Autómatas y Lenguajes Formales
Tarea 2

Alumnos:
Torres Partida Karen Larissa
Altamirano Niño Luis Enrique

24 de marzo de 2020

1. En ciertos lenguajes de programación, los comentarios aparecen entre delimitadores tales como /# y #/. Sea C el lenguaje de todos los comentarios delimitados de forma válida. Un miembro de C debe empezar con /# y terminar con #/ sin que haya en medio ningún #/. Por simplicidad, consideramos como alfabeto de las cadenas de entrada a $\Sigma = \{a, b, /, \#\}$. Dé una expresión regular que genere a C. Aquí unos ejemplos en el lenguaje de programación C++(# es reemplazado por $*$):

   Comentarios válidos:

   - /##/
   - /#/#/
   - /#a/#b//##/

   Comentarios inválidos:

   - /#/
   - /#/#/#/
   - /#a#/#/

   Respuesta:
   La respuesta es $/\#(/ + \#^*a + \#^*b)^*\#^*\#/$

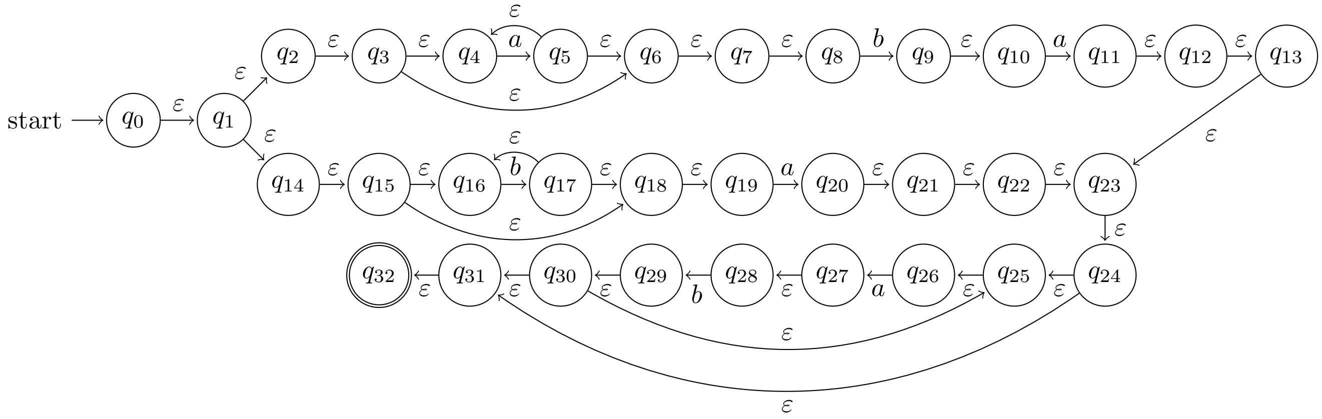
2. Una *expresión regular generalizada* se define del mismo modo que una expresión regular ordinaria, excepto que dos operaciones adicionales, intersecccón y complemento, son permitidas. Por ejemplo, la expresión regular generalizada $abb\overline{\varnothing} \cap \overline{(\overline{\varnothing}aaa\overline{\varnothing})}$ representa el conjunto de todas las cadenas en $\{a, b\}^*$ que comienzan con abb y no contienen a la subcadena aaa. Muestre que el subconjunto $\{aba\}^*$ de $\{a, b\}^*$ puede ser descrito por una expresión regular generalizada sin presencias del operador *.

   Respuesta:
   Tenemos que la *expresión regular generalizada* correspondiente es:

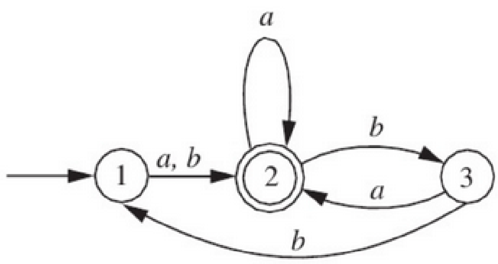
$$aba\overline{\varnothing} \cap \overline{(\overline{\varnothing}bb\overline{\varnothing})} \cap \overline{(\overline{\varnothing}aaa\overline{\varnothing})} \cap \overline{(\overline{\varnothing}bab\overline{\varnothing})} \cap (aba\overline{\varnothing}aba)$$

3. Mediante el método dado en clase empleado en la demostración del Teorema de Kleene parte I, construya un AFN-ε noble para la expresión regular: $(a^*ba + b^*a)(ab)^*$.

   El AFN-ε correspondiente es:



4. Use el algoritmo basado en el lema de Arden para encontrar una expresión regular correspondiente a cada uno de los AFD siguientes:



a)

Renombrando los estados como $1 = q_0, 2 = q_1$ y $3 = q_2$. Los conjuntos $X_{i,j}$ y Y_i son los siguientes:

$$
\begin{array}{lll}
X_{0,0} = \varnothing & X_{1,0} = \varnothing & X_{2,0} = \{b\} \\
X_{0,1} = \{a, b\} & X_{1,1} = \{a\} & X_{2,1} = \{a\} \\
X_{0,2} = \varnothing & X_{1,2} = \{b\} & X_{2,1} = \varnothing \\
Y_0 = \varnothing & Y_1 = \{\varepsilon\} & Y_2 = \varnothing
\end{array}
$$

Las ecuaciones características son:

$$
\begin{aligned}
L_2 &= X_{2,0}L_0 + X_{2,1}L_1 + X_{2,2}L_2 + Y_2 = bL_0 + aL_1 \\
L_1 &= X_{1,0}L_0 + X_{1,1}L_1 + X_{1,2}L_2 + Y_1 = aL_1 + bL_2 + \varepsilon \\
L_0 &= X_{0,0}L_0 + X_{0,1}L_1 + X_{0,2}L_2 + Y_0 = (a + b)L_1
\end{aligned}
$$

Por el lema de Arden, la solución a $X = AX + B$ es $X = A^*B$. Aplicamos este lema para solucionar las ecuaciones L_i del índice mayor al menor. Entonces tenemos:

- Para $L_2 = bL_0 + aL_1$, tenemos que $L_2 = AL_2 + B$, en donde $A = \varnothing$ y $B = bL_0 + aL_1$, y por lo tanto la solución es $L_2 = A^*B = \varnothing^*(bL_0 + aL_1) = bL_0 + aL_1$

- Sustituyendo $L_2 = bL_0 + aL_1$ en la ecuación para L_1. Obtenemos:

  $$L_1 = aL_1 + b(bL_0 + aL_1) + \varepsilon = aL_1 + bbL_0 + baL_1 + \varepsilon = (a + ba)L_1 + bbL_0 + \varepsilon$$

  Entonces para $L_1 = (a + ba)L_1 + bbL_0 + \varepsilon$, tenemos que $L_1 = AL_1 + B$, en donde $A = (a + ba)$ y $B = bbL_0 + \varepsilon$, y por lo tanto la solución es $L_1 = A^*B = (a + ba)^*(bbL_0 + \varepsilon)$

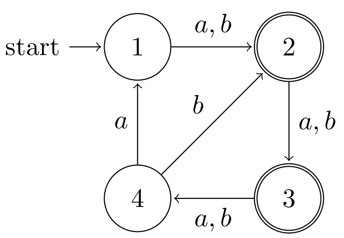
- Finalmente sustituyendo $L_1 = (a + ba)^*(bbL_0 + \varepsilon)$ en $L_0 = (a + b)L_1$ tenemos:

  $$L_0 = (a+b)[(a+ba)^*(bbL_0+\varepsilon)] = (a+b)[((a+ba)^*bb)L_0+(a+ba)^*\varepsilon] = ((a+b)(a+ba)^*bb)L_0+(a+b)(a+ba)^*\varepsilon$$

  Entonces para $L_0 = ((a + b)(a + ba)^*bb)L_0 + (a + b)(a + ba)^*\varepsilon$ tenemos que $L_0 = AL_0 + B$ y $L_0 = A^*B$, entonces $A = ((a + b)(a + ba)^*bb)$ y $B = (a + b)(a + ba)^*\varepsilon$, y por lo tanto

  $$L_0 = ((a + b)(a + ba)^*bb)^*((a + b)(a + ba)^*\varepsilon)$$

  Ésta es la expresión regular para el AFD dado.



b)

Renombrando los estados como $1 = q_0, 2 = q_1$, $3 = q_2$ y $4 = q_3$. Los conjuntos $X_{i,j}$ y Y_i son los siguientes:

$$\begin{array}{rrrr} X_{0,0} = \varnothing & X_{1,0} = \varnothing & X_{2,0} = \varnothing & X_{3,0} = \{a\} \\ X_{0,1} = \{a, b\} & X_{1,1} = \varnothing & X_{2,1} = \varnothing & X_{3,1} = \{b\} \\ X_{0,2} = \varnothing & X_{1,2} = \{a, b\} & X_{2,1} = \varnothing & X_{3,2} = \varnothing \\ X_{0,3} = \varnothing & X_{1,3} = \varnothing & X_{2,3} = \{a, b\} & X_{3,3} = \varnothing \\ Y_0 = \varnothing & Y_1 = \{\varepsilon\} & Y_2 = \{\varepsilon\} & Y_3 = \varnothing \end{array}$$

Las ecuaciones características son:

$$\begin{aligned} L_3 &= X_{3,0}L_0 + X_{3,1}L_1 + X_{3,2}L_2 + X_{3,3}L_3 + Y_3 = aL_0 + bL_1 \\ L_2 &= X_{2,0}L_0 + X_{2,1}L_1 + X_{2,2}L_2 + X_{2,3}L_3 + Y_2 = (a + b)L_3 + \varepsilon \\ L_1 &= X_{1,0}L_0 + X_{1,1}L_1 + X_{1,2}L_2 + X_{1,3}L_3 + Y_1 = (a + b)L_2 + \varepsilon \\ L_0 &= X_{0,0}L_0 + X_{0,1}L_1 + X_{0,2}L_2 + X_{0,3}L_3 + Y_0 = aL_1 \end{aligned}$$

Por el lema de Arden, la solución a $X = AX + B$ es $X = A^*B$. Aplicamos este lema para solucionar las ecuaciones L_i del índice mayor al menor. Entonces tenemos:

- Para $L_3 = aL_0 + bL_1$, tenemos que $L_3 = AL_3 + B$, en donde $A = \varnothing$ y $B = aL_0 + bL_1$, y por lo tanto la solución es $L_3 = A^*B = \varnothing^*(aL_0 + bL_1) = aL_0 + bL_1$
- Sustituyendo $L_3 = aL_0 + bL_1$ en la ecuación para L_2. Obtenemos:

  $L_2 = (a + b)L_3 + \varepsilon = (a + b)(aL_0 + bL_1) + \varepsilon = (a + b)aL_0 + (a + b)bL_1 + \varepsilon$

  Entonces para $L_2 = (a + b)aL_0 + (a + b)bL_1 + \varepsilon$, tenemos que $L_2 = AL_2 + B$, en donde $A = \varnothing$ y $B = (a + b)aL_0 + (a + b)bL_1 + \varepsilon$, y por lo tanto la solución es $L_2 = A^*B = \varnothing^*((a + b)aL_0 + (a + b)bL_1 + \varepsilon) = (a + b)aL_0 + (a + b)bL_1 + \varepsilon$
- Sustituyendo $L_2 = (a + b)aL_0 + (a + b)bL_1 + \varepsilon$ en la ecuación para L_1. Obtenemos:

  $L_1 = (a + b)L_2 + \varepsilon = (a + b)((a + b)aL_0 + (a + b)bL_1 + \varepsilon) + \varepsilon = (a + b)(a + b)aL_0 + (a + b)(a + b)bL_1 + (a + b)\varepsilon + \varepsilon = (a + b)(a + b)aL_0 + (a + b)(a + b)bL_1 + ((a + b) + \varepsilon)$

  Entonces para $L_1 = (a + b)(a + b)aL_0 + (a + b)(a + b)bL_1 + ((a + b) + \varepsilon)$, tenemos que $L_1 = AL_1 + B$, en donde $A = (a + b)(a + b)b$ y $B = (a + b)(a + b)aL_0 + ((a + b) + \varepsilon)$, y por lo tanto la solución es $L_1 = A^*B = ((a + b)(a + b)b)^*((a + b)(a + b)aL_0 + ((a + b) + \varepsilon))$
- Sustituyendo $L_1 = ((a + b)(a + b)b)^*((a + b)(a + b)aL_0 + ((a + b) + \varepsilon)))$ en la ecuación para L_0. Obtenemos:

  $L_0 = aL_1 = a(((a + b)(a + b)b)^*((a + b)(a + b)aL_0 + ((a + b) + \varepsilon))) = a(((a + b)(a + b)b)^*(a + b)(a + b)aL_0 + ((a + b)(a + b)b)^*((a + b) + \varepsilon))) = a((a + b)(a + b)b)^*(a + b)(a + b)aL_0 + a((a + b)(a + b)b)^*((a + b) + \varepsilon))$

  Entonces para $L_0 = a((a + b)(a + b)b)^*(a + b)(a + b)aL_0 + a((a + b)(a + b)b)^*((a + b) + \varepsilon))$, tenemos que $L_0 = AL_0 + B$, en donde $A = a((a + b)(a + b)b)^*(a + b)(a + b)a$ y $B = a((a + b)(a + b)b)^*((a + b) + \varepsilon))$, y por lo tanto la solución es $L_0 = A^*B = ((a((a + b)(a + b)b)^*(a + b)(a + b)a)^*(a((a + b)(a + b)b)^*((a + b) + \varepsilon)))$ Ésta es la expresión regular para el AFD dado.

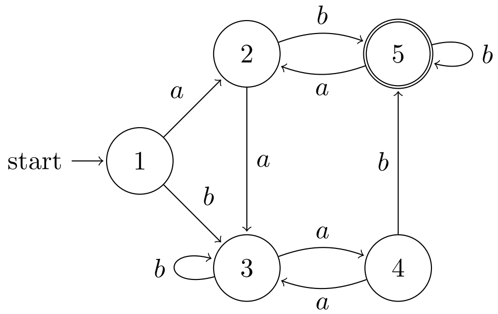
5. Demuestre la siguiente equivalencia entre expresiones regulares:

$$(aa^*b + ba^*b + b^*a)^* \equiv (((a + b)a^*b)^*(b^*a)^*)^*$$

Usando las equivalencias vistas en clase:

$$
\begin{aligned}
(aa^*b + ba^*b + b^*a)^* &\equiv ((a+b)a^*b + b^*a)^* \\
&\equiv (((a+b)a^*b)^*(b^*a)^*)^*
\end{aligned}
$$

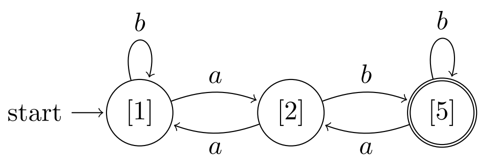
6. Para cada uno de los siguientes AFD, encuentre su AFD equivalente con el mínimo número de estados:

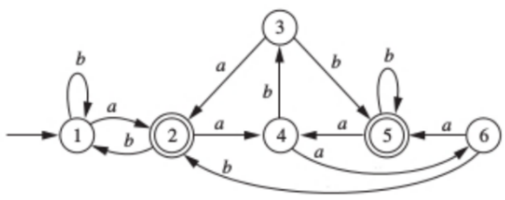
a) 

Aplicando el algoritmo de minimización de AFDs tenemos:

	1	2	3	4
2	×			
3		×		
4	×		×	
5	✓	✓	✓	✓

En donde ✓representa las casillas marcadas en la primera iteración y × las marcadas en la segunda iteración, una tercera iteración no cambia el estado de la tabla, entonces $1 \approx 3$ y $2 \approx 4$. Su AFD equivalente con el mínimo número de estados:



b) 

Aplicando el algoritmo de minimización de AFDs tenemos:

	1	2	3	4	5
2	✓				
3	×	✓			
4	×	✓	×		
5	✓	×	✓	✓	
6	×	✓	×	×	✓

En donde ✓representa las casillas marcadas en la primera iteración y × las marcadas en la segunda iteración, entonces, como no quedó ninguna casilla libre, el AFD dado ya tiene el mínimo número de estados.