

SEMINARARBEIT

Rahmenthema o	des Wisse	enschaftspropädeutisc	hen Ser	ninar 	rs: 			
Leitfach:								
Thema der Arbeit:								
				• • • • • •				
		• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •						
Verfasser/in:		Kursleite	r/in:					
Abgabetermin: 10. November 2020 (2. Unterrichtstag im November)								
Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte			
schriftliche Arbeit				x 3				
Abschlusspräsentation				x 1				
			Sun	nme:				
Gesamtleistung nach § 29 (7) GSO = Summe:2 (gerundet)								
Datum und Unterschrift der Kursleiterin bzw. des Kursleiters								

Datum und Unterschrift des Oberstufenkoordinators

Seminararbeit

Quirin Möller

5. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einl	eitung		1				
2	Vers	erschlüsselung allgemein						
	2.1	Definit	tion	. 2				
		2.1.1	Terminologie	. 2				
	2.2	Ziele .	- 	. 3				
		2.2.1	Geheimhaltung	. 3				
		2.2.2	Authentikation	. 3				
		2.2.3	weitere Ziele	. 4				
	2.3	Klassis	sche Chiffren	. 4				
		2.3.1	Caesar-Verschlüsselung	. 5				
	2.4	Symme	etrie	. 6				
3	RSA	\-Versc	hlüsselung	7				
	3.1	Public-	-Key-Kryptosysteme	. 7				
	3.2	2 Entwicklung des RSA-Algorithmus						
	3.3	Schlüsselerzeugung						
		3.3.1	Eulersche Phi-Funktion					
		3.3.2	Das modulare Inverse	. 10				
		3.3.3	Die Schlüssel	. 11				
	3.4	Ver-En	ntschlüsselung	. 11				
	3.5	5 Signatur		. 11				
3.6 Beweis		Beweis	5	. 11				
	3.7	praktis	sche Anwendungen	. 11				
	3.8	Vor- N	Tachteile	. 11				
4	Schl	hluss/Ausblick 11						

1 Einleitung

Bei der Betrachtung der Benennung der Epochen in der menschlichen Geschichte ist bemerkbar, dass hier mehrmals die bedeutendste technische Errungenschaft aus diesem Zeitraum zur Namensgebung verwendet wird. Das ist natürlich sinnvoll da diese Entwicklungen im großen Ausmaß das Leben der Menschen beeinflussten und auch für den weiteren Verlauf der Geschichte ausschlaggebend sind. Diese Namen sind wie »Bronzezeit« recht selbsterklärend, hier wurde die Metallverarbeitung, vor allem mit Bronze erfunden und revolutionierte die Waffentechnik und ermöglichte auch viele andere neuartige Gegenstände. 1 Schwieriger wird es dann schon bei dem Titel des aktuellen Zeitabschnittes: » Digitales Informationszeitalter«. Nach Jörn Lengsfeld sind hierbei die »Informations- und Kommunikationstechnologien« die prägenden Technologien.² Diese Technik hat deshalb eine so große Bedeutung in unserem Leben, da sie uns durch das nicht mehr wegzudenkende Internet jederzeit Zugriff auf eine unfassbare Menge an Informationen verschafft. Allerdings werden auch diese Erfindungen leider nicht immer fortschrittsbringend eingesetzt, sondern sie haben genau wie die Erfindungen des Atomzeitalters ihre Schattenseiten, welche meist zwar um einiges unauffälliger sind, aber nicht immer auch ungefährlicher. Denn gerade diese riesige Reichweite macht das Internet so attraktiv für Angreifer und deshalb mussten Verfahren entwickelt werden um sich gegen Verbrecher, die im Hintergrund mitlesen oder schädliche Informationen verbreiten zu schützen. Aus diesem Grund wurden Verschlüsselungsverfahren entwickelt. Bei »Verschlüsselung« denkt man zwar schnell an Geheimnachrichten und >top-secret \langle Dokumente, allerdings begegnen wir digitalen Verschlüsselungen inzwischen tagtäglich.

¹Bronzezeit in Europa.

²Jörn Lengsfeld, *Digitales Informationszeitalter*.

2 Verschlüsselung im Allgemeinen

2.1 Definition

Bei der Verschlüsselung handelt es sich um eine Form der Codierung, hierzu gehört zum

Beispiel auch der Morsecode oder die allgegenwärtigen Borcodes, allerdings liegt die Ziel-

setzung bei der Verschlüsselung nicht nur einfach darin die Information in ein anderes

Format zu übertragen, sondern hier will man »die Informationen systematisch so verfäl-

schen, dass sie nicht rekonstruiert werden können, es sei denn, durch ausdrücklich hier-

zu Berechtigte.«³ Die Verschlüsselung gehört zum Bereich der Kryptographie, womit die

»Wissenschaft vom geheimen Schreiben« gemeint ist.

2.1.1 Terminologie

Aus diesem Wissenschaftsbereich stammen noch mehrere Begriffe ab, die im folgenden

von Bedeutung sein werden:

Chiffre Geheime Methode des Schreibens, also eine Form des Verschlüsselns

Klartext Der unverschlüsselte Text

Chiffretext Der verschlüsselte Text, bzw. Ausgangstext

Chiffrieren Das verschlüsseln des Klartextes zum Chiffretext

Dechiffrieren Das entschlüsseln des Chiffretextes um wieder den Klartext zu erhalten

³Dankmeier, Grundkurs Codierung, S. 263.

⁴Wätjen, Kryptographie, S. 1.

2

2.2 Ziele der Kryptographie

2.2.1 Geheimhaltung

Der wohl bekannteste und offensichtlichste Verwendungszweck der Verschlüsselung ist eine Nachricht geheim zu halten. Hierbei wird die zu übertragende Nachricht so entstellt, dass sie für jeden völlig unsinnig erscheint, außer für den beabsichtigten Empfänger, welcher den geeigneten Schlüssel besitzt, er ihm das Dechiffrieren ermöglicht.⁵

2.2.2 Authentikation

Bei der Authentikation liegt das Ziel darin, die Echtheit einer Identität oder Nachricht zu überprüfen, da wir uns in der digitalen Welt nicht einfach durch unser Aussehen oder unsere Stimme ausweisen können und auch bei Nachrichten ist nicht zweifelsfrei Festzustellen von wem sie versendet hat und ob sie auf ihrem Weg verändert wurden. Zur Teilnehmerauthentikation gehört unter anderem das eingeben der Geheimzahl am Geldautomaten, da nur der Besitzer der EC-Karte auch die dazu gehörige Nummer kennt und so seine Identität dem Geldautomaten nachweisen kann. Hier gilt das Prinzip:

Ich weise meine Identität dadurch nach, dass ich nachweise, etwas zu haben, was kein anderer hat.⁶

Ähnlich funktioniert es bei der Nachrichtenauthentikation: hier verknüpft der Ersteller sein »Geheimnis« mit dem Dokument um es authentisch zu machen. Im Falle des Bankautomaten, muss allerdings zusätzlich zum Kontoinhaber logischerweise auch der Bankautomat die Geheimnummer kennen. Es gibt aber auch sogenannte Signaturverfahren, bei denen dies nicht notwendig ist.

⁵Beutelspacher, Schwenk und Wolfenstetter, Moderne Verfahren der Kryptographie.

⁶Beutelspacher, Schwenk und Wolfenstetter, Moderne Verfahren der Kryptographie.

2.2.3 weitere Ziele

Neben den beiden oben genannten Zielen für die die RSA-Verschlüsselung am häufigsten eingesetzt wird, gibt es auch noch weitere Ziele, die zwar weniger prominent sind, jedoch ähnliche Techniken nutzen. Bei dem Zeil der Anonymität wird die Identität verborgen, was bei einer digitalen Geschäftsabwicklung mit dem Zahlen mit Bargeld verglichen werden kann, aber auch oft zum Schutz der Privatsphäre eingesetzt wird. Wie die RSA-Verschlüsselung basieren kryptographische Protokolle größtenteils auf dem Public-Key-Verfahren. Mit einem Protokoll wird hierbei die zum Datenaustausch nötige Abfolge von auszuführenden Schritten bezeichnet. Somit ist es durch vorher festgelegte Protokolle möglich, dass sich eine große Anzahl von Teilnehmern miteinander verschlüsselt verständigen können. Ein kryptografisches Protokoll muss sich aber nicht auf den digitalen Nachrichtenaustausch beschränken, sondern auch schon das Bedienen eines Bankautomaten wird als solches bezeichnet.

2.3 Klassische Chiffren

Die Verschlüsselung kann auf eine lange Entwicklungsgeschichte zurückblicken, und laut Ertel (Angewandte Kryptographie, S. 28) werden alle Verfahren, die bis etwa 1950 entwickelt und verwendet wurden als klassische Chiffren bezeichnet. Diese Chiffren können in Transpositionschiffre und Substitutionschiffre unterteilt werden. Bei einer Transpositionschiffre wird die Anordnung der Zeichen im Chiffretext gegenüber dem Klartext verändert, die Zeichen an sich aber bleiben dabei gleich. Im Chiffretext einer Substitutionschiffre dagegen bleibt die Position des Zeichens erhalten, jedoch wird das Zeichen an sich ersetzt. Diese lässt sich noch weiter monoalphabetische, bei der ein Klartext-Zeichen im Chiffretext immer durch das gleiche Zeichen repräsentiert wird und polyalphabetische, bei der sich das zugehörige Chiffretext-Zeichen abhängig vom Kontext verändert.

2.3.1 Caesar-Verschlüsselung

Die nach ihrem berühmtesten Benutzer Julius Caesar benannte Chiffre ist zwar keine besonders sichere, aber zur Veranschaulichung gut geeignet. Diese Chiffre ist eine monoalphabetische Substitutionschiffre und kann noch genauer den Verschiebechiffren zugeordnet werden. Wie es durch den Namen bereits suggeriert wird, wird der Klartext durch Verschiebung seiner Zeichen chiffriert. Bei der Caesar-Verschlüsselung wird dies erreicht, indem jedes Zeichen mit dem Zeichen ersetzt wird, das an der Stelle im verwendeten Alphabet steht, die sich aus der Position des Klartext-Zeichens im Alphabet, summiert mit dem Schlüssel ergibt. Allgemein kann dies mit folgender Formel beschrieben werden:

$$z \mapsto (z+k) \bmod n \tag{1}$$

Hierbei steht z für das Klartextzeichen und k für den Schlüssel. Zusätzlich wird durch das Modulo verhindert, dass des Chiffre-Zeichen außerhalb des Alphabets liegt, wobei n die Länge des Alphabets angibt. Bei k=3, wie Julius es verwendete, ergibt sich dann folgende Klartext-Alphabet zu Chiffre-Alphabet Zuordnung:

Wenn dieses Vorgehen jetzt auf einen Text angewendet wird, entstehen Ergebnisse, die in etwa so aussehen:



Die Entschlüsselung erfolgt hier mit dem selben Schlüssel, der auch bei der Verschlüsselung verwendet wurde, indem die Buchstaben in entgegengesetzte Richtung verschoben werden. Diese Art der Verschlüsselung ist allerdings sehr unsicher, da sie mehrere Problemstellen aufweist:

Die Schlüsselübertragung Verschlüsselung wird häufig benutzt, wenn damit gerechnet

wird, dass die Kommunikation abgehört wird. Da aber um die verschlüsselte Kommunikation herzustellen zuerst der Schlüssel ausgetauscht werden muss, stellt sich hier die Frage, wie das erreicht werden kann, ohne dass der ungewollte Dritte davon Kenntnis nimmt.

Schlüsselmöglichkeiten Es gibt hier nur eine sehr begrenzte Anzahl von Zahlen, die für k eingesetzt werden können, und zwar n-1. Theoretisch können auch größere Zahlen eingesetzt werden, allerdings erzeugen sie aufgrund des Modulo keine neuen Chiffretexte. Durch diese begrenzten Variationen ist es möglich den Klartext zu ermitteln, indem alle möglichen Schlüssel durchprobiert werden.

Monoalphabetisch Da es sich um eine monoalphabetische Verschlüsselung handelt, kann der Schlüssel ermittelt werden, indem die statistische Verteilung der Buchstaben im Chiffretext mit dem durchschnittlichen Auftreten in der jeweiligen Sprache verglichen wird.

2.4 Symmetrie

Eine weitere wichtige Unterteilung der Verschlüsselungsformen ist die Symmetrie. (vgl. Ertel, $Angewandte\ Kryptographie$ [18]) Hier wird unterschieden, ob die Entschlüsselung mit dem gleichen Schlüssel wie die Verschlüsselung erfolgt, dies wird als symmetrisch bezeichnet, oder ob für die Entschlüsselung ein separater Schlüssel verwendet werden muss (asymmetrisch). Wenn nun E die Verschlüsselung (encryption), D die Entschlüsselung (decryption), M den Klartext, M den Chiffretext (ciphertext) und M den Schlüssel (key) bezeichnet, gilt für einen M

$$E_K(M) = C (2)$$

$$D_K(C) = M (3)$$

$$D_K\left(E_K(M)\right) = M\tag{4}$$

Für einen asymmetrischen Algorithmus gilt nahezu identisches, mit dem Unterschied, dass für die Verschlüsselung der Schlüssel K_1 und für die Entschlüsselung K_2 verwendet

wird:

$$E_{K_1}(M) = C (5)$$

$$D_{K_2}(C) = M (6)$$

$$D_{K_2}\left(E_{K_1}(M)\right) = M\tag{7}$$

3 RSA-Verschlüsselung

3.1 Das Public-Key-Verfahren

Die Grundlage der RSA-Verschlüsselung bildet die Idee der Public-Key-Kryptosysteme.

[Diese] wurden 1976 von von W. Diffie und M. Hellman eingeführt. Jeder Benutzer eines solchen Systems hat einen öffentlichen und einen privaten Schlüssel. Damit besitzt jeder Benutzer A eine $\ddot{o}ffentliche$ Chiffriertransformation E_A und eine private Dechiffriertransformation D_A .

Durch diese Form der asymmetrischen Verschlüsselung wird das Problem der Schlüsselübertragung behoben, da der zur Verschlüsselung der Nachricht notwendige Schlüssel öffentlich zugänglich ist, die Nachricht jedoch nur mit dem geheimen privaten Schlüssel wieder lesbar gemacht werden kann. Zusätzlich ermöglicht sie durch das Wegfallen des gegenseitigen Schlüsselaustausches auch die verschlüsselte Kommunikation mit jedem beliebigen Partner, ohne die moderner Nachrichtenaustausch durch »E-Mails« oder »Instant-Messenger« undenkbar wären.⁸ Ähnlich zum asymmetrischen Algorithmus gilt hier:

⁷Wätjen, Kryptographie, S. 67.

⁸Vgl. Ertel, Angewandte Kryptographie, S. 21.

$$E_{P_A}(M) = C (8)$$

$$D_{S_A}(C) = M (9)$$

$$D_{S_A}(E_{P_A}(M)) = M \tag{10}$$

Wobei P_A für den öffentlichen Schlüssel (public key) des Teilnehmers A und S_A für den privaten (secret key) steht.⁹

Beispielhaft wäre damit der Ablauf einer Nachrichtenübertrag folgender:

Alice (A) möchte an Bob (B) eine private Nachricht M schicken. Alice kennt Bobs^[10] öffentlichen Schlüssel und damit E_B . Alice bildet den Chiffretext C = $E_B(M)$ und sendet ihn Bob. Nur Bob kennt die Dechiffriertransformation D_B , und nur er kann damit den Text durch

$$D_B(C) = D_B(E_B(M)) = M$$

entschlüsseln.¹¹

 $\ddot{\text{o}}\text{ffentlich}$ Alice Bob

privat

Veranschaulichung des Public-Key-Verfahrens¹²

Um die Geheimhaltung zu gewährleisten muss das eingesetzte Verfahren so konzipiert

⁹Vgl. Ertel, Angewandte Kryptographie, 21f.

 $^{^{10} \}text{$\gg$} \land \text{Alice} \land \text{ und } \land \text{Bob} \land \text{ als Kommunikationspartner sind Bestandteil der kryptographischen Fachsprache.} \\ \land \text{\sim} \land \text{\sim Ertel, Angewandte Kryptographie, S. 21

¹¹Wätjen, Kryptographie, S. 68.

¹²Wätjen, Kryptographie, S. 67.

sein, dass von dem öffentlichen Schlüssel P keine Rückschlüsse auf den privaten Schlüssel S gezogen werden können.¹³

3.2 Entwicklung des RSA-Algorithmus

Das bis heute wichtigste Public-Key-Kryptosystem¹⁴ »wurde 1978 von *R. Rivest*, *A. Shamir* und *L. Adleman* erfunden, als sie zu zeigen versuchten, dass Public-Key-Kryptographie unmöglich sei.«¹⁵ Dabei war *Rivest* für die Entwicklung des Algorithmus und *Shamir* für die Überprüfung auf Schwachstellen zuständig, während *Adelman* auf beiden Seiten mitwirkte.¹⁶ Sie waren jedoch nicht die ersten, denn »Ende 1997 [wurde bekannt], dass *Clifford Cocks* von den britischen Government Communications Headquarters (GCHQ) bereits 1975 dieselbe Idee hatte, sie aber strenger Geheimhaltung unterlag.«¹⁷

3.3 Schlüsselerzeugung

Um die bei einem asymmetrischen Verschlüsselungsverfahren nötigen beiden Schlüssel zu erzeugen müssen zuerst zwei unterschiedliche Primzahlen p und q erzeugt werden. (Vgl. Dankmeier, Grundkurs Codierung, S. 278) Aus diesen wird dann das Produkt $n=p\cdot q$, den Modul, gebildet. Für die Funktionalität des Verfahrens spielt die größe der verwendeten Primzahlen keine Rolle, allerdings sinkt mit steigender Größe die Gefahr des »Aufbrechens« durch einen Unbefugten, da die Sicherheit der RSA-Verschlüsselung auf dem Faktorisierungsproblem beruht. Dies ist »das bisher ungelöste Problem der schnellen Zerlegung großer Zahlen in ihre Primfaktoren, die Aufgabe hat eine exponentielle Komplexität.« 18 Dadurch ist es bei den heute verwendten 100- bis 350-stelligen mit aktuellen Methoden und Rechenleistung nicht möglich aus n die zugrundeliegenden Primzahlen p

¹³Beutelspacher, Schwenk und Wolfenstetter, Moderne Verfahren der Kryptographie, S. 49.

¹⁴Vgl. Pieprzyk, Topics in Cryptology - CT-RSA 2010: The 10th Cryptographers' Track at the RSA Conference 2010, San Francisco, CA, USA, March 1-5, 2010. Proceedings, S. 26.

¹⁵Beutelspacher, Schwenk und Wolfenstetter, Moderne Verfahren der Kryptographie, S. 77.

¹⁶Ertel, Angewandte Kryptographie, S. 77.

¹⁷Wätjen, Kryptographie, S. 71.

¹⁸Dankmeier, Grundkurs Codierung, S. 279.

und q zu berechnen. Zusätzlich zu n muss auch noch die $Eulersche\ Phi\text{-}Funktion\ von\ n$ gebildet werden.

3.3.1 Eulersche Phi-Funktion

Die Eulersche Φ-Funktion $\Phi(n)$ bezeichnet die Menge der zu n teilerfremden Zahlen a von 1 bis n-1.¹⁹

$$\Phi(n) = |\{a \in [1, n-1] \mid ggT(n, a) = 1\}|$$
(11)

»Da alle Primzahlen p nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, sind sie sicher zu den Zahlen 1 bis p-1 teilerfremd, daher ist $\Phi(p) = p-1$.«²⁰ Da n das Produkt zweier verschiedener Primzahlen und somit teilerfremder natürlicher Zahlen ist, gilt die $Multiplikativit t^{21}$:

$$\Phi(n) = \Phi(pq) = \Phi(p) \cdot \Phi(q) \tag{12}$$

Für $\Phi(p) = p - 1$ und $\Phi(q) = q - 1$ ergibt sich also²²:

$$\Phi(n) = (p-1) \cdot (q-1) \tag{13}$$

3.3.2 Das modulare Inverse

»Des weiteren [wird] eine zu $\Phi(n)$ teilerfremde Zufallszahl e [$1 < e < \Phi(n)$]²³ [gewählt] und [...] hierzu die modulare inverse Zahl d bezüglich $\Phi(n)$ [berechnet]. Für d gilt:«²⁴

$$d \cdot e \mod \Phi(n) = 1 \tag{14}$$

¹⁹Vgl. Swoboda, Pramateftakis und Spitz, Kryptographie Und IT-Sicherheit: Grundlagen Und Anwendungen, S. 111.

²⁰Steinfeld, Eulersche Phi-Funktion - Mathepedia.

 $^{^{21}\}mathrm{Vgl.}$ Steinfeld, Eulersche Phi-Funktion - Mathepedia.

²²Vgl. Dankmeier, Grundkurs Codierung, S. 279.

²³Wätjen, Kryptographie, S. 71.

²⁴Beutelspacher, Schwenk und Wolfenstetter, Moderne Verfahren der Kryptographie, S. 279.

Da e und $\Phi(n)$ teilerfremd sind, gibt es hierfür eine eindeutige Lösung²⁵. Dieses »d kann berechnet werden mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus.« 26

Der erweiterte Euklidische Algorithmus Lorem ipsum

- 3.3.3 Die Schlüssel
- 3.4 Ver-Entschlüsselung
- 3.5 Signatur
- 3.6 Beweis
- 3.7 praktische Anwendungen
- 3.8 Vor- Nachteile
- ${\bf 4~Schluss/Ausblick}$

²⁵Vgl. Ertel, Angewandte Kryptographie, S. 77, 164.

²⁶Ertel, Angewandte Kryptographie, S. 77.

Literatur

- [1] Albrecht Beutelspacher, Jörg Schwenk und Klaus-Dieter Wolfenstetter. Moderne Verfahren der Kryptographie: von RSA zu Zero-Knowledge. 8., überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015. ISBN: 978-3-8348-1927-7.
- [2] Bronzezeit in Europa. URL: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/geschichte/artikel/bronzezeit-europa-deutschland (besucht am 03.08.2020).
- [3] Wilfried Dankmeier. Grundkurs Codierung: Verschlüsselung, Kompression, Fehlerbeseitigung. 3., überarb. und erw. Aufl. Wiesbaden: Vieweg, 2006. ISBN: 978-3-528-25399-8.
- [4] Wolfgang Ertel. Angewandte Kryptographie: mit 51 Bildern und 30 Aufgaben. 2., bearb. Aufl. München: Fachbuchverl. Leipzig im Carl Hanser Verl, 2003. ISBN: 978-3-446-22304-2.
- [5] Jörn Lengsfeld. Digitales Informationszeitalter. URL: https://joernlengsfeld.com/de/definition/digitales-informationszeitalter/(besucht am 03.08.2020).
- [6] J. Pieprzyk. Topics in Cryptology CT-RSA 2010: The 10th Cryptographers' Track at the RSA Conference 2010, San Francisco, CA, USA, March 1-5, 2010. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN: 9783642119255. URL: https://books.google.de/books?id=crqoCAAAQBAJ.
- [7] Thomas Steinfeld. Eulersche Phi-Funktion Mathepedia. URL: https://mathepedia.de/Eulersche_Phi-Funktion.html (besucht am 03.11.2020).
- [8] J. Swoboda, M. Pramateftakis und S. Spitz. Kryptographie Und IT-Sicherheit: Grundlagen Und Anwendungen. Studium: IT-Sicherheit Und Datenschutz. Vieweg+Teubner Verlag, 2008. ISBN: 978-3-8348-9473-1. URL: https://books.google.de/books?id=2oQkBAAAQBAJ.
- [9] Dietmar Wätjen. Kryptographie: Grundlagen, Algorithmen, Protokolle. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl, 2008. ISBN: 978-3-8274-1916-3.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die Seminararbeit oh	ne fremde Hilfe angefertigt und nur die im
Literaturverzeichnis angeführten Quellen und	Hilfsmittel benützt habe.
Ort und Datum	Unterschrift