# Autómatas y Lenguajes Formales
# Tarea 1

Alumnos:
Torres Partida Karen Larissa
Altamirano Niño Luis Enrique

23 de febrero de 2020

1. Sea $x$ una cadena, $x^R$ su reversa y $x^i$ la cadena concatenada consigo misma $i$ veces. Demuestre por inducción matemática que $(x^R)^i = (x^i)^R$.(**Hint:** Use el hecho de que $(xy)^R = y^R x^R$)

   **Demostración.**
   Por inducción matemática sobre $i$.
   *Caso Base:* Sea $i = 0$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}(x^R)^i &= (x^R)^0 \\ &= \varepsilon \quad \text{por definición de } x^i \\ &= (\varepsilon)^R \quad \text{por definición de reversa de una cadena} \\ &= (x^0)^R \quad \text{por definición de } x^i \\ &= (x^i)^R\end{aligned}$$

   *Hipótesis de inducción:* Supongamos que $(x^R)^i = (x^i)^R$.

   *Paso Inductivo:* Ahora tenemos que mostrar que $(x^R)^{i+1} = (x^{i+1})^R$,así tenemos:

$$\begin{aligned}(x^R)^{i+1} &= (x^R)^i x^R \quad \text{por la definición de } x^i \\ &= (x^i)^R x^R \quad \text{por la hipótesis de inducción} \\ &= (xx^i)^R \quad \text{por el hecho de que } (xy)^R = y^R x^R \\ &= (x^i x)^R \quad \text{en este caso sí es válido conmutar la concatenación de cadenas} \\ &= (x^{i+1})^R \quad \text{por la definición de } x^i\end{aligned}$$

   $\therefore (x^R)^i = (x^i)^R$ ■

2. a) Demuestre que si $L_1 \subseteq L_2$ entonces $L_1^* \subseteq L_2^*$.

   **Demostración.**
   Primero supongamos que $L_1 \subseteq L_2$, ahora demostraremos que $\forall n \geq 0(L_1^n \subseteq L_2^n)$ ya que nos será de utilidad, entonces procederemos por inducción matemática sobre $n$ para demostrar lo anterior,así tenemos:

   *Caso Base:* Sea $n = 0$, hay que mostrar que $L_1^0 \subseteq L_2^0$, la contención es clara pues por la definición de potencias $A^n$ de un conjunto $A$ tenemos que $A^0 = \{\varepsilon\}$, es decir $L_1^0 = \{\varepsilon\}$ y $L_2^0 = \{\varepsilon\}$, y es claro que $\{\varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon\}$.

   *Hipótesis de Inducción:* Supongamos que $L_1^n \subseteq L_2^n$.

*Paso Inductivo:*Tenemos que mostrar ahora que $L_1^{n+1} \subseteq L_2^{n+1}$,entonces sea $x \in L_1^{n+1}$ ,y por definición de potencia de un conjunto $A^n$, esto es lo mismo que $x \in L_1^n L_1$, ahora por definición de concatenación de conjuntos tenemos que $x \in L_1^n \wedge x \in L_1$, ahora por la hipótesis de inducción, como $x \in L_1^n$, entonces $x \in L_2^n$, y como por la hipótesis inicial $L_1 \subseteq L_2$ y $x \in L_1$,entonces $x \in L_2$, así tenemos que $x \in L_2^n \wedge x \in L_2$, es decir, $x \in L_2^n L_2$, o lo que es igual $x \in L_2^{n+1}$

Por lo tanto $L_1^{n+1} \subseteq L_2^{n+1}$ y queda demostrado que $\forall n \geq 0(L_1^n \subseteq L_2^n)$.

Ahora hay que mostrar que $L_1^* \subseteq L_2^*$.
Sea $x \in L_1^*$,ahora por la definición de cerradura de Kleene $x \in \bigcup\limits_{n \geq 0} L_1^n$,es decir, $\exists n(x \in L_1^n)$, y por lo demostrado anteriormente, tenemos que entonces $\exists n(x \in L_2^n)$, lo que implica que $x \in \bigcup\limits_{n \geq 0} L_2^n$,es decir, $x \in L_2^*$, y por lo tanto $L_1^* \subseteq L_2^*$.

$\therefore$ Si $L_1 \subseteq L_2$ entonces $L_1^* \subseteq L_2^*$. $\blacksquare$

b) Demuestre que $L_1^* \cup L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.

**Demostración:**

Primero vamos a probar que $\forall n \geq 0(L_1^n \subseteq (L_1 \cup L_2)^n)$, ya que, nos será de utilidad. Entonces tenemos:

*Caso base:* Sea $n = 0$, hay que mostrar que $L_1^0 \subseteq (L_1 \cup L_2)^0$, la contención es clara pues por la definición de potencias $A^n$ de un conjunto $A$ tenemos que $A^0 = \{\varepsilon\}$, es decir $L_1^0 = \{\varepsilon\}$ y $(L_1 \cup L_2)^0 = \{\varepsilon\}$, y es claro que $\{\varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon\}$.

*Hipótesis de Inducción:* Supongamos que $L_1^n \subseteq (L_1 \cup L_2)^n$.

*Paso Inductivo:* Tenemos que mostrar que $L_1^{n+1} \subseteq (L_1 \cup L_2)^{n+1}$, entonces, sea $x \in L_1^{n+1}$, esto implica que $x \in L_1^n L_1$ (por la definición de potencia de un conjunto $A^n$), y entonces, $x \in L_1^n$ y $x \in L_1$ (por la definición de concatenación de conjuntos), ahora como $x \in L_1^n$ , entonces por la hipótesis de inducción tenemos que $x \in (L_1 \cup L_2)^n$, y como $x \in L_1$ entonces $x \in (L_1 \cup L_2)$, así tenemos que $x \in (L_1 \cup L_2)^n(L_1 \cup L_2)$, o lo que es lo mismo, $x \in (L_1 \cup L_2)^{n+1}$, y por lo tanto $L_1^{n+1} \subseteq (L_1 \cup L_2)^{n+1}$.

Demostrado lo anterior porcederemos ahora sí a mostrar que $L_1^* \cup L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.
Entonces sea $x \in L_1^* \cup L_2^*$, entonces tenemos dos casos:

- Si $x \in L_1^*$, entonces $x \in \bigcup\limits_{n \geq 0} L_1^n$, esto implica que $\exists n(x \in L_1^n)$, entonces, por lo que ya demostramos, tenemos que $\exists n(x \in (L_1 \cup L_2)^n)$, es decir, $x \in \bigcup\limits_{n \geq 0} (L_1 \cup L_2)^n$ y entonces $x \in (L_1 \cup L_2)^*$.
  Por lo tanto $L_1^* \cup L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.

- Si $x \in L_2^*$. (Es análogo al primer caso)

Por lo tanto, como en ambos casos llegamos a lo mismo, tenemos que $L_1^* \cup L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$ es cierto. $\blacksquare$

c) Encuentre un lenguaje $L$ sobre el alfabeto $\sum = \{a, b\}$ que no sea $\{\varepsilon\}$ y satisfaga $L = L^*$.

**Respuesta:**

Sea L el lenguaje de todas las cadenas de a's , es decir $L = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, ...\} = \{a^n | n \geq 0\} = \{a\}^* = L^*$

3. Demuestre la siguiente propiedad de la función de transición extendida $\widehat{\delta}$. Para todo estado $q \in Q$ y cualesquiera cadenas $x, y \in \sum^*$ se satisface:

$$\widehat{\delta}(q, xy) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), y)$$

**Demostración.**
Procedemos por inducción estructural sobre la cadena $y$.
*Caso Base:* Sea $y = \varepsilon$, entonces empezando del lado derecho de la igualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), y) &= \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), \varepsilon) \\
&= \widehat{\delta}(q, x) \quad \text{por la definición de } \widehat{\delta} \\
&= \widehat{\delta}(q, x\varepsilon) \quad \text{por la definición de concatenación de cadenas} \\
&= \widehat{\delta}(q, xy)
\end{aligned}$$

*Hipótesis de inducción:* Supongamos que $\widehat{\delta}(q, xy) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), y)$

*Paso inductivo:* Tenemos que mostrar que $\widehat{\delta}(q, x(ya)) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), ya)$, donde $a \in \sum$, entonces partiendo nuevamente del lado derecho de la igualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), ya) &= \delta(\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), y), a) \quad \text{por la definición de } \widehat{\delta} \\
&= \delta(\widehat{\delta}(q, xy), a) \quad \text{por la hipótesis de inducción} \\
&= \widehat{\delta}(q, xya) \quad \text{por la definición de } \widehat{\delta} \\
&= \widehat{\delta}(q, x(ya)) \quad \text{por la asocitividad en cadenas}
\end{aligned}$$

$\therefore \widehat{\delta}(q, xy) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), y)$ ■

4. Sean $L_1$ y $L_2$ dos lenguajes sobre $\Sigma$. Definimos el lenguaje cociente de $L_1$ y $L_2$ como

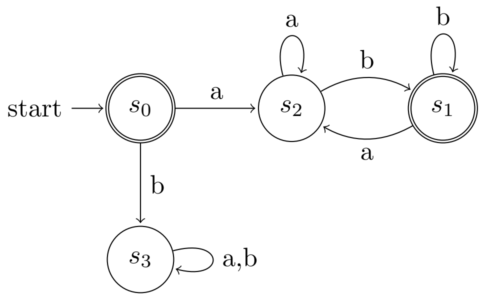
$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^* | \text{ para alguna } y \in L_2, \text{ se tiene } xy \in L_1\}$$

Demuestre que si $L_1$ es regular y $L_2$ es cualquier lenguaje, entonces $L_1/L_2$ es regular. **Hint:** $L_1$ puede ser reconocido por el AFD $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$. Con base en $M$ defina el AFD $M' = \{Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\}$ que reconozca a $L_1/L_2$. Recuerde que $\widehat{\delta}$ permite conocer el estado en $M$ al que se llega procesando la cadena $y \in L_2$, partiendo de cualquier estado $q_i \in Q$.

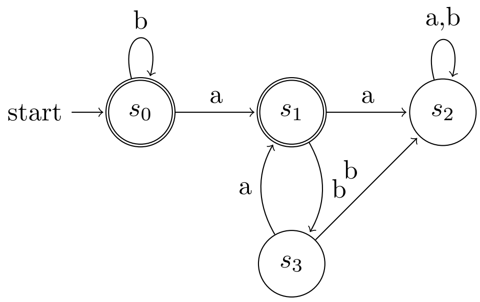
**Demostración.**

Supongamos que $L_1$ es regular, es decir, existe un autómata $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ que lo reconoce, entonces para una cadena $x \in \Sigma^*$, tenemos que $x \in L_1/L_2$ si y sólo si hay una cadena $y \in L_2$ tal que $xy \in L_1$ (esto por la definición de $L_1/L_2$) y esto pasa si y sólo si hay una cadena $y \in L_2$ tal que $\widehat{\delta}(q_0, xy) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q_0, x), y)$ (es decir, que las cadenas $xy$ lleguen a un estado final). Con esto definiremos un conjunto de estados finales $F' = \{q \in Q \mid \text{para algún } y \in L_2, \widehat{\delta}(q, y) \in F\}$. Entonces para cualquier $x$, $x \in L_1/L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}(q_0, x) \in F'$, es decir, $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$ reconoce a $L_1/L_2$, y por lo tanto $L_1/L_2$ también es regular. ■

5. Describa informalmente el lenguaje reconocido por los siguientes Autómatas Finitos Deterministas (AFD):

a) 


**Respuesta:**
Este autómata reconoce la cadena vacía y las cadenas que empiezan con a y terminan con b.

b) 

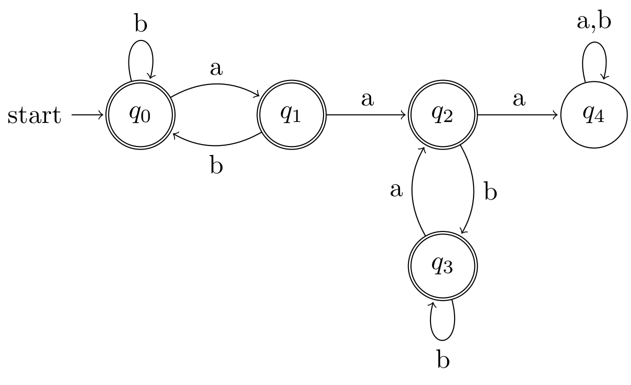

**Respuesta:**
Este autómata reconoce la cadena vacía, las cadenas con solo $b's$, o, las cadenas que terminan con $a$ y no contienen a las subcadenas $aa$ ni $abb$.

6. a) Diseñe un Autómata Finito Determinista (AFD) que reconozca el lenguaje

$$\{w \in \{a, b\}^* | w \text{ contiene a lo más una presencia de la cadena aa}\}$$

(La cadena $aaa$ contiene dos presencias de la cadena $aa$.)

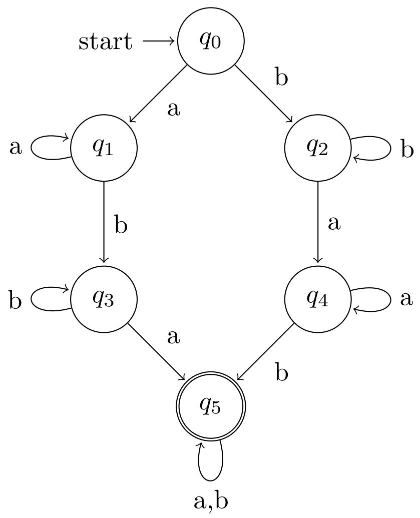
**Respuesta:**




b) Diseñe un Autómata Finito Determinista (AFD) que reconozca el lenguaje

$$\{w \in \{a, b\}^* | w \text{ tiene como subcadenas a } ab \text{ y } ba\}.$$

**Respuesta:**


start
$q_0$
a
b
$q_1$
a
$q_2$
b
b
a
$q_3$
b
$q_4$
a
a
b
$q_5$
a,b