# Autómatas y Lenguajes Formales
# Tarea 7

Alumnos:
Torres Partida Karen Larissa
Altamirano Niño Luis Enrique

11 de junio de 2020

1. Demuestre, usando el lema del bombeo, que $\{ww|w \in \{0,1\}^*\}$ no es un lenguaje libre de contexto.

    1) El adversario elige k en el paso 1.
    2) Consideramos $z = 0^k 1^k 0^k 1^k$. Sabemos que $z$ pertenece al lenguaje y $|z| \geq k$.
    3) Ahora digamos que el adversario elige $u$, $v$, $w$, $x$, $y$ tal que $z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$, y $|vwx| \leq k$.
    4) Analicemos los siguientes casos.
        1) Dado que $|vwx| \leq k$, $vwx$ puede estar contenido dentro del primer bloque de $0's$ de z. Tomando $i = 2$, tenemos que en $uv^2wx^2y$ habremos introducido más $0's$ en la primera mitad de la cadena, por lo tanto $uv^2wx^2y$ no pertenece al lenguaje.
        2) Es análogo para los casos donde $vxw$ está contenido en el primer bloque de $1's$, segundo bloque de $0's$ o en el segundo bloque de $1's$
        3) Si $vwx$ consiste $0's$ y $1's$ estando en la primera mitad $z$, tomando $i = 2$, tenemos que en $uv^2wx^2y$ habremos introducido más $1's$ en la izquierda que se mueven a la segunda mitad, por lo que no tiene la forma ww, es decir, no pertenece al lenguaje. Similarmente, si $vwx$ está contenido en la segunda mitad de z, al hacer $uv^2wx^2y$ mueve un 0 a la última posición de la primera mitad, por lo que tampoco forma parte del lenguaje.
        4) El último caso es cuando $vwx$ figura en medio de $z$. Tomando ahora $i = 0$, $uv^0wx^0y$ tiene la forma $0^k 1^i 0^j 1^k$ donde $i$ y $j$ no pueden ser simultánemente iguales a $k$, por lo que tampoco forma parte del lenguaje.

    Podemos encontrar valores del bombeo, $i$, tal que dada cualquier descomposición del adversario logramos que $uv^iwx^iy$ no pertenece al lenguaje. Hemos exhibido una estrategia ganadora. Por el lema del bombeo, el lenguaje no es libre del contexto.

2. Decida si los siguientes lenguajes son libres de contexto y demuestre su respuesta.

    *a)* $\{xyx|x, y \in \{a,b\}* \ y \ |x| \geq 1\}$
    Supongamos que el lenguaje es libre de contexto. Entonces satisface el lema del bombeo. Sea $k$ la constante del lema. Ahora consideremos $x = a^k b^k$ y $y = \varepsilon$. Entonces $z = a^k b^k a^k b^k$. Deben existir $u$, $v$, $w$, $x$, $y$ tal que $u = uvwxy$ tal que $|vx| > 0$, $|vwx| \leq k$ y $uv^iwx^iy$ pertenece al lenguaje. Analicemos lo siguientes casos:

        1) $vx$ consiste sólo de $a's$ del primer grupo de $a's$ en $z$ o $vx$ consiste sólo de $b's$ del segundo grupo de $b's$ en $z$. Entonces $uv^2wx^2y$ o es igual a $a^{k+j}b^k a^k b^k$ o $a^k b^k a^k b^{k+j}$ para alguna $j \geq 1$. Ninguna de las dos pertenece al lenguaje, lo que es una contradicción.
        2) $vx$ contiene una $b$ del primer grupo de $b's$ en $z$ o $vx$ contiene una $a$ del segundo grupo de $a's$ en $z$. Entonces $uv^0wx^0y$ o es $a^n b^l a^m b^k$ o $a^k b^n a^l b^m$ con $n, m \geq 1$ y $l < k$. Ninguna de las dos pertenece al lenguaje, lo que es una contradicción.

    Por lo tanto siempre podemos llegar a una contradicción, por lo que el lenguaje no es un LLC.

    *b)* $\{a^i b^n c^n | i \leq n\}$

3. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si se declara verdadera, proporcione una demostración; si resulta ser falsa, dé un contraejemplo.

a) Si $L$ **no** es un LLC y $R$ es regular, entonces $L - R$ **no** es un LLC.

**Demostración.**

Supongamos que $L$ no es un LLC y $R$ es regular, y para llegar a una contradicción supongamos que $L - R$ es LLC, entonces $L - R = L \cap \overline{R}$ es LLC, entonces como R es regular, entonces $\overline{R}$ es regular y entonces $L$ es LLC, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $L - R$ no es un LLC.$\blacksquare$

b) Si $L$ **no** es un LLC y $F$ es finito, entonces $L \cup F$ **no** es un LLC.

**Demostración.**

Supongamos que $L$ no es un LLC y $F$ es finito, ahora para llegar a una contradicción supongamos que $L \cup F$ es un LLC, ahora como $F$ es finito entonces $F$ es regular, además $\overline{F}$ es regular también, entonces como $L \cup F$ es LLC y $\overline{F}$ es regular, entonces se cumple que $(L \cup F) \cap \overline{F} = (L \cap F) \cup (F \cap \overline{F}) = (L \cap F) \cup \emptyset = L \cap F$ es LLC, y cómo $F$ es regular, entonces $L$ es LLC, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $L \cup F$ no es LLC.$\blacksquare$

4. Considere la Máquina de Turing $M = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \{q_f\})$. Describa de manera informal pero clara el lenguaje $L(M)$ si $\delta$ consiste en las reglas:

$$\delta(q_0, a) = (q_1, b, R); \quad \delta(q_0, \sqcup) = (q_f, \sqcup, R); \quad \delta(q_1, b) = (q_0, a, R)$$

**Respuesta:**

El lenguaje que se reconoce es $L(M) = \{(ab)^n | n \geq 0\}$.

5. Sea $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \{q_f\})$, dónde la función de transición $\delta$ se define por la siguiente tabla:

| $\delta$ | a | b | c | $\sqcup$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_1, a, R)$ | | $(q_2, c, R)$ | |
| $q_1$ | $(q_0, a, R)$ | | | |
| $q_2$ | | $(q_2, b, R)$ | | $(q_f, \sqcup, R)$ |

a) Dé la secuencia de ejecución, a través de configuraciones y de la relación $\vdash$, para la cadena $aaaacbb$.

**Respuesta:**

La secuencia de ejecución es:

$$\begin{aligned} q_0aaaacbb &\vdash aq_1aaacbb \\ &\vdash aaq_0aacbb \\ &\vdash aaaq_1acbb \\ &\vdash aaaaq_0cbb \\ &\vdash aaaacq_2bb \\ &\vdash aaaacbq_2b \\ &\vdash aaaacbbq_2\sqcup \\ &\vdash aaaacbb\sqcup q_f\sqcup \end{aligned}$$

b) Describa el lenguaje de las cadenas aceptadas por $M$.

**Respuesta:**

El lenguaje aceptado es $L(M) = \{a^i c b^j \mid i = 2k, k \geq 0, j \geq 0\}$.