x = 0$ $\lim_{y \to a} \frac{-y^3}{0} = -\infty$ no existe

En los puntos de la forma $(a,0)$, $(0,a)$ con $a \in \mathbb{R}$, la función no es continua, pues el límite no existe.

En $(0,0)$:

$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 0$

$\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$

$\Rightarrow$ El posible límite es 0.

En consecuencia f es continua en $(0,0)$.

Por tanto f es continua en $U \cup \{(0,0)\}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 - y^2} & x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si } x^2 = y^2 \end{cases}$

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$. A es la imagen inversa del $\{0\}$, por f, luego, es cerrado y, por consiguiente $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ es abierto. El carácter local de la continuidad nos dice que $f|_U = \frac{x^3}{x^2 - y^2}$, función racional, es continua, luego, f es continua en U.

Veamos qué ocurre en los puntos de la forma (a,a) con $a \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^3}{x^2-a^2} = \frac{a^3}{0} = +\infty$$ No existe límite en (a,a).

Punto $(-a,-a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -a} \frac{x^3}{x^2-a^2} = \lim\limits_{x\to a} \frac{-x^3}{x^2-a^2} = \frac{-a^3}{0} = -\infty \Rightarrow$ No existe.

Punto $(a,-a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x,-a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{x^3}{x^2-a^2} = +\infty \Rightarrow$ No existe.

Punto $(-a,a) \Rightarrow \lim\limits_{y\to a} f(-a,y) = \lim\limits_{y\to a} \frac{-a^3}{a^2-y^2} = \frac{-a^3}{0} = -\infty \Rightarrow$ No existe

En $(0,0)$. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2-y^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y\neq 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2-y^2} = 0 \\ x\neq 0 \quad \lim\limits_{y\to 0} \frac{x^3}{x^2-y^2} = x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Posible límite

$$\left|f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) - 0\right| = \left|\frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\text{sen}^2\theta}\right| = \rho\left|\frac{\cos^3\theta}{\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}\right| \leq \rho\left|\frac{\cos^3\theta}{1}\right| \leq \rho \xrightarrow{t\to 0} 0$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ cont. en $(0,0)$.

Luego, f continua en $U \cup \{(0,0)\}$

d) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\,\text{arctg}(x^2+y^2) & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Sea $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Dicho conjunto es la imagen inversa por f del $\{0\}$, luego cerrado. En consecuencia, $U = \mathbb{R}^2\setminus A$ es abierto. Por tanto, atendiendo al carácter local de la continuidad, dado que $f|_U = \frac{x}{y}\,\text{arctg}(x^2+y^2)$ es continua (producto de funciones continuas) y U es abierto (entorno de todos sus puntos), f es continua en U.

Veamos qué ocurre en los puntos de la forma $(a,0)$ con $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to a} \frac{x\,\text{arctg}(x^2)}{0} = +\infty$$ $\Rightarrow$ No existe límite en los puntos $(a,0)$

En $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(\text{arctg}(x^2+y^2))}{y} = \frac{0}{0} \text{ (Indet.)}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0 \quad \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)\right| = \left|\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\,\text{arctg}(\rho^2)\right| \leq \\ \leq \frac{\pi}{2}\left|\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right| \Rightarrow \text{diverge} \Rightarrow \nexists \lim. \end{array}\right.$

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia de límite en el origen para el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x^n y^n}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^n y^n}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{0}{0} \quad \text{(Indet).}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 = \lim_{y\to 0} f(0,y) \Rightarrow \text{Posible límite } 0.$$

Hagamos un cambio de variable $(x,y) \mapsto (t,t) \Rightarrow f(t,t) = \dfrac{t^{2n}}{t^4} = t^{2n-4}$

$$\lim_{t\to 0} t^{2n-4} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=2 \\ 0 & \text{si } n>2 \\ +\infty & \text{si } 0<n<2 \end{cases} \Rightarrow \text{Para } n>2 \ \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

4. Dados $\alpha, b \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto $(0,b)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall y \in \mathbb{R}$$

Límite en el punto $(0,b)$:

$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ corresponde al primer y cuarto cuadrante luego, para que exista el límite en $(0,b)$ se ha de verificar que los límites radiales coincidan. Trabajamos con polares:

$$f(\rho\cos\theta, b+\rho\operatorname{sen}\theta) = (\rho^\alpha \cos^\alpha\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2\cos^2\theta + b^2 + 2b\rho\operatorname{sen}\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\right) = \rho^\alpha \cos^\alpha\theta \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2+b^2+2b\rho\operatorname{sen}\theta}\right) =$$

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, b+\rho\operatorname{sen}\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha>0, \ b\neq 0$$

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)| = \left|\rho^\alpha \cos^\alpha\theta \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2+b^2+2b\rho\operatorname{sen}\theta}\right)\right| \leq \rho^\alpha \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, b+\rho\operatorname{sen}\theta) =$$