Autómatas y Lenguajes Formales
Tarea 4

Alumnos:
Torres Partida Karen Larissa
Altamirano Niño Luis Enrique

14 de abril de 2020

1. Demuestre usando el lema del bombeo que los siguientes lenguajes no son regulares:

- $L = \{w \in \{0,1\}^* | w^{\mathcal{R}} = w$, es decir, w es palindrome$\}$

  Aplicando la interacción que resulta de aplicar la forma contrapositiva del lema del bombeo tenemos:

  a) El adversario piensa en un valor para $n \geq 0$.
  b) Tomamos $w = 0^n\, 1\, 0^n$ donde claramente $|w| \geq n$ y $w \in L$.
  c) El adversario piensa en una descomposición $w = xyz$ con $y \neq \varepsilon$, y con $|xy| \leq n$. Ahora como $|xy| \leq n$ tenemos que x y y están compuestas sólo por 0's. Sean $|x| = i$, $|y| = j$ donde $j > 0$ pues $y \neq \varepsilon$, y $|xy| = i + j \leq n$. De tal manera que $w = \underbrace{0^i}_{x}\ \underbrace{0^j}_{y}\ \underbrace{0^{n-(i+j)}\, 1\, 0^n}_{z}$.
  d) Escogemos $k = 0$. Así

  $$\begin{aligned} xy^k z &= xy^0 z \\ &= xz \\ &= 0^i\, 0^{n-(i+j)}\, 1\, 0^n \\ &= 0^{n-j}\, 1\, 0^n \end{aligned}$$

  Y como $j > 0$(pues $y \neq \varepsilon$) entonces es claro que $|0^{n-j}| \neq |0^n|$, así que $xy^k z$ no es palindrome y por lo tanto $xy^k z \notin L$. Así concluimos que L **no** es regular.

- $S = \{w \in \{a,b\}^* | n_a(w) < 2n_b(w)\}$, donde la función $n_\sigma(w)$ devuelve el número de veces que el símbolo $\sigma \in \{a,b\}$ figura en la cadena w.

  Aplicando la interacción que resulta de aplicar la forma contrapositiva del lema del bombeo tenemos:

  a) El adversario piensa en un valor para $n \geq 0$.
  b) Tomamos $w = a^{2n}\, b^{n+1}$ donde claramente $|w| \geq n$ y $w \in L$.
  c) El adversario piensa en una descomposición $w = xyz$ con $y \neq \varepsilon$, y con $|xy| \leq n$. Ahora como $|xy| \leq n$ tenemos que x y y están compuestas sólo por a's. Sean $|x| = i$, $|y| = j$ donde $j > 0$ pues $y \neq \varepsilon$, y $|xy| = i + j \leq n$. De tal manera que $w = \underbrace{a^i}_{x}\ \underbrace{a^j}_{y}\ \underbrace{a^{2n-(i+j)}\, b^{n+1}}_{z}$.

d) Escogemos $k = 5$. Así

$$\begin{aligned} xy^k z &= xy^5 z \\ &= a^i\,(a^j)^5\,a^{2n-(i+j)}\,b^{n+1} \\ &= a^{i+5j+2n-i-j}\,b^{n+1} \\ &= a^{2n+4j}\,b^{n+1} \end{aligned}$$

Y entonces $n_a(xy^k z) = 2n + 4j$ y $2\,n_b(xy^k z) = 2(n+1) = 2n+2$, ahora como $j > 0$ es claro que $n_a(xy^k z) \not< 2\,n_b(xy^k z)$ pues $2n + 4j > 2n + 2$, por lo que $xy^k z \notin S$. Así concluimos que S **no** es regular.

2. Utilizando el teorema de Myhill-Nerode demuestre que

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \,|\, |w| > 0 \text{ es par y w tiene sus símbolos de enmedio iguales}\}$$

no es regular.

Supongamos que tenemos dos naturales i y j tales que, $i \neq j$, $i = j + 1$ y $j \geq 0$. Queremos mostrar que $(ab)^i a \not\equiv_L (ab)^j a$, entonces si tomamos $(ab)^i a$, tenemos que:

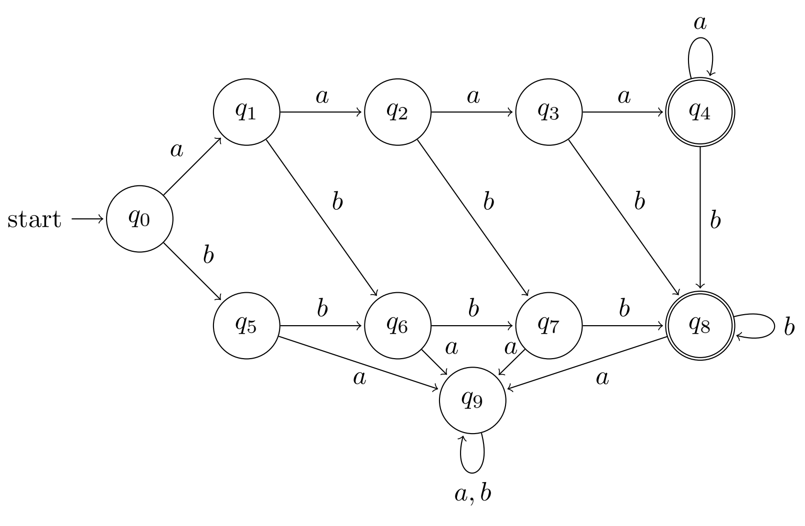
- $(ab)^i a\,(ab)^i a \in L$ pues como $|(ab)^i a|$ es impar entonces es claro que $|(ab)^i a\,(ab)^i a|$ es par, ahora como $i = j + 1$ y $j \geq 0$ entonces es válido que $(ab)^i a\,(ab)^i a = (ab)^i aab(ab)^{i-1}a$, además tenemos que $|(ab)^i| = 2i$ y $|b(ab)^{i-1}a| = 1 + 2(i-1) + 1 = 2i$, por lo que $\underbrace{(ab)^i}_{2i}\,aa\,\underbrace{b(ab)^{i-1}a}_{2i}$, así que los símbolos de enmedio de $(ab)^i a\,(ab)^i a$ son iguales.

- $(ab)^j a\,(ab)^i a \notin L$ pues aunque $|(ab)^j a\,(ab)^i a|$ es par, se tiene que $(ab)^j a\,(ab)^i a = (ab)^j aab(ab)^{i-1}a$, ahora tenemos que $|(ab)^j a| = 2j + 1$ y $|(ab)^{i-1}a| = 2(i-1) + 1 = 2((j+1) - 1) = 2j + 1$, por lo que entonces tenemos $\underbrace{(ab)^j a}_{2j+1}\,ab\,\underbrace{(ab)^{i-1}a}_{2j+1}$, y entonces lo símbolos de enmedio de la cadena $(ab)^j a\,(ab)^i a$ son distintos.

Por lo tanto hay una infinidad de clases de equivalencia. Por el teorema de Myhill-Nerode L no es regular.

3. ¿Es el lenguaje $\{a^i b^j | i + j \geq 4\}$ regular? Si es el caso, dé un autómata finito o una expresión regular que lo genere. Si no es regular, demuéstrelo.

Respuesta:
El lenguaje sí es regular y para ello tenemos el siguiente autómata:



4. Determine si el lenguaje $L = \{a^i b^j | i \leq j\}$ es regular o no. Demuestre su respuesta.

Aplicando la interacción que resulta de aplicar la forma contrapositiva del lema del bombeo tenemos:

a) El adversario piensa en un valor para $n \geq 0$.

b) Tomamos $w = a^n\, b^n$ donde claramente $|w| \geq n$ y $w \in L$ (pues $n \leq n$).

c) El adversario piensa en una descomposición $w = xyz$ con $y \neq \varepsilon$, y con $|xy| \leq n$. Ahora como $|xy| \leq n$ tenemos que x y y están compuestas sólo por a's. Sean $|x| = i$, $|y| = j$ donde $j > 0$ pues $y \neq \varepsilon$, y $|xy| = i + j \leq n$. De tal manera que $w = \underbrace{a^i}_{x}\ \underbrace{a^j}_{y}\ \underbrace{a^{n-(i+j)}\, b^n}_{z}$.

d) Escogemos $k = 2$. Así

$$\begin{aligned} xy^k z &= xy^2 z \\ &= a^i\, (a^j)^2\, a^{n-(i+j)}\, b^n \\ &= a^{i+2j+n-i-j}\, b^n \\ &= a^{n+j}\, b^n \end{aligned}$$

Y entonces tenemos que $n + j \not\leq n$ pues $n + j > n$, ya que $j > 0$, por lo que $xy^k z \notin L$, y por lo tanto L no es regular.

5. Encuentre un ejemplo de un lenguaje $L \subseteq \{a, b\}^*$ tal que L^* no puede ser aceptado por un autómata finito.

Ejemplo:
Sea

$$L = \{w \in \{a, b\}^* | w \text{ tiene el mismo número de a's y b's}\}$$

tenemos que $L = L^*$ y dado que L no es regular, entonces L^* no es regular y por lo tanto L^* no puede ser aceptado por un autómata finito.

6. Dé gramáticas libres de contexto para cada uno de los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

a) $\{w \in \Sigma^* | w \text{ tiene más a's que b's}\}$

Respuesta:
Tenemos la siguiente gramática:

$$S \to a \,|\, aS \,|\, bSS \,|\, SbS \,|\, SSb$$

b) $\{w \in \Sigma^* | \text{la longitud de } w \text{ es impar y su símbolo inicial, de enmedio y final es el mismo}\}$

Respuesta:
Tenemos la siguiente gramática:

$$\begin{aligned} S &\to aTa \,|\, bRb \,|\, a \,|\, b \\ T &\to a \,|\, bTb \,|\, aTa \,|\, aTb \,|\, bTa \\ R &\to b \,|\, bRb \,|\, aRa \,|\, aRb \,|\, bRa \end{aligned}$$

7. Describa el lenguaje (subconjunto de $\{a, b\}^*$) que es generado por la gramática libre de contexto siguiente:

$$S \to TT, \qquad T \to aT \,|\, Ta \,|\, b$$

Respuesta:
La gramática genera el lenguaje:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* | n_b(w) = 2\}$$

, es decir, las cadenas de a's y b's que sólo tienen 2 b's.