

# Erlatibitate orokorrari buruzko hitzaldiko oharrak

Sean M. Carroll<sup>1</sup>

Fisika Teorikoko Institutua, Kaliforniako Unibertsitatea,  
Santa Barbara, CA 93106, USA

1997ko abendua

Ohar hauek, gutxi gorabehera, seihileko bateko hitzaldiak dira Fisikan hasitako graduondoko ikasleentzako erlatibitate orokorrari buruzko sarrerako hitzaldiak. Gaien artean, anizkunak, Riemann-en geometria, Einsteinen ekuazioak eta hiru aplikazio daude: erradiazio grabitatorioa, zulo beltzak eta kosmologia. Banakako kapituluak eta eguneratu daitezkeen bertsioak <https://github.com/quiscka/Apuntes-de-Clase-sobre-Relatividad-General/tree/main> eta lehena-go <http://itp.ucsb.edu/carroll/notes/>.

<sup>1</sup>e-mail: [carroll@itp.ucsb.edu](mailto:carroll@itp.ucsb.edu)

arXiv:gr-qc/9712019v13Dec1997  
<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>

## **Erlatibitate orokorrari buruzko hitzaldiko oharrak**

*Egilea:* Sean M. Carroll

*Iruzkinak:* 238 orrialde, zifra ugari.

*Txostenaren zenbakia:* NSF-ITP/97-147

NSF-ITP/97-147

gr-qc/9712019

arXiv.org - Banatzeko lizentzia ez-esklusiboa suposatzen da.

Ustezko lizentzia hau adierazteko <http://arxiv.org/licenses/assumed-1991-2003/> URIa erabiltzen da.

2004ko urtarrila baino lehen, ez zegoen lizentzia espliziturik emateko/ziurtagiririk arXiv.org (lehen xxx.lanl.gov) e-print artxiboak bidaltzeko prozesuaren baitan.

Suposatu zen bidalketen artxiboaren erabilgarritasunaren politikak adieraziz bidaltzeko eta laguntza-orrialdeak nahita egindako ekintzaren ondorioz, <http://arxiv.org/licenses/nonexclusive-distrib/1.0/>-ren baliokidea den lizentzia eman zela bidalketa-ekintzaren bidez. Beraz, arXiv.org funtzionatzen dugu bidalketa hauetarako:

- ArXiv.org-ek artikulu hau banatzeko betirako lizentzia ez-esklusiboa du.
- Bidaltzaileak lizentzia hori emateko eskubidea zuen.
- Bidalketak ez dira guztiz kenduko onartutakoan.
- ArXiv.org-ek edozein bidalketa birsailkatzeko eskubidea du.

### *Berrikuspen historia*

1991-08-14 - Lehenengo bidalketa arXiv-ra (gero hep-th besterik ez) egin zen (hep-th/9108001)

<http://arxiv.org/abs/hep-th/9108001>

2007-06-21 - HTML orri hau sortu zen

2008-12-16 - Gehitu esplizituki lizentzia honen URIa.

## **Fitxategi hau deskargatu eta edizioa eta diseinua hobetzen lagundu dezakezu.**

Github LaTeX Proiektua: Erlatibitate Orokorrari buruzko Lecture Notes, Sean Carrolen eskutik (arXiv.org)

<https://github.com/quiscka/Apuntes-de-Clase-sobre-Relatividad-General/tree/main>

# Índice general

Hitzaurrea	1
1. Erlatibitate berezia eta espazio-denbora laua	3
2. Kolektiboak	31
3. Kurbadura	53
4. Grabitazioa	92
5. Geometria gehiago	122
6. Eremu ahulak eta erradiazio grabitatorioa	135
7. Schwarzschild irtenbidea eta zulo beltzak	156
8. Kosmologia	205
Erreferentziak	219



# Hitzaurrea

Hitzaldi hauek erlatibitate orokorreko graduondoko hastapeneko ikastaroa adierazten dute, bai bere oinarriak bai aplikazioak. 1996ko udaberrian Fisika 8.962 irakasten ari nintzela, MITeko GR graduiko ikastaroan, banatu nituen oharren bertsio arin editatu bat dira. “Hitzaldiko oharrak” egokia deitzen zaien arren, xehetasun maila nahiko altua da, beharrezkoak diren urrats guztiak barne edo irakurleak erraz bete ditzakeen hutsuneak utziz. Hala ere, ohar hauek testu-liburu batetik desberdintzen diren hainbat modu daude; garrantzitsuena, ez daude hainbat ordenatan hel daitezkeen atal laburretan antolatuta, hasieratik amaierara igarotzeko pentsatuta baizik. Ahalegin berezia egin da elkarrizketatonuari eusteko, emaitza biluzietatik harago eta dagokien testuingurura joan nahian.

Erlatibitate orokorraren sarrerako edozein tratamenduren aurrean dagoen galdera nagusia funtzionatu beharreko zorroztasun matematiko-maila da. Ez dago irtenbide berezirik egokirik, ikasle ezberdinek ulermen eta ilusio maila ezberdinez erantzungo baidiete ikuspegi ezberdinei. Hori aintzat hartuta, guztientzako zerbaite eskaintzen saiatu naiz. Hitzaldiek ez dute formalismo zehatza urruntzen (adibidez, askotarikoen sarreran bezala), baizik eta kontuan hartzen diren kontzeptuen adibide zehatzak eta eztabaida informalak sartzen saiatzen dira.

Jatorrizko testu gisa baino hitzaldi-ohar gisa iragartzen direnez, zenbaitetan lotsagabe lapurtu ditut gaiari buruzko hainbat liburutatik (batez ere Schutz, Wald, Weinberg eta Misner, Thorne eta Wheeler-ek). Nire filosofia ez zen inoiz originaltasuna bilatzen saiatzea bere kabuz; hala ere, originaltasuna batzuetan sartzen zen, lehendik zeuden tratamenduak baino argiago izan nezakeela uste nuelako. Ohar hauetako materialaren substantziarik ez da berria; haiek irakurtzeko arrazoi bakarra irakurle indibidual batek hemengo azalpenak beste nonbaitenak baino errazago ulertzen baditu.

Benetako seihilekoan zehar denbora-murritzek galarazi zidaten gai batzuk merezi zuten sakontasunean lantzea, adibide agerikoa kosmologiaren tratamendua izanik. Denbora eta motibazioa igarotzen badira, lehendik dauden oharrak zabaltzeko eta berrikusi ditzaket; bertsio eguneratuak eskuragarri egongo dira <http://itp.ucsb.edu/carroll/notes/> helbidetan. Jakina, eskertuko dut nire arreta akats tipografiko edo zientifikoren aurrean erakartzea, baita mota guztietako hobetzeko iradokizunak ere.

Jende ugari asko lagundu du bai erlatibitate orokorrak nire ulermenean eta, bereziki, ohar hauetan — gehiegi osotasunerako itxaropenarekin aitortzeko. Esker bereziak Ted Pyne-ri, nirekin batera ikasi zuen gaia, asko irakatsi zidan eta Harvardeko astronomia sailean mintegi gisa eman genuen ikastaro honen aurreko batean kolaboratu zuen. Nick Warner-ek irakatsi nuen MIT-en egin nuen graduondoko ikastaroa irakatsi nuen, eta bere

oharrak eragin handia izan zuten (konparaketak agerian utziko duen moduan). George Field-ek aholku eta animo asko eskaini zizkidan irakasgaia ikasi eta irakasteko borrokan. Tamás Hauer nirekin batera borrokatu zen 8.962ko irakasle laguntzaile gisa, eta laguntza eskerga izan zen. 8.962ko ikasle guztiek eskerrak merezi dituzte nire idiosinkrasia jasatzeagatik eta zehaztasun-maila handiagoak bultzatzeagatik.

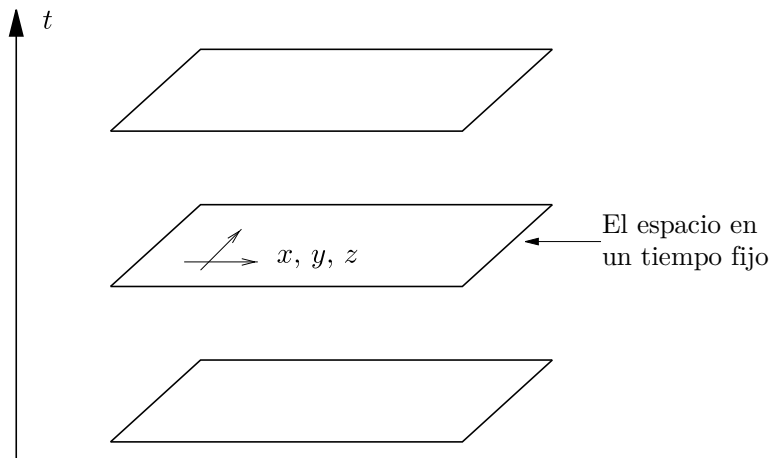
Ohar hauek idaztean AEBen laguntza izan nuen Energia Sailaren kontratua zk. DE-AC02-76ER03069 eta National Science Foundation PHY/92-06867 eta PHY/94-07195 diru-laguntzak.

# Capítulo 1

## Erlatibitate berezia eta espazio-denbora laua

Erlatibitate bereziaren (SR) eta espazio-denbora lauko bizitzaren bira zurrunbilo batekin hasiko gara. Kontua izango da bai SR zer den gogoratzea, bai gero erabakigarriak izango diren tentsoreak eta erlazionatutako kontzeptuak sartzea, beste guztiaren gainetik kurbaduraren konplikazio gehigarriarik gabe. Horregatik, atal honetarako beti espazio-denbora lauan arituko gara, eta gainera koordenatu ortonormalak (kartesianoak) soilik erabiliko ditugu. Esan beharrik ez dago nahi duzun edozein koordenatu-sistematan SR egitea posible dela, baina hori egiteko beharrezko tresnak sartzeak espazio kurbatuetara bide erdira eramango gintuzkeela, beraz, pixka bat atzeratuko dugu.

Erlatibitate berezia 4 dimentsioko espazio-denboraren teoria dela esan ohi da: espazioaren hiru, denboraren bat. Baina noski, mekanika newtondarraren aurreko SR munduak hiru dimentsio espazial eta denbora-parametro bat zituen. Hala ere, ez zegoen tentaldi handirik hauek 4 dimentsioko espazio-denbora bakarreko alderdi ezberdintzat hartzeko. Zergatik ez?



Demagun lorategi-barietate 2 dimentsioko plano bat. Normalean eroso da plano ho-

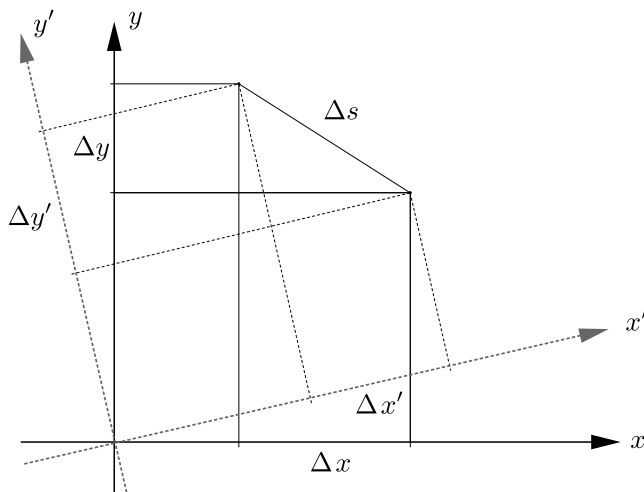
rretako puntuak etiketatzea koordinatuak sartuz, adibidez  $x$  eta  $y$  ardatz ortogonalak definituz eta puntu bakoitza ardatz horietara ohiko moduan proiektatuz. Hala ere, argi dago planoari buruzko gertaera geometriko interesgarri gehienak gure koordinatuen aukeraketatik independenteak direla. Adibide soil gisa, bi punturen arteko distantzia har dezakegu, arabera

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 . \quad (1.1)$$

Jatorrizkoekiko biratzen diren  $x'$  eta  $y'$  ardatzek definitutako koordinatu sistema kartesiar ezberdin batean, distantziaren formula ez da aldatu:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 . \quad (1.2)$$

Beraz, distantzia aldaezina dela esaten dugu koordinatuen aldaketetan.



Horregatik da erabilgarria plano 2 dimentsiokoa dela pentsatzea: puntu bakoitza etiketatzeko bi zenbaki ezberdin erabiltzen baditugu ere, zenbakiak ez dira geometriaren funtsa, ardatzak elkarren artean biratu ditzakegulako distantziak utziz eta horrela aurrera aldatu gabe. Fisika newtondarrean ez da hori gertatzen espazioarekin eta denborarekin; ez dago espazioa eta denbora elkarren artean biratzeko nozio baliagarriarik. Aitzitik, “espazio osoa denbora bakarrean” adigaiak koordinatuetatik independentea du.

SRn ez da halakorik gertatzen. Har ditzagun  $(t, x, y, z)$  koordinatuak espazio-denboran, honela ezarrita.  $(x, y, z)$  koordinatu espazialek sistema kartesiar estandar bat osatzen dute, adibidez angelu zuzenetan elkartzen diren haga zurrinak elkarrekin soldatuz erai-kia. Hagak aske mugitu behar dute, azeleratu gabe. Denbora-koordinatua koordinatu espazialekiko mugitzen ez den erloju multzo batek definitzen du. (Hau pentsamendu-esperimentua denez, hagak infinitu luzeak direla eta espazioko puntu guztietan erloju bat dagoela imajinatzen dugu.) Erlojuak honako zentzu honetan sinkronizatuta daude: espazioko puntu batetik bestera lerro zuzen batean abiadura konstantean bidaiatzen baduzu, zure bidaiaren amaierako erlojuen arteko denbora-aldea berdina izango da. bi-daia, abiadura berean, beste noranzkoan. Horrela eraikitako koordinatu-sistema **marko inertziala** da.



**gertaera** espazioan eta denboran une bakar gisa definitzen da,  $(t, x, y, z)$ -k bereizten duena. Orduan, momentuz inolako motibaziorik gabe, sar dezagun bi gertaeren arteko **espazio-denbora tartea**:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (1.3)$$

(Kontuan izan positiboa, negatiboa edo zero izan daitekeela berdin-berdinak ez diren bi puntutan ere). Hemen,  $c$  espazioaren eta denboraren arteko bihurketa-faktore finko bat da; hau da, abiadura finko bat. Argiaren abiadura izango dela noski; Garrautzitsuen, ordea, ez da fotoiak abiadura horretan bidaiatzea, baizik eta  $c$  existitzen dela espazio-denbora tartea aldaezina den koordenatuen aldaketetan. Beste era batera esanda,  $(t', x', y', z')$  inertzial marko berri bat konfiguratzeko badugu gure aurreko prozedura errepikatuz, baina haga berrien eta zaharraren arteko hasierako posizioan, angeluan eta abiaduran desplazamendua ahalbidetuz, tartea ez da aldatuko:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2. \quad (1.4)$$

Horregatik, zentzuzkoa da SR 4 dimentsioko espazio-denboraren teoria gisa pentsatzea, **Minkowski espazioa** izenez ezagutzen dena. (Lau dimentsioko anizkuntzaren kasu berezi bat da, geroago zehatz-mehatz landuko duguna.) Ikusiko dugunez, inplizituki definitu ditugun koordenatu-eraldaketak, nolabait, espazioa eta denbora elkarren artean biratzen dituzte. Ez dago “aldibereko gertakariak” nozio absoluturik; bi gauza aldi berean gertatzen diren ala ez erabilitako koordenatuen arabera da. Beraz, Minkowskiren espazioa espazioan eta denboran banatzea gure helburuetarako egiten dugun hautua da, ez egoeraren berezko zerbait.

SRrekin lotutako “paradoxa” ia guztiak denbora koordenatu bakarraren newtoniar nozioen iraupen tematikotik eta “espazio une bakarrean” egotearen ondorio dira. Espazio-denborari dagokionez baino gehiago pentsatuz, espazioa eta denbora batera, paradoxa hauek desagertu ohi dira.

Sar ditzagun idazkera egoki batzuk. Espazio-denborari buruzko koordenatuak 0-tik 3-ra doan greziar indize-indizeak dituzten letrez adieraziko dira, eta 0-k, oro har, denbora-koordinatua adierazten du. Horrela,

$$x^\mu : \begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \quad (1.5)$$

(Ez hasi superindizeak erakusle gisa pentsatzen.) Gainera, sinpletasunaren mesedetan, zein unitatetan aukeratuko dugu

$$c = 1; \quad (1.6)$$

beraz,  $c$  faktoreak kanpoan utziko ditugu ondorengo formula guztietan. Enpirikoki badakigu  $c$  argiaren abiadura dela,  $3 \times 10^8$  metro segundoko; horrela, segundo 1  $3 \times 10^8$  metro balio duen unitateetan ari gara lanean. Batzuetan erabilgarria izango da  $x^\mu$ -ren

espazio- eta denbora-osagaiak bereizita aipatzea, beraz, latinezko gainindizeak erabiliko ditugu espazio-osagaiak bakarrik adierazteko:

$$x^i : \begin{aligned} x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \quad (1.7)$$

Era berean, komenigarria da espazio-denbora tartea forma trinkoagoan idaztea. Beraz,  $4 \times 4$  matrize bat sartzen dugu, **metrika**, bi indize baxuago erabiliz idazten duguna:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

(Erreferentzia batzuek, batez ere eremuen teoria liburuek, metrika definitzen dute kontrako zeinuarekin, beraz, kontuz ibili.) Formula polita dugu orduan

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \quad (1.9)$$

Kontuan izan **batuketa-konbentzioa** erabiltzen dugula, eta bertan goi-indize eta azpiindize gisa agertzen diren indizeak batu egiten dira. (1.9)-ren edukia, beraz, (1.3) berdina da.

Orain espazio-denboran koordenatu-eraldaketak lehen baino maila abstraktuagoan har ditzakegu. Nolako transformazioek (1.9) tartea aldaezin uzten dute? Barietate simple bat itzulpenak dira, koordenatuak aldatzea besterik ez dutenak:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu, \quad (1.10)$$

non  $a^\mu$  lau zenbaki finkoko multzoa den. (Ohartu lehena indizean jartzen dugula, ez  $x$ ). Itzulpenek  $\Delta x^\mu$  desberdintasunak aldatu gabe uzten dituzte, beraz, ez da nabarmena tartea aldatu gabe egotea. Beste transformazio lineal bakarra  $x^\mu$  (espazio-denboratik independentea den) matrize batekin biderkatzea da:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu, \quad (1.11)$$

edo, matrize-notazio ohikoagoan,

$$x' = \Lambda x. \quad (1.12)$$

Transformazio hauek ez dituzte  $\Delta x^\mu$  diferentziak aldatu gabe uzten, baizik eta biderkatu egiten dituzte  $\Lambda$  matrizearekin. Zer matrize motak utziko du tartea aldaezina? Matritzezko notazioari eutsiz, nahi genukeena da

$$\begin{aligned} s^2 &= (\Delta x)^T \eta (\Delta x) = (\Delta x')^T \eta (\Delta x') \\ &= (\Delta x)^T \Lambda^T \eta \Lambda (\Delta x), \end{aligned} \quad (1.13)$$

eta horregatik

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \quad (1.14)$$

edo

$$\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} \eta_{\mu'\nu'} . \quad (1.15)$$

$\Lambda^{\mu'}_{\nu}$  matrizeak aurkitu nahi ditugu  $\eta_{\mu'\nu'}$  matrizearen osagaiak  $\eta_{\rho\sigma}$ ren berdinak izan daitezen; hori da transformazio horien pean tartea aldaezina izateak esan nahi duena.

(1.14) betetzen duten matrizeei **Lorentz transformazioak** deitzen zaie; horien multzoak biderkadura matritzialeko talde bat osatzen du, **Lorentz taldea** izenez ezagutzen dena. Analogia estua dago talde honen eta  $O(3)$ , hiru dimentsioko espazioko errotazio taldea. Errotazio taldea betetzen duten  $3 \times 3$  matrize  $R$  gisa har daiteke

$$\mathbb{1} = R^T \mathbb{1} R , \quad (1.16)$$

non  $\mathbb{1} 3 \times 3$  identitate-matrizea den. (1.14)-ren antzekotasuna argia izan behar da; desberdintasun bakarra  $\eta$  metrikoaren lehen terminoko minus ikurra da, denboraren antzeko norabidea adierazten duena. Lorentz taldeari, beraz, askotan  $O(3,1)$  izendatzen da. ( $3 \times 3$  identitate-matrizea espazio lau arruntaren metrika besterik ez da. Honelako metrika, zeinetan balio propio guztiak positiboak diren, **euklidearra** deritzo, eta (1.8) bezalako minus zeinu bakarria dutenei **Lorentzian** deitzen zaie.)

Lorentz eraldaketak hainbat kategoriatan sartzen dira. Lehenengo **biraketak** ohi-koak daude, adibidez  $x$ - $y$  planoko biraketa bat:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (1.17)$$

$\theta$  biraketa-angelua  $2\pi$  periodoa duen aldagai periodikoa da. **boosts** ere badaude, “espazio eta denbora noranzkoen arteko biraketak” gisa har daitezkeenak. Adibide bat honako hauek ematen du.

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (1.18)$$

$\phi$  bultzada-parametroa, biraketa-angelua ez bezala,  $-\infty$ -tik  $\infty$ -ra definitzen da. Transformazio diskretuak ere badaude, denboraren norabidea edo norabide espazial bat edo gehiago alderantzikatzen dutenak. (Hauek baztertzen direnean Lorentz talde egokia dugu,  $SO(3,1)$ .) Eraldaketa orokor bat lor daiteke banakako transformazioak biderkatuz; sei parametroko matrize honen adierazpen esplizitua (hiru bultzada, hiru biraketa) ez da nahikoa polita edo erabilgarria idazteko traba egiteko. Oro har, Lorentz eraldaketak ez dira joango joango, beraz, Lorentz taldea ez da abeliarra. Bi itzulpenen eta Lorentz transformazioen multzoa hamar parametroko talde ez-abeliarra da, **Poincaré taldea**.

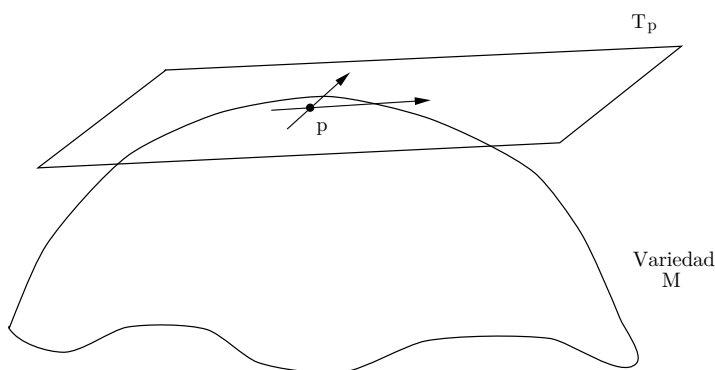
Ez zaitu harritu behar hobekuntzak abiadura konstantean bidaiatzen duen fotograma batera mugitzean koordenatuak aldatzeari dagozkiola jakiteak, baina ikus dezagun esplizituago. (1.18) emandako transformaziorako,  $t'$  eta  $x'$  koordenatu eraldatuak honela



dakigu argia abiadura horretan bidaiatzen dela; beraz, argiaren abiadura berdina dela edozein marko inertzialetan. Argiaren abiaduran higitzen diren lerro zuzenen bidez gertaera bakar bati lotuta dauden puntu multzoari **argi-konoa** deitzen zaio; multzo osoa aldaezina da Lorentz-en transformazioetan. Argi-konoak berez banatzen dira etorkizunean eta iraganean;  $p$  puntu baten etorkizuneko eta iraganeko argi-konoen barneko puntu guztien multzoari **denboraren antzeko bereizita**  $p$ -tik deitzen zaio, argi-konoetatik kanpo daudenak, berriz, **espazio-antzean bananduta** dira eta konoetan daudenak. **lightlike** edo **null separated**  $p$ -tik. (1.3) aipatzean, ikusten dugu denbora-antzeko puntu bereizien arteko tartea negatiboa dela, espazio-antzeko puntuen artekoa positiboa dela eta nulu bereizitako puntuen artekoa zero dela. (Tartea  $s^2$  gisa definitzen da, ez kantitate honen erro karratua.) Kontuan izan egoera hau eta bestearen arteko bereizketa mundu newtondarrean; hemen, ezinezkoa da esan (koordinatuekiko modu independentean)  $p$ -tik bereizitako espazio-itxurako puntu bat  $p$ -ren etorkizunean,  $p$ -ren iraganean edo “aldi berean” dagoen ala ez. ’.

Minkowskiren espazioaren egitura zehatzago aztertzeko, beharrezkoa da bektore eta tentsore kontzeptuak sartu. Bektoreekin hasiko gara, ezagunak izan beharko liratekeenak. Jakina, espazio-denboran bektoreak lau dimentsiokoak dira, eta sarritan **lau bektore** deitzen zaie. Horrek nahiko diferentzia egiten du; adibidez, ez dago bi lau bektoreen arteko gurutzatutako produkturik.

Dimentsiotasunaren egitate soilaz harago, azpimarratzeko garrantzitsua da bektore bakoitza espazio-denborako puntu jakin batean kokatzen dela da. Baliteke bektoreak espazioko puntu batetik bestera luzatzen direla pentsatzera ohituta egon zaitezke, eta baita puntu batetik bestera kontu handiz irristatu ditzakezun bektore “libre” ere. Hauek ez dira kontzeptu baliagarriak erlatibitatean. Baizik eta, espazio-denborako  $p$  puntu bakoitzari puntu horretan kokatutako bektore posible guztien multzoa lotzen dugu; multzo hau **espazio tangentea**  $p$  edo  $T_p$  bezala ezagutzen da. Izena bi dimentsioko espazio kurbatu soil bateko puntu bati lotuta dagoen bektore multzoa puntuarekiko ukitzailea den plano bat osatzen duela pentsatzean inspiratuta dago. Baina inspirazioa alde batera utzita, garrantzitsua da bektore hauek puntu bakarrean kokatuta daudela pentsatzea, puntu batetik bestera luzatu beharrean. (Horrek espazio-denborako diagrametan gezi gisa marraztea eragotziko ez gaituen arren.)



Geroago puntu bakoitzean espazio tangentea espazio-denboratik bertatik eraiki ditza-

kegun gauzekin erlazionatuko dugu. Oraingoz, pentsa  $T_p$  espazio-denborako puntu bakoitzeko espazio bektorial abstraktu gisa. (**erreal**) **bektore-espazio** objektu-bilduma bat da (“bektoreak”), gutxi gorabehera, modu linealean batu eta zenbaki errealez bider daitezkeenak. Beraz, edozein  $V$  eta  $W$  eta  $a$  eta  $b$  zenbaki errealetarako, dugu

$$(a + b)(V + W) = aV + bV + aW + bW . \quad (1.22)$$

Bektore-espazio bakoitzak jatorri bat du, *ie* zero bektore bat, eta bektore batuketapean identitate-elementu gisa funtzionatzen duena. Espazio bektorial askotan eragiketa gehigarriak daude, hala nola barneko produktua (puntu) bat hartzea, baina hau espazio bektorialaren oinarritzko kontzeptuaren gainetik egitura gehigarria da.

Bektore bat ondo definitutako objektu geometriko bat da, **eremu bektoriala** bezala, espazio-denboraren puntu bakoitzean zehatz-mehatz bat duen bektore multzo gisa definitua. ( $M$  sorta ukitzaile baten multzoari **sorta ukitzailea**,  $T(M)$  deitzen zaio.) Dena den, sarritan erabilgarria da helburu zehatzetarako bektoreak osagaietan deskonposatzea oinarritzko bektore multzo batzuei dagokienez. **oinarria** espazio bektoriala hartzen duen edozein bektore multzoa da (edozein bektore oinarritzko bektoreen konbinazio lineala da) eta linealki independentea dena (oinarriko bektorerik ez da beste oinarri bektore batzuen konbinazio lineal bat). Espazio bektorial jakin baterako, oinarri legitimo kopuru infinitu bat egongo da, baina oinarri bakoitza bektore kopuru berdinez osatuta egongo da, espazioaren dimentsio bezala ezagutzen dena. (Minkowski espazioko puntu batekin lotutako espazio tangente baterako, dimentsioa laukoa da noski.)

Imajina dezagun espazio tangente bakoitzean  $\hat{e}_{(\mu)}$  lau bektoreren oinarri bat ezartzen dugula,  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$  ohi bezala. Izan ere, esan dezagun oinarri bakoitza  $x^\mu$  koordinatuetara egokitzen dela; hau da,  $\hat{e}_{(1)}$  oinarritzko bektorea normalean  $x$ -ardatzean seinatlatzea pentsatuko genukeena da, etab. Ez da inola ere beharrezkoa edozein koordinatu-sistemari egokitutako oinarri bat aukeratzea, askotan komenigarria den arren. (Benetan zehatzagoak izan gintezke hemen, baina aurrerago eztabaida zehaztasun maila ikaragarrian errepikatuko dugu, beraz, orain barkagarria da nolabaiteko zoritxarkeria). Orduan,  $A$  edozein bektore abstraktu oinarritzko bektoreen konbinazio lineal gisa idatz daiteke:

$$A = A^\mu \hat{e}_{(\mu)} . \quad (1.23)$$

$A^\mu$  koefizienteak  $A$  bektorearen **osagaiak** dira. Gehienetan oinarria erabat ahaztuko dugu eta “ $A^\mu$  bektorea” aipatuko dugu apur bat, baina kontuan izan laburdura dela. Bektore erreala entitate geometriko abstraktua da, osagaiak, berriz, oinarri erosoan bektoreen koefizienteak besterik ez dira. (Normalean oinarri-bektore esplizituak kenduko ditugunez, indizeek bektoreen eta tentsoreen osagaiak etiketatuko dituzte. Horregatik, indizeen inguruan parentesiak daude oinarri-bektoreen gainean, hau bektoreen bilduma bat dela gogorarazteko, ez bektore bakar baten osagaiak.)

Espazio-denboran dagoen bektore baten adibide estandarra kurba baten bektore tangentea da. Parametrotutako kurba edo ibilbide espazio-denboran zehar koordinatuek zehazten dute parametroaren,  $adb$   $x^\mu(\lambda)$ , funtzio gisa.  $V(\lambda)$  bektore tangenteak osagaiak ditu

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} . \quad (1.24)$$

Bektore osoa  $V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)}$  da, beraz. Lorentz transformazio baten arabera  $x^\mu$  koordenatuak aldatzen dira (1.11) arabera,  $\lambda$  parametrizazioa aldatu gabe dagoen bitartean; beraz, bektore tangentearen osagaiak aldatu behar direla ondoriozta dezakegu

$$V^\mu \rightarrow V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} V^\nu . \quad (1.25)$$

Hala ere, bektorea bera (koordenatu-sistema batzuetan bere osagaiekin ez bezala) aldaezina da Lorentz-en transformazioetan. Gertaera hau oinarri-bektoreen transformazio-propietateak ateratzeko erabil dezakegu. Aipa dezagun eraldatutako koordenatu-sistemako oinarritzko bektoreen multzoari  $\hat{e}_{(\nu')}$ . Bektorea aldaezina denez, dugu

$$\begin{aligned} V &= V^\mu \hat{e}_{(\mu)} = V^{\nu'} \hat{e}_{(\nu')} \\ &= \Lambda^{\nu'}_{\mu} V^\mu \hat{e}_{(\nu')} . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Baina erlazio honek mantendu behar du  $V^\mu$  osagaien zenbakizko balioak zein diren. Horregatik esan dezakegu

$$\hat{e}_{(\mu)} = \Lambda^{\nu'}_{\mu} \hat{e}_{(\nu')} . \quad (1.27)$$

$\hat{e}_{(\nu')}$  oinarri berria  $\hat{e}_{(\mu)}$  zaharraren arabera lortzeko Lorentz transformazioaren  $\Lambda^{\nu'}_{\mu}$  alderantziz biderkatu beharko genuke. Baina Lorentz transformazio baten alderantzizkoa koordenatu inprimatuetatik primatuetara Lorentz transformazio bat ere bada, oraingoan sistema primatuetatik lehengabeetara. Hortaz, notazio sotil samarra sartuko dugu, bi matrizeetarako ikur bera erabiliz idatziz, indize primatuak eta lehengabeak egokituta. Hori da,

$$(\Lambda^{-1})^{\nu'}_{\mu} = \Lambda_{\nu'}^{\mu} , \quad (1.28)$$

edo

$$\Lambda_{\nu'}^{\mu} \Lambda^{\sigma'}_{\mu} = \delta_{\nu'}^{\sigma'} , \quad \Lambda_{\nu'}^{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\rho} = \delta_{\rho}^{\mu} , \quad (1.29)$$

non  $\delta_{\rho}^{\mu}$  Kronecker-en delta-sinbolo tradizionala den lau dimentsiotan. (Kontuan izan Schutzek beste konbentzio bat erabiltzen duela, beti bi indizeak ipar-mendebaldean/hegoekialdean antolatuz; garrantzitsua da lehenak nora doazen). (1.27) oinarri-bektoreen transformazio-araua lortuko dugu:

$$\hat{e}_{(\nu')} = \Lambda_{\nu'}^{\mu} \hat{e}_{(\mu)} . \quad (1.30)$$

Beraz, oinarritzko bektoreen multzoa koordenatuen edo osagai bektorialen alderantzizko Lorentz transformazioaren bidez eraldatzen da.

Merezi du une bat pausatzea hori guztia hartzeko. Goiko indizeen bidez etiketatutako koordenatuak sartu genituen, eta modu jakin batean eraldatu ziren Lorentz transformazioetan. Ondoren, goiko indizeekin idatzitako osagai bektorialak kontuan hartu ditugu, eta horrek zentzua zuen koordenatu-funtzioen era berean eraldatzen baitziren. (Koordenatu-sistema finko batean,  $x^\mu$  lau koordenatuetako bakoitza espazio-denboraren funtzio gisa pentsa daiteke, eremu bektorial baten lau osagaietako bakoitza bezala). Koordenatu-sistemari lotutako oinarri-bektoreak alderantzizko matrizearen bidez eraldatu ziren, eta indize baxuago batekin etiketatu ziren. Adierazpen honek ziurtatzen zuen

osagaien eta oinarri-bektoreen gaineko batuketaz eraikitako objektu aldaezina eraldaketaren ondorioz aldatu gabe geratu zela, nahi genukeen bezala. Seguruenik, ez da gehiegi ematea indize anitzak (tentsoreak) dituzten objektu konplikatuagoetan hala izaten jarraituko duela esatea.

Espazio bektorial bat ezarri ondoren, berehala defini dezakegun espazio bektorial elkartu bat dago (dimentsio berekoa), **espazio bektorial duala** izenez ezagutzen dena. Espazio bikoitza izartxo batez adierazi ohi da, beraz  $T_p$  espazio ukitzaileari **espazio kotangentea** deitzen zaio eta  $T_p^*$  adierazten da. Espazio duala jatorrizko espazio bektorialetik zenbaki errealetarako mapa lineal guztien espazioa da; matematikako hizkuntzan,  $\omega \in T_p^*$  bektore bikoitza bada, orduan mapa gisa jokatzeko du:

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \mathbb{R} , \quad (1.31)$$

non  $V, W$  bektoreak diren eta  $a, b$  zenbaki errealak. Mapa hauen gauza polita da beraiek espazio bektorial bat osatzen dutela; horrela,  $\omega$  eta  $\eta$  bektore dualak badira, dugu

$$(a\omega + b\eta)(V) = a\omega(V) + b\eta(V) . \quad (1.32)$$

Eraikuntza hau zertxobait konkretuagoa izan dadin, oinarritzko  $\hat{\theta}^{(\nu)}$  bektore bikoitz multzo bat sar dezakegu eskatuz.

$$\hat{\theta}^{(\nu)}(\hat{e}_{(\mu)}) = \delta_{\mu}^{\nu} . \quad (1.33)$$

Orduan, bektore dual bakoitza bere osagaien arabera idatz daiteke, indize baxuagoekin etiketatzen ditugunak:

$$\omega = \omega_{\mu} \hat{\theta}^{(\mu)} . \quad (1.34)$$

Bektoreekin analogia ezin hobean, normalean  $\omega_{\mu}$  idatziko dugu bektore dual osoa ordezkatzeko. Izan ere, noizbait ikusiko dituzu  $T_p$ -ko elementuak (bektoreak deitu ditugunak) **kontrabariante-bektore** deritzonak, eta  $T_p^*$ -ko elementuak (bektore bikoitza deitu duguna) **kobariantea. bektoreak**. Egia esan, bektore arruntak goiko indizeak dituzten bektore gisa eta bektore bikoitzak beheko indizeak dituzten bektore gisa aipatzen badi-tuzu, inor ez da iraindu behar. Bektore bikoitzeko beste izen bat **forma bakarrak** da, laster argituko den izendapen misteriotsu samarra.

Osagai-notazioak bektore bikoitzaren ekintza bektore baten gainean idazteko modu erraz batera eramaten du:

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \omega_{\mu} V^{\nu} \hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) \\ &= \omega_{\mu} V^{\nu} \delta_{\nu}^{\mu} \\ &= \omega_{\mu} V^{\mu} \in \mathbb{R} . \end{aligned} \quad (1.35)$$

Horregatik oso gutxitan beharrezkoa da oinarritzko bektoreak (eta bektore dualak) esplizituki idaztea; osagaiek egiten dute lan guztia. (1.35)-ren formak ere iradokitzen du bektoreak bektore dualen mapa lineal gisa pentsa ditzakegula, definituz.

$$V(\omega) \equiv \omega(V) = \omega_{\mu} V^{\mu} . \quad (1.36)$$



Beraz, espazio bektorial bikoitzarekiko espazio duala jatorrizko espazio bektoriala bera da.

Jakina, espazio-denboran ez gaituzte interesatuko espazio bektorial bakar bat, bektore eta bektore bikoitzeko eremuak baizik. ( $M$  gaineko espazio kotangente guztien multzoa **kotangente sorta**,  $T^*(M)$  da.) Kasu horretan eremu bektorial bikoitzaren ekintza eremu bektorial batean ez da zenbaki bakarra, **eskalar** (edo “funtzioa” besterik gabe) espazio-denboran baizik. Eskalar bat indizerik gabeko kantitatea da, Lorentz transformazioetan aldatzen ez dena.

Lehen bektoreetarako erabili ditugun argumentu berberak erabil ditzakegu bektore bikoitzen transformazio propietateak ateratzeko. Erantzunak dira, osagaien dagokienez,

$$\omega_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} \omega_{\nu} , \quad (1.37)$$

eta oinarrizko bektore bikoitzetarako,

$$\hat{\theta}^{(\rho')} = \Lambda^{\rho'}_{\sigma} \hat{\theta}^{(\sigma)} . \quad (1.38)$$

Hau da indizea jartzeagatik espero genukeena; bektore dual baten osagaiak bektore baten alderantzizko transformazioaren pean. Kontuan izan honek (1.35) eskalarra aldaezina dela ziurtatzen duela Lorentz-en transformazioetan, behar den bezala.

Ikus ditzagun bektore dualen adibide batzuk, lehenik beste testuinguru batzuetan eta gero Minkowskiren espazioan. Imaginatu  $n$  osagaiko zutabe-bektoreen espazioa,  $n$  zenbaki oso baterako. Orduan espazio bikoitza  $n$ -osagaien errenkada-bektoreena da, eta ekintza matrizearen biderketa arrunta da:

$$V = \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ \vdots \\ V^n \end{pmatrix} , \quad \omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_n) ,$$

$$\omega(V) = (\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_n) \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ \vdots \\ V^n \end{pmatrix} = \omega_i V^i . \quad (1.39)$$

Beste adibide ezagun bat mekanika kuantikoan gertatzen da, non Hilbert espazioko bektoreak ketsen bidez adierazten diren,  $|\psi\rangle$ . Kasu honetan espazio bikoitza brasen espazioa da,  $\langle\phi|$ , eta ekintzak  $\langle\phi|\psi\rangle$  zenbakia ematen du. (Hau zenbaki konplexu bat da mekanika kuantikoan, baina ideia bera da hain zuzen.)

Espazio-denboran bektore bikoitzaren adibiderik errazena funtzio eskalar baten **gradientea** da, espazio-denborako koordinatuekiko deribatu partzialen multzoa, “d” bidez adierazten duguna:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}} \hat{\theta}^{(\mu)} . \quad (1.40)$$

Deribatu partzialak eraldatzeko erabiltzen den kate-arau konbentzionala bektore bikoitzen osagaien transformazio-araua da kasu honetan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu'}} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \\ &= \Lambda_{\mu'\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu},\end{aligned}\quad (1.41)$$

non (1.11) eta (1.28) erabili ditugun Lorentz transformazioa koordenatuekin erlazionatzeko. Gradiente bektore bikoitza izateak deribatu partzialen idazkera laburra haue-tara eramaten du:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi = \phi_{,\mu} . \quad (1.42)$$

(Oso gutxi gorabehera, “ $x^\mu$ -k goiko indizea du, baina deribatu baten izendatzailean da-goenean, ondoriozko objektuaren indize txikiagoa dakar.”) Ez naiz koma-idazkeraren zalea, baina  $\partial_\mu$  erabiliko dugu denbora guztian. Kontuan izan gradienteak modu natu-ralean jokutzen duela goiko bektore baten, kurba baten bektore tangentearen gainean, eman dugun adibidean. Emaizta funtzioaren deribatu arrunta da kurban zehar:

$$\partial_\mu \phi \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = \frac{d\phi}{d\lambda} . \quad (1.43)$$

Bektore dualei buruzko azken ohar gisa, irudi gisa irudikatzeko modu bat dago, gezi gisa bektoreen irudiarekin bat datorrena. Ikus eztabaida Schutz-en, edo MTW-n (non mutur zorabiagarrietara eramaten den).

Bektoreen eta bektore dualen orokortze zuzena **tentsorea** nozioa da. Bektore bi-koitza bektoreetatik  $\mathbb{R}$ -rako mapa lineala den bezala,  $(k, l)$  motako (edo maila)  $T$  ten-sorea  $\mathbb{R}$ -ra dagoen bektore eta bektore bikoitz bilduma batetik mapa lineal anitzekoa da:

$$\begin{aligned}T : T_p^* \times \cdots \times T_p^* \times T_p \times \cdots \times T_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ (k \text{ times}) \quad \quad \quad (l \text{ times})\end{aligned}\quad (1.44)$$

Hemen, “ $\times$ ” produktu kartesiarra adierazten du, beraz, adibidez,  $T_p \times T_p$  bektore-bikote ordenatuen espazioa da. Linealitateak esan nahi du tentsorea linealki jokatzeko duela bere argumentu bakoitzean; adibidez,  $(1, 1)$  motako tentsore baterako, dugu

$$T(a\omega + b\eta, cV + dW) = acT(\omega, V) + adT(\omega, W) + bcT(\eta, V) + bdT(\eta, W) . \quad (1.45)$$

Ikuspegi honetatik, eskalar bat  $(0, 0)$  motako tentsore bat da, bektorea  $(1, 0)$  motako tentsore bat eta bektore duala  $(0, 1)$  motako tentsore bat.

$(k, l)$  mota finkoko tentsore guztien espazioak espazio bektoriala osatzen du; batu eta zenbaki errealez biderkatu daitezke. Espazio honen oinarria eraikitzeke, **produktu tentsorial** izenez ezagutzen den eragiketa berri bat definitu behar dugu,  $\otimes$  adierazita.  $T(k, l)$  tentsorea eta  $S(m, n)$  tentsorea bada,  $(k + m, l + n)$  tentsorea  $T \otimes S$  definituko dugu.

$$\begin{aligned}T \otimes S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)}) \\ = T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)}) .\end{aligned}\quad (1.46)$$

(Kontuan izan  $\omega^{(i)}$  eta  $V^{(i)}$  bektore eta bektore bikoitz desberdinak direla, ez horien osagaiak.) Beste era batera esanda, lehenik eta behin jokatu  $T$  bektore eta bektore dualen multzo egokian, eta gero  $S$  gainontzekoan, eta biderkatu erantzunak. Kontuan izan, oro har,  $T \otimes S \neq S \otimes T$ .

Orain erraza da  $(k, l)$  tentsore guztien espazioaren oinarri bat eraikitzea, oinarri-bektoreen eta bektore dualen tentsio-produktuak hartuz; oinarri hori formako tentsore guztiek osatuko dute

$$\hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)} . \quad (1.47)$$

4 dimentsioko espazio-denbora batean  $4^{k+l}$  oinarritzko tentsoreak egongo dira guztira. Osagaien notazioan gure tentsore arbitrarioa honela idatziko dugu

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)} . \quad (1.48)$$

Bestela, osagaiak defini genitzake tentsorea oinarri-bektoreetan eta bektore bikoitzean jokatuz:

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = T(\hat{\theta}^{(\mu_1)}, \dots, \hat{\theta}^{(\mu_k)}, \hat{e}_{(\nu_1)}, \dots, \hat{e}_{(\nu_l)}) . \quad (1.49)$$

Zuk zeuk egiazta dezakezu (1.33) eta abar erabiliz, ekuazio hauek guztiak ondo zintzilikatzen direla.

Bektoreekin gertatzen den bezala,  $T$  tentsorea  $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$  osagaien bidez adierazteko lasterbidea hartuko dugu normalean. Tentsoreek bektore eta bektore dual multzo batean duten ekintzak (1.35) ezarritako ereduari jarraitzen dio:

$$T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \omega_{\mu_1}^{(1)} \cdots \omega_{\mu_k}^{(k)} V^{(1)\nu_1} \cdots V^{(l)\nu_l} . \quad (1.50)$$

Indizeen ordena garrantzitsua da, jakina, tentsoreak ez baitu zertan berdin jokatu behar bere argumentu ezberdinetan. Azkenik, Lorentz-en transformazioetan osagai tentsorialen transformazioa oinarritzko bektoreen eta bektore dualen transformazioari buruz lehendik dakiguna aplikatuz erator daiteke. Erantzuna indizea kokatzean espero zenukeena da,

$$T^{\mu'_1 \cdots \mu'_k}_{\nu'_1 \cdots \nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu'_k}_{\mu_k} \Lambda_{\nu'_1}^{\nu_1} \cdots \Lambda_{\nu'_l}^{\nu_l} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} . \quad (1.51)$$

Beraz, goiko indize bakoitza bektore bat bezala eraldatzen da, eta beheko indize bakoitza bektore bikoitza bezala eraldatzen da.

Tentsoreak  $\mathbb{R}$ -ra dauden bektore eta bektore ukitzaileen multzoetatik mapa lineal gisa definitu baditugu ere, ez dago argumentu bilduma oso batean jardutera behartzen gaituen ezer. Beraz,  $(1, 1)$  tentsoreak bektoreetatik bektoreetara mapa gisa ere jokatzen du:

$$T^{\mu}_{\nu} : V^{\nu} \rightarrow T^{\mu}_{\nu} V^{\nu} . \quad (1.52)$$

Zeuk egiaztatu dezakezu  $T^{\mu}_{\nu} V^{\nu}$  bektore bat dela (*ie* bektore-eraldaketa legea betetzen du). Era berean, beste tentsore baten gainean (guztia edo zati batean) tentsore bat jar dezakegu hirugarren tentsore bat lortzeko. Adibidez,

$$U^{\mu}_{\nu} = T^{\mu\rho}_{\sigma} S^{\sigma}_{\rho\nu} \quad (1.53)$$

$(1, 1)$  tentsore guztiz ona da.

Baliteke tentsoreei buruzko sarrera hau laburregia izan delako kezkatuta egoteak, materialaren izaera esoterikoa kontuan hartuta. Izan ere, tentsoreen nozioak ez du esfortzu handirik behar menperatzeko; indizeak zuzen mantentzea besterik ez da, eta horiek manipulatzeko arauak oso naturalak dira. Izan ere, hainbat liburuk tentsoreak *definitzea* gustatzen zaizkie (1.51) arabera eraldatzen diren zenbakien bilduma gisa. Funtzionamenduz baliagarria den arren, tentsoreen esanahi sakonagoa ezkutatu ohi du aukeratutako edozein koordenatu-sistemaren bizitza independentea duten entitate geometriko gisa. Bada, hala ere, soiltasun bat gainditu duguna. Bektore dualaren eta tentsoreen eta oinarrien eta mapa linealen nozioak aljebra linealaren esparrukoak dira, eta egokiak dira espazio bektorial abstraktu bat eskura dugunean. Interesgarria zaigun kasuan ez dugu espazio bektorial bat bakarrik, espazio-denborako puntu bakoitzean espazio bektorial bat baizik. Gehienetan tentsore-eremuak interesatzen zaizkigu, espazio-denboran tentsore-baliodun funtzio gisa har daitezkeenak. Zorionez, goian definitu ditugun manipulazioei ez zaie axola espazio bektorial bakarrarekin edo espazio bektorialen bilduma batekin, gertaera bakoitzeko bat.  $x^\mu$ -ko gauzei  $x^\mu$ -ren funtzioei deitzea besterik gabe ateratzeko gai izango gara egokia denean. Hala ere, zuzen mantendu behar duzu sartu ditugun nozioen independentzia logikoa eta espazio-denborari eta erlatibitateari berariazko aplikazioa.

Orain tentsoreen adibide batzuetara jo dezagun. Lehenik eta behin zutabe-bektoreen aurreko adibidea eta haien dualak, errenkada-bektoreak kontuan hartuko ditugu. Sistema honetan  $(1, 1)$  tentsorea matrize bat besterik ez da,  $M^i_j$ .  $(\omega, V)$  bikote batean duen ekintza matrizearen biderketa arruntak ematen du:

$$M(\omega, V) = (\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_n) \begin{pmatrix} M^1_1 & M^1_2 & \cdots & M^1_n \\ M^2_1 & M^2_2 & \cdots & M^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M^n_1 & M^n_2 & \cdots & M^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ \vdots \\ V^n \end{pmatrix} = \omega_i M^i_j V^j. \quad (1.54)$$

Nahi baduzu, pentsa ezazu tentsoreak “indize kopuru arbitrarioa duten matrizeak” gisa.

Espazio-denboran, dagoeneko ikusi ditugu tentsoreen adibide batzuk horrela deitu gabe.  $(0, 2)$  tentsorearen adibiderik ezagunena metrika da,  $\eta_{\mu\nu}$ . Metrikak bi bektoreetan duen ekintza hain da erabilgarria non bere izena hartzen baitu, **barne-produktua** (edo puntu-produktua):

$$\eta(V, W) = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V \cdot W. \quad (1.55)$$

Euklidear produktu konbentzionalarekin gertatzen den bezala, produktu puntuala **ortogonal** gisa desagertzen den bi bektore aipatuko dugu. Puntu produktua eskalar bat denez, aldaezin geratzen da Lorentz transformazioetan; beraz, edozein marko inertzial kartesiarren oinarri-bektoreak, definizioz ortogonalak izateko aukeratzen direnak, oraindik ortogonalak dira Lorentz-en transformazio baten ondoren (lehenago nabaritu dugun “guraizeak elkartuta” izan arren). Bektore baten **norma** bektorearen barruko produktua

dela definitzen da; Euklidear espazioan ez bezala, zenbaki hau ez da definitibo positiboa:

$$\text{if } \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \text{ is } \begin{cases} < 0, & V^\mu \text{ is timelike} \\ = 0, & V^\mu \text{ is lightlike or null} \\ > 0, & V^\mu \text{ is spacelike.} \end{cases}$$

(Bektore batek zero arau izan dezake zero bektorea izan gabe.) Konturatuko zara terminologia lehen espazio-denboran bi punturen arteko erlazioa sailkatzeko erabili dugun berbera dela; ez da kasualitatea, noski, eta aurrerago sakonduko dugu.

Beste tentsore bat Kronecker delta  $\delta_\nu^\mu$  da, (1, 1) motakoa, zeina dagoeneko ezagutzen dituzun osagaiak. Honekin eta metrikarekin erlazionatuta **alderantzizko metrika**  $\eta^{\mu\nu}$  da, metrikaren alderantzizko gisa definitutako (2, 0) motako tentsore bat:

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \eta_{\rho\nu} \eta^{\nu\mu} = \delta_\mu^\rho. \quad (1.56)$$

Izan ere, egiaztatu dezakezun bezala, alderantzizko metrikoak metrikaren osagai berdinak ditu. (Hau koordenatu kartesiarren espazio lauan bakarrik gertatzen da, eta egoera orokorretan huts egingo du). **Levi-Civita tentsorea** ere badago, (0, 4) tentsorea:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{if } \mu\nu\rho\sigma \text{ is an even permutation of } 0123 \\ -1 & \text{if } \mu\nu\rho\sigma \text{ is an odd permutation of } 0123 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.57)$$

Hemen, “0123ren permutazioa” 0, 1, 2, 3 zenbakien ordenazioa da, 0123tik hasiz eta bi zifren trukatzuz lor daitekeena; permutazio bikoitia halako truke kopuru bikoiti baten bidez lortzen da, eta permutazio bakoitia zenbaki bakoiti baten bidez. Horrela, adibidez,  $\epsilon_{0321} = -1$ .

Goiko tentsoreen propietate nabarmena da –metrikoa, alderantzizko metrikoa, Kronecker-en delta eta Levi-Civita tentsorea–, denak (1.51) tentsorearen transformazio-legearen arabera eraldatzen badira ere, haien osagaiak mantentzen dira. *edozein* koordenatu sistema kartesiaretan aldatu gabe espazio-denbora lauan. Zentzu batean horrek tentsoreen adibide txarrak bihurtzen ditu, tentsore gehienek ez baitute propietate hori. Izan ere, tentsore hauek ere ez dute propietate hori koordenatu-sistema orokorretara joaten garenean, Kronecker-en delta salbuespen bakarrarekin. Tentsore honek osagai berdinak ditu edozein koordenatu-sistematan edozein espazio-denboratan. Honek zentzua du tentsorearen definiziotik mapa lineal gisa; Kronecker tentsorea bektoreetatik bektoreetara (edo bektore bikoitzetatik bektore bikoitzetara) identitate-mapa dela pentsa daiteke, eta argi eta garbi osagai berdinak izan behar ditu koordenatu-sistema edozein dela ere. Beste tentsoreek (metrikoa, bere alderantzizkoa eta Levi-Civita tentsorea) espazio-denboraren egitura ezaugarritzen dute, eta guztiak metrikaren arabera dira. Beraz, arreta handiagoz tratatu beharko ditugu espazio-denbora lauaren hipotesiak alde batera uzten ditugunean.

Tentsorearen adibide tipikoagoa **eremu elektromagnetikoko indarraren tentsorea** da. Denok dakigu eremu elektromagnetikoak  $E_i$  eremu elektrikoaren bektoreak eta  $B_i$  eremu magnetiko bektoreak osatuta daudela. (Gogoratu latinezko indizeak erabiltzen ditugula espazio antzeko osagaietarako 1,2,3). Egia esan, hauek espazioko errotazioen

pean dauden “bektoreak” baino ez dira, ez Lorentz talde osoaren pean. Izan ere,  $(0, 2)$   $F_{\mu\nu}$  tentsorearen osagaiak dira, honela definituta

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu} . \quad (1.58)$$

Ikuspegi honetatik erraza da eremu elektromagnetikoak erreferentzia-marko batean beste batean eraldatzea, (1.51) aplikatuz. Tentsorearen formalismoaren ahalmen bateratzailea nabaria da: harreman eta transformazio propietate nahiko misterioitsuak diren bi bektoreen bilduma baino, tentsore-eremu bakarra dugu elektromagnetismo guztia deskribatzeko. (Bestalde, ez utzi urrun; batzuetan erosoagoa da koordenatu-sistema bakarrean lan egitea eremu elektriko eta magnetikoaren bektoreak erabiliz).

Adibide batzuk eskuan ditugula orain pixka bat sistematikoagoak izan gaitezke tentsoreen propietate batzuei buruz. Lehenik eta behin, kontuan hartu **uzkurdura**-ren eragiketa, zeinak  $(k, l)$  tentsore bat  $(k - 1, l - 1)$  tentsore bihurtzen duena. Uzkurdura goiko indize bat eta beheko indize bat batuz egiten da:

$$S^{\mu\rho}{}_{\sigma} = T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu} . \quad (1.59)$$

Emaizta ondo definitutako tentsorea dela egiaztatu dezakezu. Noski, zilegi da goiko indize bat indize baxuago batekin kontratatzea (mota bereko bi indizeen aldean). Kontuan izan, gainera, indizeen ordenak garrantzia duela, modu ezberdinetan kontratatuz tentsore desberdinak lor ditzakezula; horrela,

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}{}_{\sigma\nu} \quad (1.60)$$

orokorrean.

Metrikoa eta alderantzizko metrika tentsoreetan **indizeak igo eta jaisteko** erabil daitezke. Hau da,  $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$  tentsorea emanda, metrika erabil dezakegu  $T$  letra berarekin adierazteko aukeratzen ditugun tentsore berriak definitzeko:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\mu}{}_{\delta} &= \eta^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} , \\ T_{\mu}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} &= \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} , \\ T_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\sigma\delta} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} , \end{aligned} \quad (1.61)$$

eta abar. Kontuan izan igotzeak eta jaistek ez duela indize baten posizioa aldatzen beste indizeekiko, eta, gainera, “libre” indizeak (gehiago batzen ez direnak) berdinak izan behar direla ekuazio baten bi aldeetan, “dummy” bitartean. ’ indizeak (gehiago batutzen direnak) alde batean bakarrik agertzen dira. Adibide gisa, bektoreak eta bektore bikoitzak elkar bihur ditzakegu indizeak igoz eta jaitsiz:

$$\begin{aligned} V_{\mu} &= \eta_{\mu\nu} V^{\nu} \\ \omega^{\mu} &= \eta^{\mu\nu} \omega_{\nu} . \end{aligned} \quad (1.62)$$

Honek azaltzen du zergatik hiru dimentsioko espazio lau euklidear batean gradientea bektore arrunt gisa pentsatu ohi den, bektore bikoitz gisa sortzen dela ikusi dugun arren; Euklidear espazioan (non metrika diagonal den +1 sarrera guztiekin) bektore bikoitza osagai berdinak dituen bektore bihurtzen da bere indizea igotzen dugunean. Orduan galdetuko zaizu zergatik egin dugun bereizketa. Arrazoi sinple bat, jakina, zera da: Lorentziar espazio-denbora batean osagaiak ez direla berdinak:

$$\omega^\mu = (-\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) . \quad (1.63)$$

Espazio-denbora kurbatu batean, non metrikaren forma oro har konplikatuagoa den, aldea nabarmenagoa da. Baina bada arrazoi sakonago bat, hau da, tentsoreak orokorrean metrikarekiko independentea den definizio “naturala” dutela. Nahiz eta beti izango dugun metrika eskuragarri, sartzen dugun objektu matematiko bakoitzaren egoera logikoaz jabetzea lagungarria da. Gradientea eta bektoreetan duen ekintza guztiz ondo definituta dago edozein metrika edozein dela ere, “goiko indizeekin gradientea” ez. (Adibide gisa, azkenean metrikarekiko funtzionalen aldakuntzak hartu nahi izango ditugu, eta, beraz, zehatz-mehatz jakin beharko dugu funtzionala metrikaren arabera nolakoa den, indize-notazioak erraz ezkututzen den zer bait).

Tentsorearen jargoia biltzen jarraituz, tentsoreari **simetrikoa** aipatzen dugu bere indizeetako edozeinetan, indize horien trukean aldatzen ez bada. Horrela, bada

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho} , \quad (1.64)$$

$S_{\mu\nu\rho}$  bere lehenengo bi indizeetan simetrikoa dela esaten dugu, bada

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\mu\rho\nu} = S_{\rho\mu\nu} = S_{\nu\rho\mu} = S_{\rho\mu\nu} , \quad (1.65)$$

$S_{\mu\nu\rho}$  bere hiru indizeetan simetrikoa dela esaten dugu. Era berean, tentsorea **antisimetrikoa** (edo “simetrikoa okerra”) da bere indizeetako edozeinetan, indize horiek trukatzeari zainua aldatzen badu; horrela,

$$A_{\mu\nu\rho} = -A_{\rho\nu\mu} \quad (1.66)$$

esan nahi du  $A_{\mu\nu\rho}$  antisimetrikoa dela bere lehen eta hirugarren indizeetan (edo “antisimetrikoa  $\mu$  eta  $\rho$ ” besterik ez dela). Tentsore bat (anti-) simetrikoa bada bere indize guztietan, besterik gabe (anti-) simetrikoa deritzogu (batzuetan “erabat” aldatzaile erredundantearekin). Adibide gisa,  $\eta_{\mu\nu}$  metrika eta  $\eta^{\mu\nu}$  alderantzizko metrika simetrikoak dira, Levi-Civita tentsorea  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  eta eremu elektromagnetikoko indarra  $F_{\mu\nu}$  antisimetrikoak. (Egiaztatu zeure buruari simetrikoak edo antisimetrikoak diren indize multzo bat igo edo jaisten baduzu, horrela jarraitzen dutela). Kontuan izan ez duela zentzurik goiko eta beheko indizeak elkarren artean trukatzek, beraz, ez utzi Kronecker delta  $\delta^\alpha_\beta$  simetrikoa dela pentsatzeko tentazioari. Bestalde,  $\delta^\alpha_\beta$ -n indize bat jaisteak tentsore simetrikoa (hain zuzen ere, metrikoa) ematen duenak esan nahi du indizeen ordenak ez duela garrantzirik, eta horregatik ez dugu indizeen kokapena mantentzen. tentsore hau.

Edozein tentsore emanda, bere goiko edo beheko indizeen edozein zenbaki **sime-trizatu** (edo antisimetrizatu) dezakegu. Simetrizatzeko, dagozkion indizeen permutazio

guztien batura hartuko dugu eta termino kopuruarekin zatituko dugu:

$$T_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)\rho}{}^\sigma = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\rho}{}^\sigma + \text{sum over permutations of indices } \mu_1 \cdots \mu_n) , \quad (1.67)$$

antisimetrizazioa txandakako baturatik datorren bitartean:

$$T_{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_n]\rho}{}^\sigma = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\rho}{}^\sigma + \text{alternating sum over permutations of indices } \mu_1 \cdots \mu_n) . \quad (1.68)$$

“Batura txandakaturia” esan nahi dugu truke kopuru bakoiti baten emaitza diren permutazioei minus ikurra ematen zaiela, honela:

$$T_{[\mu\nu\rho]\sigma} = \frac{1}{6} (T_{\mu\nu\rho\sigma} - T_{\mu\rho\nu\sigma} + T_{\rho\mu\nu\sigma} - T_{\nu\mu\rho\sigma} + T_{\nu\rho\mu\sigma} - T_{\rho\nu\mu\sigma}) . \quad (1.69)$$

Kontuan izan kortxeteek simetrizazioa/antisimetrizazioa adierazten dutela. Gainera, batzuetan bata bestearen ondoan ez dauden indizeak (anti-) simetrizatu nahi ditugu, kasu horretan barra bertikalak erabiltzen ditugu batukan sartzen ez diren indizeak adierazteko:

$$T_{(\mu|\nu|\rho)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\nu\mu}) . \quad (1.70)$$

Azkenik, pertsona batzuek  $1/n!$  faktorea kentzen den konbentzio bat erabiltzen dute. Hemen erabiltzen dena ona da, (adibidez) tentsore simetriko batek betetzen baitu

$$S_{\mu_1\cdots\mu_n} = S_{(\mu_1\cdots\mu_n)} , \quad (1.71)$$

eta era berean tentsore antisimetrikoetarako.

Kontuz ibili gara orain arte beti egiazkoak diren gauzak (metrika arbitrarioa duen anizkera batean) eta Minkowskiren espazioan koordenatu kartesiarretan egiazkoak diren gauzak argi eta garbi bereizten. Bereizketa garrantzitsuenetako bat **deribatu partzialekin** sortzen da. Koordenatu kartesiarrekin espazio-denbora lauan lan egiten badugu,  $(k, l)$  tentsore baten deribatu partziala  $(k, l + 1)$  tentsore bat da; hori da,

$$T_\alpha{}^\mu{}_\nu = \partial_\alpha R^\mu{}_\nu \quad (1.72)$$

Lorentz eraldaketak behar bezala eraldatzen ditu. Hala ere, hori ez da gehiago egia izango espazio-denbora orokorragoetan, eta “deribatu kobariantea” definitu beharko dugu deribatu partzialaren lekua hartzeko. Dena den, kasu berezi honetan deribatu partzialek tentsorea ematen digutela ere erabil dezakegu, beti ere guri buruz adimena mantentzen badugu. (Abisu honen salbuespen bat eskalar baten deribatu partziala da,  $\partial_\alpha \phi$ , tentsore guztiz ona [gradienteak] edozein espazio-denboratan).

Orain, tentsorearen ezagutza nahikoa pilatu dugu kontzeptu horietako batzuk benetako fisika erabiliz ilustratzeko. Zehazki, elektrodinamikaren **Maxwell-en ekuazioak** aztertuko dugu. 19<sup>th</sup> mendeko idazkeran, hauek dira

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= 4\pi \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 . \end{aligned} \quad (1.73)$$



Hemen,  $\mathbf{E}$  eta  $\mathbf{B}$  eremu elektrikoa eta magnetikoa 3-bektoreak dira,  $\mathbf{J}$  korronea da,  $\rho$  karga-dentsitatea eta  $\nabla \times$  eta  $\nabla \cdot$  dira. kizkur konbentzionala eta dibergentzia. Ekuazio hauek aldaezinak dira Lorentz-en transformazioetan, noski; horrela hasi zen negozio guztia. Baina ez dute itxura jakina aldaezinak; gure tentsore-notazioak hori konpondu dezake. Has gaitezen ekuazio hauek idazkera apur bat ezberdin batean idazten,

$$\begin{aligned}\epsilon^{ijk}\partial_j B_k - \partial_0 E^i &= 4\pi J^i \\ \partial_i E^i &= 4\pi J^0 \\ \epsilon^{ijk}\partial_j E_k + \partial_0 B^i &= 0 \\ \partial_i B^i &= 0 .\end{aligned}\tag{1.74}$$

Adierazpen hauetan, indize espazialak altxatu eta jaitsi egin dira abandonuarekin, metrika agertzen den lekuan zuzen mantentzeko ahaleginik egin gabe.  $\delta_{ij}$  3-espazio lauuko metrika delako,  $\delta^{ij}$  bere alderantzizkoa duelako (matrize berdinak dira). Beraz, nahierara igo eta jaitsi ditzakegu indizeak, osagaiak ez baitira aldatzen. Bien bitartean, hiru dimentsioko Levi-Civita  $\epsilon^{ijk}$  tentsorea lau dimentsiokoa bezala definitzen da, nahiz eta indize bat gutxiago izan. Karga-dentsitatea  $J^0$ -rekin ordezkatu dugu; hau zilegia da dentsitateak eta korroneak elkarrekin **korrone 4-bektorea**,  $J^\mu = (\rho, J^1, J^2, J^3)$  osatzen dutelako.

Adierazpen horietatik, eta  $F_{\mu\nu}$  eremu-indarraren tentsorearen (1.58) definiziotik, erraza da Maxwell-en ekuazioaren 20<sup>th</sup> mendeko bertsio guztiz tentsorial bat lortzea. Hasteko, goiko indizeekin eremuaren indarra adieraz dezakegu

$$\begin{aligned}F^{0i} &= E^i \\ F^{ij} &= \epsilon^{ijk} B_k .\end{aligned}\tag{1.75}$$

(Hau egiaztatzeko, kontuan izan adibidez  $F^{01} = \eta^{00}\eta^{11}F_{01}$  eta  $F^{12} = \epsilon^{123}B_3$  direla.) Orduan (1.74)-ko lehenengo bi ekuazioak bihurtzen dira

$$\begin{aligned}\partial_j F^{ij} - \partial_0 F^{0i} &= 4\pi J^i \\ \partial_i F^{0i} &= 4\pi J^0 .\end{aligned}\tag{1.76}$$

$F^{\mu\nu}$ -ren antisimetria erabiliz, hauek tentsore-ekuazio bakarrean konbina daitezkeela ikusiko dugu

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu .\tag{1.77}$$

Antzeko arrazoibide-lerro batek, ariketa gisa uzten dizunak, agerian uzten du (1.74)ko hirugarren eta laugarren ekuazioak idatz daitezkeela.

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 .\tag{1.78}$$

Maxwell-en lau ekuazio tradizionalak biren ordezkatzatzen dira, horrela tentsore-notazioaren ekonomia frogatuz. Garrantzitsuagoa dena, ordea, (1.77) eta (1.78) ekuazioen bi aldeak tentsore gisa eraldatzen dira agerian; hortaz, inertzi marko batean egiazkoak badira, Lorentz eraldatutako edozein markotan egiazkoak izan behar dute. Horregatik, tentsoreak oso erabilgarriak dira erlatibitatean — askotan erlazioak adierazi

nahi ditugu inolako erreferentzia-esparrutara jo gabe, eta beharrezkoa da ekuazio baten alde bakoitzeko kantitateak era berean eraldatzea koordenatuen aldaketan. Jargoi gisa, batzuetan **kobariantea** gisa tentsoreez idazten diren kantitateak aipatuko ditugu (ez du zerikusirik “kobariantearekin” “kontrabariantearekin” ez bezala). Beraz, (1.77) eta (1.78) batera Maxwell-en ekuazioen forma kobariante gisa balio dutela esaten dugu, (1.73) edo (1.74) kobariantek ez diren bitartean.

Sar dezagun orain tentsoreen klase berezi bat, **forma diferentzialak** (edo “formak” besterik gabe) izenez ezagutzen dena.  $p$ -forma diferentziala guztiz antisimetrikoa den  $(0, p)$  tentsore bat da. Horrela, eskalarrak automatikoki 0 formakoak dira, eta bektore dualak automatikoki forma bakarrekoak dira (horrela terminologia hau aspalditik azalduz). 2 formako  $F_{\mu\nu}$  eta 4 formako  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ere baditugu.  $p$ -inprimaki guztien espazioa  $\Lambda^p$  adierazten da, eta  $p$ -inprimaki-eremu guztien espazioa  $M$  anizkunaren gainean  $\Lambda^p(M)$  adierazten da. Konbinatorikako ariketa erdi-zuzen batek erakusten du  $p$ -forma lineal independenteen kopurua  $n$ -dimentsioko espazio bektorial batean  $n!/(p!(n-p)!)$  dela. Beraz, 4 dimentsioko espazio-denbora bateko puntu batean 0-forma linealki independente bat, lau 1-forma, sei 2-forma, lau 3-forma eta 4-forma bat daude. Ez dago  $p$ -formarik  $p > n$ rentzat, osagai guztiak automatikoki zero izango baitira antisimetriaren arabera.

Zergatik zaindu behar ditugu forma diferentzialak? Galdera zaila da lan gehiagorik gabe erantzutea, baina oinarritzko ideia da formak desberdindu eta integra daitezkeela, egitura geometriko gehigarriren laguntzarik gabe. Integrazioaren teoria gerora arte atzeratuko dugu, baina ikusiko dugu formak nola bereizten laster.

$p$ -forma  $A$  eta  $q$ -forma  $B$  bat emanda, **ziri-produktua**  $A \wedge B$  deritzon  $(p+q)$  forma bat osa dezakegu tentsore-produktu antisimetrizatua hartuz:

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p! q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]} . \quad (1.79)$$

Horrela, adibidez, bi 1-formeren ziri-produktua da

$$(A \wedge B)_{\mu\nu} = 2A_{[\mu} B_{\nu]} = A_{\mu} B_{\nu} - A_{\nu} B_{\mu} . \quad (1.80)$$

Apuntatu hori

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A , \quad (1.81)$$

beraz, ziri-produktu baten ordena alda dezakezu seinaleekin kontuz ibiliz gero.

**kanpoko deribatua** “d”  $p$ -inprimaki-eremuak bereizteko aukera ematen digu  $(p+1)$ -inprimaki-eremuak lortzeko. Deribatu partzial antisimetriko egoki normalizatu gisa definitzen da:

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} . \quad (1.82)$$

Adibiderik errazena gradientea da, hau da, 1-forma baten kanpoko deribatua:

$$(d\phi)_{\mu} = \partial_{\mu} \phi . \quad (1.83)$$

Kanpoko deribatuak arreta berezia merezi duen arrazoia *tentsorea da* da, nahiz eta espazio-denbora kurbatuetan, bere lehengusu deribatu partziala ez bezala. Oraindik espazio kurbatuak aztertu ez ditugunez, ezin dugu hori frogatu, baina (1.82) tentsore zintzo bat definitzen du metrika eta koordenatuak edozein direla ere.

Kanpo-bereizpenari buruzko beste datu interesgarri bat zera da,  $A$  edozein formatarako,

$$d(dA) = 0 , \quad (1.84)$$

askotan  $d^2 = 0$  idazten dena. Nortasun hori  $d$  definizioaren eta deribatu partzialak joan-etorria izatearen ondorioa da,  $\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$  (edozertan jardutea). Honek ondoko matematika albo batera eramaten gaitu, ondo pasatzeko.  $p$ -forma  $A$  definitzen dugu **itxia**  $dA = 0$  bada, eta **zehatza**  $A = dB$  ( $p-1$ ) forma  $B$  baterako. Jakina, forma zehatz guztiak itxiak dira, baina alderantziz ez da zertan egia.  $M$  sorta batean,  $p$ -forma itxiek  $Z^p(M)$  espazio bektoriala osatzen dute eta forma zehatzek  $B^p(M)$  espazio bektoriala osatzen dute. Definitu bektore-espazio berri bat forma zehatzen modulo forma itxi gisa:

$$H^p(M) = \frac{Z^p(M)}{B^p(M)} . \quad (1.85)$$

Hau  $p$ th de Rham kohomologia bektorial-espazio bezala ezagutzen da, eta  $M$  aniztasunaren topologiaren arabera da soilik. (Minkowski-ko espazioa topologikoki  $\mathbb{R}^4$ -ren baliokidea da, eta hori ez da interesgarria, beraz,  $H^p(M)$  guztiak  $p > 0$ -rako desageritzen dira;  $p = 0$ -rako  $H^0(M) = \mathbb{R}$  dugu. Beraz, Minkowskiren espazioan forma itxi guztiak zehatzak dira zero-formak izan ezik; zero-formak ezin dira zehatzak izan, ez baitago  $-1$ -formarik kanpoko deribatua izateko.) Deigarria da horrela topologiari buruzko informazioa atera daitekeela, funtsean ekuazio diferentzialen soluzioak biltzen dituenen.  $H^p(M)$  espazioaren  $b_p$  dimentsioari  $M$ ren  $p$ garren Betti-zenbakia deitzen zaio eta Euler-en ezaugarria txandakako batuketaren bidez ematen da.

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p . \quad (1.86)$$

Kohomologia teoria topologia diferentzial modernoaren askoren oinarria da.

Errealitatera itzuliz, sartuko dugun forma diferentzialen inguruko azken eragiketa **Hodge dualtasuna** da. “Hodge izar operadorea”  $n$  dimentsioko manifold batean  $p$ -formetatik  $(n-p)$ -formetara mapa gisa definitzen dugu,

$$(*A)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}{}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} A_{\nu_1 \dots \nu_p} , \quad (1.87)$$

$A$  “ $A$  bikoitzarekin” mapatzen. Formei buruzko gure beste eragiketetan ez bezala, Hodgeren duala askotariko metrikaren arabera da (agerikoa izan beharko litzateke, Levi-Civita tentsoreari buruzko indize batzuk igo behar izan ditugulako (1.87) definitzeko). Hodge izarra bi aldiz aplikatzeak jatorrizko forma gehi edo ken itzultzen du:

$$**A = (-1)^{s+p(n-p)} A , \quad (1.88)$$

non  $s$  metrikaren balio propioetan minus zeinu kopurua den (Minkowski espaziorako,  $s = 1$ ).

Hodge dualaren bi datu: Lehenik eta behin, “bikoiztasuna” Hodgeren zentzuan bektore eta bektore bikoitzaren arteko erlazioa baino desberdina da, nahiz eta biak jatorrizko

espaziotik  $\mathbb{R}$  mapa linealen espazio gisa har daitezkeen. . Kontuan izan  $(n - p)$ -formen espazioaren dimentsioa  $p$ -formen espazioaren berdina dela, beraz, hori egia izateko aukera du gutxienez. Formen kasuan,  $p$  forma baten gainean jarduten duen  $(n - p)$ -forma batek definitutako mapa lineala bi formen ziri-produktuaren dualak ematen du. Beraz,  $A^{(n-p)}$   $(n - p)$  forma bada eta  $B^{(p)}$   $p$  forma bada espazio-denboraren uneren batean, izango dugu

$$*(A^{(n-p)} \wedge B^{(p)}) \in \mathbb{R} . \quad (1.89)$$

Bigarren gertakaria 3 dimentsioko euklidear espazioko forma diferentzialak da. Bi 1-formaren ziri-produktuaren Hodge dualak beste 1-forma bat ematen du:

$$*(U \wedge V)_i = \epsilon_i^{jk} U_j V_k . \quad (1.90)$$

(Aurrefaktore guztiak bertan behera utzi). Euklideko espazioan 1-formak bektoreak bezalakoak direnez, bi bektoretik bektore bakarrerako mapa dugu. Zure burua konbentzitu beharko zenuke ohiko produktu gurutzatua besterik ez dela, eta Levi-Civita tentsorearen itxurak azaltzen duela zergatik aldatzen den produktu gurutzatua parekotasunaren pean (bi koordinatuen trukea edo baliokide diren oinarri-bektoreak). Horregatik gurutzatutako produktua hiru dimentsiotan baino ez da existitzen — hiru dimentsiotan soilik baitugu bi bektore bikoitzetik hirugarren bektore bikoitzerako mapa interesgarria. Nahi izanez gero,  $n - 1$  inprimaki bakarreko mapa bat defini dezakezu, baina ez nago ziur ezertarako balioko duenik.

Elektrodinamikak forma diferentzialen erabileraren adibide bereziki sinesgarria eskaintzen du. Kanpoko deribatuaren definiziotik, argi dago (1.78) ekuazioa  $F_{\mu\nu}$  bi formaren itxiera gisa laburki adieraz daitekeela:

$$dF = 0 . \quad (1.91)$$

Horrek esan nahi du  $F$  ere zehatza dela? Bai; adierazi dugunez, Minkowskiren espazioa topologikoki hutsala da, beraz, forma itxi guztiak zehatzak dira. Beraz, forma bakarreko  $A_\mu$  izan behar da

$$F = dA . \quad (1.92)$$

Forma bakar hau elektromagnetismoaren **potentzial bektorial** ezaguna da, 0 osagaia potentzial eskalarrek,  $A_0 = \phi$  ematen duena.  $A_\mu$  elektromagnetismoaren oinarritzko eremua dela abiatzen bada, (1.91) identitate gisa jarraitzen du (lege dinamiko baten aurrean, higiduraren ekuazioa). Gauge inbariantza teoria  $A \rightarrow A + d\lambda$  pean aldaezina dela  $\lambda$  eskalarren (zero-forma)  $\lambda$ ren arabera adierazten da, eta hori ere berehalakoa da (1.92) erlaziotik. Maxwell-en ekuazioetako beste bat, (1.77), hiru formen arteko ekuazio gisa adieraz daiteke:

$$d(*F) = 4\pi(*J) , \quad (1.93)$$

non uneko forma bakarreko  $J$  indizea jaitsita duen uneko lau bektorea besterik ez den. Xehetasunak betetzea zure esku geratzen da.

Intrigazkoa alde batera utzita, Hodge dualtasuna gaur egungo fisika teorikoko gairik beroenetako baten oinarria da. Zaila da ez ohartzea (1.91) eta (1.93) ekuazioak oso an-

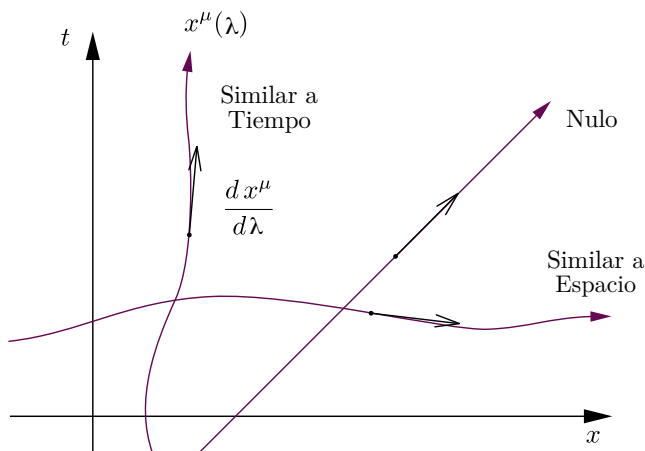
tzekoak direla. Izan ere,  $J_\mu = 0$  ezartzen badugu, ekuazioak aldaezinak dira “bikoiztasun-eraldaketak”

$$\begin{aligned} F &\rightarrow *F, \\ *F &\rightarrow -F. \end{aligned} \tag{1.94}$$

Beraz, hutsean Maxwell-en ekuazioak bikoiztasun aldaezinak direla esaten dugu, kargaren aurrean inbariantza hondatzen den bitartean. Imajina genezake naturan monopolo magnetikoak zein elektrikoak existitzen zirela; orduan  $4\pi(*J_M)$  korronte magnetiko termino bat gehi genezake (1.91)ren eskuinaldean, eta ekuazioak aldaezinak izango lirateke bikoiztasun-eraldaketan gehi  $J \leftrightarrow J_M$  ordezkapen gehigarrian. (Noski (1.91)-ren eskuinteko aldea nulua ez den bat  $F = dA$ -rekin ez dator bat, beraz ideia honek  $A_\mu$  oinarritzko aldagaia ez bada bakarrik funtzionatzen du.) Aspaldi Dirac-ek monopolo magnetikoen ideia aztertu zuen eta haien existentziarako beharrezko baldintza bat oinarritzko monopolo-karga oinarritzko karga elektrikoarekiko alderantziz proportzionala izatea dela erakutsi zuen. Orain, oinarritzko karga elektrikoa kopuru txikia da; elektrodinamika “ahulki akoplatuta” dago, eta horregatik perturbazioen teoriak arrakasta handia du elektrodinamika kuantikoan (QED). Baina Dirac-en karga magnetikoen egoerak esan nahi du bikoiztasun-eraldaketak ahulezitako karga elektrikoen teoria bat monopolo magnetiko indartsuen teoria batera eramaten duela (eta alderantziz). Zoritzarrez monopoloak ez dira existitzen (dakigunez), ideia hauek ez dira zuzenean aplikatzen elektromagnetismoari; baina badira teoria batzuk (adibidez, gauge ez-abeliarren teoria supersimetrikoak) zeinentzat aspaldian asmatzen den nolabaiteko dualtasun-simetria bat egon daitekeela. Hala egingo balu, akoplatutako bertsio ahulei begiratuta (eta, beraz, ebazteko zaila) itxura duen teoria bat aztertzei aukera izango genuke. Duela gutxi Seiberg eta Witten eta beste batzuen lanek frogatu oso sendoak eman dituzte teoria jakin batzuetan hori gertatzen dena dela. Itxaropena da teknika hauek eremu kuantikoen teorietan biziki akoplatutako teorietan existitzen diren hainbat fenomeno aztertzea ahalbidetuko digutela, hala nola quarkak hadroiengan konfinatzea.

Orain, funtsean, tentsoreen zaintzari eta elikadurari buruz jakin beharreko guztia aztertu dugu. Hurrengo atalean arreta handiagoz aztertuko ditugu aldaeren eta tentsoreen definizio zorrotzak, baina oinarritzko mekanika nahiko ondo landu da. Matematika abstraktuagoetara salto egin aurretik, errepasatu dezagun fisikak Minkowski espazio-denboran nola funtzionatzen duen.

Hasi partikula bakar baten mundu-lerroarekin. Hau  $\mathbb{R} \rightarrow M$  mapa batek zehazten du, non  $M$  espazio-denbora adierazten duen aniztasuna den; normalean bidea  $x^\mu(\lambda)$  parametrodu kurba gisa pentsatzen dugu. Lehen esan bezala, bide honen bektore ukitzailea  $dx^\mu/d\lambda$  da (kontuan izan parametrizazioaren arabera dela). Lehen mailako intereseko objektu bat bektore tangentearen araua da, ibilbidea karakterizatzei balio duena; ukitzailea bektorea denboraren antzekoa/nulua/espazioaren antzekoa bada  $\lambda$  parametroaren balio batean, bidea denboraren antzekoa/nulua/espazio antzekoa dela esango dugu puntu horretan. Honek azaltzen du zergatik erabiltzen diren hitz berberak bi punturen arteko ukitzaileen espazioan eta tartetean bektoreak sailkatzeko — zeren eta, demagun, denbora-itxurako bereizitako bi puntu lotzen dituen lerro zuzen bat denbora-itxura izango da ibilbideko puntu guztietan.



Dena den, garrantzitsua da hemen tiratzen ari den esku-jokoaz jabetzea. Metrikoa,  $(0, 2)$  tentsore gisa, bi bektoreren (edo bektore beraren bi kopiaren) gainean jarduten duen makina bat da, zenbaki bat sortzeko. Beraz, oso naturala da bektore ukitzaileak haien arauaren zeinuaren arabera sailkatzea. Baina bi punturen arteko tartea ez da hain naturala den zerbait; puntuak lotzen dituen bide-aukera zehatz baten araberakoa da (“zuzena”), eta aukera hori, aldi berean, espazio-denbora laua izatearen araberakoa da (horrek puntuen arteko zuzen aukera paregabea ahalbidetzen du). Objektu naturalagoa **lerro-elementua** edo tarte infinitesimala da:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (1.95)$$

Definizio horretatik erro karratua hartu eta bide batean integratzea tentagarria da tarte finitu bat lortzeko. Baina  $ds^2$  positiboa izan behar ez denez, prozedura desberdinak definitzen ditugu kasu desberdinetarako. Espazio antzeko bideetarako **bidearen luzera** definitzen dugu

$$\Delta s = \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda , \quad (1.96)$$

non integrala bidetik hartzen den. Bide nuluetarako tartea zero da, beraz, ez da formula gehigarririk behar. Denboraren antzeko bideetarako **denbora egokia** definitzen dugu

$$\Delta \tau = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda , \quad (1.97)$$

positiboa izango dena. Noski, leku batzuetan denboraren antzekoak diren eta beste batzuetan espazio antzekoak diren bideak kontsidera ditzakegu, baina, zorionez, oso gutxitan beharrezkoa da, partikula fisikoen bideek ez baitute bere izaera aldatzen (partikula masiboek denboraren antzeko bideetatik mugitzen dira, masarik gabeko partikulak bide nuluetan). Gainera, “denbora egokia” esaldia bereziki egokia da, izan ere,  $\tau$  *benetan neurtzen du ibilbidean daraman erloju fisiko batean igarotako denbora*. Ikuspuntu honek “bikien paradoxa” eta antzeko puzzleak oso argi uzten ditu; espazio-denboran bi gertae-  
ra ezberdinetan gurutzatzen diren bi mundu-lerroak, zuzenak ez direnak, bide egokietan

zehar (1.97) integralaren bidez neurtutako denbora egokiak izango dituzte, eta bi zenbaki hauek, oro har, desberdinak izango dira haietan zehar bidaiatzen duten pertsonak urtean jaio badira ere. aldi berean.

Pasa gaitezen bideen kontsideraziotik, oro har, partikula masiboen bideetara (beti denborakoak izango direnak). Denbora egokia mundu-lerro batean bidaiatzen duen erloju batek neurtzen duenez, komenigarria da  $\tau$  parametro gisa erabiltzea bideko parametro gisa. Hau da, (1.97) erabiltzen dugu  $\tau(\lambda)$  kalkulatzeko, zeina (lehenik  $\lambda$  parametro ona bada) alderantzikatu dezakegu  $\lambda(\tau)$  lortzeko, eta ondoren bidea  $x^\mu(\tau)$  dela pentsa dezakegu. Parametrizazio honetako bektore ukitzailea **lau abiadura**,  $U^\mu$  izenez ezagutzen da:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} . \quad (1.98)$$

$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  geroztik, lau abiadura automatikoki normalizatzen da:

$$\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1 . \quad (1.99)$$

(Beti negatiboa izango da, denboraren antzeko ibilbideetarako soilik definitzen baitugu. Bektore analogo bat defini dezakezu espazio-itxurako bideetarako ere; bide nuluek arazo gehigarri batzuk ematen dituzte, araua zero denez.) Partikula baten gainerako markoan, bere lau abiadurak  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$  osagaiak ditu.

Erlazionatutako bektore bat **energia-momentua lau-bektorea** da, honela definitua

$$p^\mu = mU^\mu , \quad (1.100)$$

non  $m$  partikularen masa den. Masa marko inertzialetik independentea den kantitate finko bat da; “atseden-masa” gisa pentsatzera ohituta egon zaitezkeena. Askoz komenigarriagoa da hori behingoz masa gisa hartzea, masa abiaduraren arabera dela pentsatzea baino. Partikula baten **energia**  $p^0$  besterik ez da, bere energia-momentu bektorearen denboraren osagaia. Lau-bektore baten osagai bakarra denez, ez da aldaezina Lorentz-en transformazioetan; hori espero da, hala ere, atsedenean dagoen partikula baten energia ez baita higiduran dagoen partikula berarenaren berdina. Partikularen atsedeen-markoan  $p^0 = m$  dugu;  $c = 1$  ezarri dugula gogoratu, aurkitu dugu Einstein ospetsu bihurtu duen ekuazioa,  $E = mc^2$ . (Erlatibotasun orokorreko eremu-ekuazioak hau baino askoz ere garrantzitsuagoak dira, baina “ $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ ” ez du “ $E = mc^2$ ”-tik lortzen duzun errai-erreakzioa sortzen.) Mugitzen den fotograma batean  $p^\mu$ -ren osagaiak aurki ditzakegu Lorentz transformazio bat eginez;  $v$   $x$  ardatzean (hiru abiadurarekin higitzen den partikula batentzat dugu

$$p^\mu = (\gamma m, v\gamma m, 0, 0) , \quad (1.101)$$

non  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ .  $v$  txikirako, honek  $p^0 = m + \frac{1}{2}mv^2$  (normalean atsedeen-energia gehi energia zinetikoa dela uste duguna) eta  $p^1 = mv$  (normalean [newtoniar] momentutzat jotzen duguna) ematen ditu. Beraz, energia-momentu bektoreak bere izena betetzen du.

Erlatibitate aurreko fisikaren ardatza Newtonen 2. legea edo  $\mathbf{f} = m\mathbf{a} = d\mathbf{p}/dt$  da. Ekuazio analogo batek bete beharko luke SRn, eta tentsorial izateko eskakizunak zuzene-

nean lau bektore  $f^\mu$  betetzen duen indarra sartzera garamatza.

$$f^\mu = m \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau} p^\mu(\tau) . \quad (1.102)$$

Newtonen fisika indar baten adibiderik errazena grabitatearen ondoriozko indarra da. Erlatibitatean, ordea, grabitatea ez da indar batek deskribatzen, espazio-denboraren kurbadurak berak baizik. Horren ordeztu, kontuan hartu dezagun elektromagnetismoa. Hiru dimentsioko Lorentz indarra  $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ -k ematen du, non  $q$  partikularen karga den. Ekuazio honen orokortze tentsorial bat nahiko genuke. Erantzun paregabea gertatzen da:

$$f^\mu = q U^\lambda F_{\lambda}{}^\mu . \quad (1.103)$$

Zuk zeuk egiaztatu dezakezu hori abiadura txikien mugan newtoniar bertsiora murrizten dela. Kontuan izan nola ekuazioa tentsorial izateko eskakizunak, hau da, Lorentz inbariantza bermatzeko modu bat, nola lor genitzakeen adierazpen posibleak izugarri mugatu zituen. Fenomeno oso orokor baten adibidea da, zeinetan itxuraz amaigabeko lege fisiko posibleen kopuru txiki bat simetriaren eskakizunen arabera hautatzen den.

$p^\mu$ -k partikula baten energiaren eta momentuaren deskribapen osoa ematen badu ere, sistema hedatuetaarako beharrezkoa da **energia-momentuaren tentsorea** definitzea (batzuetan tentsio-energiaren tentsorea deitzen zaio),  $T^{\mu\nu}$ . Hau  $(2,0)$  tentsore simetriko bat da, eta sistema baten energia-itxurako alderdiei buruz jakin behar dugun guztia esaten digu: energia-dentsitatea, presioa, tentsioa eta abar.  $T^{\mu\nu}$ -ren definizio orokorra “lau momentuko  $p^\mu$   $x^\nu$  konstanteko gainazalean zehar duen fluxua da. Hau zehatzagoa izateko, har dezagun **fluido** gisa ezaugarritu daitekeen materiaren kategoria oso orokorra. — Tenperatura, presioa, entropia, biskositatea eta abar bezalako kantitate makroskopikoek deskribatutako materiaren continuum bat. Izan ere, definizio hau hain da orokorra ezen ezertarako balio ez duen. Erlatibitate orokorrean, funtsean, materia interesgarri guztiak **fluido perfektuak** direla pentsa daiteke, izarretatik hasi eta eremu elektromagnetikoetaraino unibertso osora. Schutzek fluido perfektua bero-eroalerik eta biskositaterik gabekoa dela definitzen du, eta Weinbergekin, berriz, bere atseden-markoan isotropo itxura duen fluido gisa definitzen du; bi ikuspuntu horiek baliokideak dira. Funtzionamenduz, fluido perfektu bat bere presioa eta dentsitatea guztiz bereizgarria izan daitekeen gisa pentsatu beharko zenuke.

Fluido perfektuak ulertzeko, has gaitezen **hautsa** adibide are sinpleagoarekin. Hautsa bata bestearekiko atseden dauden partikulen bilduma gisa definitzen da, edo, bestela, zero presio duen fluido perfektu gisa. Partikula guztiek edozein marko inertzial finkotan abiadura berdina dutenez, espazio-denboran zehar definitutako “lau abiadurako eremua”  $U^\mu(x)$  imajina dezakegu. (Izan ere, bere osagaiak berdinak dira puntu bakoitzean.) Definitu **zenbaki-fluxua lau-bektorea** izango den

$$N^\mu = n U^\mu , \quad (1.104)$$

non  $n$  partikulen atseden-markoan neurtutako zenbaki-dentsitatea den. Orduan,  $N^0$  partikulen zenbaki-dentsitatea da beste edozein fotogramatan neurtuta, eta  $N^i$  partikulen



fluxua, berriz,  $x^i$  norabidean. Imajina dezagun orain partikula bakoitzak  $m$  masa bera duela. Ondoren, gainerako markoan hautsaren energia-dentsitateak ematen du

$$\rho = nm . \quad (1.105)$$

Definizioz, energia-dentsitateak hautsa guztiz zehazten du. Baina  $\rho$ -k gainerako markoan energia-dentsitatea soilik neurtzen du; zer gertatzen da beste koadroekin?  $n$  eta  $m$  biak lau-bektoreen 0 osagaiak direla ohartzen gara atsedeen-markoan; zehazki,  $N^\mu = (n, 0, 0, 0)$  eta  $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ . Beraz,  $\rho \mu = 0, \nu = 0$   $p \otimes N$  tentsorearen osagaia da, bere atsedeen-markoan neurtuta. Beraz, hautsaren energia-momentuaren tentsorea definitzera eramaten gaitu:

$$T_{\text{dust}}^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = nm U^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu , \quad (1.106)$$

non  $\rho$  gainerako fotogramako energia-dentsitatea bezala definitzen den.

Hautsa menderatuta, fluido perfektu orokorrangoak ez dira askoz konplikatuagoak. Gogoratu “perfektua” “bere atsedeen-markoan isotropikoa” esan nahi dela. Honek, aldi berean,  $T^{\mu\nu}$  diagonal dela esan nahi du — ez dago momentuaren edozein osagaiaren fluxu garbirik norabide ortogonalean. Gainera, zero ez diren espazio-antzeko osagaiak guztiak berdinak izan behar dute,  $T^{11} = T^{22} = T^{33}$ . Bi zenbaki independente bakarrak, beraz,  $T^{00}$  eta  $T^{ii}$  ren bat dira; hauetako lehenengoari  $\rho$  energia-dentsitatea deitzea aukera dezakegu, eta bigarrenari  $p$  presioa. (Barkatu momentuaren letra bera dela.) Fluido perfektu baten energia-momentuaren tentsorea, beraz, forma hau hartzen du bere atsedeen-markoan:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} . \quad (1.107)$$

Noski, edozein esparrutan ona den formula bat nahiko genuke. Hautsarentzat  $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$  genuen, beraz,  $(\rho + p)U^\mu U^\nu$  asmatzen hasiko ginateke, horrek ematen duena

$$\begin{pmatrix} \rho + p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.108)$$

Nahi dugun erantzuna lortzeko, beraz, gehitu behar dugu

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} . \quad (1.109)$$

Zorionez, honek orokortze kobariante nabaria du, hau da,  $p\eta^{\mu\nu}$ . Beraz, fluido perfektu baten energia-momentuaren tentsorearen forma orokorra da

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu} . \quad (1.110)$$

Formula garrantzitsua da izar-egitura eta kosmologia bezalako aplikazioetarako.

Adibide gehiago gisa, har ditzagun elektromagnetismoaren energia-momentuaren tentsoreak eta eremu eskalarren teoria. Inongo azalpenik gabe, hauek emandakoak dira

$$T_{e+m}^{\mu\nu} = \frac{-1}{4\pi} (F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}) , \quad (1.111)$$

eta

$$T_{\text{scalar}}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} \partial_{\lambda} \phi \partial_{\sigma} \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\eta^{\lambda\sigma} \partial_{\lambda} \phi \partial_{\sigma} \phi + m^2 \phi^2) . \quad (1.112)$$

Zuk zeuk egiaztatu dezakezu, adibidez,  $T^{00}$  kasu bakoitzean energia-dentsitatea espero zenukeenaren berdina dela.

Simetrikoa izateaz gain,  $T^{\mu\nu}$ -k *kontserbatu* izatearen propietate are garrantzitsuagoa du. Testuinguru honetan, kontserbazioa “dibergentzia” desagertu dela adierazten da:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 . \quad (1.113)$$

Hau lau ekuazioko multzoa da, bat  $\nu$  balio bakoitzeko.  $\nu = 0$  ekuazioa energiaren kontserbazioari dagokio, eta  $\partial_{\mu} T^{\mu k} = 0$ -k momentuaren  $k^{\text{th}}$  osagaiaren kontserbazioa adierazten du. Ez dugu hori oro har frogatuko; materia mota horrek betetzen dituen higidura-ekuazioetatik edozein materia-iturri indibidualentzat frogatzen da. Izan ere,  $T^{\mu\nu}$  definitzeko modu bat “bolumen bakoitzeko energia-unitateak dituen  $(2,0)$  tentsorea izango litzateke, zeina kontserbatzen dena. Elektromagnetismorako energia-momentuaren tentsorearen kontserbazioa frogatu dezakezu, adibidez, hartuz. (1.111)-ren dibergentzia eta Maxwell-en ekuazioak erabilia lehen aipatu bezala.

Azken alde batera utzita: lehen aipatu dugu erlatibitate orokorrean grabitateak ez duela “indar gisa zenbatzen. Erlazionatutako puntu gisa, eremu grabitatorioak ere ez du energia-momentuaren tentsorerik. Izan ere, oso zaila da eremu grabitatorio baten energiaren tokiko adierazpen zentzuzko bat asmatzea; iradokizun batzuk egin dira, baina guztiek dituzte bere eragozpenak. Erantzun “zuzena” ez dagoen arren, gai garrantzitsua da itxuraz zentzuzkoak diren galderak egitearen ikuspuntutik, esate baterako, “Zein da grabitazio-erradiazioen ondorioz pulsar bitar batek segundoko igortzen duen energia?”

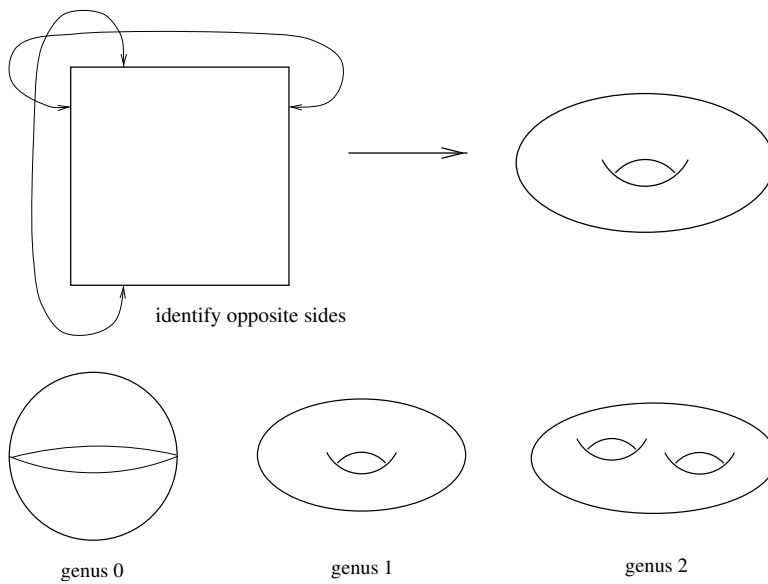
## Capítulo 2

# Kolektiboak

Erlatibitate berezia asmatu ondoren, Einstein hainbat urtez saiatu zen grabitatearen Lorentz-inbariantearen teoria bat asmatzen, arrakastarik gabe. Bere azken aurrerapena Minkowskiren espazio-denbora espazio-denbora kurbatu batekin ordezkatzeari izan zen, non kurbadura energia eta momentuaren bidez sortu zen (eta atzera erreakzionatu zuen). Hau nola gertatzen den aztertu aurretik, espazio kurbatuen matematikari buruz pixka bat ikasi behar dugu. Lehenik eta behin, orokorrean askotarikoei begiratuko diegu, eta hurrengo atalean kurbadura aztertuko dugu. Orokorrean  $n$  dimentsioetan lan egingo dugu normalean, nahiz eta nahi izanez gero  $n = 4$  hartzeko baimena daukazu.

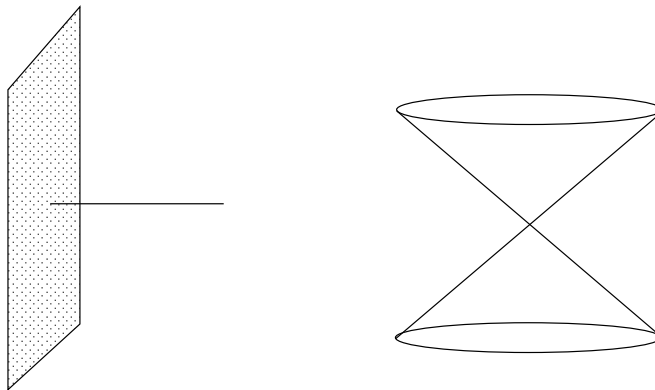
Anizkuna (edo, batzuetan, “multiple desberdina”) matematika eta fisikako oinarritzko kontzeptuetako bat da. Denok ezagutzen ditugu  $n$ -dimentsioko espazio euklidearren,  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$ -tuplaren  $(x^1, \dots, x^n)$  multzoa. Aniztasun-nozioak kurbatua izan daitekeen eta topologia konplikatua izan dezakeen espazioaren ideia jasotzen du, baina tokiko eskualdeetan  $\mathbb{R}^n$  itxura du. (Hemen “itxura” hitzarekin ez dugu esan nahi metrika berdina denik, multzo irekiak, funtzioak eta koordenatuak bezalako analisiaren oinarritzko nozioak baizik). Kolektibo osoa tokiko eskualde hauek leunki josiz eraikitzen da. Anizkunen adibideak honako hauek dira:

- $\mathbb{R}^n$  bera, lerroa ( $\mathbb{R}$ ), plano ( $\mathbb{R}^2$ ) eta abar barne. Hau begi-bistakoa izan beharko litzateke,  $\mathbb{R}^n$ -k  $\mathbb{R}^n$ -ren itxura duelako, lokalean ez ezik, mundu osoan ere.
- $n$ -esfera,  $S^n$ . Hau  $\mathbb{R}^{n+1}$  jatorritik distantzia finko batera dagoen puntu guztien toki gisa defini daiteke. Zirkulua  $S^1$  da, noski, eta bi esfera  $S^2$  gure aniztasun-adibiderik gogokoenetako bat izango da.
- $n$ -toroa  $T^n$   $n$  dimentsioko kubo bat hartu eta kontrako aldeak identifikatzen ditu. Beraz,  $T^2$  erroskil baten gainazal tradizionala da.
- $g$  generoko Riemann gainazal bat, funtsean,  $g$  zulodun bi toro bat da, bakarra izan beharrean.  $S^2$  zero generoko Riemann gainazaltzat har daiteke. Hitzek zer esan nahi duten dakizuenontzat, “mugarik gabeko orientagarri trinkoa” bi dimentsioko anizkera oro genero batzuen Riemann azalera bat da.



- Era abstraktuagoan,  $\mathbb{R}^n$ -ko biraketak bezalako eraldaketa jarraituen multzo batek anizkuna osatzen du. Gezur-taldeak talde-egitura bat duten anizkunak dira.
- Bi anizkunen produktu zuzena anizkuna da. Hau da,  $M$  eta  $M'$   $n$  eta  $n'$  dimentsioko  $M$  eta  $M'$  anizkunak emanda,  $M \times M'$  aldagai bat eraiki dezakegu,  $n + n'$  dimentsiokoa,  $(p, p')$  bikote ordenatuez osatua  $p \in M$  eta  $p' \in M'$  guztietarako.

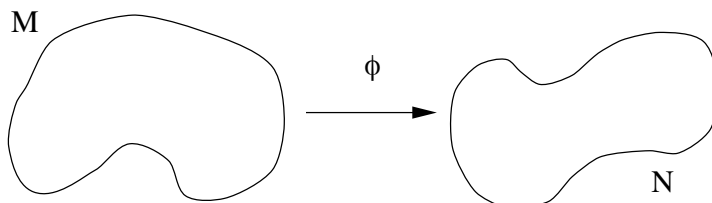
Adibide hauekin guztiekin, aniztasun-nozioak hutsunea dirudi; zer ez da askotari-ko bat? Anitzak ez diren gauza asko daude, nonbait ez baitute lokalean  $\mathbb{R}^n$  itxurarik. Adibideen artean, bi dimentsioko plano batera doan dimentsio bakarreko lerroa eta er-pinetan itsatsita dauden bi kono daude. (Kono bakarra ondo dago; imajina dezakezu erpina leuntzen.)



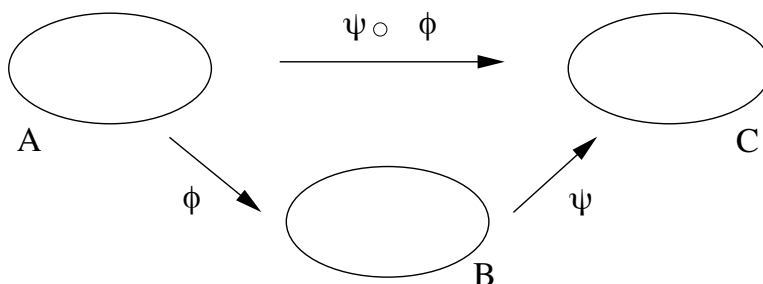
Idea single honen definizio zorrotzera hurbilduko gara orain, zeinak aurretiazko de-finizio batzuk eskatzen dituen. Horietako asko nahiko argiak dira hala ere, baina oso

polita da.

Noziorik oinarritzkoena bi multzoren arteko **maparena** da. (Suposatzen dugu multzo bat zer den badakizula.)  $M$  eta  $N$  bi multzo emanda,  $\phi : M \rightarrow N$  mapa bat  $M$  elementu bakoitzari  $N$  elementu bat zehazki esleitzen dion erlazio bat da. Mapa bat, beraz, funtzio baten orokortze soil bat besterik ez da. Mapa baten irudi kanonikoak honelako itxura du:



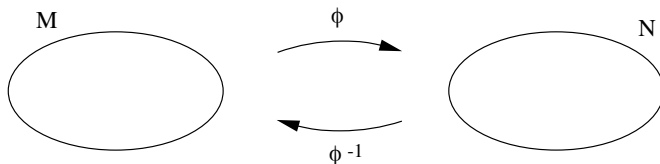
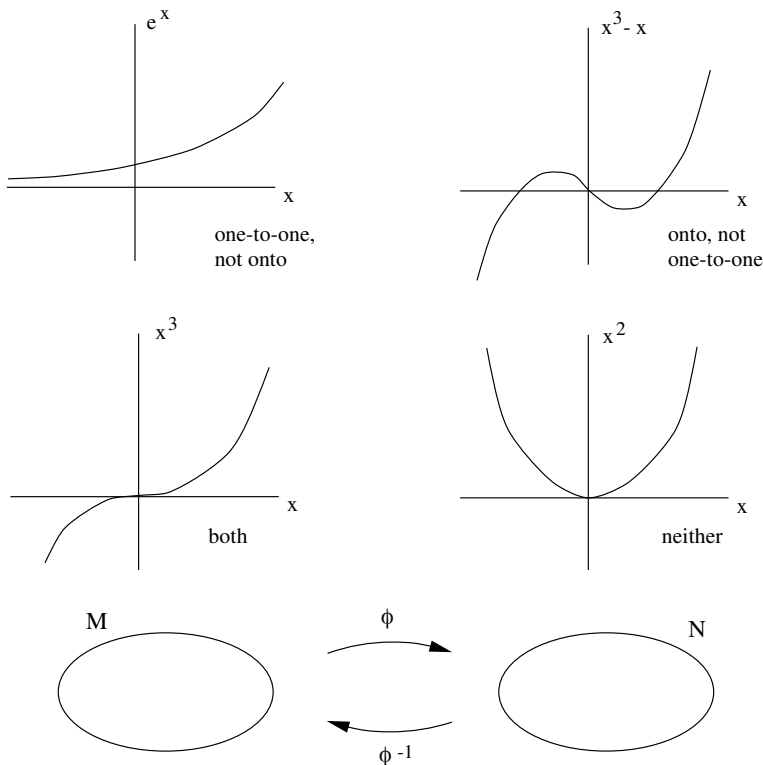
$\phi : A \rightarrow B$  eta  $\psi : B \rightarrow C$  bi mapa emanda, **konposizioa**  $\psi \circ \phi : A \rightarrow C$  ( $(\psi \circ \phi)(a) = \psi(\phi(a))$ ) eragiketaren bidez definitzen dugu. Beraz,  $a \in A$ ,  $\phi(a) \in B$  eta, beraz,  $(\psi \circ \phi)(a) \in C$ . Mapak idazten diren ordenak zentzua du, eskuinekoak lehenik jarduten baitu. Irudietan:



$\phi$  mapa bati **bat-batekoa** (edo “injektiboa”) deitzen zaio  $N$  elementu bakoitzak gehienez  $M$  elementu bat badu mapan, eta **onto** (edo “surjektiboa”)  $N$  elementu bakoitzak  $M$  elementu bat gutxienez mapatuta badu. (Horretan pentsatzen baduzu, “bat-batera” izen hobe bat “bi-bi” litzateke.) Demagun  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funtzio bat. Orduan  $\phi(x) = e^x$  bat-batekoa da, baina ez gainean;  $\phi(x) = x^3 - x$  gainean dago, baina ez bat-batekoa;  $\phi(x) = x^3$  biak da; eta  $\phi(x) = x^2$  ez da bata ez bestea.

$M$  multzoari  $\phi$  mapako **domeinua** deritzo, eta  $M$  mapan jartzen den  $N$  puntuen multzoari  $\phi$ ren **irudia** deitzen zaio.  $U \subset N$  azpimultzo batzuetarako,  $U$ -rekin mapatzen diren  $M$  elementuen multzoari  $U$   $\phi$  azpian edo  $\phi^{-1}(U)$  **aurreirudia** deitzen zaio. **alderantzizkoa** (edo “bijektiboa”) izenez ezagutzen den mapa bat-batekoa eta baterakoa dena. Kasu honetan **alderantzizko mapa**  $\phi^{-1} : N \rightarrow M$  ( $(\phi^{-1} \circ \phi)(a) = a$  bidez defini dezakegu. (Kontuan izan  $\phi^{-1}$  ikur bera erabiltzen dela bai aurreirudirako bai alderantzizko maparako, nahiz eta lehena beti definitu den eta bigarrena kasu berezi batzuetan soilik definitzen den.) Horrela:

Espazio topologikoen (eta, beraz, anizkuntzen) arteko mapa baten **jarraitutasuna** nozioa benetan oso sotila da, eta horren formulazio zehatza ez dugu benetan beharko.



Hala ere, euklidear espazioen arteko mapen  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  jarraitutasun eta desberdinarritasunaren nozio intuitiboak erabilgarriak dira.

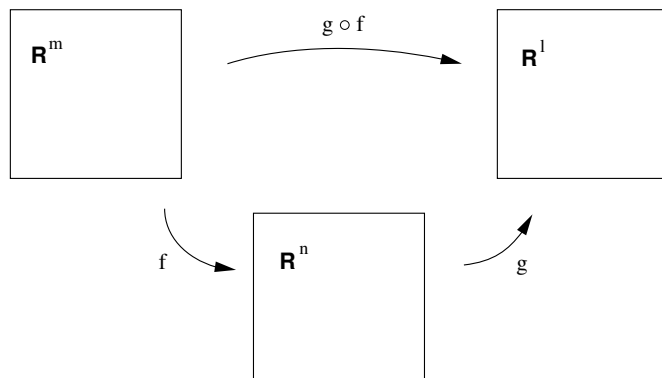
$$\begin{aligned}
 y^1 &= \phi^1(x^1, x^2, \dots, x^m) \\
 y^2 &= \phi^2(x^1, x^2, \dots, x^m) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 y^n &= \phi^n(x^1, x^2, \dots, x^m) .
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Funtzio hauetako edozein  $C^p$  gisa aipatuko dugu jarraitua eta  $p$  aldiz deribagarria bada, eta  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  mapa osoa  $C^p$  gisa aipatuko dugu bere osagai-funtzio bakoitza gutxienez  $C^p$  bada. Beraz,  $C^0$  mapa jarraitua da baina ez derrigorrez deribagarria, eta  $C^\infty$  mapa etengabea da eta nahi adina aldiz bereiz daiteke.  $C^\infty$  mapei **leuna** deitzen zaie batzuetan.  $M$  eta  $N$  **difeomorfitiko** bi multzo deituko ditugu  $C^\infty$  mapa  $\phi : M \rightarrow N$   $C^\infty$  alderantzizko  $\phi^{-1} : N \rightarrow M$  duen; orduan  $\phi$  mapari difeomorfismoa deitzen zaio.

Alde batera utzita: bi espazio difeomorfoak izatearen nozioa anizkuntzetarako soilik aplikatzen da, non ezberdingarritasunaren nozioa heredatzen den espazioa lokalean  $\mathbb{R}^n$  antza duelako. Baina espazio topologikoen (ez derrigorrez anizkunak) arteko mapen “jarraitasuna” defini daiteke, eta honelako bi espazio “homeomorfoak” direla esaten dugu, hau da, “topologikoki baliokidea” esan nahi du, mapa jarraitua badago. haien artean alderantzizko jarraituarekin. Beraz, pentsa daiteke homeomorfoak baina difeomorfoak

ez diren espazioak existitzea; topologikoki berdina baina “egitura ezberdindugarriak” ezberdinekin. 1964an Milnorrek erakutsi zuen  $S^7$ -k 28 egitura desberdindugarri zituela;  $n < 7$ -n  $S^n$ -n egitura deribagarri bakarra dagoela ematen du, eta  $n > 7$ -n, berriz, kopurua oso handia hazten da.  $\mathbb{R}^4$ -k egitura deribagarri asko ditu.

Gero beharko dugun kalkulu konbentzionaleko zati bat **katearen araua** da. Imajina dezagun  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eta  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  mapak ditugula, eta beraz,  $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  konposizioa.



Espazio bakoitza koordenatuen arabera irudika dezakegu:  $x^a \mathbb{R}^m$ -n,  $y^b \mathbb{R}^n$ -n eta  $z^c \mathbb{R}^l$ -n, non indizeak balio egokien gainetik dauden. Katearen arauak konposizioaren deribatu partzialak mapa indibidualen deribatu partzialekin erlazionatzen ditu:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} (g \circ f)^c = \sum_b \frac{\partial f^b}{\partial x^a} \frac{\partial g^c}{\partial y^b}. \quad (2.2)$$

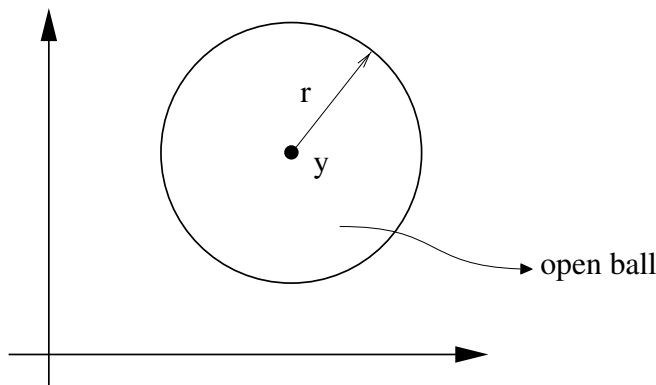
Hau da normalean laburtua

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \sum_b \frac{\partial y^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^b}. \quad (2.3)$$

Ez dago ezer legez kanpoko edo inmoralik kate-arau hau erabiltzean, baina eraikuntzaren azpian dauden mapak ikusteko gai izan beharko zenuke. Gogoratu  $m = n$  matrizearen determinanteari  $\partial y^b / \partial x^a$  mapako **jakobiarra** deitzen zaionean, eta mapa alderantzigarria dela jakobiarra nulua ez den bakoitzean.

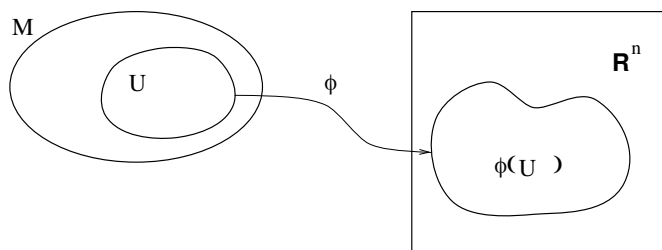
Oinarrizko definizio hauek ezagunak izan zitzaizkizun ustez, nahiz eta lausoki gogoratu. Orain anizkunaren definizio zorrotzean erabiliko ditugu. Zorritzarrez, nozio intuitibo samar hori formalizatzeko prozedura barroko samarra behar da. Lehenengo multzo irekiaren nozioa definitu beharko dugu, zeinaren gainean koordenatu-sistemak jar ditzakegun, eta ondoren multzo irekiak modu egokian josi.

Hasi **bola irekia** noziotik, hau da,  $x \in \mathbb{R}^n$  puntu guztien multzoa den  $|x - y| < r$   $y \in \mathbb{R}^n$  eta  $r \in \mathbb{R}$  finko batzuentzat, non  $|x - y| = [\sum_i (x^i - y^i)^2]^{1/2}$ . Kontuan izan desberdintasun zorrotza dela — bola irekia  $n$   $r$  erradioko  $r$  esfera baten barnealdea da.  $\mathbb{R}^n$ -n **multzo irekia** bola irekien batasun arbitrario (agian infinitua) batetik eraikitako multzoa da. Beste era batera esanda,  $V \subset \mathbb{R}^n$  irekita dago,  $y \in V$  edozeinentzat  $y$ -n erdiratuta dagoen bola ireki bat badago,  $V$  barruan erabat dagoena. Gutxi gorabehera,



multzo ireki bat  $(n - 1)$  dimentsioko gainazal itxi baten barnealdea da (edo barnealde batzuen batasuna). Multzo irekien nozio bat definituz,  $\mathbb{R}^n$  topologia batekin hornitu dugu — kasu honetan, “topologia metriko estandarra”.

**diagrama** edo **koordinatu-sistema**  $M$  multzo baten  $U$  azpimultzo batez osatuta dago,  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  bakarreko mapa batekin batera,  $\phi(U)$  irudia irekita egon dadin.  $\mathbb{R}$ . (Edozein mapa bere irudian dago, beraz  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  mapa alderantzizkoa da.) Orduan,  $U$   $M$ -n multzo ireki bat dela esan dezakegu. (Horrela, topologia bat induzitu dugu  $M$ -n, hau aztertuko ez dugun arren.)



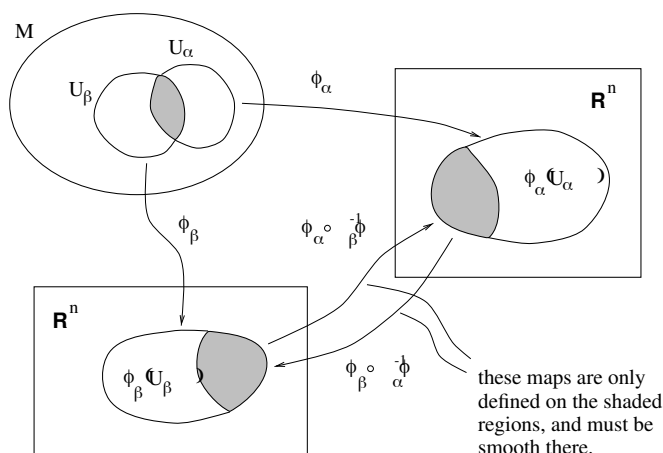
$C^\infty$  **atlas**  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  diagramen bilduma indexatu bat da, bi baldintza betetzen dituen:

1.  $U_\alpha$ -ren batasuna  $M$ -ren berdina da; hau da,  $U_\alpha$  estalkia  $M$ .
2. Taulak leunki josi dira. Zehatzago esanda, bi diagrama gainjartzen badira,  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})$  mapak  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  onto  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  puntuak hartzen ditu, eta mapa hauek guztiak  $C^\infty$  definitu diren tokian egon behar dute. Irudietan argiagoa izan beharko litzateke:

Beraz, diagrama bat da normalean multzo ireki batzuetan koordinatu-sistema gisa pentsatzen duguna, eta atlasa beren gainjartzeetan leunki erlazionatuta dauden diagramen sistema bat da.

Azkenean, beraz:  $C^\infty$   $n$ -dimentsioko **anizkuntza** (edo  $n$ -multzoa laburbilduz)  $M$  multzo bat besterik ez da “atlas maximoarekin”, eta horrek dituen grafiko bateragarri posible guztiak. (Goiko definizio guztietan  $C^\infty$  ordez  $C^p$ -rekin ere ordez dezakegu. Gure



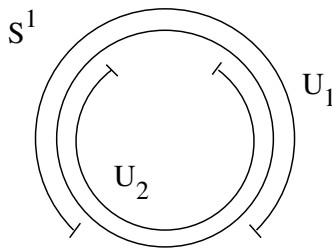


helburuetarako aniztasun baten diferentziagarritasun-maila ez da erabakigarria; beti hartuko dugu kontuan edozein anizkera kontuan hartzen dugun aplikaziorako beharrezkoa bezain diferentziagarria dela.) Atlasa maximoa izateko eskakizuna da atlas ezberdinez hornitutako bi espazio baliokide ez daitezen aniztasun ezberdin gisa kontabiliza. Definizio honek termino formaletan jasotzen du lokalean  $\mathbb{R}^n$  itxura duen multzo baten nozioa. Jakina, oso gutxitan erabili beharko dugu definizioaren ahalmen osoa, baina zehaztasuna da bere saria.

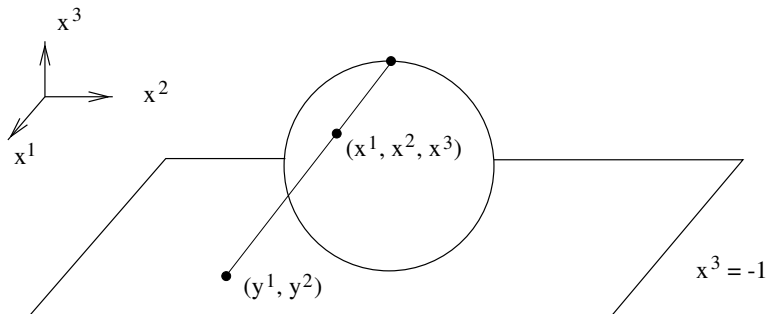
Gure definizioari buruz polita den gauza bat da ez duela dimentsio handiko euklidear espazio batean anizkunaren txertatze batean oinarritzen. Izan ere, edozein  $n$  dimentsioko aldaera  $\mathbb{R}^{2n}$  txerta daiteke (“Whitney-ren txertatze-teorema”), eta batzuetan gertakari hori erabiliko dugu (esaterako, goiko esferaren definizioan). Baina garrantzitsua da aitor-tzea anizkunak edozein txertatzetik independente den existentzia indibiduala duela. Ez dugu arrazoirik sinesteko, adibidez, lau dimentsioko espazio-denbora espazio handiago batean itsatsita dagoela. (Egia esan, hainbat pertsonak, soken teorikoek eta abar, us-te dute gure lau dimentsioko mundua hamar edo hamaika dimentsioko espazio-denbora baten parte dela, baina GRari dagokionez 4 dimentsioko ikuspegia guztiz egokia da).

Zergatik izan zen beharrezkoa diagramen eta haien gainjartzeen inguruan hain zorrotza izatea, grafiko bakarrarekin aniztasun guztiak estaltzea baino? Multiplid gehienak ezin direlako taula bakarrarekin estali. Demagun adibiderik errazena,  $S^1$ . Ohiko koordinatu-sistema bat dago,  $\theta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , non  $\theta = 0$  zirkuluaren goialdean eta  $2\pi$ -ra biltzen duen. Hala ere, diagrama baten definizioan  $\theta(S^1)$  irudia  $\mathbb{R}$ n irekita egotea eskatu dugu.  $\theta = 0$  edo  $\theta = 2\pi$  sartzen baditugu, tarte itxia dugu irekia baino; bi puntuak baztertzen baditugu, ez dugu zirkulu osoa estali. Beraz, gutxienez bi taula behar ditugu, erakusten den bezala.

Adibide apur bat korapilatsuagoa  $S^2$ -k ematen du, non berriro ere grafiko bakar batek ere ez duen multzoa estaliko. Tradizionalki munduko mapetarako erabiltzen den Mercator-eko proiektzio batek Ipar eta Hego poloak galdu ditu (baita Nazioarteko Datalerroa ere,  $\theta$ -rekin  $S^1$ -rako aurkitu dugun arazo bera dakar). Har dezagun  $S^2$   $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ -k definitutako  $\mathbb{R}^3$  puntuen multzoa dela. Diagrama bat eraiki dezakegu  $U_1$  multzo ireki batetik, esfera ken ipar poloa bezala definituta, “proiektzio estereografi-



koa” bidez:



Horrela, zuzen bat marraztuko dugu ipar polotik  $x^3 = -1$ -k definitutako planora, eta zuzenak atzematen duen  $S^2$  puntuari planoko dagokion puntuaren  $(y^1, y^2)$  koordenatu cartesiarrak esleitzen dizkiogu. Esplizituki, mapak emandakoa da

$$\phi_1(x^1, x^2, x^3) \equiv (y^1, y^2) = \left( \frac{2x^1}{1-x^3}, \frac{2x^2}{1-x^3} \right). \quad (2.4)$$

Zure buruari hau egiaztatzea animatzen zaituzte.  $(U_2, \phi_2)$  beste grafiko bat hego polotik  $x^3 = +1$ -k definitutako planora proiektatuz lortzen da. Sortzen diren koordenatuek esfera ken hego poloa estaltzen dute, eta honela ematen dira

$$\phi_2(x^1, x^2, x^3) \equiv (z^1, z^2) = \left( \frac{2x^1}{1+x^3}, \frac{2x^2}{1+x^3} \right). \quad (2.5)$$

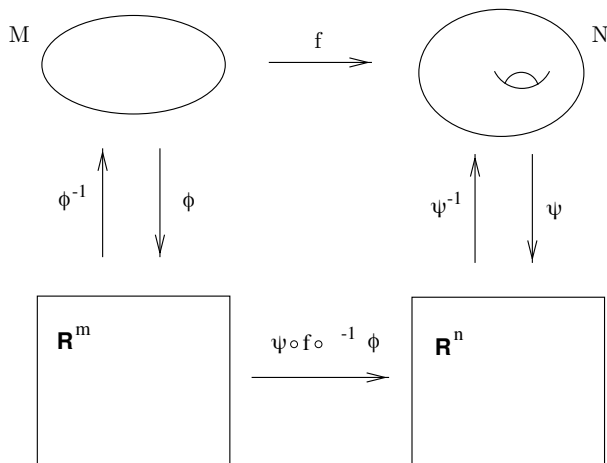
Elkarrekin, bi grafiko hauek multzo osoa hartzen dute, eta  $-1 < x^3 < +1$  eskualdean gainjartzen dira. Egiaztatu dezakezun beste gauza bat da  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  konposizioak emandakoa dela

$$z^i = \frac{4y^i}{[(y^1)^2 + (y^2)^2]}, \quad (2.6)$$

eta  $C^\infty$  da gainjartze-eskualdean. Gure arreta eskualde honetara mugatzen badugu, (2.6) normalean koordenatuen aldaketa bezala pentsatzen duguna besterik ez da.

Hortaz, diagramen eta atlasen beharra ikusten dugu: aniztasun asko ezin dira estali koordenatu-sistema bakar batekin. (Batzuek egin dezaketzen arren, topologia ez hutsala dutenek ere. Zilindroa estaltzen duen koordenatu-sistema on bat bururatzen al zaizu,  $S^1 \times \mathbb{R}$ ?) Hala ere, oso erosoena da diagrama bakarrarekin lan egitea, eta sartzen ez diren puntu-multzoaren jarraipena egitea besterik ez.

Aniztasunek lokalean  $\mathbb{R}^n$  itxura dutenek, koordenatu-diagramak eraikitzean adierazten dena, aldaerak aztertzeke aukera ematen du, bereizketa eta integrazioa bezalako eragiketak barne. Demagun  $M$  eta  $N$   $m$  eta  $n$  dimentsioetako bi multzo,  $\phi$  koordenatu-diagramak  $M$  eta  $N$ -n. Imaginatu  $f : M \rightarrow N$  funtzio bat dugula,



$M$  eta  $N$  multzo gisa pentsatuta, ezin dugu  $f$  mapa modu arduragabeaz bereizi, ez baitakigu zer esan nahi duen eragiketa horrek. Baina koordenatu-diagramek  $(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  mapa eraikitzeke aukera ematen digute. (Zertatu “mapak definitzen diren lekuan” hitzak egoki den tokian, hemen eta geroago.) Hau espazio euklidearren arteko mapa bat besterik ez da, eta kalkulu aurreratuaren kontzeptu guztiak aplikatzen dira. Adibidez,  $f$ ,  $N$  baliodun funtzio gisa pentsatuta  $M$ -n, desberdindu daiteke  $\partial f / \partial x^\mu$  lortzeko, non  $x^\mu$   $\mathbb{R}^m$  adierazten duen. Kontua da notazio hori lasterbide bat dela, eta benetan gertatzen ari dena

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x^\mu). \quad (2.7)$$

Asko handiegia litzateke (pedantea ez aipatzearren) koordenatuen mapak esplizituki idaztea kasu guztietan. Ezkerreko aldean idazkera laburra nahikoa izango da helburu gehienetarako.

Oinarri hau eraikita, hainbat egitura-mota sartzeari ekin genezake orain anizkuntan. Bektoreekin eta espazio tangenteekin hasiko gara. Erlatibitate bereziari buruzko eztabaidan nahita lausoak izan ginen bektoreen definizioaz eta espazio-denborarekin duten erlazioaz. Azpimarratu zen puntu bat espazio tangentearen nozioa izan zen — espazio-denborako puntu bakarreko bektore guztien multzoa. Azpimarratzeko arrazoia zure burutik kentzea zen bektore bat anizkuntako puntu batetik bestera luzatzen den ideia, baina puntu bakar batekin lotutako objektu bat besterik ez dela. Ikuspegi hau hartzean aldi baterako galtzen dena “ $x$  noranzkoan dauden puntu bektorialak” bezalako adierazpenei zentzua emateko modu bat da — espazio ukitzailea puntu bakoitzari lotutako espazio bektorial abstraktua besterik ez bada, zaila da. honek zer esan nahi duen jakiteko. Orain arazoa konpontzeko garaia da.

Demagun espazio ukitzailea  $p$  puntu batean eraiki nahi dugula  $M$  sorta batean,  $M$ ren berezkoak diren gauzak soilik erabiliz (dimentsio handiko espazioetan txertatzerik ez, etab.). Lehen asmakizun bat gure ezagutza intuitiboa erabiltzea izan liteke “kurbekiko bektore ukitzaileak” izeneko objektuak badirela espazio ukitzailean. Beraz,  $p$ -ren bidez parametrizatutako kurba guztien multzoa kontsidera genezake — hau da,  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  mapa guztien (ez endekaturik) espazioa  $p$   $\gamma$ -ren irudian dagoela. Tentazioa da espazio ukitzailea  $p$  puntuan dauden kurba hauen bektore ukitzaile guztien espazio gisa definitzea. Baina hau iruzurra da, jakina;  $T_p$  espazio ukitzailea  $p$ -ko bektoreen espazioa dela suposatzen da, eta hori definitu baino lehen ez dugu “kurba baten bektore ukitzailea” esan nahi duenaren nozio independenterik. Zenbait koordenatu-sisteman  $x^\mu$   $p$  bidezko edozein kurbak  $\mathbb{R}^n$  elementu bat definitzen du  $n$  zenbaki errealak  $dx^\mu/d\lambda$  (non  $\lambda$  kurbaren parametroa den), baina mapa hau argi dago koordenatua -menpekoa, ez da nahi duguna.

Dena den, bide onetik goaz, gauzak koordenatuetatik independente egin behar ditugu. Horretarako  $\mathcal{F}$   $M$ -ko funtzio leun guztien espazioa dela definitzen dugu (hau da,  $C^\infty f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mapak). Orduan ohartuko gara  $p$  bidezko kurba bakoitzak operadore bat definitzen duela espazio honetan, norabide deribatua,  $f \rightarrow df/d\lambda$  ( $p$ -n) mapatzen duena. Ondoko aldarrikapena egingo dugu:  $T_p$  espazio ukitzailea  $p$  bidezko kurbetan zehar norabide-operadore deribatuen espazioarekin identifika daiteke. Ideia hau ezartzeko bi gauza frogatu behar ditugu: lehenik, norabide-deribatuen espazioa espazio bektoriala dela eta, bigarrenik, nahi dugun espazio bektoriala dela ( $M$ -ren dimentsio berdina du, ideia naturala ematen du). norabide jakin batera seinalatzen duen bektorea, eta abar).

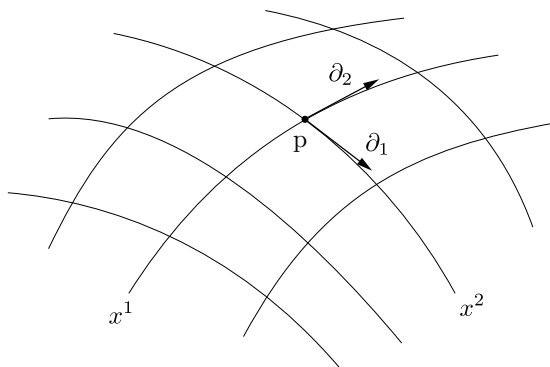
Lehenengo erreklamazioa, norabide-deribatuek espazio bektoriala osatzen dutela, nahikoa zuzena dirudi. Imajinatu  $\frac{d}{d\lambda}$  eta  $\frac{d}{d\eta}$   $\frac{d}{d\lambda}$  eta  $\frac{d}{d\eta}$  deribatuak  $p$  arteko bi kurbatan zehar deribatuak adierazten dituzten bi operadore. Ez dago arazorik hauek gehitzeko eta zenbaki errealen bidez eskalatzeko,  $a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\eta}$  operadore berria lortzeko. Ez da berehala nabaritzen, ordea, espazioa ixten dela; ie, ondoriozko operadorea bera operadore deribatua dela. Operadore deribatu on bat funtzioetan linealki jokatzeko duena da, eta funtzioen produktuei buruzko Leibniz (produktu) arau konbentzionala betetzen duena da. Gure operadore berria argi eta garbi lineala da, beraz Leibnizen araua betetzen duela egiaztatu behar dugu. Daukagu

$$\begin{aligned} \left(a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\eta}\right)(fg) &= af\frac{dg}{d\lambda} + ag\frac{df}{d\lambda} + bf\frac{dg}{d\eta} + bg\frac{df}{d\eta} \\ &= \left(a\frac{df}{d\lambda} + b\frac{df}{d\eta}\right)g + \left(a\frac{dg}{d\lambda} + b\frac{dg}{d\eta}\right)f. \end{aligned} \quad (2.8)$$

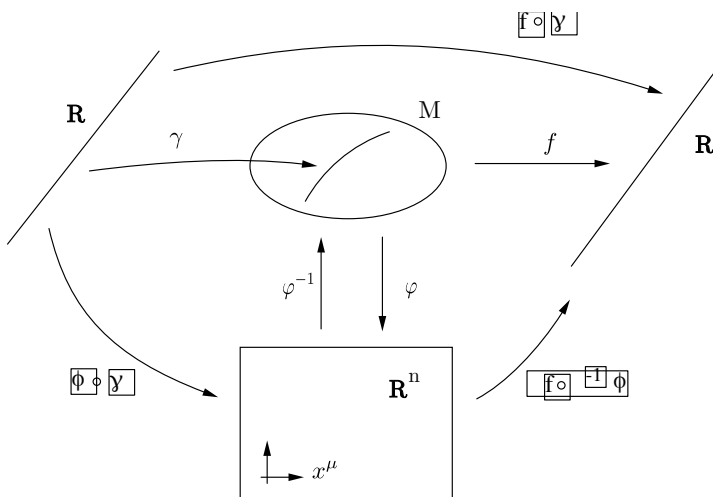
Espero genuen bezala, produktua araua betetzen da, eta norabide-deribatuen multzoa, beraz, espazio bektoriala da.

Espazio bektoriala al da espazio tangentearekin identifikatu nahiko genukeena? Konbentzitzeko modurik errazena espazioari oinarri bat aurkitzea da. Demagun berriro  $x^\mu$  koordenatu-diagrama bat. Orduan,  $n$  norabide-deribatuen multzo agerikoa dago  $p$ -n, hots,  $\partial_\mu$  deribatu partzialak  $p$ -n.

Orain aldarrikatuko dugu  $\{\partial_\mu\}$  operadore deribatu partzialek  $p$ -n  $T_p$  espazio tangentearen oinarria osatzen dutela. (Berehala ondorioztatzen da  $T_p$   $n$ -dimentsioa dela, hori



oinarrizko bektore kopurua baita.) Hori ikusteko edozein norabide-deribatu deribatu partzialen zenbaki errealeen batura batean deskonposa daitekeela erakutsiko dugu. Izan ere, bektore tangente baten osagaien adierazpen ezaguna besterik ez da, baina polita da makineria handien ikuspegitik ikustea. Demagun  $n$ -multzo  $M$ ,  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  koordenatu-diagrama,  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  kurba eta  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  funtzio bat. Honek mapa nahasketa hau dakar:



$\lambda$   $\gamma$  parametroa bada,  $\frac{d}{d\lambda}$  bektore/eragilea  $\partial_\mu$  partzialen arabera zabaldu nahi dugu. (2.2) kate-araua erabiliz, dugu

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} f &= \frac{d}{d\lambda} (f \circ \gamma) \\
 &= \frac{d}{d\lambda} [(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)] \\
 &= \frac{d(\phi \circ \gamma)^\mu}{d\lambda} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu} \\
 &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f .
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Lehenengo lerroak ezkerreko aldean dagoen adierazpen informala besterik ez du hartzen

eta  $(f \circ \gamma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funtzioaren deribatu zintzo gisa berridazten du. Bigarren lerroa  $\phi^{-1}$  alderantzizko maparen definiziotik dator (eta konposizio-eragiketaren asoziatibotasuna). Hirugarren lerroa kate formalaren araua da (2.2), eta azken lerroa hasierako notazio informalera itzultzea da.  $f$  funtzioa arbitrarioa zenez, dugu

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu . \quad (2.10)$$

Beraz,  $\{\partial_\mu\}$  partzialek oinarri ona adierazten dute norabide-deribatuen espazio bektorialerako, eta, beraz, espazio tangentearekin segurtasunez identifikatu dezakegu.

Noski,  $\frac{d}{d\lambda}$ -k adierazten duen bektorea jada ezagutzen duguna da;  $\lambda$  parametroa duen kurbaren bektore ukitzalea da. Beraz (2.10) (1.24) berrezarpen gisa pentsa daiteke, non bektore tangentearen osagaiak  $dx^\mu/d\lambda$  besterik ez zirela esaten genuen. Desberdintasun bakarra da aniztasun arbitrario batean lan egiten ari garela, eta gure oinarritzko bektoreak  $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$  direla zehaztu dugu.

Oinarri jakin hau ( $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$ )  $T_p$ -ren **koordinatu-oinarria** bezala ezagutzen da; oinarri-bektoreak koordinatu-ardatzetan zehar apuntatzeko nozioaren formalizazioa da. Ez dago arrazoirik oinarri koordinatuetara mugatzeko bektore ukitzaleak kontuan hartzen ditugunean; batzuetan erosoagoa da, adibidez, nolabaiteko oinarri ortonormalak erabiltzea. Hala ere, koordinatuen oinarria oso sinplea eta naturala da, eta ia eksklusiboki erabiliko dugu kurtsoan zehar.

Bektoreekiko hartu dugun ikuspuntu abstraktu samarraren abantailetakoa bat eraldaketa legea berehalakoa dela da. Oinarri-bektoreak  $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$  direnez,  $x^{\mu'}$  koordinatu-sistema berri bateko oinarri-bektoreak (2.3) kate-arauaren bidez ematen dira.

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu . \quad (2.11)$$

Osagai bektorialen transformazio-legea espazio lauan erabiltzen den teknika beraren bidez lor dezakegu,  $V = V^\mu \partial_\mu$  bektorea oinarri-aldaketaren ondorioz aldatu gabe egon dadin eskatuz. Daukagu

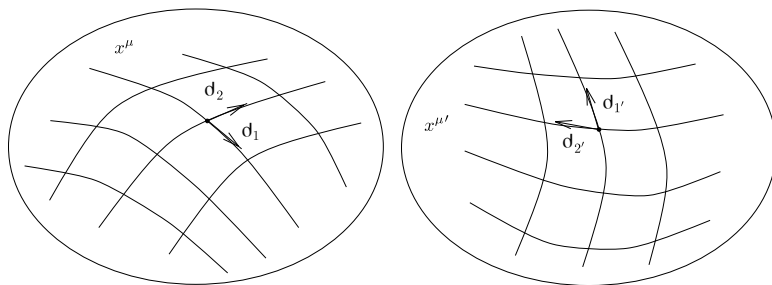
$$\begin{aligned} V^\mu \partial_\mu &= V^{\mu'} \partial_{\mu'} \\ &= V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu , \end{aligned} \quad (2.12)$$

eta beraz  $(\partial x^{\mu'}/\partial x^\mu)$  matrizea  $\partial x^\mu/\partial x^{\mu'}$  matrizearen alderantzizkoa denez),

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu . \quad (2.13)$$

Oinarri-bektoreak normalean esplizituki idazten ez direnez, osagaiak eraldatzeko (2.13) araua “eraldaketa bektorialaren legea” deitzen duguna da. Konturatuko gara erlatibitate bereziko osagai bektorialen eraldaketarekin bateragarria dela Lorentz-en transformazioetan.  $V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\mu V^\mu$ , Lorentz-en transformazioa koordinatu-eraldaketa mota berezi bat denez,  $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\mu x^\mu$ -rekin. Baina (2.13) askoz orokorragoa da, koordinatuen (eta, beraz, oinarrien) aldaketa arbitrarioen pean bektoreen portaera biltzen baitu, ez transformazio

linealen soilik. Ohi bezala, bereizketa ontologiko sotil samarra azpimarratzen saiatzen ari gara — osagai tentsorialak ez dira aldatzen koordenatuak aldatzen ditugunean, ukitzai-lea espazioan oinarria aldatzen dugunean aldatzen dira, baina koordenatuak erabiltzea erabaki dugu gure oinarria definitzeko. . Beraz, koordenatuen aldaketak oinarri aldaketa eragiten du:



Bektoreen mundua arakatu ondoren, espazio lauan eman genituen pausoak itzultzen jarraitzen dugu, eta orain bektore bikoitzak (forma bakarrekoak) kontuan hartzen ditugu. Berriro ere  $T_p^*$  espazio kotangentea  $\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R}$  mapa linealen multzoa da. Forma bakarreko adibide kanonikoa  $f$  funtzio baten gradientea da,  $df$  adierazten duena.  $\frac{d}{d\lambda}$  bektore baten gainean duen ekintza funtzioaren norabide deribatua da:

$$df \left( \frac{d}{d\lambda} \right) = \frac{df}{d\lambda} . \quad (2.14)$$

Pentsatzekoa da, “zergatik ez da  $f$  funtzioa bera forma bakartzat hartu behar, eta  $df/d\lambda$  bere ekintza?” Kontua da forma bakarra, bektore bat bezala, existitzen dela. puntua definituta dago, eta ez dago  $M$ -ko beste puntu batzuetako informazioaren araberrakoa. Puntu baten inguru batean funtzio bat ezagutzen baduzu bere deribatua har dezakezu, baina ez puntuan duen balioa ezagutzetik soilik; gradienteak, berriz, zehatz-mehatz kodetzen du  $p$  bidezko edozein kurba zehar norabide-deribatua hartzeko beharrezkoa den informazioa, bektore bikoitz gisa duen eginkizuna betez.

Koordenatu-ardatzetan zehar deribatu partzialek espazio tangenterako oinarri naturala ematen duten bezala,  $x^\mu$  koordenatu-funtzioen gradienteek espazio kotangenterako oinarri naturala eskaintzen dute. Gogoratu espazio lauan  $T_p^*$ -ren oinarri bat eraiki genuela  $\hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) = \delta_\nu^\mu$  hori eskatuz. Filosofia berarekin aniztasun arbitrario batean jarraituz, (2.14)-ra eramaten dugu

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu . \quad (2.15)$$

Beraz,  $\{dx^\mu\}$  gradienteak oinarri bakarreko forma multzo egokiak dira; forma bakarreko arbitrario bat osagaietan hedatzen da  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  gisa.

Oinarrizko bektore bikoitzaren eta osagaien transformazio-propietateak orain arteko ohiko prozeduratik jarraitzen dute. Lortzen dugu, oinarri bakarreko inprimakietarako,

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu , \quad (2.16)$$

eta osagaietarako,

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu . \quad (2.17)$$

Normalean  $\omega_\mu$  osagaiak idatziko ditugu forma bakarreko  $\omega$  bati buruz hitz egiten dugunean.

Tentsore orokorretarako transformazio-legeak eredu bera jarraitzen du espazio lauan erabiltzen den Lorentz transformazio-matrizea koordenatu-transformazio orokorrak adierazten dituen matrize batekin ordezkatzeko.  $(k, l)$   $T$  tentsorea heda daiteke

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_l} , \quad (2.18)$$

eta koordenatu-eraldaketa baten arabera osagaiak aldatzen dira

$$T^{\mu'_1 \cdots \mu'_k}_{\nu'_1 \cdots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} . \quad (2.19)$$

Tentsore-eraldaketa-lege hau erraza da gogoratzea, benetan ez baitago izan litekeen beste ezer, indizeen kokapena kontuan hartuta. Hala ere, askotan errazagoa da tentsorea eraldatzea, oinarri-bektoreen eta forma bakarreko identitatea deribatu partzial eta gradiente gisa balio nominalean hartuz eta koordenatu-eraldaketan ordezkatzuz. Adibide gisa har dezagun  $(0, 2)$  tentsore simetrikoko bat  $S$  2 dimentsioko aldagai batean, zeinaren osagaiak  $(x^1 = x, x^2 = y)$  koordenatu-sistema batean ematen dituen.

$$S_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.20)$$

Honela modu baliokidean idatz daiteke

$$\begin{aligned} S &= S_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu) \\ &= x(dx)^2 + (dy)^2 , \end{aligned} \quad (2.21)$$

non azken lerroan produktu tentsorialaren ikurrak kentzen diren laburtasunerako. Orain kontuan hartu koordenatu berriak

$$\begin{aligned} x' &= x^{1/3} \\ y' &= e^{x+y} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Honek zuzenean eramaten du

$$\begin{aligned} x &= (x')^3 \\ y &= \ln(y') - (x')^3 \\ dx &= 3(x')^2 dx' \\ dy &= \frac{1}{y'} dy' - 3(x')^2 dx' . \end{aligned} \quad (2.23)$$



Adierazpen hauek (2.21) zuzenean konektatu behar ditugu lortzeko (gogoratuta produktu tentsorialak ez direla joaten, beraz,  $dx' dy' \neq dy' dx'$ ):

$$S = 9(x')^4[1 + (x')^3](dx')^2 - 3\frac{(x')^2}{y'}(dx' dy' + dy' dx') + \frac{1}{(y')^2}(dy')^2, \quad (2.24)$$

edo

$$S_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 9(x')^4[1 + (x')^3] & -3\frac{(x')^2}{y'} \\ -3\frac{(x')^2}{y'} & \frac{1}{(y')^2} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Kontuan izan oraindik simetrikkoa dela. Ez dugu (2.19) transformazio-legea zuzenean erabili, baina hori eginez gero emaitza bera emango zen, egiaztatu dezakezun bezala.

Gehienetan espazio lauan definitu ditugun tentsore-eragiketa ezberdinak ez dira aldatu ezarpen orokorrago batean: uzkurdura, simetrizazioa, etab. Hiru salbuespen garrantzitsu daude: deribatu partzialak, metrikoa eta Levi-Civita tentsorea. Ikus dezagun lehenik deribatu partziala.

Tamalgarrria da tentsorearen deribatu partziala ez dela, oro har, tentsore berria. Gradiente, eskalar baten deribatu partziala dena,  $(0, 1)$  tentsore zintzoa da, ikusi dugunez. Baina goi mailako tentsoreen deribatu partziala ez da tentsorial,  $\partial_\mu W_\nu$  forma bakar baten deribatu partziala kontuan hartuz eta koordenatu-sistema berri batera aldatuz ikus dezakegunez:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} W_{\nu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} W_\nu \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu \right) + W_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Azken lerroko bigarren terminoa ez litzateke egongo  $\partial_\mu W_\nu$   $(0, 2)$  tentsore gisa eraldatu-ko balitz. Ikusten duzunez, transformazio-matrizearen deribatua ez delako desagertzen sortzen da, espazio lau-ko Lorentz-en transformazioetan gertatu zen bezala.

Bestalde, d kanpoko eragile deribatuak  $(0, p+1)$  tentsore antisimetrikoko osatzen du  $p$ -forma batean jarduten denean.  $p = 1$ -rako (2.26) hau ikus dezakegu; tentsiorik gabeko termino iraingarria idatz daiteke

$$W_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} = W_\nu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}. \quad (2.27)$$

Adierazpen hau simetrikkoa da  $\mu'$  eta  $\nu'$ -n, deribatu partzialak aldatzen baitira. Baina kanpoko deribatua deribatu partzial antisimetrizatu dela definitzen da, beraz, termino hau desagertu egiten da (adierazpen simetrikoko baten zati antisimetrikoko zero da). Orduan tentsore-erlidaketa lege zuzena geratzen zaigu;  $p$  arbitrarioarako luzapena erraza da. Beraz, kanpoko deribatua tentsore-operadore legitimoa da; ez da, ordea, deribatu partzialaren ordezkari egokia, formetan baino ez baita definitzen. Hurrengo atalean deribatu kobariante bat definituko dugu, deribatu partzialaren aldaera arbitrarioetara luzapena dela pentsa daitekeena.

Tentsore metrikoa hain objektu garrantzitsua da espazio kurbatuan, non ikur berri bat ematen zaio,  $g_{\mu\nu}$  ( $\eta_{\mu\nu}$  Minkowskiren metrikarako bereziki gordeta dagoen bitartean). Murrizketa gutxi daude  $g_{\mu\nu}$ -ren osagaietan,  $(0, 2)$  tentsore simetrikoa izateaz gain. Normalean ez-endekaturtat hartzen da, hau da,  $g = |g_{\mu\nu}|$  determinatzailea ez dela desagertzen. Honek  $g^{\mu\nu}$  alderantzizko metrika definitzeko aukera ematen digu

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu} . \quad (2.28)$$

$g_{\mu\nu}$ -ren simetriak  $g^{\mu\nu}$  ere simetrikoa dela esan nahi du. Erlatibitate berezian bezala, metrika eta bere alderantzizkoa erabil daitezke tentsoreen indizeak igotzeko eta jaisteko.

Zenbait aste beharko dira metrikak bere aintza osoan duen eginkizuna guztiz baloratzeko, baina inspirazio helburuetarako  $g_{\mu\nu}$ -k emango zaizkion hainbat erabilera zerrenda ditzakegu: (1) metrik “nozioa ematen du. iragana” eta “etorkizuna”; (2) metrikoak bidearen luzera eta denbora egokia kalkulatzeko aukera ematen du; (3) metrikak bi punturen arteko “distantziarik laburrena” zehazten du (eta, beraz, probako partikulen higidura); (4) metrikoak  $\phi$  newtoniar eremu grabitatorioa ordezkutzen du; (5) metrikak lokalki inertzial markoen nozioa ematen du eta, beraz, “errotaziorik gabeko” zentzua; (6) metrikoak kausalitatea zehazten du, argiaren abiadura zeina ez den seinaleak bidaiatu ezin duen baino azkarrago definituz; (7) metrikak mekanika newtondarraren hiru dimentsioko puntu produktu euklidear tradizionala ordezkutzen du; eta abar. Jakina, ideia hauek ez dira guztiz independenteak, baina tentsore honen garrantziaren berri ematen dugu.

Erlatibitate bereziko bide-luzerei buruzko eztabaidan (eskuz astinduz) lerro-elementua  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$  gisa sartu genuen, bide baten luzera lortzeko erabiltzen zena. Noski, orain  $dx^{\mu}$  benetan oinarritzko bektore bikoitza dela dakigunez, naturala da “metrikoa” eta “lerro-elementua” terminoak elkarren artean erabiltzea eta idaztea.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} . \quad (2.29)$$

(Erabat koherentea izateko “ $g$ ” bezala idatzi beharko genuke, eta batzuetan egingo du, baina askotan  $g$  erabiltzen da  $|g_{\mu\nu}|$  determinatzaileerako.) Esaterako, badakigu koordinatu kartesiarrak dituen hiru dimentsioko espazioko lerro euklidear elementua dela

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 . \quad (2.30)$$

Orain aukeratzen dugun edozein koordinatu-sistemara alda dezakegu. Adibidez, koordinatu esferikoetan dugu

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta , \end{aligned} \quad (2.31)$$

zuzenean eramaten duena

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (2.32)$$

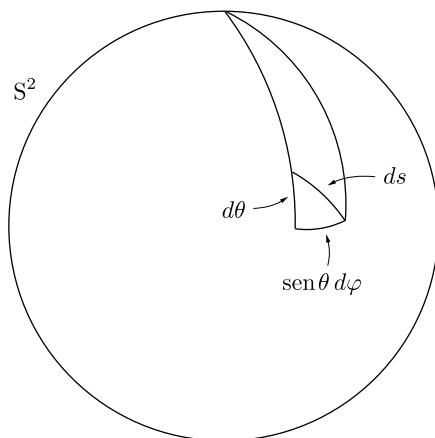
Jakina denez, metrikaren osagaiak koordenatu kartesiarren aldean desberdinak dirudite, baina espazioaren propietate guztiak aldatu gabe geratzen dira.

Beharbada une egokia da erreferentzia gehienak ez direla nahikoa hautagarriak “ $dx$ ”, desplazamendu infinitesimal baten nozio informala eta “ $dx$ ”, oinarri baten nozio zorrotza bereizteko. -Koordenatu-funtzio baten gradienteak emandako forma. Izan ere, gure “ $ds^2$ ” idazkerak ez du ezeren kanpoko deribatuari, edo ezeren karratuari, aipatzen; tentsore metrikorako ohiko laburdura besterik ez da. Bestalde, “ $(dx)^2$ ”  $(0, 2)$   $dx \otimes dx$  tentsoreari dagokio zehazki.

Kurbadura duen espazio baten adibide ona bi esfera da, jatorritik 1 distantziara dagoen  $\mathbb{R}^3$  puntuen toki gisa pentsa daitekeena.  $(\theta, \phi)$  koordenatu-sistemako metrika (2.32)  $r = 1$  eta  $dr = 0$  ezartzetik dator:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (2.33)$$

Hau guztiz koherentea da  $ds$ -ren interpretazioarekin luzera infinitesimal gisa, irudian azaltzen den bezala.



Ikusiko dugunez, tentsore metrikoak anizkunaren kurbadura deskribatzeko behar dugun informazio guztia jasotzen du (geometria riemanndarrean behintzat; benetan planteamendu orokorrak adieraziko ditugu). Minkowskiren espazioan metrikaren osagaiak konstanteak diren koordenatuak aukeratu ditzakegu; baina argi izan behar da kurbaduraren existentzia sotilagoa dela metrika koordenatuen menpe egotea baino, goiko adibidean koordenatu esferikoetan euklidear espazio lauako metrika  $r$  eta  $\theta$ -ren funtzioa nola den erakutsi baitugu. . Geroago, ikusiko dugu osagai metrikoen konstantzia nahikoa dela espazio bat laua izateko, eta, hain zuzen ere, beti dago koordenatu-sistema bat metrika konstantea den edozein espazio lautan. Baina agian ez dugu horrelako koordenatu-sistema batean lan egin nahi, eta agian ez genuke nola aurkitu ere jakingo; beraz, errepidean behera sartuko den kurbaduraren karakterizazio zehatzagoa nahi izango dugu.

Metrikaren karakterizazio erabilgarria  $g_{\mu\nu}$  bere **forma kanonikoa** jarritz lortzen da. Forma honetan osagai metrikoak bihurtzen dira

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, 0, \dots, 0) , \quad (2.34)$$

non “diag” esan nahi du emandako elementuekin matrize diagonal bat.  $n$  anizkunaren dimentsioa bada,  $s$  forma kanonikoko  $+1$ -en kopurua eta  $t - 1$ -en kopurua da, orduan  $s - t$  bf sinadura metrikaren (minus eta plus zeinuen kopuruaren aldea), eta  $s + t$  metrikaren **rank** (nuluak ez diren balio propioen kopurua) da. Metriko bat jarraitua bada, tentsore-eremu metrikoaren heina eta sinadura berdinak dira puntu guztietan, eta metrika ez-endeatua bada heina  $n$  dimentsioaren berdina da. Etengabeko metrika ez-degeneratuekin arituko gara beti. Zeinu guztiak positiboak badira ( $t = 0$ ), metrika **euklidearra** edo **riemannarra** deitzen da (edo “definitu positiboa”), berriz, minus baktarra badago ( $t = 1$ ) **Lorentzian** edo **pseudo-riemannianoa** deitzen da, eta  $+1$  eta  $-1$  batzuk dituen edozein metrika “mugagabea” deitzen da (Beraz, “Euklidear” hitza). batzuetan espazioa laua dela esan nahi du, eta beste batzuetan ez, baina beti esan nahi du forma kanonikoa guztiz positiboa dela terminologia tamalgarria baina estandarra dela; Erlatibitate orokorrean interesa duten espazio-denborak lorentzian metrika dute.

Oraindik ez dugu frogatu beti posible dela metrika forma kanonikoan jartzea. Izan ere, beti da posible  $p \in M$  punturen batean egitea, baina orokorrean puntu bakar horretan bakarrik izango da posible, ez  $p$ ren edozein auzotan. Egia esan, hau baino zertxobait hobeto egin dezakegu; gertatzen da  $p$  edozein puntutan badagoela koordenatu-sistema bat, non  $g_{\mu\nu}$  bere forma kanonikoa hartzen duen eta  $\partial_\sigma g_{\mu\nu}$  lehen deribatuak guztiak desagertzen diren (bigarren deribatuak  $\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}$  denak desagertu ezin diren bitartean). Koordenatu horiek **Riemann-en koordenatu normalak** izenez ezagutzen dira, eta erlazonatutako oinarri-bektoreek **Lorentz marko lokala** osatzen dute. Kontuan izan Riemann-en koordenatu normaletan (edo RNC-etan)  $p$ -ko metrik espazio lauaren itxura duela “lehen ordenara”. Hau da “espazio-denborako eskualde nahiko txikiak lauak diruditen ideiaeren nozio zorrotza (Minkowski) espazioa.” (Gainera, ez dago zailtasunik  $M$  puntu guztietan oinarritzko bektore multzoak eraikitzeke, hala nola metrikak bere forma kanonikoa har dezan; arazoa da, oro har, hau ez dela *bat izango. koordenatu* oinarria, eta ez da modurik izango hori bihurtzeko.)

Ez dugu adierazpen horren frogaz zehatza kontuan hartuko; Schutz-en aurki daiteke, 158-160 orr., non “lautasun lokalaren teorema” izena duen. (Lorentz-eko marko lokalei “momentuan erreferentzi-markoak” edo MCRF-ak ere deitzen die). Baliagarria da frogaren zirriborro bat ikustea, ordea, lau dimentsioko lorentzian metrika baten kasu zehatzerako. Ideia metrikaren transformazio legea kontuan hartzea da

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} , \quad (2.35)$$

eta zabaldu Taylor serieko bi aldeak  $x^{\mu'}$  bilatzen diren koordenatuetan.  $x^\mu$  koordenatu zaharren hedapenak itxura du

$$x^\mu = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right)_p x^{\mu'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'_1} \partial x^{\mu'_2}} \right)_p x^{\mu'_1} x^{\mu'_2} + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x^{\mu'_1} \partial x^{\mu'_2} \partial x^{\mu'_3}} \right)_p x^{\mu'_1} x^{\mu'_2} x^{\mu'_3} + \dots , \quad (2.36)$$

gainerako hedapenak ildo beretik jarraituz. (Soiltasunerako  $x^\mu(p) = x^{\mu'}(p) = 0$  ezarri dugu.) Orduan, idazkera oso eskematiko batzuk erabiliz, (2.35) bigarren ordenarako

hedapena da

$$\begin{aligned}
 & (g')_p + (\partial' g')_p x' + (\partial' \partial' g')_p x' x' \\
 &= \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} g \right)_p + \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} \partial' g \right)_p x' \\
 &+ \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^3 x}{\partial x' \partial x' \partial x'} g + \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} \partial' g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} \partial' \partial' g \right)_p x' x' .
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

$x'$ -n ordena berdineko terminoak ezar ditzakegu alde bakoitzean elkarren berdinak. Beraz,  $g_{\mu'\nu'}(p)$  osagaiak, guztira 10 zenbaki (bi indize simetrikoko tentsore bat deskribatzeko),  $(\partial x^\mu / \partial x^{\mu'})_p$  matrizeak zehazten ditu. Hau mugarik gabeko  $4 \times 4$  matrizea da; horrela, 16 zenbaki aukeratzen ditugu libre. Argi dago hori nahikoa askatasuna dela  $g_{\mu'\nu'}(p)$ -ren 10 zenbakiak forma kanonikoan jartzeko, askatasun-gradu nahikoa izateari dagokionez behintzat. (Izan ere, muga batzuk daude — prozedura arretaz egiten baduzu, adibidez, sinadura eta maila aldatu ezin dituzula ikusiko duzu.) Gainerako sei askatasun graduak, zehazki, Lorentz taldearen sei parametro gisa interpreta daitezke; badakigu hauek forma kanonikoa aldatu gabe uzten dutela. Lehen ordenan  $\partial_{\sigma'} g_{\mu'\nu'}(p)$  deribatuak ditugu, hamar osagairen lau deribatu, guztira 40 zenbakirentzat. Baina (2.37)ren eskuineko aldean ikusten dugu orain  $(\partial^2 x^\mu / \partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'})_p$  aukeratzeko askatasun gehigarria dugula. Zenbaki-multzo honetan  $\mu'_1$  eta  $\mu'_2$  indizeen 10 aukera independente daude (simetrikoa da, deribatu partzialak joan-etorria egiten baitute) eta  $\mu$  lau aukera daude, guztira 40 askatasun-gradu izateko. Hauxe da, hain zuzen, metrikaren lehen deribatu guztiak zehazteko behar dugun aukera, beraz zeroan ezar dezakeguna. Bigarren ordenan, ordea,  $\partial_{\rho'} \partial_{\sigma'} g_{\mu'\nu'}(p)$ -z arduratzen gara; hau simetrikoa da  $\rho'$  eta  $\sigma'$  baita  $\mu'$  eta  $\nu'$ ,  $10 \times 10 = 100$  zenbaki guztira. Aukera gehigarriak egiteko dugun gaitasuna  $(\partial^3 x^\mu / \partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'})_p$  atalean dago. Hau simetrikoa da beheko hiru indizeetan, eta horrek 20 aukera ematen ditu, goiko indizeak lau bider 80 askatasun gradu ematen dizkigu — metrikaren bigarren deribatuak zeroan ezartzeko behar baino 20 gutxiago. Beraz, egia esan, ezin ditugu bigarren deribatuak desagertu; lautasunarekiko desbideratzea, beraz, tentsore-eremu metrikoren bigarren deribatuak adierazten dituzten 20 koordenatuetatik independenteak diren askatasun-graduekin neurtu behar da. Aurrerago ikusiko dugu nola gertatzen den, Riemann tentsorea erabiliz kurbadura karakterizatzen dugunean, 20 osagai independente izango dituen.

Espazio lauaren suposizioa alde batera utzi dugunean gure tentsorearen ezagutzari egin behar diogun azken aldaketak Levi-Civita tentsorearekin du zerikusia,  $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ . Gogoratu objektu honen espazio lauко bertsioa, orain  $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  z adieraziko duguna, honela definitu zela.

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{if } \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \text{ is an even permutation of } 01 \dots (n-1) , \\ -1 & \text{if } \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \text{ is an odd permutation of } 01 \dots (n-1) , \\ 0 & \text{otherwise} . \end{cases} \tag{2.38}$$

**Levi-Civita ikurra** zehatz-mehatz  $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  hori dela definituko dugu orain — hau da,  $n$  indizeak dituen objektu bat, goian *koordinatu-sistema guztietan* zehaztutako osagaiak

dituena. Horri “sinboloa” esaten zaio, noski, ez baita tentsorea; koordinatu-erlaketan ez aldatzea definitzen da. Bere portaera tentsore arrunt batenarekin erlazioa dezakegu lehenik eta behin,  $n \times n$  matrize  $M^\mu_{\mu'}$  batzuk kontuan hartuta,  $|M|$  determinatzaileak obeditzen duela.

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_n} |M| = \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} M^{\mu_1}_{\mu'_1} M^{\mu_2}_{\mu'_2} \dots M^{\mu_n}_{\mu'_n} . \quad (2.39)$$

Hau aljebra lineal liburu batean aurki dezakezun determinantari buruzko egiazko datu bat besterik ez da. Hortik aurrera,  $M^\mu_{\mu'} = \partial x^\mu / \partial x^{\mu'}$  ezarri, dugu

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_n} = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right| \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x^{\mu'_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} . \quad (2.40)$$

Hau tentsore-erlaketaketa legetik hurbil dago, aurrean dagoen determinantea izan ezik. Modu honetan eraldatzen diren objektuei **tentsore-dentsitateak** deitzen zaie. Beste adibide bat metrikaren determinanteak ematen du,  $g = |g_{\mu\nu}|$ . Erraza da egiaztatzea ((2.35)-ren bi aldean determinantea hartuz) koordinatu-erlaketaketa baten pean lortzen dugula

$$g(x^{\mu'}) = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right|^{-2} g(x^\mu) . \quad (2.41)$$

Beraz,  $g$  ere ez da tentsore bat; Levi-Civita sinboloaren antzera eraldatzen da, jakobiarrak  $-2$  potentziara igotzen dela izan ezik. Jakobiarrak altxatzen den potentzia tentsore-dentsitatearen **pisua** bezala ezagutzen da; Levi-Civita ikurra 1 pisuaren dentsitatea da, eta  $g$ , berriz,  $-2$  pisuaren dentsitate (eskalarra).

Hala ere, tentsore-dentsitateak ez ditugu gustatzen, tentsoreak gustatzen zaizkigu. Dentsitate bat tentsore zintzo bihurtzeko modu erraz bat dago — biderkatu  $|g|^{w/2}$ , non  $w$  dentsitatearen pisua den (balio absolutuaren zeinuak hor daude  $g < 0$  Lorentz metriketarako). Emaizta transformazio tentsorialaren legearen arabera eraldatuko da. Horregatik, adibidez, Levi-Civita tentsorea honela defini dezakegu

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} . \quad (2.42)$$

Tentsore hau da Hodge dualaren definizioan erabiltzen dena, (1.87), bestela aldaezina dena aldaera arbitrarioetara orokortzen denean. Hau benetako tentsorea denez, indizeak igo ditzakegu, etab. Batzuetan, jendeak goi-indizeak dituen Levi-Civita sinboloaren bertsio bat definitzen du,  $\tilde{\epsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ , zeinaren osagaiak beheko indizeak dituen sinboloaren zenbakizko berdinak diren. Hau  $-1$  pisuaren dentsitate bat da, eta goiko indizeak dituen tentsorearekin erlazionatuta dago.

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \operatorname{sgn}(g) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} . \quad (2.43)$$

Alde batera utzita, garbi utzi eta onartu beharko genuke,  $\sqrt{|g|}$  faktorearekin ere, Levi-Civita tentsorea nolabait ez dela egiazko tentsorea, izan ere, hainbat aniztasunetan ezin baita globalki definitu. Defini daitekeen horiei **orientable** deitzen zaie, eta aldagai

orientagarriez soilik arituko gara ikastaro honetan. Multiple ez-orientagarri baten adibidea Möbius zerrenda da; ikus Schutzen *Geometrical Methods in Mathematical Physics* (edo antzeko testu bat) eztabaidarako.

Tentsore-dentsitateen azken agerpen bat anizkuntzetan integrazioan dago. Gai honi ez diogu justizia egingo, baina behin-behineko begirada bat beharrezkoa da behintzat. Ziurrenik,  $\mathbb{R}^n$ -ko kalkulu arruntean  $d^n x$  bolumen-elementuak koordinatuen aldaketan jakobiarren faktore bat jasotzen duela jakin izan duzu:

$$d^n x' = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| d^n x . \quad (2.44)$$

Egia esan, formula honen azalpen ederra dago forma diferentzialen ikuspegitik, honako gertaera honetatik sortzen dena: *n-dimentsioko bariedade batean, integrandoa n-forma gisa ulertzen da.  $d^n x$  bolumen elementu inozoa berez dentsitate bat da n-forma baino, baina ez dago inolako zailtasunik n-forma erreal bat eraikitzeke erabiltzeko. Honek nola funtzionatzen duen ikusteko, identifikazioa egin beharko genuke*

$$d^n x \leftrightarrow dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} . \quad (2.45)$$

Eskuineko adierazpena engainagarria izan daiteke, tentsorea dirudielako ( $n$  forma bat, egia esan) baina benetan dentsitatea delako. Zalantzarik gabe,  $f$  eta  $g$   $M$ -n bi funtzio baditugu,  $df$  eta  $dg$  forma bakarrekoak dira, eta  $df \wedge dg$  forma bikoa. Baina (2.45)ren eskuineko aldean  $x^\mu$  koordinatu-sisteman  $dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$  bezala jotzen duen koordinatuen menpeko objektu gisa interpretatu nahiko genuke. Delikatua dirudi, baina, egia esan, idazkeraren anbiguitasuna besterik ez da, eta praktikan “ $d^n x$ ” idazkera laburra besterik ez dugu erabiliko.

Abesti eta dantza hau justifikatzeko, ikus dezagun nola aldatzen den (2.45) koordinatu-erlaketan. Lehenik eta behin ohartu ziri-produktuaren definizioak idazteko aukera ematen duela

$$dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} = \frac{1}{n!} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \cdots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} , \quad (2.46)$$

ziri-produktua eta Levi-Civita ikurra guztiz antisimetrikoak baitira. Koordinatu-erlaketaren pean  $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \cdots \mu_n}$  berdin mantentzen da forma bakarrek (2.16) arabera aldatzen diren bitartean, eta ondorioz

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \cdots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} &= \tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \cdots \mu'_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} dx^{\mu'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu'_n} \\ &= \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \right| \tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \cdots \mu'_n} dx^{\mu'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu'_n} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Bi aldeetako jakobiaraz biderkatzeak berreskuratzen du (2.44).

Argi dago  $d^n x$  bolumen-elementu inozoa dentsitate gisa eraldatzen dela, ez tentsore gisa, baina erraza da bolumen-elementu aldaezin bat eraikitzea  $\sqrt{|g|}$ z biderkatuz:

$$\sqrt{|g'|} dx^{0'} \wedge \cdots \wedge dx^{(n-1)'} = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} , \quad (2.48)$$

hau da, noski,  $(n!)^{-1} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$  besterik ez. Sinpletasunaren interesen bolumen-elementua  $\sqrt{|g|} d^n x$  gisa idatziko dugu normalean, eta ez  $\sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$  ziri-produktu esplizitu gisa; nahikoa izango da kontuan hartzea  $n$ -forma bat izan behar duela.

Atal hau amaitzeko azken alde gisa, kontsidera dezagun geometria diferentzialaren teorema dotore eta indartsuenetakoa bat: Stokes-en teorema. Teorema hau kalkuluaren oinarritzko teorema,  $\int_b^a dx = a - b$ , orokortzea da. Imaginatu  $n$ -multzo  $M$  bat dugula  $\partial M$  muga duena, eta  $(n-1)$ -forma  $\omega$   $M$ -n. (Ez dugu eztabaidatu mugak dituzten anizkunez, baina ideia begi-bistakoa da;  $M$  adibidez  $(n-1)$  dimentsioko gainazal itxi baten barnealdea izan liteke  $\partial M$ .) Orduan  $d\omega$   $n$  forma bat da,  $M$  bidez integra daitekeena, eta  $\omega$  bera  $\partial M$  bidez integra daitekeen bitartean. Stokes-en teorema da orduan

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega . \quad (2.49)$$

Zeure burua konbentzi dezakezu teorema honen kasu berezi ezberdinek kalkuluaren oinarritzko teorema ez ezik, Green, Gauss eta Stokesen teorema ere sartzen direla, hiru dimentsioko kalkulu bektorialetik ezagutzen direnak.



## Capítulo 3

# Kurbadura

Anizkunen inguruko eztabaidan, argi geratu zen anizkuntasuna definitu bezain pronto hitz egin genitzakeen hainbat nozio zeudela; funtzioak defini genitzake, haien deribatuetak hartu, bideak parametrizatuak kontuan hartu, tentsoreak ezarri eta abar. Beste kontzeptu batzuek, hala nola eskualde baten bolumena edo bide baten luzera, egitura osagarriren bat eskatzen zuten, metrika bat sartzea alegia. Naturala izango litzateke jadanik informalki erabili dugun “kurbadura” nozioa metrikaren arabera den zerbait dela pentsatzea. Egia esan, hori ez da guztiz egia, edo behintzat osatugabea. Izan ere, egitura gehigarri bat sartu behar dugu — “konexioa” — kurbaduraren ezaugarria duena. Erakutsiko dugu nola metrika baten existentziak lotura jakin bat inplikatzeko duen, zeinaren kurbadura metrikarena dela pentsa daitekeen.

Konexioa beharrezkoa bihurtzen da deribatu partziala tentsore-operadore ona ez izatearen arazoari aurre egiten saiatzen garenean. Nahi genukeena deribatu kobariante bat da; hau da, koordenatu kartesiarrak dituen espazio lauko deribatu partzialera murrizten den operadorea, baina aldaera arbitrario batean tentsore gisa eraldatzen duena. Ohi-koa da deribatu kobariante bat sartzera bultzatzen denbora jakin bat ematea, baina egia esan beharra nabaria da;  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  bezalako ekuazioak espazio kurbatura orokortu beharko dira nolabait. Beraz, ados gaitzeen deribatu kobariante bat edukitzea ona izango litzatekeela eta joan gaitzeen konfiguratzeko.

Koordenatu kartesiarren espazio lauan,  $\partial_\mu$  deribatu partzialeko operadorea  $(k, l)$  tentsore-eremuetatik  $(k, l + 1)$  tentsore-eremuetara dagoen mapa bat da, bere argumentuetan linealki jokatzeko duena eta produktu tentsorialetan Leibnizen araua betetzen duena. Honek guztiak egia izaten jarraitzen du orain kontuan hartu nahiko genukeen egoera orokorragoan, baina deribatu partzialak ematen duen mapa erabilitako koordenatu-sistemaren arabera da. Beraz, **deribatu kobariantea**  $\nabla$  operadore bat definitu nahiko genuke deribatu partzialaren funtzioak betetzeko, baina koordenatuetatik independentean. Beraz,  $\nabla(k, l)$  tentsore-eremuetatik  $(k, l + 1)$  tentsore-eremuetara bi propietate hauek dituen mapa bat izatea eskatzen dugu:

1. linealtasuna:  $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$  ;
2. Leibniz (produktua) araua:  $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$  .

$\nabla$ -k Leibnizen araua beteko badu, beti deribatu partziala gehi transformazio lineal bat bezala idatz daiteke. Hau da, deribatu kobariantea hartzeko lehenik deribatu partziala hartzen dugu, eta ondoren, zuzenketa bat aplikatuko dugu emaitza kobariantea izan dadin. (Ez dugu arrazoizko soinudun adierazpen hau frogatuko, baina Wald-ek xehetasunetan sartzen du interesa baduzu.) Azter dezagun zer esan nahi duen horrek  $V^\nu$  bektore baten deribatu kobariantearentzat. Esan nahi du,  $\mu$  norabide bakoitzeko,  $\nabla_\mu$  deribatu kobariantea  $\partial_\mu$  deribatu partzialak gehi  $(\Gamma_\mu)^\rho_\sigma$  matrize batek zehaztutako zuzenketa bat emango duela ( $n \times n$  matrizea, non  $n$  den anizkunaren dimentsioa,  $\mu$  bakoitzeko). Izan ere, parentesiak kendu ohi dira eta matrize hauek, **konexio-koefizienteak** izenez ezagutzen direnak,  $\Gamma^\rho_{\mu\sigma}$  gisako indizea zoratuta kokatuta idazten ditugu. Badugu, beraz

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda. \quad (3.1)$$

Kontuan izan bigarren terminoan jatorrizko  $V$ -n indizea  $\Gamma$ -ra eraman dela eta indize berri bat batu dela. Bektore baten deribatu kobariantearen adierazpena bada deribatu partzialaren arabera,  $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ -ren transformazio-propietateak zehazteko gai izan beharko genuke ezkerreko aldea  $(1, 1)$  tentsore bat izan dadila eskatuz. Hau da, eraldaketa legea izatea nahi dugu

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu. \quad (3.2)$$

Ikus dezagun lehenik ezkerrekoa; (3.1) erabiliz zabaldu dezakegu eta ondoren ulertzen ditugun zatiak eraldatu:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} V^{\lambda'} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda. \quad (3.4)$$

Eskuineko aldea, berriz, era berean zabaldu daiteke:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda. \quad (3.5)$$

Azken bi esapide hauek berdindu beharrekoak dira; bakoitzean lehen terminoak berdinak dira eta, beraz, bertan behera uzten ditugu, beraz

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\lambda \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda, \quad (3.6)$$

non indize faltsu bat  $\nu$ -tik  $\lambda$ -ra aldatu dugu. Ekuazio honek egia izan behar du  $V^\lambda$  edozein bektorearentzat, beraz, bi aldeetatik ezaba dezakegu. Orduan, lehen koordinatuetan konexio-koefizienteak isolatu daitezke  $\partial x^\lambda / \partial x^{\lambda'}$ -rekin biderkatuz. Emaitza da

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \quad (3.7)$$

Hau ez da, noski, tentsore-eraldaketa legea; eskuineko bigarren terminoak hondatzen du. Ondo dago, *lotura-koefizienteak ez direlako tentsorearen osagaiak*. Asmorik gabe

eraikitzen dira tentsorialak ez izateko, baina (3.1) konbinazioa tentsore gisa eraldatzen den moduan — partzialen transformazio termino gehigarriak eta  $\Gamma$ -ak zehazki bertan behera uzten ditu. Horregatik ez gara hain kontu handiz koefizienteetan indizeak jar-tzearekin; ez dira tentsorea, eta, beraz, haien indizeak ez igotzen eta ez jaisten saiatu beharko zenuke.

Zer gertatzen da beste tentsore mota batzuen deribatu kobarianteekin? Bektoreetara-ko erabiltzen den antzeko arrazoibidearen bidez, forma bakarreko deribatu kobariantea deribatu partzial gehi transformazio lineal gisa ere adieraz daiteke. Baina oraindik ez dago arrazoirik eraldaketa hori adierazten duten matrizeak  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$  koefizienteekin erlazio-natuta egon daitezen. Orokorrean antzeko zerbeit idatz genezake

$$\nabla_{\mu}\omega_{\nu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}\omega_{\lambda} , \quad (3.8)$$

non  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$   $\mu$  bakoitzeko matrize-multzo berri bat den. (Kontuz indize ezberdin guztiak nora doazen). Zuzena da  $\tilde{\Gamma}$ -ren eraldaketa-propietateak  $\Gamma$ -ren berdinak izan behar direla, baina bestela ez da erlaziorik ezarri. Horretarako, gure deribatu kobarianteak izatea nahiko genukeen bi propietate berri aurkeztu behar ditugu (aurreko biez gain):

3. uzkurdurarekin joaten da:  $\nabla_{\mu}(T^{\lambda}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_{\mu}{}^{\lambda}_{\lambda\rho}$  ,
4. eskalarren deribatu partzialera murrizten da:  $\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi$  .

Ez dago propietate hauek “derrizteko” modurik; besterik gabe, egiazkoak izatea eskatzen dugu deribatu kobariante baten definizioaren zati gisa.

Ikus dezagun zer suposatzen duten propietate berri hauek.  $\omega_{\mu}$  forma bakarreko ere-mua eta  $V^{\mu}$  eremu bektoriala emanda,  $\omega_{\lambda}V^{\lambda}$ -k definitutako eskalaren deribatu kobarian-tea har dezakegu lortzeko

$$\nabla_{\mu}(\omega_{\lambda}V^{\lambda}) = (\nabla_{\mu}\omega_{\lambda})V^{\lambda} + \omega_{\lambda}(\nabla_{\mu}V^{\lambda}) \quad (3.9)$$

$$= (\partial_{\mu}\omega_{\lambda})V^{\lambda} + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\sigma}\omega_{\sigma}V^{\lambda} + \omega_{\lambda}(\partial_{\mu}V^{\lambda}) + \omega_{\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}V^{\rho} . \quad (3.10)$$

Baina  $\omega_{\lambda}V^{\lambda}$  eskalar batenez, hau ere deribatu partzialak eman behar du:

$$\nabla_{\mu}(\omega_{\lambda}V^{\lambda}) = \partial_{\mu}(\omega_{\lambda}V^{\lambda}) \quad (3.11)$$

$$= (\partial_{\mu}\omega_{\lambda})V^{\lambda} + \omega_{\lambda}(\partial_{\mu}V^{\lambda}) . \quad (3.12)$$

Hau egia izan daiteke konexio-koefizienteak dituzten (3.8) terminoek elkar ezeztatzen badute; hau da, dummy indizeak berrantolatzea, izan behar dugu

$$0 = \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\sigma}\omega_{\sigma}V^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}\omega_{\sigma}V^{\lambda} . \quad (3.13)$$

Baina  $\omega_{\sigma}$  eta  $V^{\lambda}$  guztiz arbitrarioak dira, beraz

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\sigma} = -\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} . \quad (3.14)$$

Inposatu ditugun bi baldintza gehigarriak, beraz, forma bakarreko deribatu kobarian-tea adierazteko aukera ematen digute bektorearentzat erabili ziren konexio-koefiziente

berberak erabiliz, baina orain minus zeinuarekin (eta zertxobait desberdin bat datoz indizeak):

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda . \quad (3.15)$$

Ez da harritzekoa izan behar konexio-koefizienteek maila arbitrarioko tentsore baten deribatu kobariantea hartzeko beharrezkoa den informazio guztia kodetzea. Formula nahiko zuzena da; goiko indize bakoitzeko termino bat sartzen duzu  $+\Gamma$  bakarrarekin, eta beheko indize bakoitzeko termino bat  $-\Gamma$  bakarrarekin:

$$\nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = \partial_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \quad (3.16)$$

$$+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \dots \quad (3.17)$$

$$- \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} - \dots . \quad (3.18)$$

Hau da deribatu kobariantearen adierazpen orokorra. Zuk zeuk egiaztatu dezakezu; eza-ri dugun axioma-multzotik dator, eta hainbat motatako tentsoreak koordinatuetatik independenteak diren entitateak izateko ohiko eskakizunak. Batzuetan, notazio alternatibo bat erabiltzen da; Deribatu partzialetarako komak erabiltzen diren bezala, puntu eta komak erabiltzen dira kobarianteetarako:

$$\nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \equiv T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l; \sigma} . \quad (3.19)$$

Berriro ere, ez naiz notazio honen zalea.

Deribatu kobariante bat definitzeko, beraz, “konexioa” bat jarri behar dugu gure aldaeran, zeina koefizienteen multzo batek  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  ( $n^3 = 64$  osagai independenteak  $n = 4$  dimentsioetan) zehazten duen koordinatu-sistema batzuetan. (3.6) arabera eraldatu. (“konexioa” izena bektoreak espazio ukitzaile batetik bestera garraiatzeko erabiltzen denez dator, laster ikusiko dugunez). Jakina, edozein aniztasunetan defini genitzakeen konexio ugari dago, eta horietako bakoitzak bereizketa kobariantearen nozio ezberdina dakar. Erlatibitate orokorrean askatasun hori ez da kezka handirik, gertatzen baita metrika bakoitzak konexio bakarra definitzen duela, hau da, GR-n erabiltzen dena. Ea nola funtzionatzen duen.

Ohartu beharreko lehen gauza bi konexioren aldea  $(1, 2)$  tentsorea dela da. Bi konexio-koefiziente multzo baditugu,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  eta  $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ , haien diferentzia  $S_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  (ohartu indizearen kokapena) honela bihurtzen da.

$$S_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = \Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} - \hat{\Gamma}_{\mu'\nu'}^{\lambda'} \quad (3.20)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (3.21)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda) \quad (3.22)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} S_{\mu\nu}^\lambda . \quad (3.23)$$

Hau tentsorearen transormazio legea besterik ez da, beraz,  $S_{\mu\nu}{}^\lambda$  tentsorea da benetan. Horrek esan nahi du edozein konexio-multzo fideikoki-konexio bat gehi tentsio-zuzenketa gisa adieraz daitekeela.

Kontuan izan hurrengoan,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ -k zehaztutako konexio bat emanda, berehala beste konexio bat sor dezakegula beheko indizeak permutatuz. Hau da,  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  koefizienteen multzoa ere (3.6) arabera eraldatuko da (azken terminoan agertzen diren deribatu partzialak alda daitezkeenez), beraz, lotura bereizia zehazten dute. Beraz, edozein konexiorekin lotu dezakegun tentsore bat dago, **tortsio-tentsorea** deritzona, honela definitua.

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda . \quad (3.24)$$

Argi dago tortsioa antisimetrikoa dela bere beheko indizeak, eta bere beheko indizeetan simetrikoa den konexio bati “torsiorik gabekoa” esaten zaio.

Orain  $g_{\mu\nu}$  metrika duen anizkuntza batean konexio eksklusibo bat defini dezakegu bi propietate gehigarri sartuz:

- Torsiorik gabekoa:  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda$ .
- metrikaren bateragarritasuna:  $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ .

Konexio bat metrika bateragarria da metrikaren deribatu kobariantea konexio horri dagokionez nonahi zero bada. Horrek propietate polit pare bat suposatzen du. Lehenik eta behin, erraza da alderantzizko metrik ere zero deribatu kobariantea duela erakustea,

$$\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0 . \quad (3.25)$$

Bigarrenik, metrikoarekin bateragarria den deribatu kobariante bat indizeen igoera eta beharapenarekin joaten da. Beraz,  $V^\lambda$  eremu bektorial baterako,

$$g_{\mu\lambda} \nabla_\rho V^\lambda = \nabla_\rho (g_{\mu\lambda} V^\lambda) = \nabla_\rho V_\mu . \quad (3.26)$$

Konexio ez-metrikoak bateragarriak direnekin kontu handiz ibili behar da indizearen kokapenarekin deribatu kobariante bat hartzerakoan.

Gure aldarrikapena da, beraz, sorta jakin batean torsiorik gabeko konexio bat dagoela, eta hori aldakuntza horretan emandako metrika batzuekin bateragarria da. Ez ditugu bi baldintza hauek deribatu kobariante baten definizioaren parte bihurtu nahi; posible askotariko bat besterik ez dute bereizten.

Bai existentzia eta bai berezitasuna froga ditzakegu konexio-koefizienteen adierazpide argi eta garbi bat eratorriz metrikaren arabera. Hori lortzeko, bateragarritasun metrikoaren ekuazioa zabaltzen dugu indizeen hiru permutazio desberdinetarako:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \quad (3.27)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0 \quad (3.28)$$

$$\nabla_\nu g_{\rho\mu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} = 0 . \quad (3.29)$$

Horietatik bigarren eta hirugarrena kenduko diogu lehenengoari, eta loturaren simetria erabiltzen dugu lortzeko

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} = 0. \quad (3.30)$$

Konexiorako erraza da hau konpontzea  $g^{\sigma\rho}$ -rekin biderkatuz. Emaita da

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.31)$$

Hau da irakasgai honetako formularik garrantzitsuenetako bat; konprometitu memorian. Noski, metrikoarekin bateragarria eta tortsiorik gabeko konexio bat existitzen bada, (3.21) formakoa izan behar duela frogatu dugu soilik; zuk zeuk egiazta dezakezu (zure bizitzan nahikoa konputazio nekagarririk ez duzuenontzat) (3.21) eskuineko aldea konexio bat bezala eraldatzen dela.

Metrikotik eratorri dugun lotura hori da erlatibitate orokorra konbentzionala oinarritzen dena (nahiz eta denbora luzez adimen irekia mantenduko dugun). Izen ezberdinekin ezagutzen da: batzuetan **Christoffel** konexioa, beste batzuetan **Levi-Civita** konexioa, beste batzuetan **Riemannian** konexioa. Lotutako konexio-koefizientei **Christoffel sinboloak** deitzen zaie batzuetan eta  $\{\frac{\sigma}{\mu\nu}\}$  gisa idazten dira; batzuetan Christoffel sinboloak deituko diegu, baina ez dugu idazkera dibertigarria erabiliko. Metrika eta elkartutako loturak dituzten anizkuntzen azterketari “Riemann geometria” deitzen zaio. Nik esan dezakedanez, lotura orokorragoen azterketa Cartan-era jo daiteke, baina inoiz ez dut entzun “Cartaniar geometria izenekoa.”

Gure deribatu kobarianteak lanean jarri aurretik, hainbat propietate aipatu beharko genituzke. Lehenik eta behin, azpimarratu dezagun berriro konexioa ez dela *zertan* metrikatik eraiki behar. Espazio lau arruntan denbora guztian erabiltzen dugun konexio inplizitu bat dago — metrika lautik eraikitako Christoffel konexioa. Baina aukeratzen badugu, beste konexio bat erabil genezake, metrika laua mantenduz. Era berean, ohar-tu Christoffel-en konexioaren koefizienteak espazio lauan desagertuko direla koordenatu kartesiaretan, baina ez koordenatu-sistema kurbilineoetan. Har dezagun adibidez plano koordenatu polarretan, metrikarekin

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (3.32)$$

Alderantzizko metrikaren osagai nuluak ez diren osagaiak erraz aurkitzen dira  $g^{rr} = 1$  eta  $g^{\theta\theta} = r^{-2}$  direla. (Ohartu  $r$  eta  $\theta$  indize gisa erabiltzen ditugula ageriko notazio batean.) Konexio-koefiziente tipiko bat kalkula dezakegu:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{r\rho}(\partial_r g_{r\rho} + \partial_r g_{\rho r} - \partial_\rho g_{rr}) \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) \quad (3.34)$$

$$+ \frac{1}{2}g^{r\theta}(\partial_r g_{r\theta} + \partial_r g_{\theta r} - \partial_\theta g_{rr}) \quad (3.35)$$

$$= \frac{1}{2}(1)(0 + 0 - 0) + \frac{1}{2}(0)(0 + 0 - 0) \quad (3.36)$$

$$= 0. \quad (3.37)$$

Zoritxarrez, desagertzen da. Baina denek ez dute egiten:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{r\rho}(\partial_{\theta}g_{\theta\rho} + \partial_{\theta}g_{\rho\theta} - \partial_{\rho}g_{\theta\theta}) \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_{\theta}g_{\theta r} + \partial_{\theta}g_{r\theta} - \partial_r g_{\theta\theta}) \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{2}(1)(0 + 0 - 2r) \quad (3.40)$$

$$= -r . \quad (3.41)$$

Biradera biratzen jarraituz, azkenean aurkituko dugu

$$\Gamma_{\theta r}^r = \Gamma_{r\theta}^r = 0 \quad (3.42)$$

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = 0 \quad (3.43)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} \quad (3.44)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 0 . \quad (3.45)$$

Koordenatu-sistema kurbilineoetan desagertzen ez diren konexio-koefizienteen existentzia da elektrizitateari eta magnetismoari buruzko liburuetan aurkitzen dituzun dibergentziaren eta abarren formulen azken kausa.

Aitzitik, espazio kurbatu batean ere posible da Christoffel sinboloak edozein puntutan desagertzea. Hau besterik ez da, azken atalean ikusi dugun bezala, beti egin dezakegulako metrikaren lehen deribatua puntu batean desagertzea; beraz (3.21) metrika horretatik eratorritako konexio-koefizienteak ere desagertuko dira. Jakina, hori puntu batean bakarrik ezarri daiteke, ez puntuaren inguru batean.

Beste propietate erabilgarria da bektore baten dibergentziaren formulak (Christoffelen konexioari dagokionez) forma sinplifikatua duela.  $V^{\mu}$ -ren dibergentzia kobariantea honek ematen du

$$\nabla_{\mu}V^{\mu} = \partial_{\mu}V^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu}V^{\lambda} . \quad (3.46)$$

Erraza da erakustea (ikus Weinberg-en 106-108 or.) Christoffel-en konexioak asetzen duela.

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\lambda}\sqrt{|g|} , \quad (3.47)$$

eta, beraz, lortzen dugu

$$\nabla_{\mu}V^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}V^{\mu}) . \quad (3.48)$$

Goi-mailako tentsoreen dibergentzietarako formulak ere badaude, baina, oro har, ez dira hain sinplifikazio handiak.

Konexioei buruz aipatu behar dugun azken faktoide gisa, azpimarra dezagun (beste behin) kanpoko deribatua ondo definitutako tentsorea dela inolako loturarik ezean. Azpimarratu beharreko arrazoa hau da: konexio simetriko bat (torsiorik gabeko) erabiltzen ari bazara, kanpoko deribatua (deribatu partzial antisimetrizatua dela definitua)

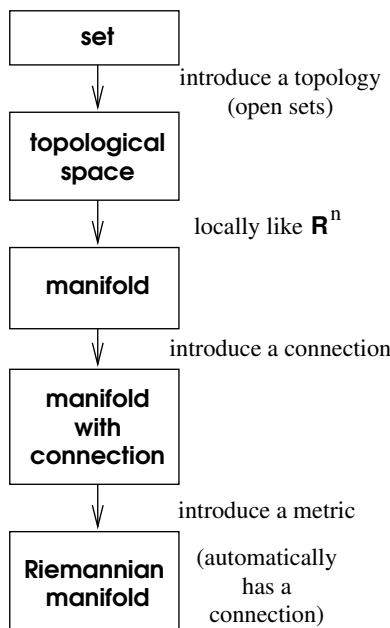
deribatu kobariante antisimetrizatuaren berdina dela gertatzen da:

$$\nabla_{[\mu}\omega_{\nu]} = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]} - \Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda}\omega_{\lambda} \quad (3.49)$$

$$= \partial_{[\mu}\omega_{\nu]} . \quad (3.50)$$

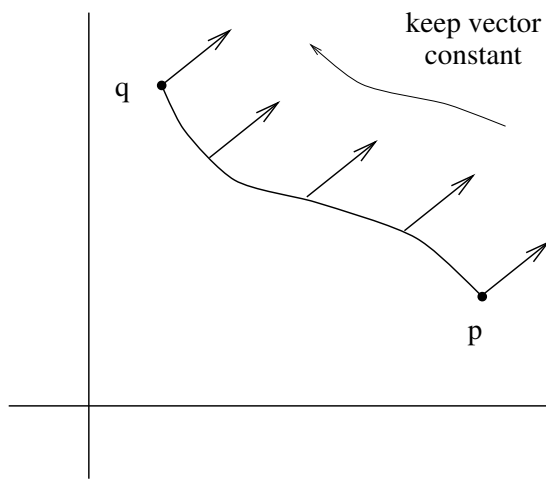
Horrek ekarri ditu zorigaiztoko arima batzuk torsiodun espazioetan kanpoko deribatuaren “anbiguotasunaz” kezkatzera, non goiko sinplifikazioa gertatzen ez den. Ez dago anbiguotasunik: kanpoko deribatuak ez du konexioa inplikatzeko, erabiltzen duzun konexioa edozein dela ere, eta, beraz, torsioa ez da inoiz ezeren kanpoko deribatuaren formularen sartzen.

Aurrera egin aurretik, errepasatu dezagun gure eraikuntza matematikoei egiturak gehitzen joan garen prozesua. Multzoaren oinarriko noziotik hasi ginen, ustez ezagutzen zenituzkeela (informalki, zorrotz ez bada). Gure multzoko azpimultzo irekien kontzeptua sartu genuen; hau topologia bat sartzearen parekoa da, eta multzoa espazio topologiko batera sustatu zuen. Ondoren, multzo ireki bakoitzak  $\mathbb{R}^n$  eskualde baten itxura izatea ( $n$  multzo bakoitzerako berdina dela) eta koordinatu-diagramak ondo josi daitezela eskatuz, espazio topologikoa aniztasun bihurtu zen. Multiple bat oso egitura malgua eta indartsua da aldi berean, eta sorta ukitzailea, hainbat mailatako tentsore sorta, kanpoko deribatuak hartzeko gaitasuna eta abar ditu modu naturalean. Jarraian, metrika bat jartzen hasi ginen, eta horren ondorioz, metrika (edo batzuetan “Riemann-a”). Aurkitu dugun metrikaren arabera, konexio bat sar genezake, deribatu kobarianteak hartzeko aukera emanez. Behin metrika bat dugunean, ordea, automatikoki torsiorik gabeko metrikekin bateragarria den konexio bakarra dago. (Printzipioz, ez dago ezerk eragozten digunik konexio bat baino gehiago, edo metrika bat baino gehiago, edozein anizkuntzetan sartzea.) Egoera, beraz, hurrengo orrialdeko diagraman azaltzen dena da.



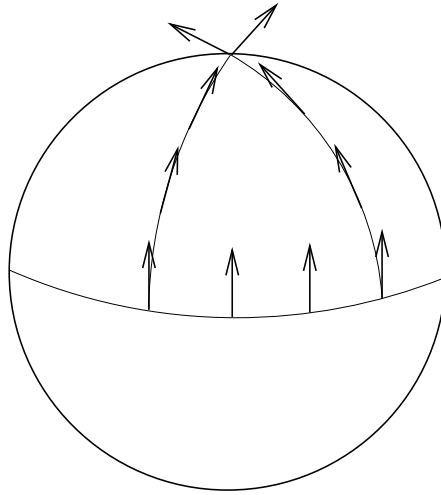


Konexioen makineria ezarrita, egingo dugun lehenengo gauza garraio paraleloa eztabaidatuko da. Gogoratu espazio lauan ez zela kontu handiz ibili bektoreak puntu indibidualetan definitutako espazio tangenteen elementuak zirelako; egia esan, oso naturala da bektoreak puntu ezberdinetan konparatzea (non “konparatu” esan nahi dugu gehitu, kendu, puntu produktua, etab.). Naturala den arrazoia da zentzuzkoa duelako, espazio lauan, “bektore bat puntu batetik bestera mugitzea konstante mantenduz”. Orduan, behin bektorea puntu batetik bestera lortzen dugunean ohikoa egin dezakegu. espazio bektorial batean onartzen diren eragiketak.



Bektore bat bide batean zehar mugitzearen kontzeptua, denbora guztian konstante mantenduz, garraio paralelo gisa ezagutzen da. Ikusiko dugunez, garraio paraleloa definitzen da konexio bat dugunean; espazio lauoko bektoreen manipulazio intuitiboak espazio honetan Christoffel-en konexioa inplizituki erabiltzen du. Espazio lauen eta kurbatuen arteko diferentzia erabakigarria hau da: espazio kurbatu batean, *bektore bat puntu batetik bestera paraleloan garraitzearen emaitza puntuen artean egindako ibilbidearen araberakoa izango da*. Garraio paraleloaren mekanismo osoa oraindik muntatu gabe, bi esferaren inguruko intuizioa erabil dezakegu hori horrela dela ikusteko. Hasi ekuatorean dagoen bektore batekin, longitude konstanteko lerro batetik seinalatu. Paraleloan garraiatu ipar poloraino longitude-lerro batean zehar, modu nabarian. Ondoren, hartu jatorrizko bektorea, paraleloki garraiatu ekuatorean zehar  $\theta$  angelu batez, eta, ondoren, mugitu lehen bezala ipar polara. Argi dago bi bidetan paraleloan garraiatutako bektorea helmuga berdinerakoa bi balio ezberdinekin iritsi zela ( $\theta$  biratuta).

Beraz, badirudi bektore bat espazio ukitzaile batetik beste batera eramateko modu naturalik ez dagoela; beti paraleloan garraiatu dezakegu, baina emaitza bidearen araberakoa da, eta ez dago zein bide hartu behar den aukeraketa naturalik. Topatu ditugun zenbait arazo ez bezala, *honek ez du irtenbiderik* — bi bektore bereko elementuak badira soilik modu naturalean konparatu daitezkeela bizitzen ikasi behar dugu. espazio ukitzailea. Esaterako, elkarren ondotik pasatzen diren bi partikulek abiadura erlatiboa ondo definituta dute (ezin da argiaren abiadura baino handiagoa izan). Baina sorta kurbatu bateko puntu ezberdinetan dauden bi partikulek ez dute abiadura erlatiboaren nozio on-



gi zehazturik — kontzeptuak ez du zentzurik. Jakina, zenbait egoera berezitan oraindik ere baliagarria da zentzua izango balu bezala hitz egitea, baina ulertu behar da noizean behin baliagarritasuna ez dela definizio zorrotzaren ordezkoa. Kosmologian, adibidez, urruneko galaxien argia gorrira lerratuta dago gertuko iturri geldi batetik behatuko gemituzkeen maiztasunekiko. Fenomeno honek higidura erlatiboa dela eta ohiko Doppler efektuarekin oso antzekotasun handia duenez, oso tentagarria da esatea galaxiak “gugandik urruntzen” doazela beren gorrira lerratzearen arabera definitutako abiaduran. Maila zorrotzean hau zentzugabekeria da, Wittgensteinek “akats gramatikal” deituko lukeena — galaxiak ez dira atzera egiten, gurekin duten abiaduraren nozioa ez baitago ondo definituta. Benetan gertatzen ari dena da gure eta galaxien arteko espazio-denboraren metrika aldatu egin dela (unibertsoa hedatu egin da) fotoiaren bidetik hona eta hona, argiaren uhin-luzera handitu dela. Oker egin dezakezunaren adibide gisa, Doppler formularen aplikazio inozoak galaxien gorrira lerraratzean dakar haietako batzuk argia baino azkarrago urruntzen ari direla, erlatibitatearekin itxurazko kontraesanean. Itxurazko paradoxa honen konponbidea besterik ez da haien atzeraldiaren ideia bera ez dela literalki hartu behar.

Nahikoa egin ezin dugunaz; ikus dezagun zer ahal dugun. Garraio paraleloa “bektorea konstante mantenduz” kontzeptuaren espazio kurbatuaren orokortzea omen da bide batean zehar mugitzen garen heinean; antzera maila arbitrarioko tentsore baterako.  $x^\mu(\lambda)$  kurba bat emanda,  $T$  tentsore baten konstantzia-eskakizuna kurba honetan zehar espazio lauan  $\frac{dT}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial T}{\partial x^\mu} = 0$  besterik ez da. Beraz, operadore batek eman beharreko bidetik deribatu kobariantea definitzen dugu

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu . \quad (3.51)$$

Orduan definituko dugu  $T$  tentsorearen  $x^\mu(\lambda)$  bidearen **garraio paralelo**  $x^\mu(\lambda)$  bidean zehar:

$$\left( \frac{D}{d\lambda} T \right)^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0 . \quad (3.52)$$

Ondo definitutako ekuazio tentsore bat da,  $dx^\mu/d\lambda$  bektore tangentea eta  $\nabla T$  deribatu kobariantea tentsoreak baitira. Hau **garraio paraleloaren ekuazioa** izenez ezagutzen da. Bektore baterako forma hartzen du

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0 . \quad (3.53)$$

Garraio paraleloaren ekuazioa hasierako balio-problema bat definitzen duen lehen mailako ekuazio diferentzial gisa ikus dezakegu: bideko punturen batean tentsorea emanda, tentsorearen jarraipen berezia izango da bideko beste puntu batzuetara. jarraipena ebazten du (3.31). Horrelako tentsorea paralelo garraiatzen dela esaten dugu.

Garraio paraleloaren nozioa, jakina, konexioaren menpe dago, eta konexio ezberdi-  
nek erantzun desberdinak ekartzen dituzte. Konexioa metrikoarekin bateragarria bada, metrika beti paraleloki garraiatzen da harekin:

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.54)$$

Honen ondorioz, paraleloan garraiatutako bi bektoreen barne produktua mantentzen da. Hau da,  $V^\mu$  eta  $W^\nu$   $x^\sigma(\lambda)$  kurba batean paraleloki garraiatzen badira, izango dugu

$$\frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu) = \left( \frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} \right) V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu} \left( \frac{D}{d\lambda} V^\mu \right) W^\nu + g_{\mu\nu} V^\mu \left( \frac{D}{d\lambda} W^\nu \right) \quad (3.55)$$

$$= 0 . \quad (3.56)$$

Horrek esan nahi du garraio paraleloak metriko-bateragarria den konexio bati dagokionez, bektoreen araua, ortogonaltasunaren zentzua eta abar gordetzen dituela.

GR liburuetan normalean esaten ez dizuten gauza bat da garraio paraleloaren ekuazioaren soluzio esplizitu eta orokor bat idatz dezakezula, nahiz eta zertxobait formala izan. Lehenik eta behin, konturatu  $\gamma : \lambda \rightarrow x^\sigma(\lambda)$  bide baterako,  $V^\mu$  bektore baten garraio paraleloaren ekuazioa ebazteak  $P^\mu{}_\rho(\lambda, \lambda_0)$  matrize bat aurkitzea dakar, zeinak bektorea bere hasierako balioan  $V^\mu(\lambda_0)$  bere balioarekin erlazionatzen duen bidean behe-  
rago:

$$V^\mu(\lambda) = P^\mu{}_\rho(\lambda, \lambda_0) V^\rho(\lambda_0) . \quad (3.57)$$

Noski  $P^\mu{}_\rho(\lambda, \lambda_0)$  matrizea, **hedatzaile paraleloa** izenez ezagutzen dena,  $\gamma$  bidearen arabera da (nahiz eta zaila den hori adierazten duen notaziorik aurkitzea  $\gamma$  indize baten itxura eman gabe). Definitzen badugu

$$A^\mu{}_\rho(\lambda) = -\Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} , \quad (3.58)$$

non eskuinaldean dauden kantitateak  $x^\nu(\lambda)$ -n ebaluatzen direnean, orduan garraio paraleloaren ekuazioa bihurtzen da

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu = A^\mu{}_\rho V^\rho . \quad (3.59)$$

Hedatzaile paraleloak edozein bektoretarako funtzionatu behar duenez, (3.35) (3.37) ordezkatzuz,  $P^\mu_\rho(\lambda, \lambda_0)$ -k ere ekuazio hau betetzen duela erakusten du:

$$\frac{d}{d\lambda} P^\mu_\rho(\lambda, \lambda_0) = A^\mu_\sigma(\lambda) P^\sigma_\rho(\lambda, \lambda_0) . \quad (3.60)$$

Ekuazio hau ebazteko, lehenengo bi aldeak integratu:

$$P^\mu_\rho(\lambda, \lambda_0) = \delta^\mu_\rho + \int_{\lambda_0}^\lambda A^\mu_\sigma(\eta) P^\sigma_\rho(\eta, \lambda_0) d\eta . \quad (3.61)$$

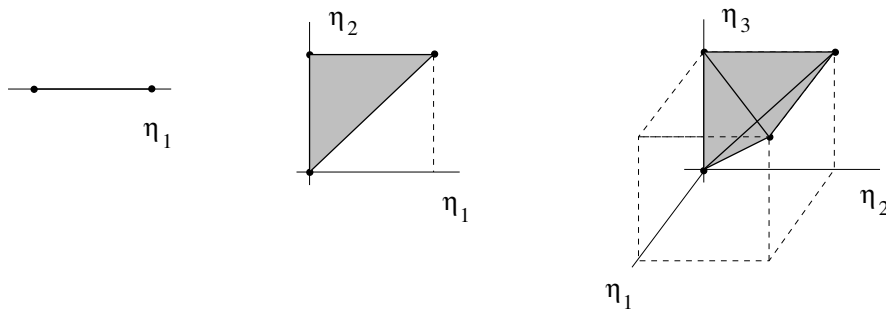
Kronecker deltak, erraz ikusten da,  $\lambda = \lambda_0$ -ren normalizazio zuzena ematen du.

(3.39) iterazio bidez ebatzi dezakegu, eskuineko aldea hartu eta bere baitan behin eta berriz konektatuz, emanez

$$P^\mu_\rho(\lambda, \lambda_0) = \delta^\mu_\rho + \int_{\lambda_0}^\lambda A^\mu_\rho(\eta) d\eta + \int_{\lambda_0}^\lambda \int_{\lambda_0}^\eta A^\mu_\sigma(\eta) A^\sigma_\rho(\eta') d\eta' d\eta + \cdots . \quad (3.62)$$

Serie honetako  $n$ garren terminoa  $n$  dimentsioko triangelu angeluzuzen baten edo  $n$ -simple baten gaineko integrala da.

$$\int_{\lambda_0}^\lambda A(\eta_1) d\eta_1 \quad \int_{\lambda_0}^\lambda \int_{\lambda_0}^{\eta_2} A(\eta_2) A(\eta_1) d\eta_1 d\eta_2 \quad \int_{\lambda_0}^\lambda \int_{\lambda_0}^{\eta_3} \int_{\lambda_0}^{\eta_2} A(\eta_3) A(\eta_2) A(\eta_1) d^3\eta$$



Gauzak sinplifikatuko lituzke integral hori  $n$ -kubo baten gainean  $n$ -simplex baten gainean dagoela kontsideratuko bagenu; ba al dago hori egiteko modurik? Kubo bakoitzean horrelako  $n!$  simplexe daude, beraz,  $1/n!$ z biderkatu beharko genuke bolumen gehigarri hori konpentsatzeko. Baina integranda zuzena ere lortu nahi dugu; matrize-notazioa erabiliz,  $n$ garren ordenako integrandoa  $A(\eta_n)A(\eta_{n-1}) \cdots A(\eta_1)$  da, baina  $\eta_n \geq \eta_{n-1} \geq \cdots \geq \eta_1$  duen propietate bereziarekin. Beraz, **bide-ordenaren ikurra** definitzen dugu,  $\mathcal{P}$ , baldintza hori betetzen dela ziurtatzeko. Beste era batera esanda, esamoldea

$$\mathcal{P}[A(\eta_n)A(\eta_{n-1}) \cdots A(\eta_1)] \quad (3.63)$$

$n$   $A(\eta_i)$  matrizeen biderkadura adierazten du, honela ordenatuta non  $\eta_i$ -ren balio handiena ezkerrean dagoen, eta  $\eta_i$ -ren ondorengo balio bakoitza aurrekoaren txikiagoa edo

berdina dela. Orduan  $n$ garren ordenako terminoa (3.40) gisa adieraz dezakegu

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\eta_n} \cdots \int_{\lambda_0}^{\eta_2} A(\eta_n) A(\eta_{n-1}) \cdots A(\eta_1) d^n \eta \quad (3.64)$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \cdots \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathcal{P}[A(\eta_n) A(\eta_{n-1}) \cdots A(\eta_1)] d^n \eta. \quad (3.65)$$

Adierazpen honek ez du  $A(\eta_i)$  matrizeei buruzko adierazpen substantiborik; notazioa besterik ez da. Baina orain (3.40) matrize moduan idatz dezakegu

$$P(\lambda, \lambda_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathcal{P}[A(\eta_n) A(\eta_{n-1}) \cdots A(\eta_1)] d^n \eta. \quad (3.66)$$

Formula hau esponentzial baten serie-adierazpena besterik ez da; beraz, hedatzaile paraleloa bide-ordenatutako esponentzialak ematen duela esaten dugu

$$P(\lambda, \lambda_0) = \mathcal{P} \exp \left( \int_{\lambda_0}^{\lambda} A(\eta) d\eta \right), \quad (3.67)$$

non berriro ere hau notazioa besterik ez den; bide-ordenatutako esponentziala (3.43)ren eskuineko aldea dela definitzen da. Esplizituago bezala idatzi dezakegu

$$P^{\mu}_{\nu}(\lambda, \lambda_0) = \mathcal{P} \exp \left( - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} \frac{dx^{\sigma}}{d\eta} d\eta \right). \quad (3.68)$$

Polita da formula esplizitua izatea, nahiz eta abstraktua izan. Ereku kuantikoen teorian “Dyson-en Formula” bezalako adierazpen mota bera agertzen da, non denbora-eboluzio-operadorearen Schrödinger-en ekuazioak (3.38)-ren forma bera duelako sortzen den.

Alde batera utzita, hedatzaile paraleloaren adibide bereziki interesgarri bat gertatzen da bidea begizta bat denean, puntu berean hasi eta amaitzen dena. Orduan, konexioa metrikoarekin bateragarria bada, ondoriozko matrizea puntuan dagoen espazio tangentean Lorentz transformazioa besterik ez da izango. Eraldaketa hau begiztaren “holonomia” bezala ezagutzen da. Begizta posible guztien holonomia ezagutzen baduzu, hori metrika ezagutzearen baliokidea da. Gertaera honek Ashtekar eta bere kolaboratzaileei erlatibitate orokorra aztertzeo aukera eman die “begizta irudikapenean”, non oinarritzko aldagaiak holonomiak diren metrika esplizitua baino. Planteamendu honetan teoria kuantifikatze-ko bidean aurrerapauso batzuk eman dituzte, nahiz eta epaimahaiak oraindik zenbat aurrerapen gehiago egin daitezkeen jakin gabe.

Garraio paraleloa ulertuta, hurrengo urrats logikoa geodesika eztabaidatzea da. Geodesikoa “zuzena” nozioa espazioan euklidearren orokortzea da. Denok dakigu zer den zuzen bat: bi punturen arteko distantziarik laburren bidea da. Baina definizio oso ona dago — lerro zuzena paraleloan bere bektore tangentea garraiatzen duen bide bat da. Lotura arbitrarioa (ez derrigor Christoffel) duen aniztasun batean, bi kontzeptu hauek ez datoz batere bat, eta banan-banan eztabaidatu beharko genuke.

Bigarren definizioa hartuko dugu lehenik, konputazionalki askoz sinpleagoa baita.  $x^\mu(\lambda)$  bide baten bektore tangentea  $dx^\mu/d\lambda$  da. Paraleloan garraiatzeko baldintza da, beraz

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 , \quad (3.69)$$

edo bestela

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 . \quad (3.70)$$

Hau da **ekuazio geodesikoa**, buruz ikasi beharko zenukeen beste bat. Erraz ikus dezakegu zuzenen ohiko nozioa erreproduzitzen duela, baldin eta konexio-koefizienteak espazio euklidearren Christoffel-en sinboloak badira; kasu horretan  $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = 0$  koordenatu kartesiarrak aukeratu ditzakegu, eta ekuazio geodesikoa  $d^2 x^\mu/d\lambda^2 = 0$  besterik ez da, hau da, zuzen baten ekuazioa.

Hori lotsagarri sinplea zen; itzul gaitezen distantzia laburrenaren definizioaren kasu ez-trivialera. Dakigunez, espazio-denbora lorentziar batean distantzia definitzean hainbat sotiltasun daude tartean; Bide nuluatarako distantzia zero da, denboraren antzeko bideatarako denbora egokia erabiltzea komenigarria da, etab. Beraz, sinpletasunaren izenean egin dezagun kalkulua denboraren antzeko bide baterako — ondoriozko ekuazioa ona izango da edozein biderentzat, beraz, ez dugu orokortasunik galtzen ari. Beraz, denbora egokia funtzionaltzat jotzen dugu,

$$\tau = \int \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda , \quad (3.71)$$

non integrala bidearen gainean dagoen. Distantzia laburrenako bideak bilatzeko, aldaketen ohiko tratamendua egingo dugu funtzional honen muturrak bilatzeko. (Izan ere, *gehieneko* denbora propioko kurbak izango dira.)

Bidearen aldakuntza infinitesimalen pean denbora propioaren aldaketa kontuan hartu nahi dugu,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu \quad (3.72)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} . \quad (3.73)$$

(Bigarren lerroa Taylorren hedapenetik dator espazio-denbora kurbatuan, ikus dezakezun bezala deribatu partziala erabiltzen du, ez deribatu kobariantea). Hau (3.48) sartuz, lortuko dugu

$$\tau + \delta\tau = \int \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - 2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (3.74)$$

$$= \int \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} \left[ 1 + \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1} \right. \quad (3.75)$$

$$\left. \times \left( -\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - 2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) \right]^{1/2} d\lambda . \quad (3.76)$$

$\delta x^\sigma$  txikia dela suposatzen denez, kortxete artean dagoen adierazpenaren erro karratua zabal dezakegu aurkitzeko

$$\delta\tau = \int \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1/2} \left( -\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) d\lambda. \quad (3.77)$$

Une honetan lagungarria da gure kurbaren parametrizazioa  $\lambda$ tik, arbitrarioa zen,  $\tau$  denbora egokira aldatzea, erabiliz.

$$d\lambda = \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1/2} d\tau. \quad (3.78)$$

Hau (3.51)-ra konektatzen dugu (oharra:  $d\lambda$ -ren agerpen bakoitzean konektatzen dugu) lortzeko

$$\delta\tau = \int \left[ -\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\sigma - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau} \right] d\tau \quad (3.79)$$

$$= \int \left[ -\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} \left( g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \right] \delta x^\sigma d\tau, \quad (3.80)$$

non azken lerroan zatika integratu dugu, muga-ekarpen posibleak saihestuz  $\delta x^\sigma$  aldakuntza bidearen muturretan desagertu dadila eskatuz. Puntu geldiak bilatzen ari garenez,  $\delta\tau$  edozein aldakuntzarako desagertzea nahi dugu; horrek esan nahi du

$$-\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\nu g_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (3.81)$$

non  $dg_{\mu\sigma}/d\tau = (dx^\nu/d\tau) \partial_\nu g_{\mu\sigma}$  erabili dugun. Dummy indizeen nahasketa batzuk agerian uzten du

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (-\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.82)$$

eta alderantzizko metrikoz biderkatzeak azkenean ekartzen du

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.83)$$

Ikusten dugu, hain zuzen ere, (3.32) ekuazio geodesikoa dela, baina Christoffel-en lotura (3.21) aukera zehatzarekin. Beraz, metrika duen anizkera batean, luzera funtzionalaren muturrak metrika horri lotutako Christoffel-en konexioarekiko beren bektore tangentea paraleloan garraiatzen duten kurbak dira. Berdin du sorta berean beste konexiorik definituta dagoen. Jakina, GR-n Christoffel konexioa da erabiltzen den bakarra, beraz, bi nozioak berdinak dira.

Geodesikaren erabilgarritasun nagusia erlatibitate orokorrean partikula azeleratu gabekoek jarraitzen duten bideak direla da. Izan ere, ekuazio geodesikoa  $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$  Newton-en legearen orokortze gisa har daiteke  $\mathbf{f} = 0$  kasurako. Eskuineko aldean terminoak gehituz indarrak sartzeko ere posible da; izan ere, erlatibitate berezian Lorentz indarraren

(1.103) adierazpenari erreparatuz, tentagarria da  $m$  masa eta  $q$  kargako partikula baten higidura-ekuazioa erlatibitate orokorrean izan beharko litzatekeela.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} . \quad (3.84)$$

Geroago hitz egingo dugu honetaz, baina egia esan zure ustea zuzena izango litzateke.

Adierazpen hauek ausardiaz eratorri ondoren, bide geodesiko baten parametrizazioari buruz hitz zainduago batzuk esan beharko genituzke. Ekuazio geodesikoa bektore ukitzailea paralelo garraiatzeko baldintza gisa aurkeztu genuenean (3.47), gure bidea  $\lambda$  parametro batekin parametrizatu genuen, espazio-denbora-tartearen muturreko (3.56) formula aurkitu genuenean, berriz, zauritu genuen. parametrizazio oso zehatz batekin gora, denbora egokia. Jakina (3.56) formatik argi dago eraldaketa bat dela

$$\tau \rightarrow \lambda = a\tau + b , \quad (3.85)$$

$a$  eta  $b$  konstante batzuetarako, ekuazioa aldaezin uzten du. Modu honetan denbora egokiarekin erlazionatutako edozein parametro **parametro afina** deritzo, eta geodesiko bat parametrizatze denbora egokia bezain ona da. (3.47) gure deribazioan ezkutatuta zegoen *bektore ukitzailea paraleloan garraiatzeko eskariak benetan kurbaren parametrizazioa mugatzen duela*, zehazki (3.58) denbora egokiarekin erlazionatutako bati. Beste era batera esanda, punturen batean eta hasierako noranzkoren batekin hasten bazara, eta gero kurba bat eraikitzen baduzu, norabide horretan ibiltzen hasiz eta zure bektore ukitzailea paraleloan garraiatuta mantenduz, bide bat definitu ez ezik (gora). eraldaketa linealetara) definitzen du parametroa ibilbidean zehar.

Noski, ez dago ezerk nahi duzun beste parametrizaziorik erabiltzea eragotziko dizu, baina orduan (3.47) ez da asetuko. Orokorrean formako ekuazio bat beteko duzu

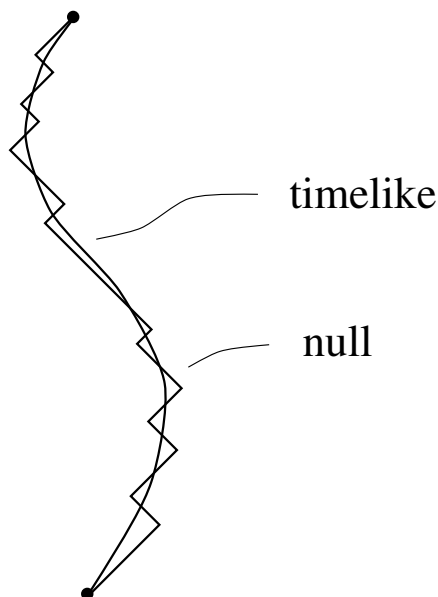
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\alpha^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\alpha} \frac{dx^\sigma}{d\alpha} = f(\alpha) \frac{dx^\mu}{d\alpha} , \quad (3.86)$$

$\alpha$  parametro batzuentzat eta  $f(\alpha)$  funtzio batzuentzat. Alderantziz, (3.59) kurba batean zehar betetzen bada, beti aurki dezakezu  $\lambda(\alpha)$  parametro afina bat zein den (3.47) ekuazio geodesikoa beteko den.

Geodesikaren propietate garrantzitsu bat lorentziar metrika duen espazio-denbora batean geodesikoaren karakterea (denbora/nulua/espazio antzekoa) (metrikoarekin bateragarria den konexio bati dagokiona) ez dela inoiz aldatzen da. Hau da, garraio paraleloak barne produktuak gordetzen dituelako, eta karakterea bektore ukitzaileak bere buruarekiko duen barne produktuak zehazten duelako. Horregatik koherenteak ginen denbora-bide hutsak kontuan hartzea (3.56) eratorri genuenean; espazio-itxurako bideetarako ekuazio bera aterako genuke, desberdintasun bakarra azken erantzunean minus zeinu orokorra baita. Geodesika nuluak ere badaude, ekuazio bera betetzen dutenak, denbora egokia ezin dela parametro gisa erabili izan ezik (baimendutako parametro multzo batzuk existituko dira, elkarren artean transformazio linealen bidez lotuta). Gertaera hau bai bektore tangentea paralelo garraiatu behar den eskakizun soiletik atera dezakezu, edo (3.48)-ren aldakuntza hedatuz espazio-itxurakoak ez diren bide guztiak barne hartzeko.



Azal dezagun orain lehenagoko oharra: denboraren antzeko geodesikoak denbora propioaren maximoak direla. Hori egia dela dakigun arrazoia zera da, edozein denbora antzeko kurba kontuan hartuta (geodesikoa edo ez), zehaztasun arbitrarioa hurbil dezakegula kurba nulu baten bidez. Horretarako egin behar dugu denboraren antzeko kurba nuluak kontuan hartzea:



Ertz zorrotzen kopurua handitzen dugun heinean, kurba nulua gero eta hurbilago dago denboraren antzeko kurbara, bide-luzera zero izanik ere. Denboraren antzeko geodesikoak ezin dira, beraz, denbora propio minimoko kurbak izan, beti baitaude zero denbora propioko kurbetatik infinitesimaki hurbil; izan ere, denbora egokia maximizatzen dute. (Horrela gogoratu dezakezu bikiaren paradoxako zein biki zahartzen den gehiago — etxean geratzen dena, funtsean, geodesiko batean dago, eta, beraz, denbora egokiagoa bizi du). Jakina, hau ere zalduntxo bat izatea da; Izan ere, “maximizatu” edo “minimizatu” esaten dugun bakoitzean “lokalki” modifikatzailea gehitu beharko genuke. Sarritan gertatzen da aniztasun bateko bi punturen artean geodesiko bat baino gehiago egotea. Adibidez,  $S^2$ -n zirkulu handi bat marraz dezakegu edozein puntutan zehar, eta imajinatu haien artean bidaia motzean edo luzean. Horietako bat, jakina, bestea baino luzeagoa da, nahiz eta biak luzera funtzionalaren puntu geldirik izan.

Geodesiari buruzko azken datua kurbatura propiora pasatu aurretik  $p$  puntu bateko ukitzaile-espazioa  $p$ -ko auzo lokal batean mapatzeko erabiltzen dutena da. Horretarako  $p$ tik igarotzen den edozein  $x^\mu(\lambda)$  geodesiko  $p$ -n duen portaeraren arabera zehaztu daitekeela ohartuko gara; aukera dezagun parametroaren balioa  $\lambda(p) = 0$  eta  $p$ -n tangente-bektorea.

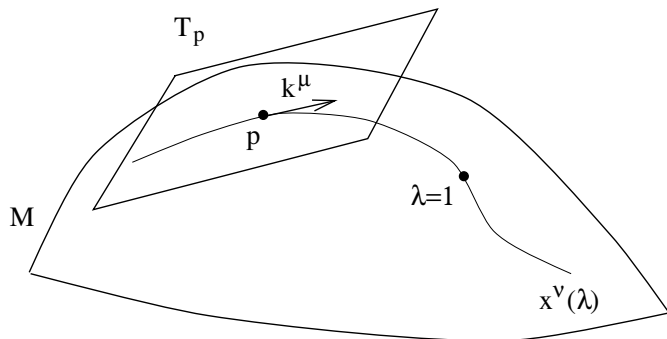
$$\frac{dx^\mu}{d\lambda}(\lambda = 0) = k^\mu, \quad (3.87)$$

$k^\mu$ rako bektoreren bat  $p$ n ( $T_p$ ren elementuren bat). Orduan, geodesiko honetan dagoen  $M$  multzoan parametroak  $\lambda = 1$  balioa duen puntu bakarra egongo da. **mapa esp-**

**nentziala**  $p$ ,  $\exp_p : T_p \rightarrow M$ -n definitzen dugu, bidez

$$\exp_p(k^\mu) = x^\nu(\lambda = 1) , \quad (3.88)$$

non  $x^\nu(\lambda)$  (3.60) gai den ekuazio geodesikoa ebazten duen. Zero bektoretik gertu dauden



$k^\mu$  ukitzaile-bektore batzuentzat, mapa hau ondo definituta egongo da, eta, hain zuzen ere, alderantzizkoa izango da. Beraz, ukitzaile-bektore multzo honetako maparen barrutiak emandako  $p$ -ren inguruan, ukitzaile-bektoreek beraiek definitzen dute koordenatu-sistema bat anizkuntzan. Koordenatu-sistema honetan,  $p$  bidezko edozein geodesiko modu hutsal batean adierazten da

$$x^\mu(\lambda) = \lambda k^\mu , \quad (3.89)$$

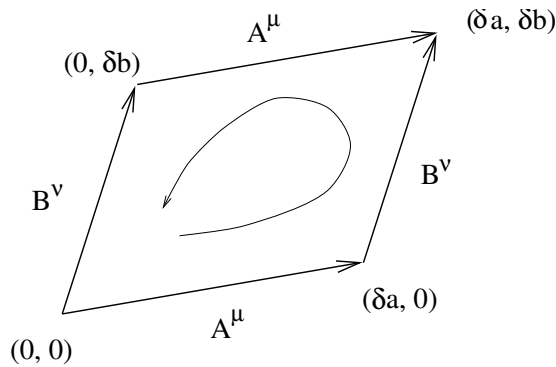
$k^\mu$  bektore egoki baterako.

Ez dugu mapa esponenzialaren propietateei buruz zehatz-mehatz sartuko, egia esan ez baitugu asko erabiliko, baina garrantzitsua da azpimarratzea maparen barrutia ez dela zertan askotariko osoa, eta domeinua ez dela. nahitaez espazio tangente osoa. Barrutiak  $M$  osoa huts egin dezake, geodesikoz konektaturik ez dauden bi puntu egon daitezkeelako. (Euklideko sinaduraren metrika batean hori ezinezkoa da, baina ez Lorentziar espazio-denbora batean). Domeinuak huts egin dezake  $T_p$  dena izatea geodesiko batekin singularitasun batekin topo egin dezakeelako, hau da, “multiplidaren ertza” deritzoguna. Singularitasun horiek dituzten aldaerak **geodesikoki osatugabea** bezala ezagutzen dira. Hau ez da matematikari arduratsuen arazoa soilik; izan ere, Hawking eta Penrose-ren “singularitasun teoremek” diote, arrazoizko materia edukiagatik (energia negatiborik gabe), espazio-denborak erlatibitate orokorrean geodesikoki osatugabeak direla ia bermatuta dagoela. Adibide gisa, GR-ko bi espazio-denbora erabilgarriak — zulo beltzak deskribatzen dituen Schwarzschild soluzioak eta kosmologia homogeen eta isotropikoak deskribatzen dituen Friedmann-Robertson-Walker soluzioak — biek ezaugarri garrantzitsuak dituzte.

Garraio paraleloaren eta deribatu kobarianteen makineria ezarrita, azkenean prest gaude kurbadura propioa eztabaidatzeko. Kurbadura Riemann-en tentsoreak kuantifikatzen du, konexiotik eratorritakoa. Kurbadura-neurri honen atzean dagoen ideia zera da: badakigu zer esan nahi dugun konexio baten “lautasuna” — metrika euklidear edo minkowskian batekin lotutako Christoffel-en konexio konbentzionalak (eta normalean inplizituak) hainbat propietate ditu. lautasunaren agerpen ezberdin gisa pentsatuta.

Besteak beste, begizta itxi baten inguruko garraio paraleloak bektore bat aldatu gabe uzten duela, tentsoreen deribatu kobarianteak ibiltzen direla eta hasieran paralelo geodesikoak paralelo mantentzen direla. Ikusiko dugunez, Riemann-en tentsorea sortzen da propietate horietako edozein testuinguru orokorragoetan nola aldatzen den aztertzen dugunean.

Dagoeneko argudiatu dugu, bi esfera adibide gisa hartuta, espazio kurbatu batean begizta itxi baten inguruan bektore baten garraio paraleloak bektorearen eraldaketa ekarriko duela. Sortzen den transformazioa begiztak itxitako kurbadura osoaren arabera da; erabilgarriagoa litzateke puntu bakoitzean kurbaduraren tokiko deskribapena izatea, hau da, Riemann-en tentsoreak eman behar duela. Beraz, Riemann tentsorea sartzeko ohiko modu bat begizta infinitesimal baten inguruan garraio paraleloa kontuan hartzea da. Hemen ez dugu hori egingo, bide zuzenagoa baizik. (Literaturako aurkezpen gehienak lerdoak edo zuzenak dira, baina oso zailak dira). Hala ere, xehetasunak landu gabe ere, erantzunak zein forma izan behar duen ikus daiteke. Imaginatu  $V^\sigma$  bektore bat  $A^\nu$  eta  $B^\mu$  bi bektoreek definitutako begizta itxi baten inguruan garraiatzen dugula:



Begiztaren aldean luzera (infinitesimalak)  $\delta a$  eta  $\delta b$  dira, hurrenez hurren. Orain, badakigu garraio paraleloaren ekintza koordinatuetatik independentea dela, beraz, bektorea bere hasierako puntura itzultzean nola aldatzen den adierazten duen tentsoreen bat egon beharko litzateke; bektore baten gaineko transformazio lineala izango da, eta beraz, goiko indize bat eta beheko indize bat izango da. Baina begizta definitzen duten  $A$  eta  $B$  bi bektoreen arabera ere izango da; beraz,  $A^\nu$  eta  $B^\mu$ -ekin kontratatzeko beste bi indize baxuago egon beharko lirateke. Gainera, bi indize hauetan tentsorea antisimetrikoa izan behar da, bektoreak trukatzeari begizta kontrako noranzkoan zeharkatzeari baitagokio, eta jatorrizko erantzunaren alderantzizkoa eman beharko luke. (Hau koherentea da transformazioa desagertu egin behar dela  $A$  eta  $B$  bektore bera badira). Beraz, espero dugu bektore honek begiztaren inguruan paraleloan garraiatzen duenean jasaten duen  $\delta V^\rho$  aldaketaren adierazpena modukoa izatea.

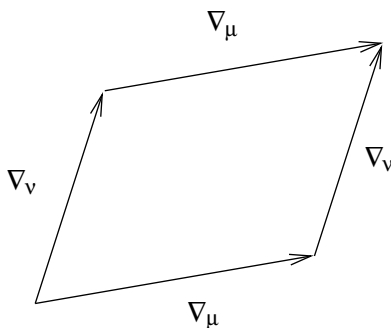
$$\delta V^\rho = (\delta a)(\delta b) A^\nu B^\mu R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \quad (3.90)$$

non  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  **Riemann tentsorea** izenez ezagutzen den  $(1,3)$  tentsore bat den (edo “kurbadura tentsorea” besterik gabe). Antisimetrikoa da azken bi indizeetan:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu}. \quad (3.91)$$

(Noski, (3.63) Riemann tentsorearen definiziotzat hartzen bada, badago indizeak ordenatzeko konbentzio bat aukeratu behar dena. Ez dago batere adostasunik hitzarmen honek zer izan behar duen, beraz, kontuz ibili.)

Garraio paraleloari buruz zer egiten dugun jakinda, kontu handiz egin genitzake beharrezko manipulazioak eragiketa honen pean bektorearekin zer gertatzen den ikusteko, eta emaitza konexio-koefizienteen arabera kurbadura-tentsorearen formula izango litzateke. Askoz azkarragoa da, ordea, erlazionatutako eragiketa bat kontuan hartzea, bi deribatu kobarianteen konmutatzailea. Begizta baten inguruan horren eta garraio paraleloaren arteko erlazioa agerikoa izan behar da; tentsorea norabide jakin batean duen deribatu kobariantek tentsorea zenbat aldatzen den neurtzen du paraleloan garraiatu izan balitz izango litzatekeenarekiko (paralelo garraiatzen den noranzko bateko tentsorearen deribatu kobariantea nulua baita). Bi deribatu kobarianteen konmutatzaileak, beraz, tentsorea lehenik alde batetik eta gero bestera paraleloan garraiatzeko arteko aldea neurtzen du, kontrako ordenamenduaren aldean.



Benetako kalkulua oso erraza da.  $V^\rho$  eremu bektoriala kontuan hartuta, hartuko dugu

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \quad (3.92)$$

$$= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (3.93)$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma \quad (3.94)$$

$$+ \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (3.95)$$

$$= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho. \quad (3.96)$$

Azken urratsean, indize simulatu batzuk berriro etiketatu ditugu eta antisimetrizatzearn bertan behera uzten diren termino batzuk ezabatu ditugu. Aitortzen dugu azken terminoa tortsio-tentsorea besterik ez dela eta ezkerreko aldea, agerian, tentsorea dela; beraz, parentesi arteko adierazpenak tentsorea bera izan behar du. Guk idazten dugu

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho, \quad (3.97)$$

non Riemann tentsorea identifikatzen den

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (3.98)$$

Adierazpen honen eratorpenari buruz hainbat gauza nabaritu behar dira:

- Jakina, ez dugu frogatu (3.67) benetan (3.63)-n agertu zen tentsore bera denik, baina egia da egia da (ikus Wald froga sinesgarri bada ere bihurtu baterako).
- Agian harrigarria da  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$  konmutadorak, operadore diferentziala dirudiena, eremu bektorialetan (torsiorik ezean, nolanahi ere) transformazio biderkatzaile soil bat den ekintza bat izatea. Riemann-en tentsoreak eremu bektorialarekiko proportzionala den deribatu kobarianteen komunztagailuaren zati hori neurtzen du, eta tortsio-tentsorea, berriz, eremu bektorialaren deribatu kobariantearekiko proportzionala den zatia neurtzen du; bigarren deribatua ez da batere sartzen.
- Kontuan izan (3.67) adierazpena elementu ez-tentsorialetatik eraikia dela; egiazta dezakezu eraldaketa-lege guztiak funtzionatzen dutela konbinazio jakin hau tentsore legitimo bihurtzeko.
- $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ -ren antisimetria bere azken bi indizeetan berehalakoa da formula honetatik eta bere deribaziotik.
- Kurbadura-tentsorea guztiz konexiotik eraiki genuen (ez zen metrikaren aipamenik egin). Nahikoa kontuz ibili ginen goiko adierazpena edozein konexiotarako egia izan zedin, metrika bateragarria den edo torsiorik gabekoa izan ala ez.
- Gaur egun gure ohiko metodoak erabilita,  $[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]$ -ren ekintza maila arbitrarioko tentsore batean kalkula daiteke. Erantzuna da

$$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = -T_{\rho\sigma}^\lambda \nabla_\lambda X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (3.99)$$

$$+ R^{\mu_1}_{\lambda\rho\sigma} X^{\lambda\mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + R^{\mu_2}_{\lambda\rho\sigma} X^{\mu_1\lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots \quad (3.100)$$

$$- R^\lambda_{\nu_1\rho\sigma} X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda\nu_2 \dots \nu_l} - R^\lambda_{\nu_2\rho\sigma} X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1\lambda \dots \nu_l} - \dots \quad (3.101)$$

Nozio erabilgarria da  $X$  eta  $Y$  bi eremu bektorialen konmutadorarena, osagaiak dituen hirugarren eremu bektoriala dena.

$$[X, Y]^\mu = X^\lambda \partial_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \partial_\lambda X^\mu . \quad (3.102)$$

Biak mapa multilineal gisa pentsatutako Torsio-tentsorea zein Riemann-en tentsorea, komunztagailuaren aldetik adierazpen dotoreak dituzte. Torsioa bi eremu bektorialetatik hirugarren eremu bektorial baterako mapa gisa pentsatuz, dugu

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] , \quad (3.103)$$

eta Riemann-en tentsorea hiru eremu bektorialetatik laugarrenera dagoen mapa gisa pentsatuz, dugu

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z . \quad (3.104)$$

Adierazpen hauetan,  $\nabla_X$  notazioa  $X$  eremu bektorialean zehar deribatu kobarianteari egiten dio erreferentzia; osagaietan,  $\nabla_X = X^\mu \nabla_\mu$ . Kontuan izan (3.71)  $X$  eta  $Y$  bi

bektoreak Riemann-en tentsorearen osagai formako bi indize antisimetrikoei dagozkiela. (3.71)-ko azken terminoa,  $[X, Y]$  konmutatzailea inplikutzen duena, desagertzen da  $X$  eta  $Y$  koordenatu-oinarri-eremu bektorialtzat hartzen direnean ( $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$  geroztik), eta horregatik ez da termino hau sortu dugunean. jatorriz bi deribatu kobarianteren konmutatzailea hartu zuen. Ez dugu idazkera hau asko erabiliko, baina agian literaturan ikusiko duzu, beraz, deskodetu ahal izango zenuke.

Kurbadura-tentsorea konexioa ezaugarritzen duen zerbait bezala definitu ondoren, onar dezagun orain GR-n Christoffel-en konexioaz arduratzen garela gehien. Kasu hone-tan konexioa metrikatik eratortzen da, eta lotutako kurbadura metrika bera dela pentsa daiteke. Identifikazio honek, azkenean, metrika euklidearra edo minkowskian dirudien espazioak lauak direla dioen gure nozio informalarri zentzua ematen digu. Izan ere, bi eratara funtzionatzen du: metrikaren osagaiak koordenatu-sistemaren batean konstante-ak badira, Riemann-en tentsorea desagertuko da, eta Riemann-en tentsorea desagertzen bada beti eraiki dezakegu koordenatu-sistema bat zeinetan osagai metrikoak konstanteak diren.

Horietako lehenengoa erraza da erakusteko.  $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$  bezalako koordenatu-sistemaren batean bagaude (nonahi, ez puntu batean bakarrik), orduan  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$  eta  $\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$ ; be-raz,  $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$  (3.67). Baina hau ekuazio tentsorial bat da, eta koordenatu-sistema batean egia bada, edozein koordenatu-sistematan egia izan behar du. Beraz, Riemann-en tentsorea desagertu egiten dela dioen adierazpena beharrezko baldintza da  $g_{\mu\nu}$ -ren osagaiak nonahi konstanteak diren koordenatuak aurkitzeko.

Baldintza nahikoa ere bada, erakusteko lan gehiago egin behar dugun arren. Hasi Riemann-en koordenatu normalak aukeratzen  $p$  punturen batean,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$   $p$ -n izan dadin. (Hemen  $\eta_{\mu\nu}$  zentzu orokorrean erabiltzen ari gara,  $+1$  edo  $-1$  elementu diago-nal bakoitzerako eta zeroak beste nonbait dituen matrize gisa.  $+1$  eta  $-1$ -en benetako antolamendua metrikaren forma kanonikoaren arabera da, baina ez du garrantzirik oraingo argumenturako.) Adierazi  $p$ -ko oinarritzko bektoreak  $\hat{e}_{(\mu)}$  bidez,  $\hat{e}_{(\mu)}^\sigma$  osagaiekin. Gero eraikuntzaz dugu

$$g_{\sigma\rho} \hat{e}_{(\mu)}^\sigma \hat{e}_{(\nu)}^\rho(p) = \eta_{\mu\nu} . \quad (3.105)$$

Orain, garraiatu dezagun paraleloki oinarritzko bektoreen multzo osoa  $p$   $q$  beste puntu batera; Riemann tentsorea desagertzeak emaitza  $p$  eta  $q$  artean egindako bidetik indepen-dentea izango dela ziurtatzen du. Konexio metriko bateragarri bati dagokionez garraio paraleloak barne produktuak gordetzen dituenek, izan behar dugu

$$g_{\sigma\rho} \hat{e}_{(\mu)}^\sigma \hat{e}_{(\nu)}^\rho(q) = \eta_{\mu\nu} . \quad (3.106)$$

Beraz, osagai metrikoak konstanteak diren oinarri bat definitzen duten eremu bektorialen multzoa zehaztu dugu. Hau guztiz ikusgarria da; edozein manifoldetan egin daiteke, kurbadura zein den kontuan hartu gabe. Erakutsi nahi genukeena da hau koordenatu-oinarri bat dela (kurbadura desagertzen bada bakarrik egia izan daitekeena). Badakigu  $\hat{e}_{(\mu)}$ -ak koordenatu-oinarria badira, haien konmutadorea desagertu egingo dela:

$$[\hat{e}_{(\mu)}, \hat{e}_{(\nu)}] = 0 . \quad (3.107)$$

Benetan gustatuko litzaigukeena alderantzizkoa da: konmutadorea desagertzen bada  $y^\mu$  koordenatuak aurki ditzakegula  $\hat{e}_{(\mu)} = \frac{\partial}{\partial y^\mu}$ . Izan ere hau egiazko emaitza da, **Frobenius-en teorema** izenez ezagutzen dena. Nahastea da frogatzea, konfiguratu nahi izan duguna baino aparatu matematiko askoz gehiago inplikatzeko duena. Har dezagun beretzat (eszeptikoei Schutzen *Geometrical Methods* liburua kontsulta dezakete). Beraz, (3.74) erakutsi nahi dugu ezarri ditugun eremu bektorialetarako. Erabili dezagun (3.70) esamoldea tortsiorako:

$$[\hat{e}_{(\mu)}, \hat{e}_{(\nu)}] = \nabla_{\hat{e}_{(\mu)}} \hat{e}_{(\nu)} - \nabla_{\hat{e}_{(\nu)}} \hat{e}_{(\mu)} - T(\hat{e}_{(\mu)}, \hat{e}_{(\nu)}) . \quad (3.108)$$

Torsioa hipotesiaren arabera desagertzen da. Deribatu kobarianteak ere desagertuko dira, gure eremu bektorialak eraiki genituen metodoa kontuan hartuta; bide arbitrarioetan zehar garraiatzen paraleloan egiten ziren. Eremuak bide arbitrarioetan zehar paralelo garraiatzen badira, zalantzarik gabe,  $\hat{e}_{(\mu)}$  bektoreetan zehar paralelo garraiatzen dira, eta, beraz, bektore horien norabidean dituzten deribatu kobarianteak desagertu egingo dira. Beraz (3.70) konmutadorea desagertu egiten dela esan nahi du, eta, beraz,  $y^\mu$  eremu bektorial hauek deribatu partzialak diren koordenatu-sistema bat aurki dezakegula. Koordenatu-sistema honetan metrikak  $\eta_{\mu\nu}$  osagaiak izango ditu, nahi bezala.

Riemann tentsorea, lau indize dituen, inozoki  $n^4$  osagai independenteak ditu  $n$  dimentsioko espazio batean. Izan ere (3.64) antisimetria propietateak esan nahi du azken bi indize hauek har ditzaketen  $n(n-1)/2$  balio independenteak baino ez daudela,  $n^3(n-1)/2$  osagai independenteak utziz. Christoffel konexioa kontuan hartzen dugunean, ordea, badira osagai independenteak gehiago murrizten dituzten beste simetria batzuk. Kontuan ditzagun hauek orain.

Simetria gehigarri hauek ateratzeko modurik errazena Riemann tentsorea indize baxu guztiekin aztertzea da,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda_{\sigma\mu\nu} . \quad (3.109)$$

Azter ditzagun tentsore honen osagaiak  $p$  puntu batean ezarritako Riemann koordenatu normaletan. Orduan Christoffelen ikurak beraiek desagertuko dira, nahiz eta haien eratorriak ez. Badugu, beraz

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}) \quad (3.110)$$

$$= \frac{1}{2} g_{\rho\lambda} g^{\lambda\tau} (\partial_\mu \partial_\nu g_{\sigma\tau} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu \partial_\tau g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\sigma\tau} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu \partial_\tau g_{\mu\sigma}) \quad (3.111)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}) . \quad (3.112)$$

Bigarren lerroan  $\partial_\mu g^{\lambda\tau} = 0$  erabili dugu RNC-etan, eta hirugarren lerroan partzialak joan-etorri egiten direla. Adierazpen honetatik berehala antzeman ditzakegu  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  ren bi propietate; antisimetrikoa da bere lehen bi indizeetan,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} , \quad (3.113)$$

eta aldaezina da lehenengo indize bikotea bigarrenarekin trukatzuz:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} . \quad (3.114)$$

Lan pixka bat gehiagorekin, zure irudimenean uzten duguna, azken hiru indizeen permutazio ziklikoen batura desagertzen dela ikus dezakegu:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \quad (3.115)$$

Azken propietate hau azken hiru indizeen zati antisimetrikoaren desagertzearen balioki-dea da:

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0. \quad (3.116)$$

Propietate horiek guztiak koordinatu-sistema berezi batean atera dira, baina denak tentsore-ekuazioak dira; beraz, egiazkoak izango dira edozein koordinatutan. Denak ez dira independenteak; ahalegin pixka batekin, (3.64), (3.78) eta (3.81) batera (3.79) dakartela erakutsi dezakezu. Ekuazioaren elkarrekiko mendekotasun logikoa egia izateak baino garrantzi txikiagoa izan ohi du.

Riemann-en tentsorearen osagai ezberdinen arteko erlazio hauek kontuan hartuta, zenbat kantitate independente geratzen dira? Has gaitezen  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  antisimetrikoa dela lehenengo bi indizeetan, antisimetrikoa azken bi indizeetan eta simetrikoa bi bikote horien trukean. Horrek esan nahi du  $R_{[\rho\sigma][\mu\nu]}$  matrize simetriko gisa pentsa dezakegula, non  $\rho\sigma$  eta  $\mu\nu$  bikoteak indize indize gisa hartzen diren.  $m \times m$  matrize simetriko batek  $m(m+1)/2$  osagai independenteak ditu, eta  $n \times n$  matrize antisimetrikoak, berriz,  $n(n-1)/2$  osagai independenteak. Badugu, beraz

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}n(n-1) \right] \left[ \frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right] = \frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n) \quad (3.117)$$

osagai independenteak. Oraindik (3.81) simetria gehigarriari aurre egin behar diogu. (3.81)ren berehalako ondorioa da Riemann-en tentsorearen zati guztiz antisimetrikoa desagertzen dela,

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0. \quad (3.118)$$

Izan ere, ekuazio hau gehi gainerako simetriak (3.64), (3.78) eta (3.79) nahikoak dira (3.81) inplikatzeko, (3.83) zabalduz eta ondoriozko terminoekin nahastuz erraz ikus daitekeen bezala. Beraz, (3.83) murrizketa gehigarria ezartzea (3.81) inposatzearen baliokidea da, beste simetriak kontuan hartu ondoren. Zenbat murrizketa independente adierazten ditu honek? Imajina dezagun deskonposatzen

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = X_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{[\rho\sigma\mu\nu]}. \quad (3.119)$$

Erraz ikusten da guztiz antisimetrikoa den 4 indizeko tentsore oro automatikoki antisimetrikoa dela bere lehenengo eta azken indizeetan, eta simetrikoa bi bikoteen trukean. Beraz, propietate hauek  $X_{\rho\sigma\mu\nu}$ -ren muga independenteak dira, (3.83) eskakizunarekin zerikusirik ez dutenak. Orain guztiz antisimetriko 4-indizeko tentsore batek  $n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$  terminoak ditu, eta, beraz, (3.83) osagai independenteen kopurua kopuru horretan murrizten du. Gurekin geratzen gara

$$\frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1) \quad (3.120)$$



Riemann tentsorearen osagai independenteak.

Lau dimentsiotan, beraz, Riemann tentsorea 20 osagai independente ditu. (Dimentsio batean ez du.) Hogeia funtzio hauek metrikaren bigarren deribatuetako 20 askatasun graduak dira, koordinatuen aukeraketa burutsu baten bidez zeroan jarri ezin genituzkeenak. Horrek Riemann-en tentsorea kurbadura-neurri egokia den konfiantza indartu beharko luke.

Riemann-en tentsorearen simetria aljebraikoez gain (edozein puntutan osagai independenteen kopurua mugatzen dutenak), badago betetzen duen identitate diferentzial bat (puntu ezberdinetan bere balio erlatiboak mugatzen dituenak). Demagun Riemann tentsorearen deribatu kobariantea, Riemann-en koordinatu normaletan ebaluatua:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \partial_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (3.121)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\lambda (\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}) . \quad (3.122)$$

Lehenengo hiru indizeen permutazio ziklikoen batura kontuan hartu nahiko guke:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} \quad (3.123)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} \quad (3.124)$$

$$+ \partial_\rho \partial_\mu \partial_\lambda g_{\sigma\nu} - \partial_\rho \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\rho \partial_\nu \partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\rho \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\lambda} \quad (3.125)$$

$$+ \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\rho g_{\lambda\mu} + \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\rho}) \quad (3.126)$$

$$= 0 . \quad (3.127)$$

Berriro ere, tentsoreen arteko ekuazioa denez, edozein koordinatu-sistematan egia da, nahiz eta jakin batean deribatu dugu. Honezkero aitortzen dugu  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$  antisimetriak emaitza hau honela idazteko aukera ematen duela

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 . \quad (3.128)$$

Hau **Bianchi identitatea** izenez ezagutzen da. (Kontuan izan konexio orokor baterako Torsio-tentsorea duten termino osagarriak egongo liratekeela.) Jacobi identitatearekin oso lotuta dago, (erakuts dezakegunez) funtsean adierazten baitu

$$[[\nabla_\lambda, \nabla_\rho], \nabla_\sigma] + [[\nabla_\rho, \nabla_\sigma], \nabla_\lambda] + [[\nabla_\sigma, \nabla_\lambda], \nabla_\rho] = 0 . \quad (3.129)$$

Askotan erabilgarria da Riemann-en tentsorearen uzkurdurak kontuan hartzea. Nahiz eta metrikarik gabe, **Ricci tentsorea** izenez ezagutzen den uzkurdura osa dezakegu:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} . \quad (3.130)$$

Kontuan izan, konexio arbitrario batetik (ez derrigor Christoffel) osatutako kurbadura-tentsorea egiteko, hainbat uzkurdura independente hartu behar direla. Gure kezka nagusia Christoffel-en konexioa da, zeinaren (3.90) uzkurdura independente bakarra (modulokontzentzioak zeinurako, noski leku batetik bestera aldatzen direnak). Christoffel konexioarekin lotutako Ricci tentsorea simetrikoa da,

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} , \quad (3.131)$$

Riemann tentsorearen hainbat simetrien ondorioz. Metrikoa erabiliz, uzkuradura gehiago har dezakegu **Ricci eskalarra** osatzeko:

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (3.132)$$

Bianchi identitatearen forma bereziki erabilgarria (3.87) bi aldiz kontratatzetik dator:

$$0 = g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) \quad (3.133)$$

$$= \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} , \quad (3.134)$$

edo

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\rho R . \quad (3.135)$$

(Kontuan izan, deribatu partziala ez bezala, zentzuzkoa dela deribatu kobariantearen indize bat igotzea, bateragarritasun metrikoa dela eta.) **Einstein tentsorea** honela definitzen badugu

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} , \quad (3.136)$$

orduan ikusten dugu bi aldiz uzkurtutako Bianchi identitatea (3.94) baliokidea dela

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.137)$$

Einstein tentsorea, Ricci tentsorearen eta metrikoaren simetriaren ondorioz simetrikoa dena, garrantzi handia izango du erlatibitate orokorrean.

Ricci tentsorea eta Ricci eskalarra Riemann tentsorearen “arrastoei” buruzko informazioa dute. Batzuetan erabilgarria da Riemann-en tentsorearen piezak bereizita kontuan hartzea, Ricci-ren tentsoreak esaten ez dizkigunak. Beraz, **Weyl tentsorea** asmatzen dugu, hau da, funtsean, Riemann-en tentsorea uzkuradura guztiak kenduta.  $n$  dimentsioetan ematen da

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{(n-2)} (g_{\rho[\mu} R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu} R_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma} . \quad (3.138)$$

Formula nahasi hau  $C_{\rho\sigma\mu\nu}$ -ren kontrakzio posible guztiak desagertzeko diseinatuta dago, Riemann-en tentsorearen simetriak mantentzen dituen bitartean:

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = C_{[\rho\sigma][\mu\nu]} , \quad (3.139)$$

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = C_{\mu\nu\rho\sigma} , \quad (3.140)$$

$$C_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0 . \quad (3.141)$$

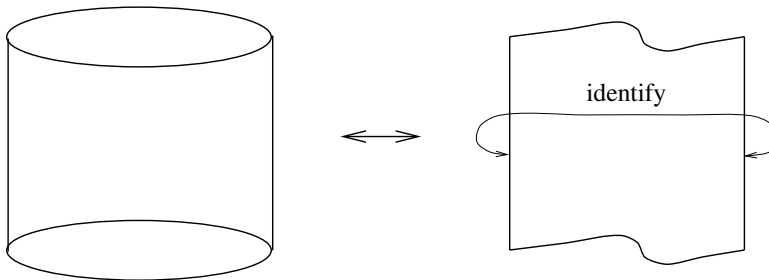
Weyl tentsorea hiru dimentsiotan edo gehiagotan bakarrik definitzen da, eta hiru dimentsiotan berdin desagertzen da.  $n \geq 4$ -rako Bianchi identitatearen bertsio bat betetzen du,

$$\nabla^\rho C_{\rho\sigma\mu\nu} = -2 \frac{(n-3)}{(n-2)} \left( \nabla_{[\mu} R_{\nu]\sigma} + \frac{1}{2(n-1)} g_{\sigma[\nu} \nabla_{\mu]} R \right) . \quad (3.142)$$

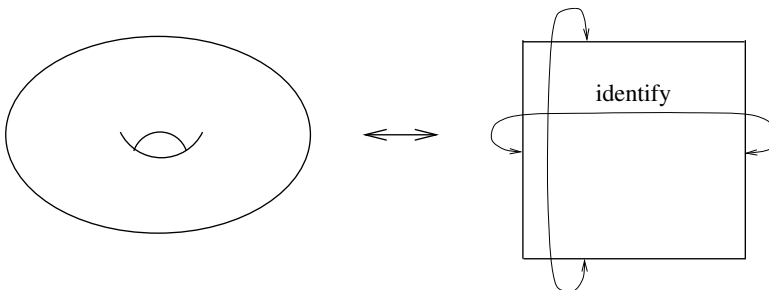
Weyl tentsorearen propietate garrantzitsuenetako bat **transformazio konformaletan** aldaezina dela da. Horrek esan nahi du  $C_{\rho\sigma\mu\nu} g_{\mu\nu}$  metrika baterako kalkulatzeko baduzu eta, ondoren, berriro kalkulatzeko baduzu  $\Omega^2(x)g_{\mu\nu}$ -k emandako metrika baterako, non  $\Omega(x)$  espazio-denboraren funtzio ez-desagertzen den arbitrarioa den, erantzun bera jasoko duzu. Horregatik “tentsorea konformala” izenez ezagutzen da sarri.

Formalismo kopuru handi horren ostean, baliteke atzera egiteko garaia eta pentsatzeko makurdurak zer esan nahi duen adibide simple batzuentzat. Lehenik eta behin, ohartu (3.85) arabera, 1, 2, 3 eta 4 dimentsioetan kurbadura-tentsorea 0, 1, 6 eta 20 osagai daukela, hurrenez hurren. (Adibide hauetan kurbadurari buruz esaten dugun guztia Christoffel konexioarekin lotutako kurbadurari dagokio, eta, beraz, metrika). Horrek esan nahi du dimentsio bakarreko aldagaiak ( $S^1$  adibidez) inoiz ez direla kurbatuak; zirkulu bat kurbatua dela esaten dizun intuizioa bi dimentsioko plano lau jakin batean txertatuta pentsatzetik dator. («Kurbadura extrintsekoa» izeneko zerbait dago, dimentsio handiko espazio batean zerbait txertatzeko modua ezaugarritzen duena. Gure kurbaduraren nozioa “berezkoa” da, eta ez du zerikusirik horrelako txertatzeekin).

Kurbadura intrintsekoa eta kanpokoaren arteko bereizketa ere garrantzitsua da bi dimentsiotan, non kurbadurak osagai independente bat duen. (Izan ere, kurbadurari buruzko informazio guztia Ricci eskalaren osagai bakarrean dago.) Demagun zilindro bat,  $\mathbb{R} \times S^1$ . Gure ikuspuntutik kurbatua dirudien arren, argi izan behar dugu koordenatu-



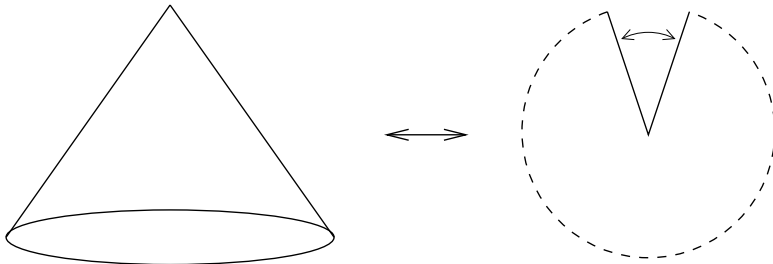
sistema egoki batean konstanteak diren osagaiak konstanteak diren zilindroari metrika bat jar genezakeela — desegin eta planotik induzitutako metrika erabili. Metriko honetan, zilindroa lau da. (Zilindroa lau ez den beste metrika bat sartzea eragozten digunik ere ez dago, baina azpimarratzen saiatzen ari garen puntua metrika batzuetan lau egin daitekeela da.) Istorio bera gertatzen da toroarentzat:



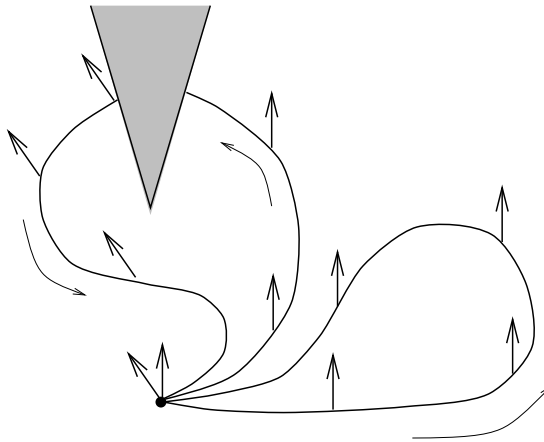
Toroa alde kontrakoak identifikatuta dituen planoaren eskualde karratu gisa pentsa de-

zakegu (hau da,  $S^1 \times S^1$ ), eta hortik argi dago metrika laua izan dezakeela, nahiz eta txertatutako ikuspuntutik kurbatua izan. .

Konoa puntu batean zehatz-mehatz puntu batean kurbadura ez den nulua ez den bi dimentsioko aldagai baten adibidea da. Hori zabalduz ere ikus dezakegu; konoa “defizit-angelua” kendu eta kontrako aldeak identifikatu dituen planoaren baliokidea da:



Plano lauaren parte gisa deskribapen honetatik heredatutako metrikari, konoa laua da nonahi baina bere erpinean. Hori ikus daiteke bektore baten garraio paraleloa hainbat begiztan inguruan; Begizta batek erpina biltzen ez badu, ez da eraldaketa orokorrik izango, eta, aldiz, erpina biltzen duen begiztak (esaterako, denbora bakarra) angelu defizit bat besterik ez den angelu baten biraketa ekarriko du.



Gure adibiderik gogokoena, noski, bi esfera da, metrikarekin

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (3.143)$$

non  $a$  esferaren erradioa den ( $\mathbb{R}^3$ -n txertatuta dagoela pentsatua). Xehetasunetara joan gabe, konexio koefiziente nuluak dira

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta \quad (3.144)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot \theta . \quad (3.145)$$

Kalkula dezagun Riemann tentsorearen osagai itxaropentsu bat:

$$R^\theta_{\phi\theta\phi} = \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\theta\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\lambda} \Gamma^\lambda_{\phi\phi} - \Gamma^\theta_{\phi\lambda} \Gamma^\lambda_{\theta\phi} \quad (3.146)$$

$$= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - (0) + (0) - (-\sin \theta \cos \theta)(\cot \theta) \quad (3.147)$$

$$= \sin^2 \theta . \quad (3.148)$$

(Notazioa imperfektua da, jakina,  $\lambda$  greziar hizkia gehitzen den indize finko bat baita, eta  $\theta$  eta  $\phi$  greziar letrak koordenatu zehatzak adierazten dituzten bitartean.) Indize bat jaitsiz, dugu

$$R_{\phi\theta\phi} = g_{\theta\lambda} R^\lambda_{\phi\theta\phi} \quad (3.149)$$

$$= g_{\theta\theta} R^\theta_{\phi\theta\phi} \quad (3.150)$$

$$= a^2 \sin^2 \theta . \quad (3.151)$$

Erraza da egiaztatzea Riemann-en tentsorearen osagai guztiak desagertzen direla edo honekin erlazionatuta daudela simetria. Ricci tentsorea kalkulatzeko joan gaitezke  $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$  bidez. Lortzen dugu

$$R_{\theta\theta} = g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi} = 1 \quad (3.152)$$

$$R_{\theta\phi} = R_{\phi\theta} = 0 \quad (3.153)$$

$$R_{\phi\phi} = g^{\theta\theta} R_{\theta\phi\phi} = \sin^2 \theta . \quad (3.154)$$

Ricci eskalarra ere erraza da:

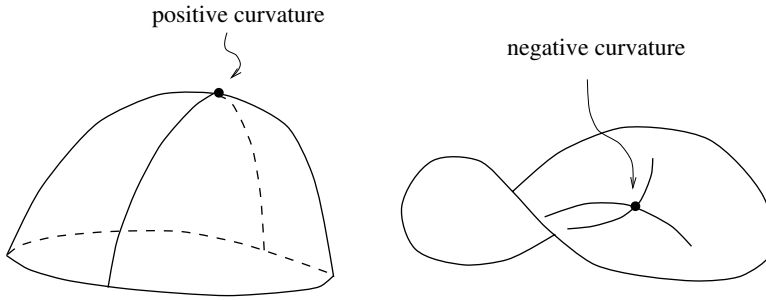
$$R = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{2}{a^2} . \quad (3.155)$$

Beraz, Ricci eskalarra, bi dimentsioko anizkuntzetarako kurbadura guztiz ezaugarritzen duena, bi esfera honen gaineko konstantea da. Hau anizkuna “gehienez simetrikoa” izatearen isla da, geroago zehatzago definituko dugun kontzeptua (zuk uste duzuna esan nahi duen arren). Edozein dimentsiotan espazio simetriko maximo baten kurbadurak betetzen du ( $a$  konstante baterako)

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = a^{-2}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) , \quad (3.156)$$

egiaztatu dezakezuna adibide honekin betetzen dela.

Kontuan izan Ricci eskalarra ez dela konstantea bi esferetarako bakarrik, agerikoa positiboa dela. Esfera “positiboki kurbatua” dela esaten dugu (noski konbentzio bat edo bi sartu ziren jokoan, baina zorionez gure konbentzioek konspiratu zuten, denek positiboki kurbatuta deitzea onartzen duten espazioek Ricci eskalar positiboa izan dezaten). Dimentsio handiagoko espazio euklidear batean txertatuta dagoen anizkuntze batean bizi den norbaiten ikuspuntutik, kurbadura positiboko puntu batean eserita baldin badago, espazioa bertatik urruntzen da modu berean edozein norabidetan, negatiboki dagoen bitartean. espazio kurbatua kontrako noranzkoetan kurbatzen du. Negatiboki kurbatutako espazioak, beraz, jarleku itxurakoak dira.



Nahikoa dibertigarria adibideekin. Bada erlatibitate orokorra bera sartu aurretik landu behar dugun gai bat gehiago: desbideratze geodesikoa. Ezbairik gabe, geometria euklidearren (laua) definitzen duen propietatea paralelo postulatu dela entzun duzu: hasiera batean zuzen paraleloak paraleloak dira betiko. Jakina, espazio kurbatu batean hori ez da egia; esfera batean, zalantzarik gabe, hasieran geodesiko paraleloak gurutzatuko dira azkenean. Portaera hori kuantifikatu nahiko genuke espazio kurbatu arbitrario baterako.

Arazoa da “paralelo” nozioa ez dela berez hedatzen espazio lauetatik kurbatuetara. Horren orde egingo duguna da parametro bakarreko geodesikoen familia bat eraikitzea,  $\gamma_s(t)$ . Hau da,  $s \in \mathbb{R}$  bakoitzeko,  $\gamma_s$   $t$  parametro afinak parametrizatutako geodesiko bat da. Kurba hauen bildumak bi dimentsioko gainazal leun bat definitzen du (dimentsio arbitrarioko  $M$  anizkun batean txertatua). Gainazal honetako koordenatuak  $s$  eta  $t$  izan daitezke, baldin eta gurutzatzen ez diren geodesikoen familia bat aukeratu badugu. Gainazal osoa  $x^\mu(s, t) \in M$  puntuen multzoa da. Bi eremu bektorial natural ditugu: geodesikoekiko ukitzaille-bektoreak,

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} , \quad (3.157)$$

eta “desbideratze bektoreak”

$$S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s} . \quad (3.158)$$

Izen hau  $S^\mu$  geodesiko batetik aldamenekoetara seinalatzen duen nozio informaletik dator.

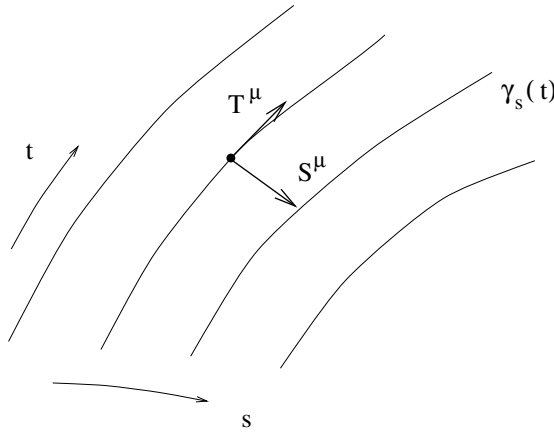
$S^\mu$  geodesiko batetik bestera seinalatzen duen ideiak “geodesikoen abiadura erlatiboa” definitzera bultzatzen gaitu.

$$V^\mu = (\nabla_T S)^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu , \quad (3.159)$$

eta “geodesikaren azelerazio erlatiboa”

$$a^\mu = (\nabla_T V)^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu . \quad (3.160)$$

Izenak gatz ale batekin hartu behar dituzu, baina bektore hauek ondo definituta daude, zalantzarik gabe.



$S$  eta  $T$  koordenatu-sistema batera egokitutako oinarritzko bektoreak direnez, haien konmutadorea desagertu egiten da:

$$[S, T] = 0 .$$

Torsioa desagertzen den kasu konbentzionala kontuan hartu nahiko genuke, beraz (3.70) dugu orduan

$$S^\rho \nabla_\rho T^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu . \quad (3.161)$$

Hau kontuan izanda, kalkula dezagun azelerazioa:

$$a^\mu = T^\rho \nabla_\rho (T^\sigma \nabla_\sigma S^\mu) \quad (3.162)$$

$$= T^\rho \nabla_\rho (S^\sigma \nabla_\sigma T^\mu) \quad (3.163)$$

$$= (T^\rho \nabla_\rho S^\sigma) (\nabla_\sigma T^\mu) + T^\rho S^\sigma \nabla_\rho \nabla_\sigma T^\mu \quad (3.164)$$

$$= (S^\rho \nabla_\rho T^\sigma) (\nabla_\sigma T^\mu) + T^\rho S^\sigma (\nabla_\sigma \nabla_\rho T^\mu + R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu) \quad (3.165)$$

$$= (S^\rho \nabla_\rho T^\sigma) (\nabla_\sigma T^\mu) + S^\sigma \nabla_\sigma (T^\rho \nabla_\rho T^\mu) - (S^\sigma \nabla_\sigma T^\rho) \nabla_\rho T^\mu + R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma \quad (3.166)$$

$$= R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma . \quad (3.167)$$

Pentsa dezagun lerroz lerro hau. Lehenengo lerroa  $a^\mu$ -ren definizioa da, eta bigarren lerroa (3.111)tik dator zuzenean. Hirugarren lerroa Leibnizen araua besterik ez da. Laugarren lerroak deribatu kobariante bikoitza ordezkatzeko kontrako ordenako deribatuekin gehi Riemann tentsorea. Bosgarren lerroan Leibniz erabiltzen dugu berriro (ohikoaren kontrako ordenan), eta gero bi termino berdin bertan behera utzi eta  $T^\rho \nabla_\rho T^\mu$  barne hartzen duen terminoa desagertzen dela ohartuko gara,  $T^\mu$  geodesiko baten bektore ukitzaila delako. Emaitza,

$$a^\mu = \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma , \quad (3.168)$$

**desbideratze geodesikoaren ekuazioa** izenez ezagutzen da. Espero genezakeen zer-bait adierazten du: ondoko bi geodesikoen arteko azelerazio erlatiboa kurbadurarekin proportzionala da.

Fisikoki, jakina, aldameneko geodesikoen azelerazioa marea-indarren agerpen gisa interpretatzen da. Honek gogorarazten digu honezkero fisika egiteko oso gertu gaudela.

Badago formalismoaren azken zati bat, grabitazio propiora pasa aurretik estaltzea atsegina litzatekeena. Egingo duguna da berriro ere (askoz zehatzago bada ere) konexioen eta kurbaduraren formalismoa kontuan hartzea, baina oraingoan edozein koordenatu-sistematik *ez* eratorritako espazio tangentea oinarritzko bektore multzoak erabiliko ditugu. Enfasiaren aldaketa txiki honek konexioaren eta kurbaduraren beste ikuspuntu bat erakusten duela, zeinetan partikulen fisikako teoriak neurtzeko erlazioa askoz gardenagoa den. Izan ere, sartu beharreko kontzeptuak oso zuzenak dira, baina gaia amesgaizto notazio bat da, beraz, benetan dena baino zailagoa dirudi.

Orain arte aprobeixatzen ari gara  $T_p$  puntu batean dagoen  $T_p$  espazio tangentearen oinarri natural bat deribatu partzialek puntu horretako koordenatuekiko,  $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$ , ematen dutela. Era berean,  $T_p^*$  espazio kotangentearen oinarri bat koordenatu-funtzioen gradienteek ematen dute,  $\hat{\theta}^{(\mu)} = dx^\mu$ . Ez dago ezerk eragotziko digunik, ordea, gustuko ditugun oinarriak ezartzea. Imajina dezagun, beraz, askotariko puntu bakoitzean  $\hat{e}_{(a)}$  oinarri-bektore multzo bat sartzen dugula (grekoz beharrean latinezko letraz indexatuta, ez daudela inolako koordenatu-sistemarekin erlazionatuta gogoratzeko). Oinarri-bektore hauek “ortonormalak” izateko aukeratuko ditugu, lantzen ari garen anizkuntzaren sinadurari dagokion zentzuan. Hau da, metrikaren forma kanonikoa  $\eta_{ab}$  idazten bada, gure oinarritzko bektoreen barne produktua izatea eskatzen dugu.

$$g(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab} , \quad (3.169)$$

non  $g( , )$  ohiko tentsore metrikoa den. Horrela, Lorentziar espazio-denbora batean  $\eta_{ab}$ -k Minkowskiren metrika adierazten du, eta positibo-definitutako metrika duen espazio batean, berriz, euklidear metrika. Oinarri ortonormal bat osatzen duten bektore multzoari **tetrad** (grezierazko *tetras*, “lauko talde bat”) edo **vielbein** (alemanetik “asko” izenez ezagutzen da. hankak”). Dimentsio-kopuru ezberdinetan noizean behin *vierbein* (lau), *dreibein* (hiru), *zweibein* (bi) bihurtzen da. (Oro har, aniztasun osoa estaltzen duten koordenatu-diagramak aurkitu ezin ditugun bezala, askotan ezingo dugu nonahi definitutako oinarri leun-eremu bektorialen multzo bakar bat aurkitu. Ohi bezala, arazo hau gaindi dezakegu adabaki ezberdinetan lan eginez eta gainjartzeetan gauzak ondo portatzen direla ziurtatuz.)

Oinarria izatearen kontua da edozein bektore oinarri-bektoreen konbinazio lineal gisa adieraz daitekeela. Zehazki, gure oinarritzko bektore zaharrak  $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$  berrien arabera adieraz ditzakegu:

$$\hat{e}_{(\mu)} = e_\mu^a \hat{e}_{(a)} . \quad (3.170)$$

$e_\mu^a$  osagaiek  $n \times n$  matrize alderantzigarria osatzen dute. (Objektuen eta haien osagaien arteko bereizketa lausotzeko gure ohiko praktikaren arabera,  $e_\mu^a$  tetrada edo vielbein gisa aipatuko dugu, eta askotan pluralean “vielbeins”). Haien alderantzizkoa adierazten dugu aldatuz.  $e_a^\mu$  lortzeko indizeak, betetzen dituztenak

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu , \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a . \quad (3.171)$$



Hauek  $\hat{e}_{(a)}$  bektoreen osagai gisa balio dute koordinatuen oinarrian:

$$\hat{e}_{(a)} = e_a^\mu \hat{e}_{(\mu)} . \quad (3.172)$$

Alderantzizko vielbeinen arabera, (3.114) bihurtzen da

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab} , \quad (3.173)$$

edo baliokidea

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} . \quad (3.174)$$

Azken ekuazio honek batzuetan vielbeinak metrikaren “erro karratua” direla esatera eramaten du.

Era berean, forma bakarren oinarri ortonormal bat ezarri dezakegu  $T_p^*$ -n,  $\hat{\theta}^{(a)}$  adierazten duguna. Oinarritzko bektoreekin bateragarriak izateko aukeratu daitezke, zentzu horretan

$$\hat{\theta}^{(a)}(\hat{e}_{(b)}) = \delta_b^a . \quad (3.175)$$

Honen berehalako ondorioa da forma bakar ortonormalak beren koordinatuetan oinarritutako lehengusu  $\hat{\theta}^{(\mu)} = dx^\mu$ -ekin erlazionatuta egotea.

$$\hat{\theta}^{(\mu)} = e_a^\mu \hat{\theta}^{(a)} \quad (3.176)$$

eta

$$\hat{\theta}^{(a)} = e_\mu^a \hat{\theta}^{(\mu)} . \quad (3.177)$$

$e_\mu^a$  vielbeinek, beraz, betebeharrak bikoitza betetzen dute koordinatu-oinarri-bektoreen osagai gisa, oinarri-bektore ortonormalen aldetik, eta oinarri ortonormalaren osagai gisa forma bakarrean, koordinatu-oinarri-formaren arabera; alderantzizko vielbeinek, berriz, oinarri-bektore ortonormalen osagai gisa balio dute koordinatu-oinarriari dagokionez, eta koordinatu-oinarriaren osagai gisa forma bakarrak oinarri ortonormalari dagokienez.

Beste edozein bektore bere osagaien arabera adieraz daiteke oinarri ortonormalean.  $V$  bektore bat koordinatu-oinarrian  $V^\mu \hat{e}_{(\mu)}$  gisa eta oinarri ortonormalean  $V^a \hat{e}_{(a)}$  gisa idazten bada, osagaien multzoak erlazionatuko dira.

$$V^a = e_\mu^a V^\mu . \quad (3.178)$$

Beraz, vielbeinek “latinotik greziar indizeetara eta atzera aldatzeko” aukera ematen digu. Tentsoreen propietate politak, normalean indizea jartzean oinarritutako zentzuzko gauza bakarra dagoela, laguntza handia du hemen. Indize anitzeko tentsoreei erreferentzia egin diezaikegu oinarri batean zein bestean osagai mistoei dagokienez:

$$V^a{}_b = e_\mu^a V^\mu{}_b = e_b^\nu V^a{}_\nu = e_\mu^a e_b^\nu V^\mu{}_\nu . \quad (3.179)$$

(3.118) atzera begira, ikusten dugu oinarri ortonormaleko tentsore metrikoaren osagaiak  $\eta_{ab}$  metrika lauarenak direla. (Horregatik greziar indizeei batzuetan “kurbatua” deitzen

zaie eta latinezkoei “laua”). Izan ere, latinezko indizeak igo eta jaisten izatera irits gaitezke metrika laua eta bere erabilera erabiliz. alderantzizkoa  $\eta^{ab}$ . Zuk zeuk egiazta dezakezu dena ondo funtzionatzen duela (*adibidez*, metrikarekin indize bat jaistea oinarri ortonormaletatik koordenatuetara aldatzearekin batera joaten dela).

Oinarrizko bektore eta forma bakarreko multzo berri bat sartuz, gure eraldaketa propietateen gai gogokoenera itzultzea beharrezkoa dugu. Kontuz ibili gara tentsore-eraldaketa legea koordenatu-eraldaketa baten zeharkako emaitza baino ez zela azpimarratzen; benetako arazoa oinarri aldaketa zen. Orain koordenatu gabeko oinarriak ditugunez, oinarri hauek koordenatuen arabera alda daitezke. Murrizketa bakarra ortonormalitate-propietatea (3.114) gordetzea da. Baina badakigu nolako eraldaketak mantentzen duten metrika laua — Euklidear sinadura metrika batean transformazio ortogonalak dira, Lorentziar sinadura metrika batean, berriz, Lorentz transformazioak. Beraz, formaren oinarri-aldaketak kontuan hartzen ditugu

$$\hat{e}_{(a)} \rightarrow \hat{e}_{(a')} = \Lambda_{a'}^a(x) \hat{e}_{(a)} , \quad (3.180)$$

non  $\Lambda_{a'}^a(x)$  matrizeek posizioaren menpeko transformazioak adierazten dituztenak (puntu bakoitzean) metrikaren forma kanonikoa aldatu gabe uzten dute:

$$\Lambda_{a'}^a \Lambda_{b'}^b \eta_{ab} = \eta_{a'b'} . \quad (3.181)$$

Izan ere, matrize hauek espazio lauan Lorentz-en alderantzizko transformazioak (oinarri-bektoreetan funtzionatzen dutenak) deitzen genienari dagozkio; lehen bezala  $\Lambda^{a'}_a$  Lorentz transformazio arruntak ere baditugu, oinarri-formak eraldatzen dituztenak. Osa-gaiei dagokienez, lehen bezala goiko indizeak  $\Lambda^{a'}_a$ -rekin eta behe-indizeak  $\Lambda_a^{a'}$ -rekin eraldatzen ditugu.

Beraz, orain askatasuna dugu Lorentz transformazio bat (edo errotaazio euklidear arrunt bat, sinaduraren arabera) egiteko espazioko puntu guztietan. Transformazio horiei, beraz, **Lorentz eraldaketa lokalak** edo LLT deitzen zaie. Oraindik ere ohiko askatasuna dugu koordenatuetan aldaketak egiteko, **koordenatu-eraldaketa orokorrak** edo GCT deitzen direnak. Biak aldi berean gerta daitezke, tentsore-eraldaketa lege mistoa sortuz:

$$T^{a'\mu'}_{b'\nu'} = \Lambda^{a'}_a \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \Lambda_{b'}^b \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} T^{a\mu}_{b\nu} . \quad (3.182)$$

Tentsoreei buruz dakiguna koordenatu gabeko oinarrietara itzultzea, gehienetan, viel-beinak leku egokietan itsastea besterik ez da. Salbuespen erabakigarria gauzak bereizten hasten garenean dator. Gure formalismo arruntan, tentsore baten deribatu kobariantea bere deribatu partziala gehi zuzenketa terminoek ematen dute, indize bakoitzeko bat, tentsorea eta konexio-koefizienteak barne hartuta. Prozedura bera gertatzen jarraituko du koordenatu gabeko oinarri-rako, baina  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  konexio-koefiziente arruntak  $\omega_\mu^a_b$  adierazten den **spin konexioa** ordezkatzen ditugu. Latin indize bakoitzak spin-konexioaren faktore bat lortzen du ohiko moduan:

$$\nabla_\mu X^a_b = \partial_\mu X^a_b + \omega_\mu^a_c X^c_b - \omega_\mu^c_b X^a_c . \quad (3.183)$$

(“Spin konexioa” izena espinoreen deribatu kobarianteak hartzeko erabil daitekeelako dator, eta hori ezinezkoa da ohiko konexio koefizienteak erabiliz). Latin eta greko indize mistoen aurrean bi motatako terminoak lortzen ditugu.

Tentsore bat idazteko modutik independentea izateko ohiko eskariari esker, spin-konexioaren, vielbeinen eta  $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ -en arteko erlazio bat atera dezakegu. Demagun  $X$  bektore baten deribatu kobariantea, lehenik koordenatu hutsean:

$$\nabla X = (\nabla_\mu X^\nu) dx^\mu \otimes \partial_\nu \quad (3.184)$$

$$= (\partial_\mu X^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\nu . \quad (3.185)$$

Orain aurkitu objektu bera oinarri mistoan eta bihurtu koordenatu oinarrian:

$$\nabla X = (\nabla_\mu X^a) dx^\mu \otimes \hat{e}_{(a)} \quad (3.186)$$

$$= (\partial_\mu X^a + \omega_\mu{}^a{}_b X^b) dx^\mu \otimes \hat{e}_{(a)} \quad (3.187)$$

$$= (\partial_\mu (e_\nu^a X^\nu) + \omega_\mu{}^a{}_b e_\lambda^b X^\lambda) dx^\mu \otimes (e_a^\sigma \partial_\sigma) \quad (3.188)$$

$$= e_a^\sigma (\partial_\mu e_\nu^a X^\nu + X^\nu \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\lambda^b X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\sigma \quad (3.189)$$

$$= (\partial_\mu X^\nu + e_a^\nu \partial_\mu e_\lambda^a X^\lambda + e_a^\nu e_\lambda^b \omega_\mu{}^a{}_b X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\nu . \quad (3.190)$$

(3.129)-rekin konparatzeak agerian uzten du

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = e_a^\nu \partial_\mu e_\lambda^a + e_a^\nu e_\lambda^b \omega_\mu{}^a{}_b , \quad (3.191)$$

edo baliokidea

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e_\nu^a e_b^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_b^\lambda \partial_\mu e_\lambda^a . \quad (3.192)$$

Manipulazio pixka batek erlazio hau vielbein-en deribatu kobariantearen desagerpen gisa idazteko aukera ematen digu,

$$\nabla_\mu e_\nu^a = 0 , \quad (3.193)$$

batzuetan “tetrada postulatu” izenez ezagutzen dena. Kontuan izan hau beti egia dela; ez genuen loturari buruz ezer asumitu behar hura ateratzeko. Zehazki, ez genuen onartu behar izan konexioa metriko bateragarria edo torsiorik gabekoa zela.

Konexioa deribatu kobariantearen transformazio-legea finkatzeko behar dugun zer-bait dela pentsa daitekeenez, ez da harritzekoa izango spin-konexioak berez tentsore-erlaldaketa-legea ez betetzea. Egia esan, GCT-ren azpian greziar indize baxuagoa modu egokian eraldatzen da, forma bakarrean. Baina LLT-en azpian spin-konexioa modu homogeneoan eraldatzen da

$$\omega_\mu{}^{a'}{}_{b'} = \Lambda^{a'}{}_a \Lambda_{b'}{}^b \omega_\mu{}^a{}_b - \Lambda_{b'}{}^c \partial_\mu \Lambda^{a'}{}_c . \quad (3.194)$$

Zuk zeuk egiaztatzea gomendatzen dizugu horrek deribatu kobariantearen erlaldaketa egokia eragiten duela.

Orain arte formalismo hutsa baino ez dugu egin, lehenetik genekien gauzak notazio berri batera itzuliz. Baina egiten ari garen lanak bi gauza erosten dizkigu. Lehen, lehen aipatu duguna, espazio-denboran espinor-eremuak deskribatzeko eta haien deribatu kobarianteak hartzeko gaitasuna da; oraingoz ez dugu hau gehiago aztertuko. Bigarrena

ikuspuntu aldaketa bat da, non hainbat tentsoreak tentsore-baliiodun forma diferentzial gisa pentsa ditzakegu. Adibidez,  $X_\mu^a$  bezalako objektu bat, indize mistoekin idatzitako  $(1, 1)$  tentsore gisa pentsatzen duguna, “bektorial baliiodun forma bakarrekkoa” ere har daiteke. Greziar indize baxuagoa du, beraz, forma bakarrekkoa dela uste dugu, baina indize baxukoaren balio bakoitzeko bektore bat da. Era berean,  $A_{\mu\nu}^a$  tentsorea,  $\mu$  eta  $\nu$ -n antisimetrikkoa, “ $(1, 1)$  tentsore-baliiodun bi forma gisa har daiteke.” Beraz, beheko greziar indize antisimetriko batzuk dituen edozein tentsore bat. eta latinezko indize batzuk forma diferentzial gisa pentsa daitezke, baina balioak tentsore sortan hartuta. (Forma diferentzial arruntak balio eskalar-formak besterik ez dira.) Ikuspegi honen erabilgarritasuna kanpoko deribatuak kontuan hartzen ditugunean dator.  $X_\mu^a$  bektorial baliiodun forma bakarra dela pentsatu nahi badugu, bere kanpoko deribatua hartzeko tentazioa izango dugu:

$$(dX)_{\mu\nu}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a . \quad (3.195)$$

Erraza da egiaztatzea objektu hau bi forma baten moduan (hau da,  $(0, 2)$  tentsoreen transformazio-legearen arabera) transformatzen dela GCT-en pean, baina ez LLT-en pean bektore gisa (Lorentz-en transformazioak posizioaren arabera dira, eta horrek bat sartzen du. eraldaketa-legean termino ez homogeneous). Baina hori konpon dezakegu spin-konexioa zentzuz erabiliz, forma bakarrekkoa dela pentsa daitekeena. (Ez da tentsore-baliiodun forma bakarrekkoa, tentsorial-eraldaketa legearen ondorioz (3.134).) Horrela, objektua

$$(dX)_{\mu\nu}^a + (\omega \wedge X)_{\mu\nu}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a + \omega_\mu^a{}_b X_\nu^b - \omega_\nu^a{}_b X_\mu^b , \quad (3.196)$$

etxean egiaztatu dezakezun bezala, tentsore egoki gisa eraldatzen da.

Formalismo honen berehalako aplikazioa torsioaren eta kurbaduraren esamoldeetan da, edozein loturaren ezaugarri diren bi tentsoreak. Torsioa, bi indize antisimetriko txikiagoak dituen, bektorial baliiodun bi formako  $T_{\mu\nu}^a$  gisa pentsa daiteke. Kurbadura, bere azken bi indizeetan beti antisimetrikkoa dena,  $(1, 1)$ -tentsorea baliiodun bi forma da,  $R^a{}_{b\mu\nu}$ . Forma diferentzialetan indizeak ezabatzeko dugun askatasuna erabiliz, bi tentsore hauen definizio erlazioak honela idatz ditzakegu.

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \quad (3.197)$$

eta

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b . \quad (3.198)$$

Hauek **Maurer-Cartan egitura-ekuazioak** izenez ezagutzen dira. Ohiko definizioen parekoak dira; goazen hau erakusteko ariketatik torsiorako, eta zuk zeuk egiaztatu dezakezu kurbadura. Daukagu

$$T_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda T_{\mu\nu}^a \quad (3.199)$$

$$= e_a^\lambda (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^a{}_b e_\nu^b - \omega_\nu^a{}_b e_\mu^b) \quad (3.200)$$

$$= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda , \quad (3.201)$$

eman genuen jatorrizko definizioa besterik ez da. Hemen (3.131) erabili dugu  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ -en adierazpena, vielbein eta spin-konexioari dagokionez. Tentsore hauek betetzen dituzten identitateak ere adieraz ditzakegu

$$dT^a + \omega^a_b \wedge T^b = R^a_b \wedge e^b \quad (3.202)$$

eta

$$dR^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b - R^a_c \wedge \omega^c_b = 0. \quad (3.203)$$

Horietako lehena  $R^{\rho}_{[\sigma\mu\nu]} = 0$  orokortzea da, bigarrena, berriz, Bianchi identitatea  $\nabla_{[\lambda]} R^{\rho}_{\sigma[\mu\nu]} = 0$ . (Batzuetan, bi ekuazioak Bianchi identitate deitzen dira.)

Adierazpen hauen formak “kobariante-kanpoko deribatua” definitzeko tentazio ia jasangaitza dakar, zeinak tentsore-baliadun forman jarduten duena, kanpoko deribatu arrunta hartuz eta gero spin-konexioarekin termino egokiak gehituz, bat bakoitzeko. Latin aurkibidea. Hemen hori egingo ez badugu ere, ondo dago tentazio horri amore ematea, eta, hain zuzen ere, (3.137) eta (3.140) eta (3.141)ren eskuineko aldea eta (3.140) eta (3.141) ezkerrekoak halakotzat har daitezke. kobariante-kanpoko deribatuak. Baina kontuz, (3.138) ezin baita; ezin duzu spin konexioaren deribatu kobarianterik hartu, ez baita tentsorea.

Orain arte gure ekuazioak egiazkoak izan dira lotura orokorretarako; ikus dezagun zer lortzen dugun Christoffel konexiorako. Torsiorik gabeko eskakizuna (3.137) desageretzea besterik ez da; horrek ez dakar berehala spin-konexioaren koefizientei buruzko adierazpen soil bat. Metrikoen bateragarritasuna metrikaren deribatu kobariantearen desagerpen gisa adierazten da:  $\nabla g = 0$ . Honek zertara ekartzen duen ikus dezakegu metrika oinarri ortonormalean adierazten dugunean, non bere osagaiak  $\eta_{ab}$  besterik ez diren:

$$\nabla_{\mu} \eta_{ab} = \partial_{\mu} \eta_{ab} - \omega_{\mu}^c{}_a \eta_{cb} - \omega_{\mu}^c{}_b \eta_{ac} \quad (3.204)$$

$$= -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba}. \quad (3.205)$$

Ondoren, zero berdina ezartzeak esan nahi du

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}. \quad (3.206)$$

Beraz, bateragarritasun metrikoa bere indize latindarretan spin konexioaren antisimetriaren baliokidea da. (Lehen bezala, adierazpen hori zentzuzkoa da bi indizeak goian edo behean badira). Bi baldintza hauek batera, spin-konexioa vielbeinen arabera adierazteko aukera ematen digute. Soluzio hori adierazten duen formula esplizitu bat dago, baina praktikan errazagoa da torsiorik gabeko baldintza ebatzea.

$$\omega^{ab} \wedge e_b = -de^a, \quad (3.207)$$

spin-konexioaren asimetria erabiliz, osagai indibidualak aurkitzeko.

Orain baliabideak ditugu Riemann-en geometrian konexioen eta kurbaduraren formalismoa partikulen fisikako gauge teorienarekin alderatzeko. (Hau alde batera utzita, ko bat da, espero denentzat ulergarria dena, baina ez ikastaroaren funtsezko osagaia.)

Bi egoeretan, interes-eremuak espazio-denborako puntu bakoitzari esleitutako espazio bektorialetan bizi dira. Riemann-en geometrian espazio bektorialak espazio tangentea, espazio kotangentea eta hauetatik eraikitako espazio tentsore altuenak barne hartzen ditu. Gauge teorian, berriz, “barneko” bektore-espazioez arduratzen gara. Bereizketa da espazio ukitzaila eta bere erlatiboak anizkuntasunarekin berarekin lotuta daudela eta modu naturalean definitu zirela anizkuna eratu zenean; barne-espazio bektorial bat nahi dugun edozein dimentsiokoa izan daiteke, eta aldaeraren gehikuntza independente gisa definitu behar da. Matematika hizkuntzan, oinarri-multiplidea barne-espazio bektorialekin (puntu bakoitzean definituta) batzea **zuntz-sorta** bat da, eta espazio bektorialaren kopia bakoitzari “zuntz” deitzen zaio (adostasun osoz). sorta tangentearen gure definizioa).

Oinarritzko sorta (guretzat, espazio-denbora) eta zuntzez gain, zuntz-sorta baten definizioan beste osagai garrantzitsu bat “egitura taldea” da, zuntzen gainean nola josten diren deskribatzeko Lie taldea. gainjarritako koordinatu-adabakiak. Xehetasunetan sartu gabe, lau dimentsioko espazio-denbora bateko tangente sortaren egitura-taldea  $GL(4, \mathbb{R})$  da, oro har,  $4 \times 4$  matrize alderantzigarri errealean taldea; metrika lorentziarra badugu, hau Lorentz talde  $SO(3, 1)$ era murriztu daiteke. Orain imajinatu barruko hiru dimentsioko bektore-espazio bat sartzen dugula, eta zuntzak josten ditugula biraketa arruntekin; sorta berri honen egitura-taldea  $SO(3)$  da. Sorta honetan bizi den eremu bat  $\phi^A(x^\mu)$  adieraz daiteke, non  $A$  batetik hirura doan; hiru bektore bat da (barnekoa, espazio-denborarekin zerikusirik ez duena) aniztasuneko puntu bakoitzeko. Zuntzetan oinarria nahi dugun moduan aukeratzeko askatasuna dugu; horrek esan nahi du “kantitate fisikoak” aldaezin utzi behar direla  $SO(3)$  tokiko transformazioetan, esate baterako

$$\phi^A(x^\mu) \rightarrow \phi^{A'}(x^\mu) = O^{A'}_A(x^\mu)\phi^A(x^\mu), \quad (3.208)$$

non  $O^{A'}_A(x^\mu)$  espazio-denboraren arabera den  $SO(3)$  matrize bat den. Horrelako eraldaketak **gauge transformazioak** izenez ezagutzen dira, eta haien azpian aldaezinak diren teoriei “gauge teoriak” deitzen zaie.

Gehienetan ez da zaila gauge-erlaketaren arabera kantitate fisikoak aldaezinak izan daitezen gauzak antolatzea. Zailtasun bakarra deribatu partzialak kontuan hartzen ditugunean sortzen da,  $\partial_\mu \phi^A$ .  $O^{A'}_A(x^\mu)$  matrizea espazio-denboraren arabera denez, nahi ez den termino bat ekarriko du deribatu partzialaren transformazioan. Honezkero irtenbidea asmatzeko gai izan beharko zenuke: eraldaketa legean termino ez homogeneous zuzentzeko konexio bat sartu. Beraz, zuntz sortaren konexio bat  $A_\mu^A_B$  objektu bat izango dela definitzen dugu, bi “talde-indize” eta espazio-denbora-indize batekin. GCT-ren arabera forma bakarreko moduan eraldatzen da, eta neurgailuen eraldaketaren arabera, berriz, eraldatzen da

$$A_\mu^{A'}_{B'} = O^{A'}_A O_{B'}^B A_\mu^A_B - O_{B'}^C \partial_\mu O^{A'}_C. \quad (3.209)$$

(Kontuz: gure konbentzioak oso desberdinak dira partikulen fisikako literaturaren aldean, ez naizen horiek zuzentzen saiatuko.) Transformazio-lege honekin, “gauge kobariante deribatua”

$$D_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A + A_\mu^A_B \phi^B \quad (3.210)$$

“tentsorialki” eraldatzen du neurgailuen eraldaketaren azpian, egiaztatzeko ongi etorria zarenez. (Elektromagnetismo arruntean konexioa potentzial bektorial konbentzionala besterik ez da. Ez da indizerik behar,  $U(1)$  egitura taldea dimentsio bakarrekoa delako.)

Argi dago barne-zuntz-sorta bateko konexioaren nozio hori oso estuki lotuta dagoela ukitzaille-sorta baten konexioarekin, batez ere eztabaidatzen ari garen fotogramma ortonormalaren irudian. Eraldaketa-legea (3.146), adibidez, spin-konexiorako (3.134) transformazio-legearen berdina da. Bi formako kurbadura edo “eremuaren indarra” tentsorea ere defini dezakegu,

$$F^A{}_B = dA^A{}_B + A^A{}_C \wedge A^C{}_B, \quad (3.211)$$

(3.138)-ekin korrespondentzia zehatzean. Bideetan zehar gauzak paraleloan garraia ditzakegu, eta hedatzaile paraleloaren antzeko eraikuntza dago; Kurba itxi baten inguruan bektore bat paraleloan garraiatuz lortzen den matrizearen arrastoari “Wilson begizta” esaten zaio.

Ukitzaile-sorta eta barne-sorta bektorialaren arteko erlazioaren garapenean jarraitu genezake, baina denbora laburra da eta beste arrain batzuk ditugu frijitzeko. Amai dezagun bi eraikuntzaren arteko *desberdintasun* garrantzitsua azpimarratuz. Desberdintasuna ukitzaille-sorta oinarri-multzoarekin oso lotuta dagoelako da, eta beste zuntz-sorta batzuk egin ondoren lotzen diren bitartean. Zentzuzkoa da  $p$ -n “bide batean zehar puntuan dagoen”  $p$ -tik igarotzen den espazioan dagoen bektore bat esatea; baina horrek ez du zentzurik barne-sorta bektorial baterako. Beraz, ez dago barne-espazio baterako koordenatu-oinarriaren analogorik — kurbetan zehar deribatu partzialek ez dute zerikusirik barne-bektoreekin. Hortik ondorioztatzen da ez dagoela vielbeinen antzekorik, oinarri ortonormalak oinarri koordenatuekin erlazionatzen baitituzte. Torsio-tentsorea, bereziki, ukitzaille-sorta bateko konexio baterako bakarrik definitzen da, ez gauge teoriaren konexiorako; vielbeinaren kanpoko deribatu kobariante gisa pentsa daiteke, eta barne-sorta batean ez dago horrelako eraikuntzarik eskuragarri. Konexioaren nozioaren erabilera ezberdinen arteko erlazioa aintzat hartu beharko zenuke, eraman gabe.

## Capítulo 4

# Grabitazioa

Gure kuota matematikoak ordainduta, erlatibitate orokorrak deskribatzen duen grabitazioaren fisika aztertzeke prest gaude. Gai hau bi zatitan kokatzen da modu naturalean: espazio-denboraren kurbadurak nola jokatzeko duen materiaren gainean “grabitateak” gisa agertzeke, eta energiak eta momentuak nola eragiten duten espazio-denboran kurbadura sortzeko. Edozein kasutan zilegi litzateke goian hastea, fisika espazio-denbora kurbatuan zuzentzen duten legeak zuzenean adieraziz eta horien ondorioak landuz. Horren ordean, motibazio apur bat gehiago izaten saiatuko gara, oinarritzko printzipio fisikotatik hasi eta hauek teoria fisiko ia bakar batera eramaten dutela modu naturalean argudiatu nahian.

Printzipio fisiko horien artean oinarritzkoena Baliokidetasun Printzipioa da, hainbat formatan dagoena. Antzinako forma Galileo eta Newton-ena da, eta **Baliokidetasun Printzipio Ahula** edo WEP izenez ezagutzen da. WEPk dio edozein objekturen “masa inertziala” eta “masa grabitatorioa” berdinak direla. Horrek zer esan nahi duen ikusteko, pentsatu Newtonen Bigarren Legean. Honek objektu bati eragiten dion indarra jasaten duen azelerazioarekin erlazionatzen du, elkarren arteko proportzionalak ezarriz proportzionaltasun-konstantea masa inertziala  $m_i$  izanik:

$$\mathbf{f} = m_i \mathbf{a} . \quad (4.1)$$

Masa inertzialak argi eta garbi izaera unibertsala du, objektuari bultzatzen saiatzen zarenean sentitzen duzun erresistentziari lotuta; konstante bera da edozein indar mota egiten ari den. Grabitazio-legia ere badugu, zeinak dioen objektu bati eragiten dion grabitate-indarra  $\Phi$  eremu eskalar baten gradientearekiko proportzionala dela, grabitate-potentziala deritzona. Kasu honetan proportzionaltasun-konstanteari masa grabitatorioa deritzo  $m_g$ :

$$\mathbf{f}_g = -m_g \nabla \Phi . \quad (4.2)$$

Horren aurrean,  $m_g$ -k  $m_i$ -ren oso bestelako izaera du; grabitazio-indarraren espezifikoa den kantitatea da. Nahi baduzu, gorputzaren “karga grabitatorioa” da. Dena den, Galileok aspaldi erakutsi zuen (apokrifoki Pisako Dorretik pisuak erortzean, bolak plano inklinatuetan behera jaurtiz) materiak grabitazioaren erantzuna unibertsala zela — objektu guztiak abiadura berean erortzen dira grabitazio-eremu batean. , objektuaren kon-



posiziotik independentea. Newtonen mekanikan hau WEPrak itzultzen da, hau da, besterik gabe

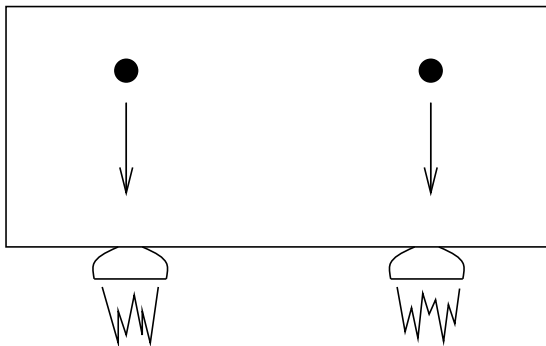
$$m_i = m_g \quad (4.3)$$

edozein objektutarako. Berehalako ondorioa da erortzen diren saiakuntza-partikulen portaera unibertsa dela, haien masaren (edo izan ditzaketen beste edozein ezaugarri) independentea dela; izan ere badugu

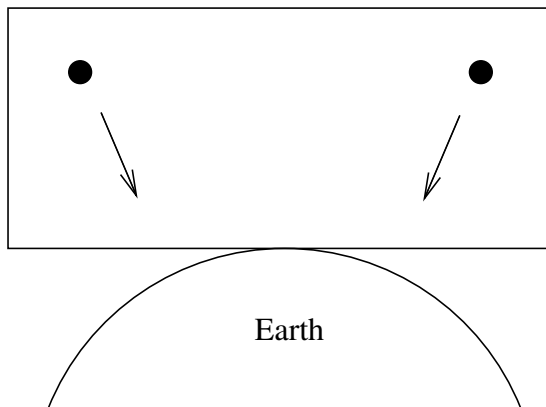
$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi . \quad (4.4)$$

Grabitazioaren unibertsaltasuna, WEPk inplikatzeko duen bezala, beste forma ezagunago batean adieraz daiteke. Imajinatu ondo itxitako kutxa batean dagoen fisikari bat kontsideratzen dugula, kanpoko mundua behatu ezinik, probako partikulen mugimendua dakarten esperimenduak egiten ari dena, adibidez tokiko grabitazio-eremua neurtzeko. Jakina, erantzun desberdinak lortuko lituzke kutxa ilargian edo Jupiterren gainean eserita egongo balitz Lurrean baino. Baina erantzunak ere desberdinak izango lirateke kutxa abiadura konstantean azeleratuz gero; honek aske erortzen diren partikulen azelerazioa aldatuko luke kutxaren aldean. WEP-k esan nahi du ez dagoela modurik grabitazio-eremu baten ondorioak marko uniformeki azeleratu batean egoteak bereizteko, erortzen diren partikulen portaera behatuz besterik gabe. Hau grabitazioaren unibertsaltasunetik dator; azelerazio uniformea eta eremu elektromagnetiko bat bereiztea posible izango litzateke, karga ezberdineko partikulen portaera ikusiz. Baina grabitatearekin ezinezkoa da, “karga” masa (inertzial)arekiko proportzionala baita.

Kontuz ibiltzeko, grabitatea azelerazio uniformetik bereizteko ezintasunari buruzko gure aldarrikapenak mugatu beharko genituzke “espazio-denborako eskualde aski txiki-txiki” mugatuz. Zigilatutako kutxa aski handia balitz, eremu grabitatorioa aldatuko litzateke leku batetik bestera. modu behagarrian, azelerazio-efektua beti norabide berean dagoen bitartean. Suziri-ontzi edo igogailu batean, partikulak beti zuzenean erortzen dira:



Grabitazio-eremuko kutxa oso handi batean, ordea, partikulak Lurraren zentrorantz mugituko dira (adibidez), eta hori beste norabide bat izan daiteke eskualde ezberdinetan: WEP, beraz, honela esan daiteke: “aske erortzen diren partikulen legeak berdinak dira eremu grabitatorio batean eta marko uniformeki azeleratu batean, espazio-denborako eskualde aski txiki-txiki”. Espazio-denborako eskualde handiagoetan eremu grabitatorioan



deshomogeneotasunak egongo dira, eta horrek marea-indarrak detektatu ahal izango ditu.

Erlatibitate bereziaren etorreraren ondoren, masa kontzeptuak bere berezitasun pixka bat galdu zuen, argi geratu baitzen masa energiaren eta momentuaren agerpen bat besterik ez zela ( $E = mc^2$  eta guzti). Hortaz, naturala zen Einsteinentzat WEP zerbait inklusiboago batera orokortzeaz pentsatzea. Bere ideia zen, besterik gabe, ez zuela inola ere egon behar kutxako fisikariak azelerazio uniforme eta kanpoko eremu grabitatorioa bereizteko, edozein esperimentu egin zituen (ez bakarrik probako partikulak erortzean). Arrazoizko estrapolazio hori gaur egun **Einstein Equivalence Principle** edo EEP izeenez ezagutzen dena bihurtu zen: “Espazio-denborako eskualde aski txikietan, fisikaren legeak erlatibitate berezikoetara murrizten dira; ezinezkoa da eremu grabitatorio baten existentzia detektatu”.

Izan ere, zaila da WEPa errespetatzen duten baina EEPa urratzen duten teoriak imajinatzea. Demagun hidrogeno atomo bat, protoi baten eta elektroi baten egoera lotua. Bere masa banaka kontuan hartuta protoiaren eta elektroien masen batura baino txikiagoa da, lotura-energia negatiboa baitago — atomoan energia jarri behar duzu protoia eta elektroia bereizteko. WEPren arabera, hidrogeno atomoaren masa grabitatorioa bere osagaien masen batura baino txikiagoa da, beraz; eremu grabitatorioa elektromagnetismoarekin (atomoa elkarrekin eusten duena) modu egokian lotzen da masa grabitatorioa ondo atera dadin. Horrek esan nahi du grabitateak masa unibertsalarekin atsedean hartu behar duela ez ezik, energia eta momentu ororekin ere — hori da ia EEPren aldarrikapena. Kontraadibideekin atera daiteke, ordea; adibidez, grabitate-teoria bat imajina genezake, non aske erortzen ziren partikulak eremu grabitatorio batean zehar mugitzean biratzen hasten ziren. Orduan, marko azeleratu batean egingo luketen bide beretik eror litezke (horrela WEP betez), baina, hala ere, eremu grabitatorioaren existentzia antzeman dezakezu (EEP urratuz). Horrelako teoriek asmatuak dirudite, baina ez dago debekatzen duen naturako legerik.

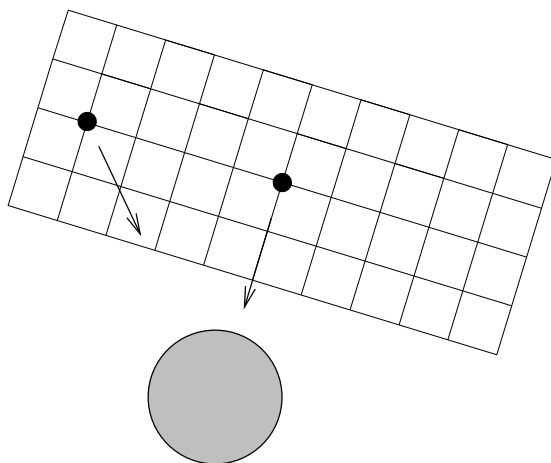
Batzuetan, “fisikaren lege grabitazionalak” eta “fisikaren lege ez-grabitazionalak” arteko bereizketa egiten da, eta EEPa azken honi bakarrik aplikatzeko definitzen da. Ondoren, “Strong Equivalence Principle” (SEP) definitzen da fisikako lege guztiak, grabitatorioak eta bestelakoak barne hartzeko. Ez zait bereizketa bereziki erabilgarria iruditzen,

eta ez dut landuko. Gure helburuetarako, EEPk (edo, besterik gabe, “baliokidetasunaren printzipioa”) fisikako lege guztiak biltzen ditu.

EEPa da inplikatzan (edo behintzat iradokitzen duena) grabitatearen ekintza espazio-denboraren kurbadurari egotzi behar diogula. Gogoratu erlatibitate berezian marko inertzialek paper nabarmena betetzen dutela — erreferentzia-esparruren bat “atsedenaldian” gisa bereiztea posible ez zen arren, posible zen “faseen” familia bat bereiztea. ‘azeleratua’ (inertziala). Beraz, eremu elektromagnetiko batean kargatutako partikula baten azelerazioa modu berezian definitu zen fotograma horiei dagokienez. EEPk, berriz, grabitatea ezinbestekoa dela inplikatzan du — ez dago grabitatearen ondoriozko azelerazioa neurtu dezakegun “grabitazioki neutroko objekturik” bezalakorik. Hortik ondorioztatzen da “grabitatearen ondoriozko azelerazioa” ez dela modu fidagarrian defini daitekeen zerbait, eta, beraz, ezer gutxi balio duela.

Horren ordez, zentzu handiagoa du *define* “azeleratutakoa” “aske erortzen” gisa, eta hori da egingo duguna. Ikuspuntu hau grabitatea ez dela “indar bat” dioen ideia jatorria da — indarra azelerazioa eramaten duen zerbait da, eta zero azelerazioari buruz dugun definizioa “edozein eremu grabitatorioaren aurrean aske mugitzea” da. inguruan egotea gertatzen da”.

Inozoa dirudien urrats honek inplikazio sakonak ditu espazio-denboraren izaeran. SRn, uneren batean hasi eta espazio-denboran zehar luzatzen zen marko inertzial bat eraikitzeko prozedura bat genuen, hagatxo zurrinak elkartuz eta erlojuak lotuz. Baina, berriro ere eremu grabitatorioaren homogeneousutasunik eza dela eta, hori jada ez da posible. Aske erortzen den egoeraren batean hasten bagara eta hagaxka zurruneekin egitura handi bat eraikitzen badugu, distantzia batera erortzen diren objektuek erreferentzia-marko honi dagokionez “azeleratzen” dutela dirudi, irudian ikusten den moduan. hurrengo orrialdean.

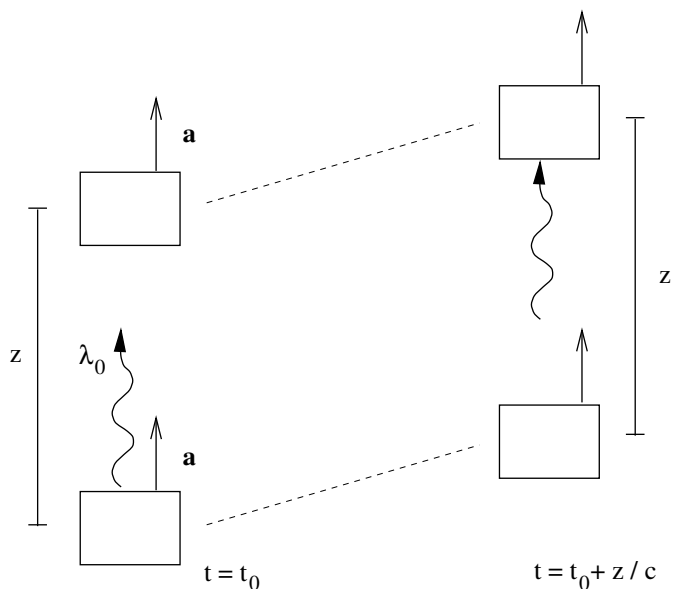


Itzenbidea marko inertzialen nozioari eustea da, baina espazioan eta denboran zehar modu berezian heda daitezkeen itxaropena baztertzea. Horren ordez **lokalki inertzial markoak** defini ditzakegu, espazio-denborako aski eskualde txikietan erortzen diren partikulen higidura jarraitzen dutenak. («Eskualde nahiko txikiak» esaten dugun ba-koitzean, puristek prozedura mugatzaile bat imajinatu beharko lukete, zeinetan espazio-

denbora bolumen egokia zerora eramaten dugun). Hau da egin dezakegun onena, baina akordio onari uko egitera behartzen gaitu. Esaterako, jada ezin dugu konfiantzaz hitz egin urruneko objektuen abiadura erlatiboaz, objektu horiei dagozkien erreferentzia-esparru inertzialak guri dagozkigunetatik independenteak baitira.

Orain arte fisikaz hertsiki hitz egiten ari gara, espazio-denbora sorta kurbatu gisa deskribatu behar dela ondorioztatu gabe. Argi izan behar da, hala ere, zergatik den egokia ondorio hori. Erlatibitate bereziaren legeak espazio-denborako eskualde aski txiki-txiki bete behar direla eta, gainera, tokiko inertzia-markoak ezar daitezkeela eskualde horietan, Riemann-en koordinatu normalak askotariko edozein puntutan eraikitzeko dugun gaitasunari dagokio — metrikak bere forma kanonikoa hartzen duen eta Christoffel sinboloak desagertzen diren koordinatuak. Oso berezitate eskualdeetan abiadurak (bektoreak) konparatzeko ezintasuna garraio paraleloaren bide-menpekotasunari dagokio aldaera kurbatu batean. Gogoeta hauek nahikoak izan ziren Einsteini grabitatea espazio-denboraren kurbaduraren adierazpena zela pentsatzeko. Baina, egia esan, are limurtzaileagoak izan gaitezke. (Ezin da “frogatzea” grabitatea espazio-denborazko kurbadura gisa pentsatu behar dela, hipotesi zientifikoak faltsutu ezin baitira, inoiz egiaztatu [eta ezta benetan faltsutu ere, Thomas Kuhnek esan duen bezala]. Baina sinesgarritasun-argudio sinesgarriari buruz ez dago atsekaberik, enpirikoki arrakastazko teoriak eramaten badituzte.)

Demagun EEPren iragarpen ospetsuetako bat, grabitazio gorrira lehiaketa. Demagun bi kutxa,  $z$  distantziara, higitzen direnak (edozein materiati urrun, beraz, grabitazio-eremurik ez dagoela suposatuko dugu)  $a$  azelerazio konstante batekin.  $t_0$  denboran atzealdeko kutxak  $\lambda_0$  uhin-luzerako fotoi bat igortzen du.

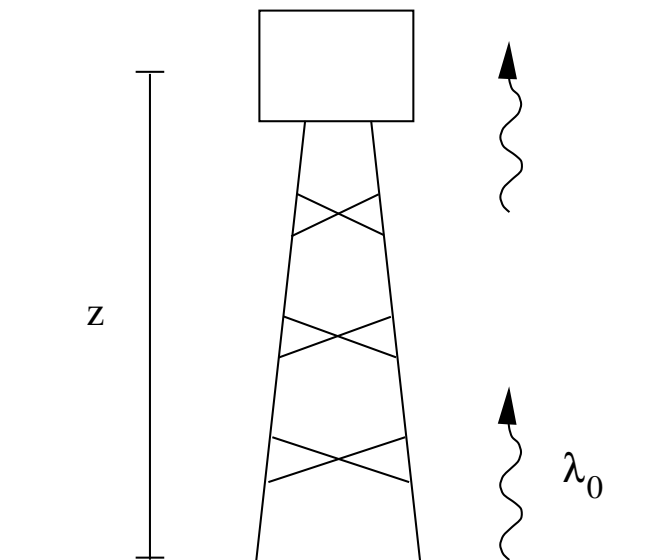


Kutxak distantzia konstante batera geratzen dira, beraz, fotoia kaxa nagusira iristen da koadroen erreferentzia-markoan  $\Delta t = z/c$  denbora bat igaro ondoren. Denbora honetan koadroek  $\Delta v = a\Delta t = az/c$  abiadura gehigarria hartu dute. Hori dela eta, beru-

neko kutxara iristen den fotoia gorrira desplazatuko da Doppler efektu konbentzionalak kopuru batez

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{az}{c^2} . \quad (4.5)$$

( $\Delta v/c$  txikia dela suposatzen dugu, beraz, lehen ordenan bakarrik lan egiten dugu.) EEPren arabera, gauza bera gertatu beharko litzateke eremu grabitatorio uniforme batean. Beraz,  $z$  altuera duen dorre bat irudikatzen dugu planeta baten gainazalean eserita,  $a_g$  eremu grabitatorioaren indarra duena (Newtonek “grabitatearen ondoriozko azelerazioa” deituko zuena).



Egoera hau aurrekotik bereiztezina omen da, dorrearen goiko aldean dagoen kutxa batean dagoen behatzaile baten ikuspuntutik (igortzen den fotoia detektatzeko gai, baina, bestela, kaxatik kanpo begiratu ezinik). Beraz,  $\lambda_0$  uhin-luzera duen lurretik igorritako fotoi bat gorrira desplazatu beharko litzateke.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{a_g z}{c^2} . \quad (4.6)$$

Hau da grabitazio gorrira lehiaketa ospetsua. Kontuan izan EEPren ondorio zuzena dela, ez erlatibitate orokorraren xehetasunen. Esperimentalki egiaztatu dute, lehenik Pound eta Rebka 1960an. Mössbauer efektua erabili zuten  $\gamma$  izpien maiztasunaren aldaketa neurtzeko, lurretik Harvardeko Jefferson Labs-en goialdera bidaiatzen zuten bitartean.

Gorri-aldaketaren formula maizago adierazten da potentzial newtoniarra  $\Phi$ , non  $\mathbf{a}_g = \nabla\Phi$ . (Zeinua ohiko konbentzioarekin alderatuta aldatzen da,  $\mathbf{a}_g$  erreferentzia-markoaren azelerazioa dela pentsatzen baitugu, ez partikula bat erreferentzia-marko honi dagokionez.)  $\Phi$ -ren gradiente ez-konstantea denboraren arabera azelerazioa bezalakoa da, eta abiadura garbi baliokidea fotoiaren igorpenaren eta xurgapenaren arteko denbo-

ran zehar integratuz ematen da. Orduan dugu

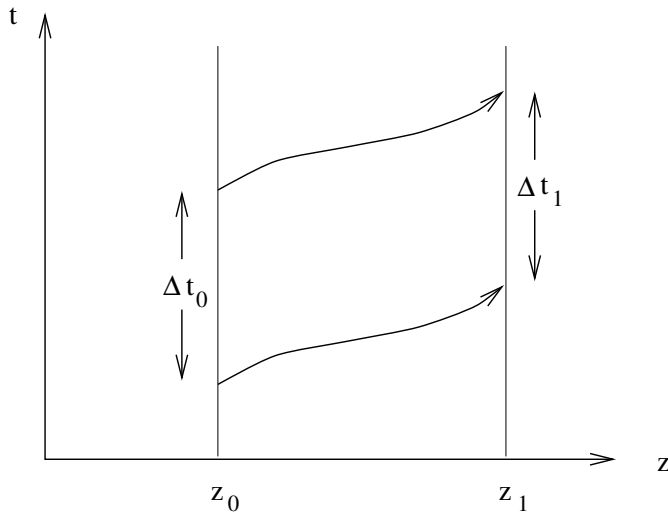
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{c} \int \nabla\Phi \, dt \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{c^2} \int \partial_z \Phi \, dz \quad (4.8)$$

$$= \Delta\Phi, \quad (4.9)$$

non  $\Delta\Phi$  potentzial grabitatorioaren aldaketa osoa den, eta berriro ere  $c = 1$  ezarri dugu. Grabitazio gorrirako lerrakuntzarako formula sinple honek egia izaten jarraitzen du egoera orokorragoetan. Jakina, potentzial newtoniarra erabilia, gure balio-eremua grabitazio-eremu ahulei mugatzen ari gara, baina normalean hori guztiz justifikatuta dago efektu behagarrietarako.

Gorrira lerratze grabitatorioak beste argudio batera eramaten du, espazio-denbora kurbatutzat hartu behar dugula. Demagun lehen genuen konfigurazio esperimental bera, orain hurrengo orrialdeko espazio-denbora diagraman irudikatuta.



Lurrean dagoen fisikariak  $\lambda_0$  uhin-luzera duen argi izpi bat igortzen du  $z_0$  altueratik, eta dorrearen goialdera doan  $z_1$  altueran. Argiaren edozein uhin-luzera baten hasiera eta uhin-luzera horren amaiera igortzen den arteko denbora  $\Delta t_0 = \lambda_0/c$  da, eta xurgapenaren denbora-tarte bera  $\Delta t_1 = \lambda_1/c$  da. Grabitazio-eremua denborarekin aldatzen ez dela imajinatzen dugunez, uhin bakarraren hasierako eta atzerako ertzak jarraitzen dituen espazio-denboran zeharreko bideak zehatz-mehatz kongruenteak izan behar dira. (Bide kurbatu generiko batzuen bidez irudikatzen dira, ez baitugu bideak zein izango diren dakigunik itxuratzen.) Geometria sinpleak esaten digu  $\Delta t_0$  eta  $\Delta t_1$  denborak berdinak izan behar direla. Baina noski ez dira; gorrira lerratze grabitatorioak  $\Delta t_1 > \Delta t_0$  dela adierazten du. («Dorrearen erlojua azkarrago doala dirudi» bezala interpreta dezakeguna). Errua «geometria sinplea» da; gertatzen denaren deskribapen hobe espazio-denbora kurbatua dela irudikatzea da.

Horrek guztiak nahikoa motibazio izan beharko luke gure aldarrikapenerako, grabitatearen aurrean, espazio-denbora sorta kurbatu gisa pentsatu behar dela. Har dezagun orain hau egiaztat eta has gaitezen fisikak espazio-denbora kurbatu batean nola funtzionatzen duen ezartzen. Baliokidetasun-printzipioak esaten digu fisikaren legeak, espazio-denborako eskualde aski txikietan, erlatibitate bereziaren antza dutela. Hori anizkuntzen hizkuntzan interpretatzen dugu lege hauek,  $p$  puntu batean oinarritutako Riemanneko koordenatu normaletan  $x^\mu$  idazten direnean, espazio lauan izango luketen forma bera hartzen duten ekuazioen bidez deskribatzen direla. Adibiderik errazena erortze askeko (azeleraturik gabeko) partikulen da. Espazio lauan halako partikulak lerro zuzenetan mugitzen dira; ekuazioetan,  $x^\mu(\lambda)$  parametrotutako bidearen bigarren deribatuaren desagertzea bezala adierazten da:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0. \quad (4.10)$$

EEPren arabera, ekuazio honek zehatz-mehatz bete beharko luke espazio kurbatuan, betiere  $x^\mu$  koordenatuak RNCak badira. Zer gertatzen da beste koordenatu-sistemaren batekin? Honen arabera, (4.8) ez da tentsoreen arteko ekuazioa. Hala ere, badago ekuazio tentsorial berezi bat (4.8)ra murrizten dena Christoffel ikurrak desagertzen direnean; da

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (4.11)$$

Jakina, hau ekuazio geodesikoa besterik ez da. Erlatibitate orokorrean, beraz, partikula askeak geodesikan zehar mugitzen dira; lehen aipatu dugu hori, baina orain badakizu zergatik den egia.

Partikula askeei dagokienez, espazio-denboraren kurbadura beharrezkoa dela argudiatu dugu grabitatea deskribatzeko; oraindik ez dugu erakutsi nahikoa denik. Horretarako, grabitate newtondarraren ohiko emaitzak irudian nola sartzen diren erakutsi dezakegu. “Limua newtoniarra” hiru baldintzaren arabera definitzen dugu: partikulak poliki higitzen ari dira (argiaren abiadurari dagokionez), eremu grabitatorioa ahula da (espazio lauaren perturbaziotzat har daiteke), eta eremua estatikoa ere bada. (denborarekin aldatzen ez dena). Ikus dezagun hipotesi hauek ekuazio geodesikoari zer egiten dioten,  $\tau$  denbora egokia hartuz parametro afín gisa. “Poliki mugitzeak” hori esan nahi du

$$\frac{dx^i}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}, \quad (4.12)$$

beraz, ekuazio geodesikoa bihurtzen da

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (4.13)$$

Eremua estatikoa denez,  $\Gamma_{00}^\mu$  Christoffel sinbolo garrantzitsuak erraztu egiten dira:

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \quad (4.14)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00}. \quad (4.15)$$

Azkenik, eremu grabitatorioaren ahuleziak metrika Minkowski forman gehi perturbazio txiki batean deskonposatzeko aukera ematen digu:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 . \quad (4.16)$$

(Koordenatu kartesiarretan ari gara lanean, beraz,  $\eta_{\mu\nu}$  metrikaren forma kanonikoa da.  $h_{\mu\nu}$  perturbazio metrikoko “txikitasun-baldintzak” ez du zentzurik beste koordenatu batzuetan.)  $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$  alderantzizko metrikaren definiziotik,  $h$ -n lehenengo ordenan aurkitzen dugu,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} , \quad (4.17)$$

non  $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$ . Izan ere, Minkowskiren metrika erabil dezakegu  $h$ -ko edozein ordena zehatzeko objektu baten indizeak igotzeko eta jaisteko, zuzenketek maila altuagoetan soilik lagunduko luketelako.

Guztia batuta, aurkitzen dugu

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} . \quad (4.18)$$

Ekuazio geodesikoa (4.11) da, beraz

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 . \quad (4.19)$$

$\partial_0 h_{00} = 0$  erabiliz, honen  $\mu = 0$  osagaia besterik ez da

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 . \quad (4.20)$$

Hau da,  $\frac{dt}{d\tau}$  konstantea da. (4.16)-ren espazio-antzeko osagaiak aztertzeko, gogoratu  $\eta^{\mu\nu}$ -ren espazio-itxurako osagaiak  $3 \times 3$  identitate-matrize batenak besterik ez direla. Badugu, beraz

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \partial_i h_{00} . \quad (4.21)$$

Bi aldeak  $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$  zatitzeak ezkerreko aldean deribatua  $\tau$ -tik  $t$ -ra bihurtzeko eragina du, gurekin utziz.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} . \quad (4.22)$$

Honek Newtonen grabitazioaren teoriaren itxura handia hartzen hasten da. Izan ere, ekuazio hau (4.4)rekin alderatzen badugu, identifikatzen dugunean berdinak direla ikusiko dugu

$$h_{00} = -2\Phi , \quad (4.23)$$

edo bestela esanda

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) . \quad (4.24)$$

Beraz, espazio-denboraren kurbadura nahikoa dela Newtonen mugan grabitatea deskribatzeko erakutsi dugu, betiere metrikak (4.21) forma hartzen badu. Noski, hartzen den



forma hori dela adierazten duten metrikaren eremu-ekuazioak aurkitzea geratzen da, eta gorputz grabitatorio bakar baterako formula newtoniarra berreskuratzen dugula.

$$\Phi = -\frac{GM}{r} , \quad (4.25)$$

baina hori laster etorriko da.

Gure hurrengo zeregina da erakustea nola geratzen diren fisikaren legeak, erortzen diren partikula libreak arautzen dituztenetatik haratago, espazio-denboraren kurbadurara nola egokitzen diren. Prozedurak, funtsean, partikula askeak geodesikoetan zehar mugitzen direla argudiatzean ezarritako paradigmari jarraitzen dio. Hartu fisikaren lege bat espazio lauan, tradizioz deribatu partzialen eta metrika lauaren arabera idatzia. Baliokidetasun-printzipioaren arabera lege honek grabitatearen presentzian beteko du, betiere Riemann koordenatu normaletan gauden bitartean. Itzuli legea tentsoreen arteko erlazio batean; adibidez, aldatu deribatu partzialak kobarianteetara. RNC-en legearen bertsio hau espazio lauako batera murriztuko da, baina tentsoreak koordenatuetatik independenteak diren objektuak dira, beraz, bertsio tentsorialak edozein koordenatu-sistematan mantendu behar du.

Prozedura honi zenbaitetan izena ematen zaio, **Kobariantza printzipioa**. Ez nago ziur bere izena merezi duenik, benetan EEPren ondorioa baita fisikaren legeak koordenatuetatik independenteak izatea. (Fisikaren legeak koordenatuetatik independenteak izateko eskakizuna, funtsean, ezinezkoa da gezurra denik irudikatzea. Esperimentu batzuk emanda, pertsona batek koordenatu-sistema bat erabiltzen badu emaitza bat aurreikusteko eta beste batek beste koordenatu-sistema bat erabiltzen badu, hobe luke ados egotea.) Beste izen bat “koma-puntu eta koma-araua” da, maila tipografikoan egin behar duzun gauza deribatu partzialak (koma) kobarianteekin (puntu eta koma) ordezkatzeko baita.

Dagoeneko inplizituki erabili dugu kobariantza-printzipioa (edo nahi duzun bezala) partikula askeak geodesikoetan zehar mugitzen diren baieztapena ateratzeko. Gehienetan, oso erraza da kasu interesgarrietan aplikatzea. Demagun adibidez  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  energia espazio-denbora lauan kontserbatzeko formula. Espazio-denbora kurbatuarekiko egokitzapena berehalakoa da:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (4.26)$$

Ekuazio honek energiaren kontserbazioa adierazten du eremu grabitatorio baten presentzian.

Zoritxarrez, bizitza ez da beti hain erraza. Demagun Maxwell-en ekuazioak erlatibitate berezian, non badirudi kobariantza printzipioa modu zuzenean aplikatu daitekeela.  $\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu$  ekuazio ez homogeneoa bihurtzen da

$$\nabla_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu , \quad (4.27)$$

eta  $\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$  homogeneoa bihurtzen da

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 . \quad (4.28)$$

Bestalde, Maxwell-en ekuazioak espazio lauan ere idatz genitzake forma diferentzialen arabera

$$d(*F) = 4\pi(*J) , \quad (4.29)$$

eta

$$dF = 0 . \quad (4.30)$$

Horiek dagoeneko forma perfektu tentsorialean daude, kanpoko deribatua ondo definitutako tentsore-operadore bat dela erakutsi baitugu lotura zein den kontuan hartu gabe. Beraz, pixka bat kezkatzen hasten gara; zer bermea du fisikaren lege bat tentsorial moduan idazteko prozesuak erantzun bakarra emateko? Izan ere, lehen aipatu dugun bezala, Maxwell-en ekuazioaren forma diferentzialak oinarritzat hartu behar dira. Dena den, kasu honetan ez da alderik eragiten, bihurturik ez (4.26) (4.24) berdina baita eta (4.27) (4.25) berdina baita; konexioaren zati simetrikoak ez du laguntzen. Era berean, eremuaren indarraren tentsorearen definizioa  $A_\mu$  potentzialaren arabera idatz daiteke.

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu , \quad (4.31)$$

edo bezain ondo

$$F = dA . \quad (4.32)$$

Berezitasunaren kezka benetakoa da, ordea. Imajinatu  $X^\mu$  eta  $Y^\nu$  bi eremu bektorialek espazio lauan emandako legea betetzen dutela.

$$Y^\mu \partial_\mu \partial_\nu X^\nu = 0 . \quad (4.33)$$

Ekuazio tentsorial gisa idazteko arazoa argia izan behar da: deribatu partzialak alda daitezke, baina deribatu kobarianteak ezin. (4.30)-ko partzialak deribatu kobarianteez ordezkatzeko baditugu, lehen deribatuen ordena aldatu bagenu (ekuazioa espazio lauan aldaezin utziz) eta gero ordezkatu izan bagenu baino erantzun ezberdina lortuko dugu. Aldea honek ematen du

$$Y^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu X^\nu - Y^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu X^\nu = -R_{\mu\nu} Y^\mu X^\nu . \quad (4.34)$$

Espazio-denbora lautik kurbatuetara legeak orokortzeko preskripzioak ez gaitu gidatzen deribatuen ordena aukeratzerakoan, eta, beraz, anbigua da (4.31) bezalako termino bat grabitatearen aurrean agertu behar ote den. (Deribatu kobarianteak ordenatzeko arazoa mekanika kuantikoan operadore-ordenatzeko anbigutasunen arazoaren antzekoa da.)

Literaturan horrelako anbigutasunei aurre egiteko hainbat preskripzio aurki ditza-kezu, gehienak aholku zentzudunak dira, esate baterako, elektromagnetismorako neur- gailuen inbarientzia gordetzea gogoratzea. Baina sakonean benetako erantzuna da ez dagoela arazo hauek pentsamendu hutsez bakarrik konpontzeko modurik; kontua da fi- sikaren lege bat espazio kurbatura egokitzeko modu bat baino gehiago egon daitekeela, eta, azken batean, esperimentuak soilik erabaki dezake alternatiben artean.

Izan ere, zintzoak izan gaitezen baliokidetasun-printzipioari buruz: jarraibide bali- garri gisa balio du, baina ez du merezi naturaren oinarritzko printzipio gisa tratatzea.

Ikuspegi modernotik, ez dugu espero EEP zorrozki egiazkoa denik. Demagun (4.24) bertorio alternatibo hau:

$$\nabla_\mu [(1 + \alpha R) F^{\nu\mu}] = 4\pi J^\nu, \quad (4.35)$$

non  $R$  Ricci eskalarra den eta  $\alpha$  akoplamendu-konstanteren bat den. Ekuazio honek elektrodinamika espazio-denbora kurbatua behar bezala deskribatuko balu, posible izango litzateke  $R$  neurtzea nahi duen eskualde txiki batean ere, partikula kargatuekin esperimentuak eginez. Beraz, baliokidetasun-printzipioak  $\alpha = 0$  eskatzen du. Baina, bestela, guztiz errespetagarria den ekuazioa da, kargaren kontserbazioarekin eta elektromagnetismoaren beste ezaugarri desiragarrieekin bat datorrena, espazio lauako ohiko ekuaziora murrizten dena. Izan ere, mekanika kuantikoak gobernatzen duen mundu batean eremu ezberdinen arteko akoplamendu posible guztiak espero ditugu (esaterako, grabitatea eta elektromagnetismoa) teoriaren simetriekin bat datozenak (kasu honetan, gauge inbariantzia). Beraz, zergatik da arrazoizkoa  $\alpha = 0$  ezartzea? Benetako arrazoiak eskalen bat da. Kontuan izan Ricci tentsorea metrikaren bigarren deribatuak dakarrela, dimentsiorik gabekoa, beraz,  $R$ -k (luzera)<sup>-2</sup> ( $c = 1$ -rekin) dimentsioak dituela. Beraz,  $\alpha$ -k (luzera)<sup>2</sup> dimentsioak izan behar ditu. Baina  $\alpha$ -k adierazten duen akoplamendua grabitate-jatorria denez, dagokion luzera-eskalaren zentzuzko itxaropen bakarra da

$$\alpha \sim l_P^2, \quad (4.36)$$

non  $l_P$  Planck-en luzera den

$$l_P = \left( \frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} = 1,6 \times 10^{-33} \text{ cm}, \quad (4.37)$$

non  $\hbar$  Planck-en konstantea den noski. Beraz, akoplamendu honi dagokion luzera-eskala oso txikia da, eta pentsa daitekeen edozein esperimentutarako eremu grabitatorioaren aldakuntza-eskala tipikoa askoz handiagoa izango dela espero dugu. Beraz, baliokidetasun-printzipioa urratzen duen termino hau modu seguruan alde batera utzi ahal izateko arrazoiak  $\alpha R$  ziurrenik kopuru izugarri txikia delako da, edozein esperimenturen eskura ez dagoena. Bestalde, gogo irekia eduki genezake, gure itxaropenak ez baitira beti behaketak bermatzen.

Lege fisikoek espazio-denbora kurbatu batean eremuen eta objektuen portaera nola arautzen duten finkatuta, erlatibitate orokorraren ezarpena osa dezakegu Einstein-en eremu-ekuazioak sartuz, metrikak energiari eta momentuari nola erantzuten dion arautzen dutenak. Egia esan, bi eratara egingo dugu: lehenik eta behin, Einsteinek berak pentsatzen zuenetik hurbil dagoen argudio informal baten bidez, eta gero ekintza batetik hasiz eta dagozkien higidura-ekuazioak ateraz.

Argumentu informala potentzial newtondarraren Poisson ekuazioa ordezkatzeko duen ekuazio bat aurkitu nahiko genukeela konturatzean hasten da:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (4.38)$$

non  $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$  espazioko laplaziarra den eta  $\rho$  masa-dentsitatea den. (4.22-n emandako  $\Phi$ -ren forma esplizitua (4.35)-ren soluzio bat da, puntu-formako masa-banaketa

baten kasuan.) Zein ezaugarri izan behar ditu gure bilatutako ekuazioak? (4.35)ren ezkerreko aldean grabitazio-potentzialari eragiten dion bigarren mailako operadore diferentzial bat dugu, eta eskuinaldean masaren banaketaren neurria. Orokortze erlatibista batek tentsoreen arteko ekuazio baten forma hartu beharko luke. Badakigu zein den masa-dentsitatearen tentsorearen orokortzea; energia-momentuaren  $T_{\mu\nu}$  tentsorea da. Grabitazio potentziala, berriz, tentsore metrikoarekin ordezkatu beharko litzateke. Beraz, gure ekuazio berriak  $T_{\mu\nu}$  metrikaren deribatueta bigarren mailakoa den tentsore baten proportzionala izango duela asma genezake. Izan ere, (4.21) Newton-en limiteko metrikarako eta  $T_{00} = \rho$  erabiliz, ikusten dugu muga honetan iragartzen duen ekuazio bat bilatzen ari garela.

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G T_{00} , \quad (4.39)$$

baina, jakina, guztiz tentsionala izatea nahi dugu.

(4.36)ren ezkerreko aldea ez da tentsore batera orokortzen. Lehen aukera  $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$  D'Alembertiarra  $g_{\mu\nu}$  metrikari jardutea izan daiteke, baina hori automatikoki zero da metrika bateragarritasunaren arabera. Zorionez, badago zero ez den eta metrikaren bigarren deribatueta (eta lehen deribatueta) eraikitzen den kantitate agerikoa:  $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$  Riemann tentsorea. Ez du indize kopuru egokia, baina uzurtu dezakegu Ricci-ren  $R_{\mu\nu}$  tentsorea osatzeko, hau da (eta abiarazteko simetrikoa da). Beraz, arrazoizkoa da eremu grabitatorioaren ekuazioak direla asmatzea

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (4.40)$$

$\kappa$  konstante baterako. Izan ere, Einsteinek ekuazio hori iradoki zuen une batean. Arazo bat dago, zoritxarrez, energiaren kontserbazioan. Baliokidetasun-printzipioaren arabera, espazio-denbora kurbatuan energia-momentuaren kontserbazioaren adierazpena izan beharko litzateke.

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 , \quad (4.41)$$

horrek suposatuko luke orduan

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.42)$$

Hori ez da egia geometria arbitrario batean; Bianchi identitatetik (3.94) ikusi dugu

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R . \quad (4.43)$$

Baina proposatzen dugun eremu-ekuazioak  $R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa T$  dela inplikatzeko du, beraz, hauek batera hartuta ditugu

$$\nabla_\mu T = 0 . \quad (4.44)$$

Eskalar baten deribatu kobariantea deribatu partziala besterik ez da, beraz (4.41)  $T$  espazio-denboran zehar konstantea dela esaten digu. Hau oso sinesgaitza da,  $T = 0$  hutsean eta  $T > 0$  materian. Gehiago saiatu behar dugu.

(Egia esan, apur bat iruzur egiten ari gara,  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  ekuazioa hain serio hartuz. Esan dugun bezala, baliokidetasun-printzipioa gutxi gorabeherako gida bat baino ez

bada, imajina genezake eskuineko aldean zero ez diren terminoak daudela kurbadura-tentsorea inplikatzan dutenak. Geroago zehatzagoak izango gara eta zorrozki zero direla argudiatuko dugu.)

Noski, ez dugu askoz gehiago saiatu behar, jada ezagutzen baitugu  $(0, 2)$  tentsore simetrikotik bat, Ricci tentsoretik eraikia, automatikoki kontserbatzen dena: Einstein tentsorea.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} , \quad (4.45)$$

beti  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$  betetzen duena. Beraz, proposatzera eramaten gaitu

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (4.46)$$

metrikaren eremu-ekuazio gisa. Ekuazio honek ageriko baldintza guztiak betetzen ditu; eskuineko aldea  $(0, 2)$  tentsore simetrikotik eta kontserbatuaren formako energia eta momentu-dentsitatearen adierazpen kobariante bat da, ezkerrekoa, berriz, metrikatik eta bere lehenengoz eraikitako  $(0, 2)$  tentsore simetrikotik eta kontserbatu bat da. eta bigarren deribatuak. Ikusi besterik ez dago ezagutzen dugun grabitatea benetan erreproduzitzen duen.

Horri erantzuteko, kontuan izan (4.43) bi aldeak uzkuarteak etekina ematen duela (lau dimentsiotan)

$$R = -\kappa T , \quad (4.47)$$

eta hau erabiliz (4.43) bezala berridatzi dezakegu

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) . \quad (4.48)$$

Hau ekuazio bera da, zertxobait ezberdin idatzita. Ikusi nahiko genuke ea grabitate newtoniarra iragartzen duen eremu ahulean, denboraren arabera den eta poliki-poliki mugitzen diren partikulen mugan. Muga honetan  $\rho = T_{00}$  atsedeen-energia  $T_{\mu\nu}$ -ko gainetarako terminoak baino askoz handiagoa izango da, beraz (4.45)  $\mu = 0, \nu = 0$  osagaian zentratu nahi dugu. Eremu ahuleko mugan, idatziko dugu ((4.13) eta (4.14)-ren arabera.

$$g_{00} = -1 + h_{00} , \quad (4.49)$$

$$g^{00} = -1 - h_{00} . \quad (4.50)$$

Energia-momentuaren tentsorearen arrastoa, ordena ez-trivial txikienera, hau da

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00} . \quad (4.51)$$

Hau (4.45) sartuz, lortuko dugu

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa T_{00} . \quad (4.52)$$

Hau metrikaren deribatuak energia-dentsitatearekin erlazionatzen dituen ekuazioa da. Adierazpen esplizitua metrikaren arabera aurkitzeko,  $R_{00} = R^\lambda{}_{0\lambda 0}$  ebaluatu behar dugu. Izan ere,  $R^i{}_{0i0}$  baino ez dugu behar,  $R^0{}_{000} = 0$  geroztik. Daukagu

$$R^i{}_{0j0} = \partial_j \Gamma^i{}_{00} - \partial_0 \Gamma^i{}_{j0} + \Gamma^i{}_{j\lambda} \Gamma^\lambda{}_{00} - \Gamma^i{}_{0\lambda} \Gamma^\lambda{}_{j0} . \quad (4.53)$$

Hemen bigarren terminoa denbora deribatua da, eremu estatikoetarako desagertzen dena. Hirugarren eta laugarren terminoak  $(\Gamma)^2$  formakoak dira, eta  $\Gamma$  perturbazio metrikoan lehen mailakoa denez hauek bigarren ordenan bakarrik laguntzen dute, eta alde batera utzi daitezke.  $R^i_{0j0} = \partial_j \Gamma^i_{00}$  geratzen zaigu. Honetatik ateratzen dugu

$$R_{00} = R^i_{0i0} \quad (4.54)$$

$$= \partial_i \left( \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right) \quad (4.55)$$

$$= -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \quad (4.56)$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} . \quad (4.57)$$

(4.48)-rekin alderatuz gero, ikusten dugu (4.43)-ren 00 osagaiak iragartzen duela muga newtondarrean.

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa T_{00} . \quad (4.58)$$

Baina hauxe da (4.36),  $\kappa = 8\pi G$  ezartzen badugu.

Beraz, badirudi gure usteak funtzionatu duela. Normalizazioa muga newtondarrekin alderatuta finkatuta, **Einstein-en ekuazioak** erlatibitate orokorrerako aurkez ditzakegu:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (4.59)$$

Hauek adierazten digute nola erreakzionatzen duen espazio-denboraren kurbadurak energia-momentuaren aurrean. Einsteinek, entzungo zenuten, uste zuen ezkerreko alde polita eta geometrikoa zela, eta eskuinekoa, berriz, zertxobait gutxiago sinesgarria zela.

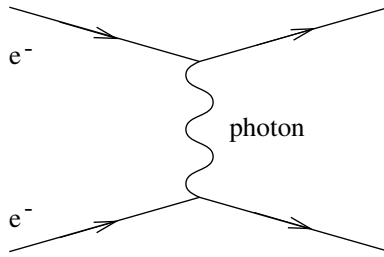
Einsteinen ekuazioak  $g_{\mu\nu}$  tentsore metrikoaren eremurako bigarren mailako ekuazio diferentzial gisa har daitezke. Hamar ekuazio independente daude (bi aldeak bi indizeko tentsore simetrikoak baitira), osagai metrikoen hamar funtzio ezezagunetarako guztiz egokia dela dirudi. Hala ere,  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$  Bianchi identitateak  $R_{\mu\nu}$  funtzioetan lau muga adierazten ditu, beraz (4.52) sei ekuazio benetan independente baino ez daude. Izan ere, hau egokia da, metrika bat Einsteinen ekuazioaren soluzioa bada  $x^\mu$  koordenatu-sistema batean, beste edozein koordenatu-sisteman ere soluzioa izan beharko luke  $x^{\mu'}$ . Horrek esan nahi du  $g_{\mu\nu}$ -n lau askatasun-gradu ez-fisiko daudela ( $x^{\mu'}(x^\mu)$  lau funtzioek irudikatuta), eta espero beharko genuke Einsteinen ekuazioak koordenatuetatik independenteak diren sei askatasun-graduak mugatzen dituztela.

Ekuazio diferentzial gisa, hauek oso konplikatuak dira; Ricci eskalarra eta tentsorea Riemann tentsorearen uzkurdurak dira, Christoffel sinboloen deribatuak eta produktuak barne hartzen dituenak, eta, aldi berean, metrikaren alderantzizko metrika eta deribatuak dakartza. Gainera,  $T_{\mu\nu}$  energia-momentuaren tentsoreak metrika ere hartuko du parte. Ekuazioak ere ez-linealak dira, beraz, ezagutzen diren bi soluzio ezin dira gainjarri hirugarren bat aurkitzeko. Beraz, oso zaila da Einsteinen ekuazioak edozein orokortasun-motatan ebaztea, eta normalean beharrezkoa da hipotesi sinplifikatzaile batzuk egitea. Hutsean ere, non energia-momentuaren tentsorea zeroan ezartzen dugun, ondoriozko ekuazioak ((4.45))

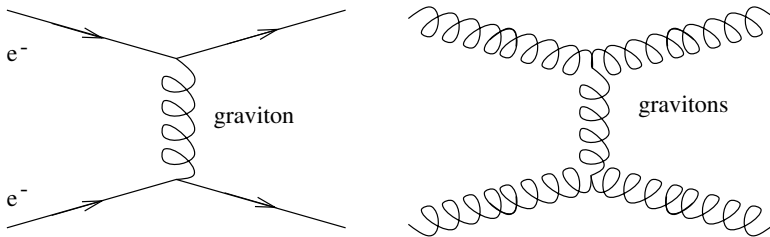
$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.60)$$

oso zaila izan daiteke konpontzea. Suposizio sinplifikatzailerik ezagunena metrikak simetria maila esanguratsua duela da, eta metrikaren simetriek bizitza errazten dutenari buruz hitz egingo dugu aurrerago.

Azpmarratzekoa da erlatibitate orokorraren ez-linealtasuna. Grabitate newtondarran bi puntu-masen ondoriozko potentziala masa bakoitzaren potentzialen batura besterik ez da, baina argi dago hori ez da erlatibitate orokorrera eramaten (eremu ahuleko mugatik kanpo). Arrazoi fisiko bat dago horretarako, hots, GR-n eremu grabitatorioa bere buruarekin parekatzen dela. Hau baliokidetasun-printzipioaren ondorio gisa pentsa daiteke — grabitateak bere buruarekin akoplatuko ez balu, “atomo grabitatorioak” (bi partikulak elkarrekiko erakarpen grabitatorioarekin lotuta) masa inertzial ezberdina izango luke (erakarpen grabitatorioaren ondorioz). lotura-energia negatiboa) masa grabitatorioa baino. Partikulen fisikaren ikuspuntutik hau Feynman diagramen arabera adieraz daiteke. Bi elektroien arteko elkarrekintza elektromagnetikoa fotoi birtual baten trukearen ondoriozkoa dela pentsa daiteke:



Baina ez dago bi fotoik beste fotoi bat trukatzten duten diagramarik; elektromagnetismoa lineala da. Grabitazio-interakzioa, berriz, grabitazio birtual baten trukearen ondoriozkoa dela pentsa daiteke (metrikoaren perturbazio kuantizatu bat). Ez-linealtasuna elektroiek eta grabitoiak (eta beste edozer) grabitazio birtualak trukatu ditzaketela adierazten du, eta, beraz, grabitazio-indar bat eragin dezaketela:



Ez dago sakoneko ezer grabitatearen ezaugarri honek; gauge teoria gehienek partekatzen dute, hala nola kromodinamika kuantikoa, elkarrekintza indartsuen teoria. (Elektromagnetismoa salbuespena da; linealtasuna dagokion neurgailu-taldea,  $U(1)$ , abeliarra dela izan daiteke.) Baina teoria newtondarraren urruntze bat adierazten du. (Noski, Feynman diagramen lengoia mekaniko kuantiko hau nolabait desegokia da GRrentzat, [oraindik] arrakastaz kuantizatu ez dena, baina diagramak teoriarik zer interakzio dauden gogoratze-ko laburdura eroso besterik ez dira.)

Einstein-en ekuazioak eratorri ditugun moduan metrikarako eremu-ekuazio zuzenak

direla ziurtatzeko, ikus dezagun nola erator daitezkeen ikuspegi modernoago batetik, ekintza-printzipio batetik abiatuta. (Izan ere, ekuazioak lehen aldiz Hilbertek atera zituen, ez Einsteinek, eta Hilbertek ekintza-printzipioa erabiliz egin zuen. Baina Einsteinek gaiari buruzko aurreko artikuluetan inspiratu zen, eta Einsteinek berak modu independentean eratorri zituen ekuazioak, beraz, Einstein-en izena ematen zaie. Ekin-tzari, ordea, zuzenki Hilbert ekintza deitzen zaio.) Ekintzak Lagrange dentsitate baten espazio-denboran zehar integrala izan behar du ("Lagrangian" laburbilduz, nahiz eta hertsiki Lagrangiarra Lagrange dentsitatearen espazioko integrala den):

$$S_H = \int d^n x \mathcal{L}_H . \quad (4.61)$$

Lagrange-ren dentsitatea tentsore-dentsitatea da, eskalar bat  $\sqrt{-g}$  bider idatz daitekeena. Zer eskalar egin ditzakegu metrikarekin? Dakigunez metrika bere forma kanonikoaren berdina izan daitekeela eta bere lehen deribatuak zero puntu batean ezar daitezkeela, edozein eskalar ez-trivialek metrikaren bigarren deribatuak izan behar ditu gutxienez. Riemann-en tentsorea, noski, metrikaren bigarren deribatuetatik egina dago, eta lehenago esan genuen Riemann-en tentsoretik eraiki genezakeen eskalar independente bakarra Ricci eskalar  $R$  zela. Erakutsi ez duguna, baina hala ere egia da, metrikaren eta bere lehen eta bigarren deribatuetatik egindako edozein tentsore ez-trivial metrikaren eta Riemann-en tentsorearen arabera adieraz daitekeela. Beraz, metrikatik eraikitako eskalar independente bakarra, bere deribatuetan bigarren ordena baino handiagoa ez dena, Ricci eskalarra da. Hilbertek irudikatu zuen, beraz, hau zela lagrangiar baten aukerarik errazena, eta proposatu zuen

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g} R . \quad (4.62)$$

Higidura-ekuazioak metrikarekiko ekintza aldatzetik etorri behar dira. Izan ere, har ditzagun aldaerak  $g^{\mu\nu}$  alderantzizko metrikarekiko, zertxobait errazagoak baina ekuazio-multzo baliokidea ematen dutenak.  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  erabiliz, orokorrean izango dugu

$$\delta S = \int d^n x \left[ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g} \right] \quad (4.63)$$

$$= (\delta S)_1 + (\delta S)_2 + (\delta S)_3 . \quad (4.64)$$

$(\delta S)_2$  bigarren terminoa jada  $\delta g^{\mu\nu}$  adierazpen batzuen forman dago; azter ditzagun besteak gertuagotik.

Gogoratu Ricci-ren tentsorea Riemann-en tentsorearen uzkurdura dela, hau da

$$R^\rho{}_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - (\lambda \leftrightarrow \nu) . \quad (4.65)$$

Honen aldakuntza metrikarekiko lotura lehenik metrikarekiko aldatuz aurki daiteke, eta gero adierazpen honetan ordezkatur. Dena den, har ditzagun konexioaren aldaera arbitrarioak, ordezkatur

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} \rightarrow \Gamma^\rho_{\nu\mu} + \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} . \quad (4.66)$$

$\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}$  aldakuntza bi konexioren aldea da, eta, beraz, bera tentsore bat da. Beraz, bere deribatu kobariantea har dezakegu,

$$\nabla_\lambda (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) = \partial_\lambda (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \delta \Gamma^\rho_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} . \quad (4.67)$$



Adierazpen hori (eta lan-kopuru txiki bat) ikusita, erraza da hori erakustea

$$\delta R^\rho_{\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu}) . \quad (4.68)$$

Zuk zeuk egiaztatu dezakezu hau. Beraz, (4.56)-ko lehen terminoaren ekarpena  $\delta S$ -ri idatz daiteke

$$(\delta S)_1 = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[ \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) \right] \quad (4.69)$$

$$= \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma \left[ g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) - g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}) \right] , \quad (4.70)$$

non bateragarritasun metrikoa erabili dugu eta indize faltsu batzuk berriz etiketatu ditugu. Baina orain bektore baten dibergentzia kobariantearen bolumen naturalaren elementuarekiko integrala dugu; Stokes-en teoremaren arabera, muga-ekarpen baten berdina da, zeina zeroan ezar dezakegun aldakuntza infinituan desagertuz. (Ez dugu frogatu Stokes-en teorema, lehen esan bezala forma diferentzialei dagokienez, horrela pentsa daitekeenik, baina erraz konbentzi dezakezu zure burua egia dela.) Beraz, termino honek ez dio ezer laguntzen guztizko aldakuntzari.

$(\delta S)_3$  terminoari zentzua emateko honako gertaera hau erabili behar dugu, egiazko  $M$  edozein matrizerentzat:

$$\text{tr}(\ln M) = \ln(\det M) . \quad (4.71)$$

Hemen,  $\ln M \exp(\ln M) = M$ -k definitzen du. (Zenbakietarako hau agerikoa da, matrizeetarako apur bat gutxiago erraza da). Identitate honen aldakuntzak ematen du

$$\text{tr}(M^{-1}\delta M) = \frac{1}{\det M} \delta(\det M) . \quad (4.72)$$

Hemen aztarnaren propietate ziklikoa erabili dugu  $M^{-1}$  eta  $\delta M$  ezin direla joan-etorria alde batera utzi ahal izateko. Orain,  $M = g^{\mu\nu}$  alderantzizko metrikoari aplikatu nahi genioke. Ondoren,  $\det M = g^{-1}$  (non  $g = \det g_{\mu\nu}$ ) eta

$$\delta(g^{-1}) = \frac{1}{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} . \quad (4.73)$$

Orain konektatu besterik ez dugu egin:

$$\delta\sqrt{-g} = \delta[(-g^{-1})^{-1/2}] \quad (4.74)$$

$$= -\frac{1}{2}(-g^{-1})^{-3/2}\delta(-g^{-1}) \quad (4.75)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} . \quad (4.76)$$

(4.56ra entzunez) eta  $(\delta S)_1$ -k ez duela laguntzen gogoratuz, aurkituko dugu

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} . \quad (4.77)$$

Hau aldakuntza arbitrarioetarako desagertu beharko litzateke, beraz, hutsean Einsteinen ekuazioetara eramaten gaitu:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.78)$$

Ekintza sinple honek huts-eremuko ekuazio berdinetara ekartzen duela argudio informalagoen bidez iritsi ginen, zalantzarik gabe, zerbait ongi egiten ari garela ziurtatzen gaitu. Benetan gustatuko litzazigukeena, ordea, hutsean ez diren eremuen ekuazioak ere lortzea da. Horrek esan nahi du formako ekintza bat hartzen dugula

$$S = \frac{1}{8\pi G} S_H + S_M , \quad (4.79)$$

non  $S_M$  materiarako ekintza den, eta grabitazio ekintza normalizatu dugu (normalizazio egokia konbentzio-menpekota den arren). Aurreko prozedura beraren bidez jarraitzeak ekartzen du

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 , \quad (4.80)$$

eta Einsteinen ekuazioak berreskuratzen ditugu ezarri ahal badugu

$$T_{\mu\nu} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (4.81)$$

Zerk pentsarazten digu horrelako identifikazio bat egin dezakegula? Izan ere (4.70) energia-momentu tentsorea simetrikoki bat definitzeko modurik onena da. Zaila da kontserbatzen dela erakustea, egia esan automatikoki egia dena, baina hurrengo atalera arte justifikatuko ez duguna.

Esaten dugu (4.70) energia-momentu tentsorearen definizio “hobeena” ematen duela, ez baita aurkituko duzun bakarra. Minkowski espazio lauan, elektromagnetismoari edo eremuen teoriari buruzko liburuetan batzuetan ematen den definizio alternatibo bat dago. Testuinguru honetan energia-momentuaren kontserbazioa espazio-denborazko translazioetan Lagrangiarren simetriaren ondorio gisa sortzen da. Noether-en teorema lagrangiarren simetria orok kontserbazio-lege baten existentzia dakarrela dio; Lau espazio-denbora-translazioen azpian dagoen aldaezintasunak  $S^{\mu\nu}$  tentsore batera eramaten du,  $\partial_\mu S^{\mu\nu} = 0$ -ri men egiten diona (lau erlazio, bat  $\nu$ -ren balio bakoitzeko). Xehetasunak Wald-en edo eremu teorikoko edozein liburutan aurki daitezke.  $\psi^i$  eremu batzuen eta haien lehen deribatuen  $\partial_\mu \psi^i$  lagrangiar bati Noether-en prozedura aplikatuz, lortuko dugu.

$$S^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \psi^i)} \partial^\nu \psi^i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} , \quad (4.82)$$

non  $i$  baino gehiagoko batura inplizitua den. Egiazta dezakezu tentsore hori kontserbatzen dela materia-eremuen higidura-ekuazioen arabera.  $S^{\mu\nu}$  askotan “energia-momentuaren tentsore kanonikoa” izena hartzen du; dena den, erabilera erosoagoa zaigulako hainbat arrazoi daude (4,70). Lehenik eta behin, (4.70) Einsteinen ekuazioen eskuinaldean agertzen dena da, ekintza batetik eratorritakoan, eta ez da beti posible (4.71) espazio-denbora

kurbatura orokortzea. Baina espazio lauan ere (4,70) bere abantailak ditu; argi eta garbi simetrikoa da, eta, gainera, neurgailu aldaezina izango dela bermatuta, bietako bat ez da egia (4.71). Beraz, (4.70) jarraituko dugu energia-momentuaren tentsorearen definizio gisa.

Batzuetan baliagarria da Einsteinen ekuazioak pentsatzea  $T_{\mu\nu}$  zein den materiaren teoria zehaztu gabe. Horrek arbitrariotasun handia uzten digu; har dezagun adibidez “Zer metrik obeditzen dituzte Einsteinen ekuazioak?” galdera  $T_{\mu\nu}$ -n muga batzuk ez daudenez, erantzuna “edozein metrika” da; besterik gabe, hartu nahi duzun metrika, kalkulatu Einsteinen  $G_{\mu\nu}$  metrika honentzat eta, ondoren, eskatu  $T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ -ren berdina izan dadila. (Automatikoki kontserbatuko da, Bianchi identitatearen arabera.) Gure benetako kezka Einsteinen ekuazioen soluzioen existentzia da, energia eta momentu “errealistak” iturrien aurrean, horrek esan nahi duen edozein dela ere.  $T_{\mu\nu}$ -ri eskatzen zaion propietate ohikoena energia-dentsitate positiboak adierazten dituela da — ez da masa negatiborik onartzen. Lokalki inertzial marko batean eskakizun hau  $\rho = T_{00} \geq 0$  gisa adieraz daiteke. Hau koordenatuetatik independentea den adierazpena bihurtzeko, hori eskatzen dugu

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0, \quad \text{for all timelike vectors } V^\mu. \quad (4.83)$$

**Energia Baldintza Ahula** edo WEC izenez ezagutzen da. Baldintza nahiko arrazoizkoa dirudi, eta erlatibitate orokorraren soluzioei buruzko teorema garrantzitsu asko (Hawking eta Penroseren singularitate teorema, esaterako) baldintza honetan edo oso hurbil dagoen zerbaitetan oinarritzen dira. Zoritxarrez ez dago harrian ezarria; izan ere, erraza da WEC urratzen duten eremu-teoria klasiko errespetagarriak asmatzea, eta ia ezinezkoa da hari men egiten dion eremu-teoria kuantiko bat asmatzea. Hala ere, zilegi da WEC-k baldintzarik muturrekoenetan izan ezik. (Energia-baldintza indartsuagoak ere badaude, baina WEC-a baino are gutxiago egiazkoak dira, eta ez gara horietan geratuko).

Orain Einsteinen ekuazioak bi modu ezberdinetan justifikatu ditugu: Poisson-en ekuazioaren orokortze natural kobariante gisa potentzial grabitatorio newtondarrarengatik, eta ahalik eta ekintzarik errazena aldatzearen emaitza gisa metrikarako asma genezakeen. Ikastaroaren gainerakoa ekuazio hauen ondorioen esplorazioa izango da, baina bide horretatik hasi baino lehen azter ditzagun laburki ekuazioak aldatzeko moduak. Modu asko daude, baina lau aukera ezberdin aztertuko ditugu: konstante kosmologiko bat sartzea, ekintzan maila altuagoko terminoak, eremu eskalar grabitatorioak eta desagertzen ez den tortsio-tentsorea.

Lehenengo aukera konstante kosmologikoa da; George Gamow-ek Einsteinek bere bizitzako akatsik handiena dela esan du. Gogoratu grabitatearen ekintza ahalik eta errazenaren bilatzean oihartu ginen edozein eskalar ez-trivialak gutxienez bigarren mailakoa izan behar zuela metrikaren deribatuetan; beheko ordenan sor dezakegun guztia konstante bat da. Konstante batek berez dinamika oso interesgarriak ekartzen ez baditu ere, eragin garrantzitsua du Hilbert-en ekintza konbentzionaleri gehitzen badiogu. Beraz, emandako ekintza bat hartzen dugu kontuan

$$S = \int d^m x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (4.84)$$

non  $\Lambda$  konstanteren bat den. Sortzen diren eremu-ekuazioak hauek dira

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.85)$$

eta, jakina, energia-momentuaren tentsore bat egongo litzateke eskuineko aldean, materiako ekintza bat sartu izan bagenu.  $\Lambda$  konstante kosmologikoa da; jatorriz Einsteinek sartu zuen argi geratu ondoren ez zegoela soluziorik ez zeudela materia-edukia nulurik gabeko kosmologia estatiko bat (eskala handietan denborarekin aldatzen ez den unibertsoa) adierazten zuten ekuazioek. Konstante kosmologikoa ondo moldatzen bada, posible da soluzio estatiko bat aurkitzea, baina ezegonkorra da perturbazio txikiatarako. Gainera, Hubblek unibertsoa hedatzen ari zela frogatu ondoren, irtenbide estatikoak bilatzea ez zen garrantzitsua izan, eta Einsteinek bere iradokizuna baztertu zuen. Rasputin bezala, ordea, konstante kosmologikoa zaila da hiltzea. Gustuko badugu (4.74) termino gehigarria eskuinaldera eraman dezakegu, eta energia-momentuaren tentsore moduko bat bezala pentsa dezakegu,  $T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$ -rekin (bateragarritasun metrikoaren bidez automatikoki kontserbatzen da). Orduan  $\Lambda$  “hutsaren energia-dentsitatea” gisa interpreta daiteke, materia-eremurik ezean ere dagoen energia eta momentu-iturri bat. Interpretazio hau garrantzitsua da eremu kuantikoen teoriak hutsuneak nolabaiteko energia eta momentu bat izan beharko lukeela aurreikusten duelako. Mekanika kuantiko arruntan, maiztasuna  $\omega$  eta energia klasiko minimoa  $E_0 = 0$  dituen osziladore harmoniko batek kuantizazioan  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$  energia duen oinarritzko egoera du. Eremu kuantizatu bat osziladore harmoniko kopuru infinitu baten bilduma gisa pentsa daiteke, eta modu bakoitzak oinarritzko egoeraren energiari laguntzen dio. Emaizta, noski, infinitua da, eta behar bezala erregularizatu behar da, adibidez maiztasun altuetan mozketak bat sartuz. Azken huts-energiak, teoriako eremu guztien oinarritzko egoeraren oszilazioen energien batura erregularizatua dena, ez du arrazoi onik zero izateko eta, hain zuzen ere, eskala naturala izatea espero litzateke.

$$\Lambda \sim m_P^4, \quad (4.86)$$

non Planck masa  $m_P$  gutxi gorabehera  $10^{19}$  GeV edo  $10^{-5}$  gramo den. Unibertsoari eskala handian egindako behaketak  $\Lambda$ -ren benetako balioa mugatzea ahalbidetzen digu, (4.75) baino txikiagoa dena  $10^{120}$ -ren faktore batez gutxienez. Hau da fisikako estimazio teorikoaren eta behaketa-murritzapenaren artean ezagutzen den desadostasun handiena, eta jende asko konbentzitzen du “konstante kosmologikoaren arazoa” gaur egun konpondu gabeko arazo garrantzitsuenetako bat dela. Bestalde, behaketek ez digute esaten  $\Lambda$  zorrozki zero denik, eta, hain zuzen, unibertsoaren bilakaeran ondorio garrantzitsuak izan ditzaketen balioak onartzen dituzte. Einsteinen akats honek, beraz, maltzur egiten jarraitzen du bai fisikariek, zeinek zergatik den hain txikia ulertu nahiko luketenak, bai astronomoek, benetan txikia den ala ez ikusi ahal izateko zehaztu nahiko luketenak.

Hilbert-en ekintzaren orokortze apur bat gutxiago intrigazkoa litzateke metrikaren deribatuetan bigarren ordena baino gehiagoko eskalarrak sartzea. Formaren ekintza bat imajina genezake

$$S = \int d^m x \sqrt{-g} (R + \alpha_1 R^2 + \alpha_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \alpha_3 g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R + \dots), \quad (4.87)$$

non  $\alpha$ -ak akoplamendu-konstanteak diren eta puntuek kurbadura-tentsorea, bere uzkur-durak eta bere deribatuetatik egin ditzakegun beste eskalar guztiak adierazten dituzte. Tradizionalki, termino horiek alde batera utzi izan dira jada estetikoki atseгина eta en-pirikoki arrakastatsua den teoria bat zaildu besterik ez dutelako. Dena den, utzikeria horren arrazoi funtsezko beste hiru daude gutxienez. Lehenik eta behin, jarraian ikusi-ko dugunez, Einsteinen ekuazioak metrikaren hasierako balio-problema bat dakar, non hasierako aldi batean zehaztutako “koordinatuak” eta “momentuak” etorkizuneko bi-lakaera aurreikusteko erabil daitezkeen. Deribatu altuagoko terminoekin, datu horiek ez ezik, momentuaren deribatu batzuk ere eskatuko genituzke. Bigarrenik, partikulen fisikarien erlatibitate orokorraren atsekabetasun-iturri nagusia ezin dela birnormalizatu (dakigunez), eta deribatu altuagoak dituzten lagrangiarrek, oro har, teoriak gutxiago bir-normalizagarriak izan ohi dituzte, gehiago baino gehiago. Hirugarrenik, baliokidetasun-printzipioaren mugei buruz hitz egitean arestian erabili ditugun argudio berberen bidez, (4.76) ataleko termino gehigarriak ezabatu egin behar dira (Planck-en masaren poten-tziaren baten arabera) ohiko Hilbert terminoarekiko, eta, beraz ez litzateke espero ener-gia baxuko mundurako inolako garrantzi praktikorik izango. Arrazoi horietako bat ere ez da guztiz konbentzigarria, eta, egia esan, jendeak horrelako teoriak kontuan hartzen jarraitzen du, baina gehienetan eredu horiek ez dute arreta handirik erakartzen.

Arreta erakartzen duen eredu multzo bati grabitatearen **tentsore eskalar-teoriak** izenez ezagutzen da,  $g_{\mu\nu}$  tentsore metrikoa eta oinarritzko eremu eskalar bat,  $\lambda$ , baitituzte. Ekintza idatzi daiteke

$$S = \int d^n x \sqrt{-g} \left[ f(\lambda) R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \lambda) (\partial_\nu \lambda) - V(\lambda) \right], \quad (4.88)$$

non  $f(\lambda)$  eta  $V(\lambda)$  teoria definitzen duten funtzioak diren. Gogoratu (4.68) Ricci eska-laren koefizientea GR konbentzionalean Newton-en konstantearen alderantzizko propor-tzionala dela. Beraz, tentsore eskalarren teorietan, non koefiziente hori espazio-denboran zehar alda daitekeen eremu baten funtzioaren batek ordezkutzen duen, grabitatearen “in-darra” (Newton-en konstantearen balio lokalaren arabera neurtuta) ezberdina izango da leku batetik bestera. tokian eta noizean behin. Izan ere, Brans-ek eta Dickek asmatutako eta gaur egun haien izena daraman teoria eskalar-tentsorea famatuena Dirac-en iradoki-zunean inspiratu zen konstante grabitatorioa denborarekin aldatzen dela. Dirac ohartu zen zenbaki kosmologikoen konbinazioak (unibertsoaren hedapen-abiaduraren neurria) eta partikula-fisikako parametro tipikoen konbinazioak hartuz, hala nola, Hubbleren konstantea  $H_0$ , eta partikula-fisika parametro tipikoen konbinazioak hartuz. pion,  $m_\pi$ . Adibidez,

$$\frac{m_\pi^3}{H_0} \sim \frac{cG}{\hbar^2}. \quad (4.89)$$

Momentuz erlazio hori istripu hutsa ez dela suposatzen badugu, Hubbleko “konstantea” benetan denborarekin (eredu kosmologiko gehienetan) aldatzen den arazoaren aurrean gaude, gainerako kantitateek normalean ez. Dirac-ek, beraz, proposatu zuen, hain zu-zen ere,  $G$  denborarekin aldatu egiten zela, (4.78) mantentzeko moduan; proposamen hori asetzea izan zen Brans eta Dickeren motibazioa. Gaur egun, erlatibitate orokorreko proba esperimentalak nahikoa zehatzak dira, Brans-Dicke-ren teoria zuzena bada,  $G$ -n

aurreikusitako aldaketa espazioan eta denboran oso txikia izan behar dela ziurtasunez esan dezakegula, betetzeko beharrezkoa dena baino askoz motelagoa. Dirac-en hipotesia. (Ikusi Weinberg Brans-Dicke teoriari eta proba esperimentalei buruzko xehetasunak lortzeko.) Dena den, oraindik ere lan handia egiten ari da beste teoria eskalar-tentsoreetan, superkordien teorian ezinbestekoak suertatzen direnak eta oso hasierako unibertsoan ondorio garrantzitsuak izan ditzaketenak.

Erlatibitate orokorraren azken alternatiba gisa, konexioa benetan metriketatik eratorria ez izatearen aukera aipatu behar dugu, baizik eta existentzia independentea duela oinarritzko eremu gisa. Ariketa gisa utziko dizugu erakusteko posible dela erlatibitate orokorrerako ekintza konbentzionala kontuan hartzea baina  $g_{\mu\nu}$  metrikoaren eta torsiorik gabeko konexioaren  $\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}$  eta ekuazioen funtzio gisa tratatzea. Konexioarekiko ekintza hori aldatzean eratorritako higidurak esan nahi du  $\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}$  benetan  $g_{\mu\nu}$ -ri lotutako Christoffel konexioa dela. Konexioa torsiorik gabekoa izateko eskaria kendu genezake, kasu horretan, torsio-tentsorea hedatzeko askatasun gradu gehigarriak ekar ditzake. Xehetasunetan sartu gabe, halako teoriak arreta handirik jaso ez izanaren oinarritzko arrazoia torsioa bera tentsore bat delako besterik ez da; ez dago beste tentsore-eremu “ez-grabitazionalak”etatik bereizteko ezer. Beraz, ez dugu orokortasunik galtzen torsiorik gabeko konexioen teoriak (GR-ra eramaten dituztenak) gehi edozein tentsore-eremuak kontuan hartuta, gustuko duguna izenda dezakeguna.

Aukera hauetariko bat (edo, ziurrenik, oraindik pentsatu ez dugun zerbait) naturan gauzatzeko aukera kontuan izanik, Ikasturte osoan, erlatibitate orokorra Einsteinen ekuazioetan edo Hilbert-en ekintzan oinarritzen den teoria zuzena den suposizioan landuko dugu, eta horren ondorioak landuko ditugu. Ondorio hauek, noski, Einsteinen ekuazioen soluzioek osatzen dute hainbat energia eta momenturako iturrietarako, eta disoluzio horietan probako partikulen portaerak. Irtenbide zehatzak zehatz-mehatz aztertutako baina lehen, erlatibitate orokorreko hasierako balio-problema era abstraktuagoan aztertuko dugu.

Newtonen mekanika klasikoan, partikula bakar baten portaera  $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ -k gobernatzen du noski. Partikula  $\Phi(x)$  energia potentzial eremu baten eraginpean mugitzen bada, orduan indarra  $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$  da, eta partikulak obeditzen du.

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \Phi. \quad (4.90)$$

Hau  $x^i(t)$ -ren bigarren ordenako ekuazio diferentziala da, lehen mailako bi ekuazio akoplatuen sistema gisa birsortu dezakeguna  $\mathbf{p}$  momentua sartuz:

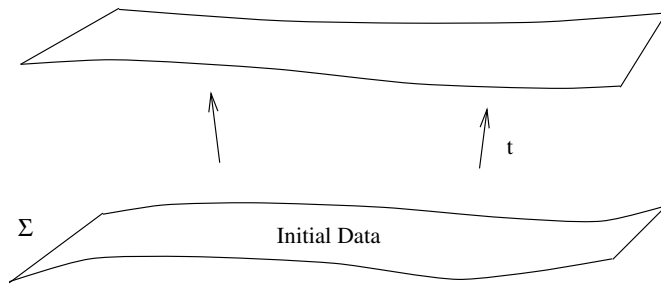
$$\frac{dp^i}{dt} = -\partial_i \Phi \quad (4.91)$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{m} p^i. \quad (4.92)$$

Hasierako balioaren problema  $(x^i, p^i)$  “egoera” zehazteko prozedura besterik ez da, zeina muga-baldintza gisa balio duena (4.80) modu bakarrarekin ebatzi daitekeen. Baliteke (4.80) aukera ematen dizula, uneren batean koordinatuak eta momentuak  $t$  emandakoan,

kopuru infinitesimal batean eboluzionatzeko  $t + \delta t$  denbora batera, eta prozedura hau errepikatu soluzio osoa lortzeko.

Problema analogikoa erlatibitate orokorrean formulatu nahiko genuke. Einsteinen  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$  ekuazioak kobarianteak dira noski; ez dute estatu bat eboluzionatu ahal izateko “denbora” nozio hobetsia bereizten. Hala ere, eskuz aukera dezakegu  $\Sigma$  espazio-itxurako hiperazalera (edo “xerra”)  $\Sigma$ , hiperazalera horren hasierako datuak zehaztu eta etorkizunean handik hiperazalera batera eboluzionatu gaitezkeen ikus dezakegu. (“Hi-per” lau dimentsiotako denbora konstanteko zati bat hiru dimentsiotakoa izango delako, “gainazalak” normalean bi dimentsiokoak diren bitartean.) Prozesu honek biolentzia egiten dio teoriaren kobariantza agerikoari, baina kontuz bagaude Einsteinen ekuazioak espazio-denboran zehar bat-batean ebatztearen baliokide den formulazio batekin amaitu beharko genuke.



Metrikoa oinarritzko aldagaia denez, gure lehenengo ustea da gure hiperazalerako metrikaren  $g_{\mu\nu}|_{\Sigma}$  balioak “koordinatuak” eta  $\partial_t g_{\mu\nu}|_{\Sigma}$  denboraren deribatuak direla kontuan hartu beharko genituzkeela (denbora-koordinatu zehatz batzuei dagokienez).) “momentua” izatea, elkarrekin egoera zehazten dutenak. (Gai-eremuetarako koordinatuak eta momentuak ere egongo dira, esplizituki kontuan hartuko ez ditugunak). Izan ere,  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$  ekuazioak metrikaren bigarren deribatuak dakartza denborarekiko (konexioak metrikaren lehen deribatuak eta Einstein tentsorea konexioaren lehen deribatuak dituenek), bide onetik goazela dirudi. Hala ere, Bianchi identitateak  $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$  dela esaten digu. Ekuazio hau honela berridatz dezakegu

$$\partial_0 G^{0\nu} = -\partial_i G^{i\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} G^{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} G^{\mu\lambda}. \quad (4.93)$$

Eskuineko aldean gertutik begiraturaz gero, *hirugarren* ordenako denbora deribaturik ez dagoela erakusten du; beraz, ezkerreko aldean ezin da egon. Beraz,  $G^{\mu\nu}$  oro har metrikaren bigarren ordenako denbora-deribatuak dakartzan arren,  $G^{0\nu}$  osagai espezifikoek ez dute. Einsteinen ekuazioetako hamar osagai independenteetatik, lau hauek adierazten dira

$$G^{0\nu} = 8\pi GT^{0\nu} \quad (4.94)$$

ezin da erabili hasierako datuak  $(g_{\mu\nu}, \partial_t g_{\mu\nu})_{\Sigma}$  eboluzionatzeko. Aitzitik, **murritzapen** gisa balio dute hasierako datu honetan; ez gara aske metrikaren eta bere denbora-deribatuen konbinaziorik zehazteko  $\Sigma$  hiperazalean, (4.82) erlazioei men egin behar dietelako. Gainerako ekuazioak,

$$G^{ij} = 8\pi GT^{ij} \quad (4.95)$$

metrikaren bilakaera dinamikoaren ekuazioak dira. Jakina, hauek  $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$  hamar funtzio ezezagunetarako sei ekuazio baino ez dira, beraz, soluzioak ezinbestean anbiguotasun laukoitza ekarriko du. Hori besterik ez da aipatu dugun askatasuna, espazio-denboran zehar lau koordinatu-funtzioak aukeratzeko.

Ariketa zuzena baina argigabea da (4.83) bahetzea metrikaren bigarren denbora deribatu guztiak ez direla agertzen aurkitzeko. Izan ere,  $\partial_t^2 g_{ij}$  (4.83) agertzen da, baina ez  $\partial_t^2 g_{0\nu}$ . Beraz, “egoera” erlatibitate orokorrean  $g_{ij}|_\Sigma$  metrikoaren espazio-itxurako osagaien eta haien lehen deribatu  $\partial_t g_{ij}|_\Sigma$   $\Sigma$  hipergainazaleko osagaien zehaztapen batek osatuko du, eta bertatik etorkizuneko bilakaera zehaztu ahal izango dugu erabiliz (4.83), gainerako osagaiak  $g_{0\nu}$  finkatzeko ezinbesteko anbiguotasunera arte. Egoera, hain zuzen, elektromagnetismoaren antzekoa da, non badakigu hasierako datu kopururik ez dela nahikoa eboluzioa modu bakarrean zehazteko, beti egongo baita  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$  gauge-erlaldaketa bat egiteko askatasuna. Erlatibitate orokorrean, beraz, koordinatu-erlaldaketak elektromagnetismoan gauge-erlaldaketak gogorarazten dituen papera betetzen dute, izan ere, anbiguotasuna sartzen dute denboraren bilakaeran.

Arazo honi aurre egiteko modu bat “neurgailu bat aukeratzeko” besterik ez da. Elektromagnetismoan honek  $A_\mu$  potentzial bektorialari baldintza bat jartzea esan nahi du, eta horrek neurgailuen erlaldaketak egiteko askatasuna mugatuko du. Adibidez, Lorentz neurgailua aukeratu dezakegu, zeinetan  $\nabla_\mu A^\mu = 0$ , edo denborazko neurgailua, zeinetan  $A_0 = 0$ . Erlatibitate orokorrean antzeko gauza bat egin dezakegu, gure koordinatu-sistema finkatuz. Aukera ezagun bat **harmonic gauge** da (Lorentz gauge izenez ere ezaguna eta beste izen ugari), zeinetan

$$\square x^\mu = 0. \quad (4.96)$$

Hemen  $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$  D’Alembertiar kobariantea da, eta funtsezkoa da deribatu kobariantea hartzen dugunean konturatzea  $x^\mu$  lau funtzioak funtzioak besterik ez direla, ez bektore baten osagaiak. Baldintza hau, beraz, sinplea da

$$0 = \square x^\mu \quad (4.97)$$

$$= g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma x^\mu - g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \partial_\lambda x^\mu \quad (4.98)$$

$$= -g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda. \quad (4.99)$$

Espazio lauan, noski, koordinatu kartesiarrak (horietan  $\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda = 0$ ) koordinatu harmonikoak dira. (Printzipio orokor gisa,  $\square f = 0$  betetzen duen edozein  $f$  funtzioari “funtzio harmoniko” deitzen zaio.)

Koordenatuen aukera honek gure neurgailuaren askatasuna arrakastaz konpontzen duela ikusteko, berridatzi dezagun (4.84) baldintza forma zertxobait sinpleago batean. Daukagu

$$g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\sigma}), \quad (4.100)$$

Christoffel sinboloen definiziotik. Bien bitartean,  $\partial_\rho (g^{\mu\nu} g_{\sigma\nu}) = \partial_\rho \delta_\sigma^\mu = 0$ -tik dugu

$$g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\sigma\nu} = -g_{\sigma\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu}. \quad (4.101)$$



Era berean, (4.65) metrikaren determinantearen aldakuntzaren aurreko azterketatik, dugu

$$\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}\partial_\nu g^{\rho\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\sqrt{-g}. \quad (4.102)$$

Guztia batuta, (oro har)

$$g^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}g^{\lambda\mu}). \quad (4.103)$$

Hortaz, neurgailu harmonikoaren baldintza (4.85) baliokidea da

$$\partial_\lambda(\sqrt{-g}g^{\lambda\mu}) = 0. \quad (4.104)$$

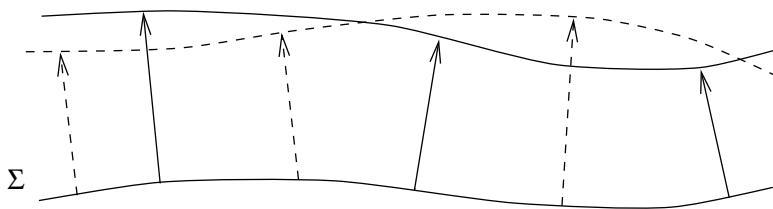
Honen deribatu partziala  $t = x^0$ -ri dagokionez hartuta, etekinak ematen ditu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\sqrt{-g}g^{0\nu}) = -\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-g}g^{i\nu})\right]. \quad (4.105)$$

Baldintza honek bigarren mailako ekuazio diferentzial bat adierazten du aldez aurretik mugatu gabeko  $g^{0\nu}$  osagai metrikoetarako, emandako hasierako datuei dagokienez. Beraz, gure neurgailuaren askatasuna finkatzea lortu dugu, izan ere, metrika osoaren bilakaera koordenatu harmonikoetan ebatzi dezakegu. (Lokalean behintzat; baliteke gure neurgailuaren aukera mundu mailan ondo zehaztuta ez egoteari buruz ari gara, eta ohi bezala adabakietan lan egitera jo beharko genuke. Arazo bera agertzen da partikulen fisikako gauge teorietan.) Kontuan izan oraindik askatasun pixka bat geratzen zaigula; gure neurgailu-baldintzak (4.84) koordenatuak nola hedatzen diren gure hasierako  $\Sigma$  hiperazaleratik espazio-denboran zehar mugatzen du, baina hala ere  $x^i$  koordenatuak aukera ditzakegu  $\Sigma$ -n nahi dugun moduan. Hau da,  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta^\mu$  koordenatu-erlaldaketa bat egiteak,  $\square\delta^\mu = 0$ -rekin, neurgailu harmonikoaren baldintza ez duela urratzen.

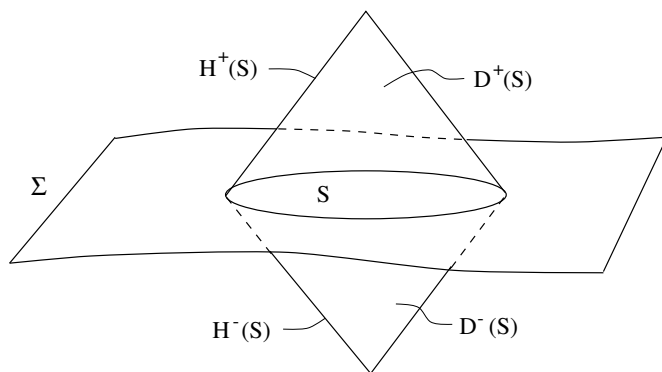
Beraz, erlatibitate orokorrerako hasierako balio-problema ondo definitu dugu; egoe-ra bat  $\Sigma$  espazio-itxurako hiperazalera batean metrikaren espazio-itxurako osagaiek eta haien denbora-deribatuek zehazten dute; hauek kontuan hartuta, Einsteinen ekuazioen espazio-itxurako osagaiek (4.83) metrika denboran aurrera egiteko aukera ematen digute, koordenatuen aukeran anbiguotasun bateraino, neurgailuaren aukerak ebatzi daitekeena. Kontuan izan behar dugu hasierako datuak ez direla arbitrarioak, baizik eta (4.82) mugak bete behar direla. (Behin espazio-itxurako hiperazalera bati mugak ezartzen dizkiogunean, higidura-ekuazioak betetzen direla bermatzen du, egiaztatu dezakezun bezala). Murrizketek helburu erabilgarria dute, emaitza espazio-denbora kobariantea izaten jarraitzen duela bermatzeko, gure aniztasuna “espazioan” eta “denboran” zatitu ondoren. Zehazki,  $G^{i0} = 8\pi GT^{i0}$  mugak eboluzioa gure aukeratik independentea dela esan nahi du. koordenatuen  $\Sigma$ -n, eta  $G^{00} = 8\pi GT^{00}$ -k, berriz, inbariantzia ezartzen du espazio-denbora espazio-itxurako hiperazaleratan zatitzeko modu ezberdinetan.

Einstein-en ekuazioak hasierako balio-problema gisa nola botatzen diren ikusi ondoren, garrantzi erabakigarria duen arazo bat arazoaren soluzioen existentzia da. Hau da, hasierako datuekin espazio-itxurako hiperazalera zehaztu ondoren, zenbateraino berma



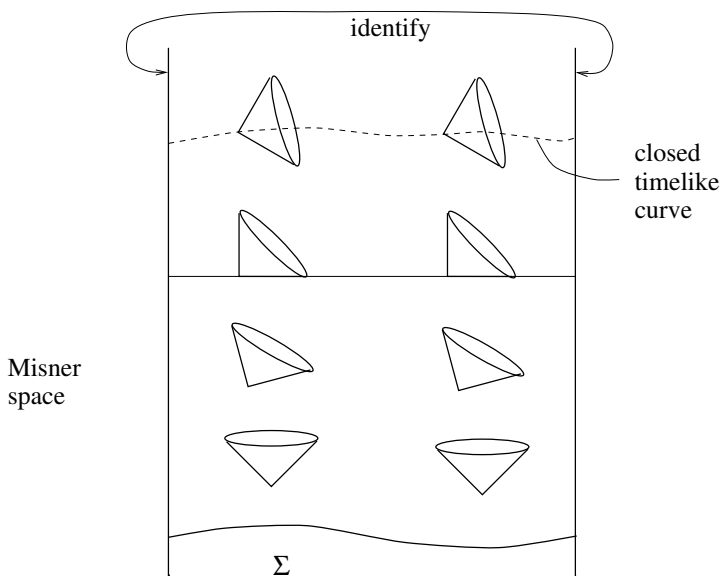
dezakegu espazio-denbora bakarra zehaztuko dela? Galdera honi zehaztasun handiz erantzuteko lan handia egin daitekeen arren, nahiko erraza da ondo definitutako irtenbideak huts egiteko moduak aztertzea, orain kontuan hartzen ditugunak.

Errazena da lehenik eta behin materia-eremuen bilakaeraren arazoa hondoko espazio-denbora finko batean aztertzea, metrikaren beraren bilakaera baino. Beraz,  $\Sigma$  espazio-itxurako hiperazalera bat hartzen dugu  $M$  aldaera batean  $g_{\mu\nu}$  metrika finkoa duena, eta, gainera,  $S$  azpimultzo konektatu bat aztertuko dugu  $\Sigma$ n. Gure printzipio gidaria izango da seinalerik ezin dela bidaiatu argiaren abiadura baino azkarrago; beraz, “informazioa” denbora antzeko edo nulu ibilbideetan zehar bakarrik joango da (ez zertan geodesikoak).  $S$ -ren  $S$ -ren **etorkizuneko mendekotasun-domeinua**,  $D^+(S)$  adierazten dena,  $p$  puntu guztien multzo gisa definitzen dugu,  $0A0E0$ -n zeharreko *denbora-mugitzen den*, *denboran edo nuluan dagoen kurba hedaezina den*.  $k$   $S$  gurutzatu behar du. (“Hedaezina”-k kurba betirako jarraitzen duela esan nahi du, ez da puntu finitu batean amaitzen.) Definizio hau  $S$  bera  $D^+(S)$ -ren azpimultzoa den moduan interpretatzen dugu. (Noski, formulazio zorrotz batek ez du interpretazio gehigarriarik behar definizioen gainetik, baina ez gara orain izan gintezkeen bezain zorrotzak izaten ari.) Era berean,  $D^-(S)$  mendekotasunaren iraganeko domeinua modu berean definitzen dugu, baina “iraganeko mugimendua” “etorkizuneko mugimendua” ordezkatzuz. Oro har,  $M$  puntu batzuk haue-tako batean egongo dira. mendekotasunaren eremuak, eta batzuk kanpoan egongo dira;  $D^+(S)$ -ren muga **etorkizuneko Cauchy horizontea**  $H^+(S)$  dela definitzen dugu, eta, era berean,  $D^-(S)$ -ren muga iraganeko Cauchy-ko horizontea  $H^-(S)$  dela. Zure burua konbentzi dezakezu bi gainazal nuluak direla.

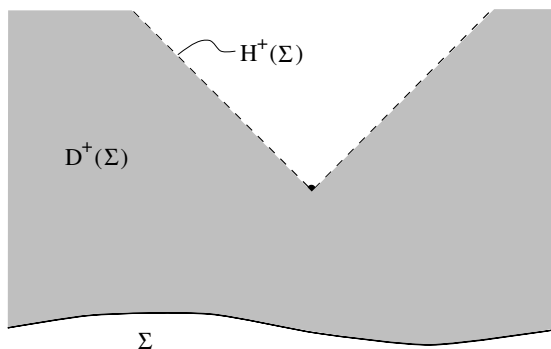


Definizio horien erabilgarritasuna agerikoa izan behar da; ezer argia baino azkarrago mugitzen ez bada, seinaleak ezin dira  $p$  edozein punturen argi-konotik kanpo hedatu. Beraz, argi-kono honen barruan geratzen den kurba guztiek  $S$  ebaki behar badute, or-





lean hauek punturen batean kurbadura infinitua bihurtzen denean gertatzen dira; hori gertatzen bada, puntua ezin da esan espazio-denboraren parte denik. Horrelako agerraldi batek Cauchy horizonte baten agerpena ekar dezake — singularitate baten etorkizunean dagoen  $p$  puntu bat ezin da hiperazalera batek singularitasunaren iraganarekiko duen menpekotasun eremuan egon, kurbak egongo direlako. singularitatean amaitzen den  $p$ -tik.



Oztopo horiek guztiak GR-ren hasierako balio-arazoan ere sor daitezke, metrika bera hasierako datuetatik eboluzionatzen saiatzen garenean. Hala ere, arazo-maila desberdinetakoak dira. Hasierako hiperazalera “txarra” hautatzeko aukera ez da askotan sortzen, batez ere soluzio gehienak globalki aurkitzen direlako (Einsteinen ekuazioak espazio-denboran zehar ebatziz). Kontuz ibili behar den egoera Einsteinen ekuazioen zenbakizko ebazpenean dago, non hiperazalera aukera txar batek zenbakizko zailtasunak sor ditzakeen printzipioz soluzio osoa egon arren. Denbora-itxurako kurba itxiak badirudi GR-k saihesteko gogor lan egiten duen zerbait direla — badaude, zalantzarik gabe, horiek dituzten irtenbideak, baina hasierako datu generikoen bilakaerak ez ditu normalean sor-

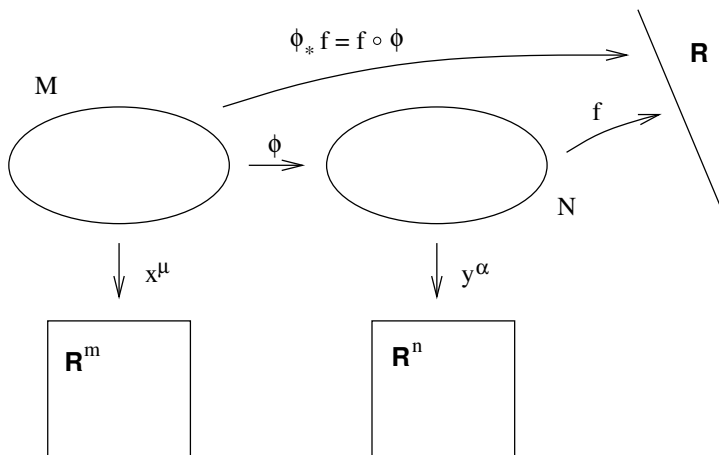
tzen. Berezitasunak, berriz, ia saihestezinak dira. Grabitazio-indarra beti erakargarria izateak materia batera erakartzeko joera du, kurbadura areagotuz eta, oro har, nolabaiteko berezitasun batera eramanez. Itxuraz bizitzen ikasi behar dugun zerbait da hori, nahiz eta grabitate kuantikoaren teoria ongi zehaztu batek GR klasikoaren berezitasunak ezabatuko dituen itxaropena dagoen.

## Capítulo 5

# Geometria gehiago

Fisikaren legeak espazio-denbora kurbatuari nola egokitzen diren ulertuta, ukaezina da aplikazioetan hasia tentagarria. Hala ere, teknika matematiko gehigarri batzuek asko erraztuko dute gure zeregina, beraz, etenaldi labur bat egingo dugu anizkunen geometria gehiago aztertzeko.

2. atalean anizkunez hitz egin dugunean, bi sorta ezberdinen arteko mapak eta mapak nola osa litezkeen aurkeztu ditugu. Orain, halako mapak erabiltzeari ekingo diogu tentsore-eremuak aldaera batetik bestera eramateko. Hortaz,  $M$  eta  $N$  bi anizkun kontsideratzen ditugu, agian dimentsio ezberdinekoak, hurrenez hurren  $x^\mu$  eta  $y^\alpha$  koordenatu-sistemekin. Mapa  $\phi : M \rightarrow N$  eta  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  funtzio bat ditugula imajinatzen dugu.



Bistakoa da  $\phi$   $f$ -rekin konposa dezakegula  $(f \circ \phi) : M \rightarrow \mathbb{R}$  mapa bat eraikitzeko, hau da,  $M$ -n funtzio bat besterik ez baita. Eraikuntza hori aski baliagarria da, bere izena hartzen baitu;  $f$ -ren **pullback**  $\phi$ ,  $\phi_* f$  adierazita, definitzen dugu.

$$\phi_* f = (f \circ \phi) . \quad (5.1)$$

Izenak zentzuzkoa du,  $\phi_* f$  funtzioa  $N$ -tik  $M$ -ra “atzera botatzea” dela uste baitugu.

Funtzioak atzera bota ditzakegu, baina ezin ditugu aurrera egin.  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  funtzio bat badugu, ezin dugu  $g$   $\phi$ -rekin konposatu  $N$  funtzio bat sortzeko; geziak ez dira behar

bezala lotzen. Baina gogoratu bektore bat funtzio leunak zenbaki errealekin mapatzen dituen operadore deribatu gisa pentsa daitekeela. Honek bektore baten **pushforward** definitzeko aukera ematen digu;  $V(p)$   $p$   $M$  puntu batean dagoen bektorea bada,  $\phi^*V$  bultzatze-bektorea  $\phi(p)$  puntuan definituko dugu  $N$ -ko funtzioetan duen ekintza emanez:

$$(\phi^*V)(f) = V(\phi_*f) . \quad (5.2)$$

Beraz, eremu bektorial bat aurrera eramateko “ $\phi^*V$ -k edozein funtziotan duen ekintza  $V$ -k funtzio horren itzuleran duen ekintza besterik ez da.”

Hau abstraktu apur bat da, eta polita litzateke deskribapen zehatzagoa izatea. Bada-kigu  $M$ -ko bektoreen oinarri bat  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  deribatu partzialen multzoak ematen duela eta  $N$ -ko oinarri bat  $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$  deribatu partzialen multzoak. Hori dela eta,  $V = V^\mu \partial_\mu$ -ren osagaiak  $(\phi^*V) = (\phi^*V)^\alpha \partial_\alpha$ -koekin erlazionatu nahi ditugu. Bilatutako erlazioa aurki dezakegu aurrera bultzatutako bektorea proba-funtzio bati aplikatuz eta (2.3) kate-araua erabiliz:

$$(\phi^*V)^\alpha \partial_\alpha f = V^\mu \partial_\mu (\phi_*f) \quad (5.3)$$

$$= V^\mu \partial_\mu (f \circ \phi) \quad (5.4)$$

$$= V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha f . \quad (5.5)$$

Formula sinple honek ezinezkoa egiten du aurrera egiteko  $\phi^*$  eragiketa matrize-operadore gisa pentsatzea,  $(\phi^*V)^\alpha = (\phi^*)^\alpha_\mu V^\mu$ , matrizea honela ematen delarik.

$$(\phi^*)^\alpha_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} . \quad (5.6)$$

Bektore baten jokaerak, beraz, koordenatuen aldaketan bektore-erlaldaketa legearen antza nahastezina du. Izan ere, orokortze bat da,  $M$  eta  $N$  aldaera bera direnean erai-kuntzak berdinak dira (eztabaidatuko dugunez); baina ez zaitez engainatu, izan ere, orokorrean  $\mu$  eta  $\alpha$ -ek baimendutako balio desberdinak dituzte, eta ez dago arrazoirik  $\partial y^\alpha / \partial x^\mu$  matrizea alderantzigarria izateko.

Ariketa aberasgarria da zeure burua konbentzitzea, bektoreak  $M$ -tik  $N$ -ra aurrera eramanez ditzakezun arren ( $\phi : M \rightarrow N$  mapa bat emanda), orokorrean ezin dituzula atzera bota — jarraitu behar den bat asmatzen saiatzen. erai-kuntza saiakeraren hutsaltasuna argi geratu arte. Forma bakarrak bektoreekiko dualak direnez, ez zinateke harritu behar forma bakarrak atzera bota daitezkeela (baina, oro har, ez aurrera eramanez). Horretarako, gogoratu forma bakarrak bektoreetatik zenbaki errealetarako mapa linealak direla.  $N$ -n forma bakarrek  $\omega$  baten  $\phi_*\omega$  atzerapena, beraz,  $V$  bektore batean  $M$ -n duen ekintzaren arabera defini daiteke,  $\omega$ -ren beraren ekintzarekin berdinduz aurrera egiteko.  $V$ :

$$(\phi_*\omega)(V) = \omega(\phi^*V) . \quad (5.7)$$

Berriro ere, inprimaketako pullback operadorearen deskribapen matrize soil bat dago,  $(\phi_*\omega)_\mu = (\phi_*)_\mu^\alpha \omega_\alpha$ , kate-araua erabiliz erator dezakeguna. Emandakoa da

$$(\phi_*)_\mu^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} . \quad (5.8)$$

Hau da, pushforward-aren matrize bera da (5.4), baina, jakina, beste indize bat uzkur-tzen da matrizeak forma bakarrekoak atzera botatzen dituenen.

Badago pentsatzeko modu bat pullback eta pushforward-ek zergatik funtzionatzen duten objektu batzuetan baina ez bestetan, eta horrek lagungarriak izan daitezke edo ez.  $M$  funtzio leunen multzoa  $\mathcal{F}(M)$  bidez adierazten badugu, orduan  $V(p)$  bektore bat  $p$   $M$  puntu batean (ie,  $T_p M$  espazio tangenteako elementua)  $\mathcal{F}(M)$  eta  $\mathbb{R}$  bitarteko operadore gisa har daiteke. Baina dagoeneko badakigu funtzioetako pullback operadoreak  $\mathcal{F}(N)$   $\mathcal{F}(M)$ -ra mapatzen duela ( $\phi$ -k berak  $M$   $N$ -ra mapatzen duen bezala, baina kontrako norabidean). Beraz, bektoreetan jarduten duen push-forward  $\phi_*$  mapak osatuz defini dezakegu, lehen funtzioen atzerapena definitu genuen bezala:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{R} & \\
 & \hline
 & \uparrow & \swarrow \phi^*(V(p)) = V(p) \circ \phi_* \\
 V(p) & & \\
 & \uparrow & \\
 \mathcal{F}(M) & \xleftarrow{\phi_*} & \mathcal{F}(N)
 \end{array}$$

Era berean,  $T_q N$   $q$   $N$  puntu batean dagoen espazio ukitzailea bada,  $\omega$  forma bakarreko  $q$  (ie,  $T_q^* N$  espazio kotangentearen elementua)  $T_q N$  eta  $\mathbb{R}$  bitarteko operadore gisa har dai-teke.  $\phi^*$  aurrerapenak  $T_p M$   $T_{\phi(p)} N$ -ra mapatzen duenez, forma bakarreko  $\phi_*$  atzerapena mapen konposizio hutsa dela ere har daiteke:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{R} & \\
 & \hline
 & \nearrow \phi_*(\omega) = \omega \circ \phi^* & \uparrow \omega \\
 T_p M & \xrightarrow{\phi_*} & T_{\phi(p)} N
 \end{array}$$

Hau lagungarria ez bada, ez kezkatu. Baina jarraitu zuzen dagoena eta zer ez; benetako kontzeptuak sinpleak dira, nahasmena sorrazten duen mapa zein bide doan gogoratzea besterik ez da.

Gainera, gogoratuko duzu  $(0, l)$  tentsorea —  $l$  indize baxuagoak dituen eta goikoak ez dituen —  $l$  bektoreen zuzeneko produktutik  $\mathbb{R}$  arteko mapa lineala dela. Beraz, forma bakarrak ez ezik, indize baxuen kopuru arbitrarioa duten tentsoreak atzera bota ditzakegu. Definizioa, jatorrizko tentsoreak aurrera bultzatutako bektoreetan duen ekintza besterik ez da:

$$(\phi_* T)(V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(l)}) = T(\phi^* V^{(1)}, \phi^* V^{(2)}, \dots, \phi^* V^{(l)}), \quad (5.9)$$



non  $T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(0, l)$  tentsore bat den  $N$ -n. Era berean, edozein  $(k, 0)$  tentsore  $S^{\mu_1 \dots \mu_k}$  aurrera atera dezakegu forma bakarreko atzera botata:

$$(\phi^* S)(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(k)}) = S(\phi_* \omega^{(1)}, \phi_* \omega^{(2)}, \dots, \phi_* \omega^{(k)}) . \quad (5.10)$$

Zorionez, pushforward (5.4) eta pullback (5.6) errepresentazioak goi mailako tentsoreetara hedatzen dira indize bakoitzari matrize bat esleituz; horrela,  $(0, l)$  tentsore baten atzerapenerako, dugu

$$(\phi_* T)_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{\alpha_1 \dots \alpha_l} , \quad (5.11)$$

$(k, 0)$  tentsore baten aurrerapenerako, berriz, dugu

$$(\phi^* S)^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} S^{\mu_1 \dots \mu_k} . \quad (5.12)$$

Gure argazki osoa, beraz:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\phi^*} & \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{M} \quad \bigcirc & \xrightarrow{\phi} & \bigcirc \quad \text{N} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \xleftarrow{\phi_*} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Kontuan izan goiko zein beheko indizeak dituzten tentsoreak, oro har, ezin direla ez aurrera ez atzera bota.

Makineria hori apur bat gutxiago inposatzen da adibide sinple batean lanean ikusten dugunean. Bi aldaketen arteko mapa baten agerraldi arrunt bat  $M$  benetan  $N$ -ren azpianiztasuna denean gertatzen da; gero,  $M$ -tik  $N$ -ra dagoen mapa agerikoa da,  $M$ -ren elementu bat  $N$ -ren “bere” elementura eramaten duena. Demagun gure ohiko adibidea,  $\mathbb{R}^3$ -n txertatutako bi esfera, jatorritik distantzia unitatera dagoen puntuen toki gisa.  $x^\mu = (\theta, \phi)$  koordenatuak  $M = S^2$ -n eta  $y^\alpha = (x, y, z)$   $N = \mathbb{R}^3$ -n jartzen baditugu,  $\phi : M \rightarrow N$  mapa honela ematen da.

$$\phi(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) . \quad (5.13)$$

Iraganean  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  metrika  $\mathbb{R}^3$ -n kontuan hartu dugu, eta  $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  metrika bat eragiten duela  $S^2$ -n, (5.11)  $\mathbb{R}^3$  metrika lau honetan ordezkatzuz. Orduan ez genuen halako adierazpenik justifikatu, baina orain hala egin dezakegu. (Noski, errazagoa izango litzateke  $\mathbb{R}^3$ -n koordenatu esferikoetan lan egingo bagenu, baina modu gogorrean egitea adierazgarriagoa da.) Deribatu partzialen matrizea honela ematen da

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix} . \quad (5.14)$$

$S^2$ -ko metrika  $\mathbb{R}^3$ -tik metrika atzera botata lortzen da,

$$(\phi^*g)_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} \quad (5.15)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

erraz egiaztatu dezakezun bezala. Berriro ere, erantzuna ordezkapen inozoaren bidez lortuko zenukeen berdina da, baina orain badakigu zergatik.

Kontuz ibili gara  $\phi : M \rightarrow N$  mapa bat gauza batzuk aurrera egiteko eta beste gauza batzuk atzera egiteko erabil daitekeela azpimarratzen. Orokorrean bi modutan funtzionatzen ez duen arrazoia  $\phi$  agian alderantzigarria ez izatean dago.  $\phi$  alderantzizkoa bada (eta biak  $\phi$  eta  $\phi^{-1}$  leunak dira, beti inplizituki suposatzen duguna), orduan  $M$  eta  $N$  arteko difeomorfismoa definitzen du. Kasu honetan  $M$  eta  $N$  askotariko abstraktu bera dira. Difeomorfismoen edertasuna da  $\phi$  eta  $\phi^{-1}$  erabil ditzakegula  $M$ -tik  $N$ -ra tentsoreak eramateko; honek tentsore arbitrarioen pushforward eta pullback definitzeko aukera emango digu. Zehazki,  $(k, l)$   $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$   $M$ -ko  $(k, l)$  tentsore-eremu baterako, aurrerapena definitzen dugu.

$$(\phi^*T)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T(\phi_*\omega^{(1)}, \dots, \phi_*\omega^{(k)}, [\phi^{-1}]^*V^{(1)}, \dots, [\phi^{-1}]^*V^{(l)}), \quad (5.17)$$

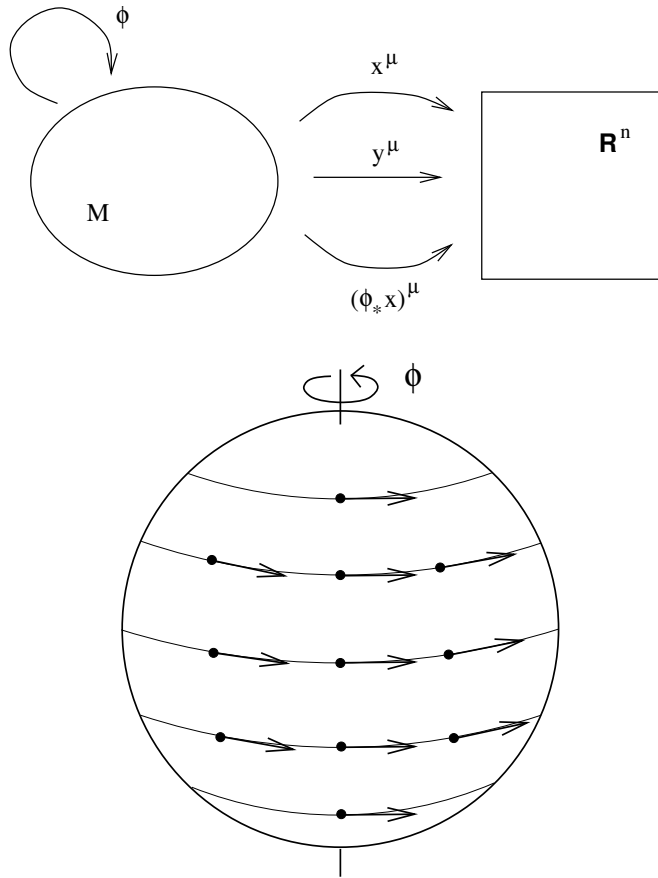
non  $\omega^{(i)}$ -ak forma bakarrekoak diren  $N$ -n eta  $V^{(i)}$ -ak  $N$ -ko bektoreak. Osagaietan hau bihurtzen da

$$(\phi^*T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (5.18)$$

$\partial x^\nu / \partial y^\beta$  alderantzizko matrizearen agerpena zilegia da  $\phi$  alderantzizkoa delako. Kontuan izan pullback-a ere modu argian definitu genezakeela, baina ez dago ekuazio bereizirik idatzi beharrik,  $\phi_*$  pullback-a alderantzizko maparen bidez,  $[\phi^{-1}]^*$ , push-forward-aren berdina baita.

Difeomorfismoen eta koordenatuen transformazioen arteko erlazioa azaltzeko moduan gaude. Harremana da gauza bera egiteko bi modu ezberdin direla. Nahi baduzu, difeomorfismoak “koordinatu-eraldaketa aktiboak” dira, eta koordinatu-eraldaketa tradizionalak “pasiboak” dira. Demagun  $n$ -dimentsioko  $M$  koordinatu-funtzioak dituen  $x^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Koordinatuak aldatzeko  $y^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  funtzio berriak sar ditzakegu (“multiplea finkatuta mantendu, koordinatu-mapak aldatu”), edo bestela  $\phi : M \rightarrow M$  difeomorfismo bat sartu genezake, horren ondoren koordinatuak izango lirateke. pullbacks  $(\phi_*x)^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  (“mugitu multzoko puntuak, eta ondoren ebaluatu puntu berrien koordinatuak”). Zentzu honetan, (5.15) benetan tentsore-eraldaketa legea da, beste ikus-puntu batetik pentsatua.

Difeomorfismo batek tentsore arbitrarioak atzera bota eta aurrera egiteko aukera ematen digunez, tentsoreak hainbat puntutan alderatzeko beste modu bat eskaintzen du.  $\phi : M \rightarrow M$  difeomorfismoa eta  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x)$  tentsore-eremua emanda, tentsorea punturen batean  $p$  eta  $\phi_*[T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\phi(p))]$ -ren balioaren arteko aldea osa dezakegu,



$\phi(p)$ -n duen balioa  $p$ -ra itzuliz. Horrek iradokitzen du tentsore-eremuetan beste operadore deribatu mota bat definitu genezakeela, tentsorearen aldaketa-tasa difeomorfismoaren arabera aldatzen den heinean sailkatzen duena. Horretarako, ordea, ez da nahikoa difeomorfismo diskretu bakarra; parametro bakarreko difeomorfismoen familia bat behar dugu,  $\phi_t$ . Familia hau  $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$  mapa leun bat dela pentsa daiteke,  $t \in \mathbb{R}$  bakoitzean  $\phi_t$  difeomorfismoa eta  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$  dela. Kontuan izan azken baldintza honek  $\phi_0$  identitate-mapa dela adierazten duela.

Parametro bakarreko difeomorfismoen familiak eremu bektorialetatik sortuak direla pentsa daiteke (eta alderantziz).  $\phi_t$  familia osoaren azpian  $p$  puntuarekin zer gertatzen den kontuan hartzen badugu, argi dago  $M$ -n kurba bat deskribatzen duela;  $M$ -ko puntu guztietan gauza bera gertatuko denez, kurba hauek ugaritasuna betetzen dute (difeomorfismoek puntu finkoak dituztenean endekapenak egon daitezkeen arren).  $V^\mu(x)$  eremu bektorial bat puntu bakoitzean kurba hauetako bakoitzaren bektore ukitzaileen multzoa izan dadin defini dezakegu,  $t = 0$  puntuan ebaluatua.  $S^2$ -ri buruzko adibide bat  $\phi_t(\theta, \phi) = (\theta, \phi + t)$  difeomorfismoak ematen du.

Eraikuntza alderantzikatu dezakegu edozein eremu bektorialetik parametro bakarreko difeomorfismoen familia bat definitzeko.  $V^\mu(x)$  eremu bektoriala emanda, eremu bektorialaren **kurba integralak** ebazten duten  $x^\mu(t)$  kurba horiek direla definitzen du-

gu.

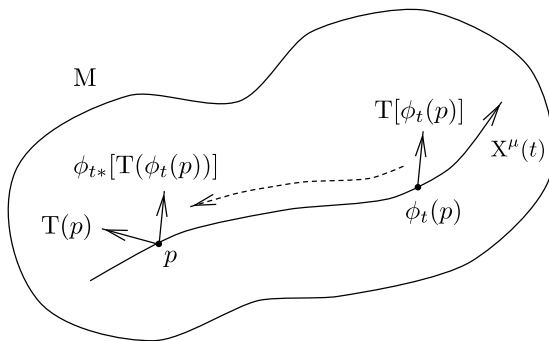
$$\frac{dx^\mu}{dt} = V^\mu . \quad (5.19)$$

Kontuan izan itxura ezaguna den ekuazio hau gure ohiko moduaren kontrako zentzuan interpretatu behar dela — bektoreak ematen zaizkigu, eta bertatik kurbak definitzen ditugu. (5.16)-ren soluzioak existituko direla bermatuta dago, gure aniztasunaren ertzera joatea bezalako txorakeriarik egiten ez dugun bitartean; edozein geometria diferentzial estandar testuak frogatzen du, eta horrek problema ekuazio diferentzial arrunten oinarritzko teorema izatera murrizten duen koordinatu-sistema burutsu bat aurkitzea da. Gure  $\phi_t$  difeomorfismoek “kurba integraletan beheko fluxua” adierazten dute, eta erlazionatutako eremu bektorialari difeomorfismoaren **sorgailua** esaten zaio. (Kurba integralak oinarritzko fisikan beti erabiltzen dira, ez dute izena ematen. Iman baten aurrean burdin-fitzak trazatutako “fluxu magnetikoaren lerroak” **B** eremu magnetikoaren bektorearen kurba integralak besterik ez dira.)

$V^\mu(x)$  eremu bektoriala emanda, beraz,  $t$ -k parametrizatutako difeomorfismoen familia bat dugu, eta kurba integraletan behera goazen heinean tentsore bat zenbateraino aldatzen den galdetu dezakegu.  $t$  bakoitzeko aldaketa hau honela defini dezakegu

$$\Delta_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \mu_l}(p) = \phi_{t*}[T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \mu_l}(\phi_t(p))] - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \mu_l}(p) . \quad (5.20)$$

Kontuan izan eskuineko bi terminoak  $p$ -n tentsoreak direla.



Ondoren, eremu bektorialean zehar tentsorearen **Lie deribatua** honela definituko dugu

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \mu_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \mu_l}}{t} \right) . \quad (5.21)$$

Lie deribatua  $(k, l)$  tentsore-eremuetatik  $(k, l)$  tentsore-eremuetara dagoen mapa bat da, koordinatuetatik independentea dena. Definizioa funtsean tentsorearen osagaien funtzioei aplikatutako deribatu arrunt baten definizio konbentzionala denez, argi izan behar da lineala dela,

$$\mathcal{L}_V(aT + bS) = a\mathcal{L}_V T + b\mathcal{L}_V S , \quad (5.22)$$

eta Leibnizen araua betetzen du,

$$\mathcal{L}_V(T \otimes S) = (\mathcal{L}_V T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_V S) , \quad (5.23)$$

non  $S$  eta  $T$  tentsoreak diren eta  $a$  eta  $b$  konstanteak. Lie deribatua, hain zuzen, deribatu kobariantea baino nozio primitiboagoa da, ez baitu konexio baten zehaztapenik behar (eremu bektoriala behar duen arren, noski). Une bateko hausnarketak funtzioen deribatu arruntera murrizten duela erakusten du,

$$\mathcal{L}_V f = V(f) = V^\mu \partial_\mu f . \quad (5.24)$$

Lie deribatuak tentsoreetan duen ekintza ezagutzen ditugun beste eragiketei dagokienez eztabaidatzeko, komenigarria da gure problemara egokitutako koordenatu-sistema aukeratzea. Zehazki,  $x^\mu$  koordenatuetan lan egingo dugu, zeinetan  $x^1$  parametroa den kurba integraletan zehar (eta gainerako koordenatuak nahi dugun moduan aukeratzen dira). Orduan eremu bektorialak  $V = \partial/\partial x^1$  forma hartzen du; hau da,  $V^\mu = (1, 0, 0, \dots, 0)$  osagaiak ditu. Koordenatu-sistema honen magia da  $t$ -ren difeomorfismoa  $x^\mu$ -tik  $y^\mu = (x^1 + t, x^2, \dots, x^n)$ -ra koordenatu-erlaldaketa bat dela. Beraz, (5.6) pullback matrizea besterik ez da

$$(\phi_{t*})_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu , \quad (5.25)$$

eta  $\phi_t(p)$ -tik  $p$ -ra atzera botatako tentsorearen osagaiak besterik ez dira

$$\phi_{t*}[T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\phi_t(p))] = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1 + t, x^2, \dots, x^n) . \quad (5.26)$$

Koordenatu-sistema honetan, beraz, Lie deribatua bihurtzen da

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{\partial}{\partial x^1} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} , \quad (5.27)$$

eta zehazki  $U^\mu(x)$  eremu bektorial baten deribatua da

$$\mathcal{L}_V U^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1} . \quad (5.28)$$

Adierazpen hau argi eta garbi kobariantea ez den arren, badakigu  $[V, U]$  konmutatzailea ondo definitutako tentsorea dela, eta koordenatu-sistema honetan

$$[V, U]^\mu = V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu \quad (5.29)$$

$$= \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1} . \quad (5.30)$$

Beraz,  $U$ -ren  $V$ -ren Lie deribatuak koordenatu-sistema honetan  $V$  eta  $U$ -ren aldagai-luaren osagai berdina ditu; baina biak bektoreak direnez, berdina izan behar dute edozein koordenatu-sisteman:

$$\mathcal{L}_V U^\mu = [V, U]^\mu . \quad (5.31)$$

Berehalako ondorio gisa,  $\mathcal{L}_V S = -\mathcal{L}_W V$  dugu. (5.27) dela eta, batzuetan “Gezurra parentesi” deitzen zaio konmutatzaileari.

$\mathcal{L}_V$ -ren ekintza forma bakarreko  $\omega_\mu$  batean ateratzeko, hasi  $\omega_\mu U^\mu$  eskalarreko ekintza  $U^\mu$  eremu bektorial arbitrario baterako kontuan hartuz. Lehenik eta behin, erabili eremu

bektorial bati dagokionez Lie deribatua eskalar bati aplikatzean bektorearen beraren ekintzara murrizten dela:

$$\mathcal{L}_V(\omega_\mu U^\mu) = V(\omega_\mu U^\mu) \quad (5.32)$$

$$= V^\nu \partial_\nu (\omega_\mu U^\mu) \quad (5.33)$$

$$= V^\nu (\partial_\nu \omega_\mu) U^\mu + V^\nu \omega_\mu (\partial_\nu U^\mu) . \quad (5.34)$$

Ondoren, erabili Leibnizen araua jatorrizko eskalarrean:

$$\mathcal{L}_V(\omega_\mu U^\mu) = (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu (\mathcal{L}_V U)^\mu \quad (5.35)$$

$$= (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu - \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu . \quad (5.36)$$

Adierazpen hauek elkarren berdinak ezarritik eta  $U^\mu$  arbitrarioak berdintasuna bete behar dela, ikusiko dugu

$$\mathcal{L}_V \omega_\mu = V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + (\partial_\mu V^\nu) \omega_\nu , \quad (5.37)$$

zeina (komunzttagailuaren definizioa bezala) guztiz kobariantea den, nahiz eta agerikoa ez izan.

Antzeko prozedura baten bidez tentsore eremu arbitrario baten Lie deribatua defini dezakegu. Erantzuna idatzi daiteke

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = V^\sigma \partial_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \quad (5.38)$$

$$- (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \dots \quad (5.39)$$

$$+ (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} + \dots . \quad (5.40)$$

Berriro ere, esamolde hau kobariantea da, itxurak gorabehera. Zalantzarik gabe, pozgarria izango litzateke, hala ere, nabarmen tentsoriala zirudien esamolde baliokide bat izatea. Izan ere, idazten dakigula gertatzen da

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = V^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \quad (5.41)$$

$$- (\nabla_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - (\nabla_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \dots \quad (5.42)$$

$$+ (\nabla_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} + (\nabla_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} + \dots , \quad (5.43)$$

non  $\nabla_\mu$  *edozein* deribatu kobariante simetrikoa (torsiorik gabekoa) adierazten du (metrika batetik eratorritakoa barne, noski). Egiaztatu dezakezu (5.32) zabalduko bagenu konexio-koefizienteak izango litzatekeen termino guztiak bertan behera utziko liratekeela, (5.31) bakarrik utziz. Lie deribatu baten formularen bi bertsioak erabilgarriak dira une desberdinetan. Formula bereziki erabilgarria da metrikaren Lie deribatua:

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = V^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu V^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu V^\lambda) g_{\mu\lambda} \quad (5.44)$$

$$= \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu \quad (5.45)$$

$$= 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} , \quad (5.46)$$

non  $\nabla_\mu g_{\mu\nu}$ -tik eratorritako deribatu kobariantea den.

Jar ditzagun ideia horietako batzuk erlatibitate orokorraren testuinguruan. Askotan entzungo duzu GR “difeomorfismoaren aldaezina” teoria dela aldarrikatzen. Horrek esan nahi du, unibertsoa  $M$  aniztasun batekin adierazten bada  $g_{\mu\nu}$  metrika eta  $\psi$  materia-eremuak dituen, eta  $\phi : M \rightarrow M$  difeomorfismoa bada,  $(M, g_{\mu\nu}, \psi)$  eta  $(M, \phi_* g_{\mu\nu}, \phi_* \psi)$  multzoek berdina adierazten dute. egoera fisikoa. Difeomorfismoak koordinatu-erlaldaketa aktiboak besterik ez direnez, teoria koordinatu aldaezina dela esateko modu bikaina da. Halako baieztapena egia bada ere, gaizki-ulertu handi baten iturria da, oso informazio gutxi transmititzen duelako. Fisikaren erdi-errespetagarria den edozein teoria koordinatu aldaezina da, erlatibitate berezian edo mekanika newtondarrean oinarritutakoak barne; GR ez da bakarra zentzu honetan. Jendeak GR difeomorfismo aldaezina dela esaten duenean, litekeena da bi (estu erlazionatuta) kontzeptuetako bat izatea buruan: teoria “aurreko geometriatik” libre dago, eta ez dago espazio-denborarako koordinatu-sistema hobetsirik. Horietako lehenengoa metrika aldagai dinamikoa dela eta horrekin batera konexio- eta bolumen-elementu eta abarretatik dator. Ez zaigu ezer ematen aurretik, mekanika klasikoan edo SRn ez bezala. Ondorioz, ez dago bizitza errazteko modurik geometriako elementu absolutu batzuei egokitutako koordinatu-sistema zehatz bati atxikiz. Egoera honek kontu handiz izatera behartzen gaitu; baliteke GR-n ustez bereizitako bi konfigurazio (materiarena eta metrikoa) benetan “berdinak” izatea, difeomorfismo baten bidez erlazionatuta. Grabitate kuantikoaren bide integralaren ikuspegi batean, non konfigurazio posible guztien batuketa egin nahiko genukeen, kontu berezia izan behar da ez gainkontatzeko fisikoki bereiztezin diren konfigurazioek behin baino gehiagotan lagundu dezaten. SR edo Newtonen mekanikan, aldiz, koordinatu multzo hobetsia izateak halako anbiguotasunetatik salbatzen gaitu. GR-k *hobestutako* koordinatu-sistematik ez izatea sarritan nahastu egiten da koordinatu aldaezina (edo “oro har kobariantea”) dela esatean; gauza biak egia dira, baina batek besteak baino eduki gehiago dauka.

Bestalde, difeomorfismoaren aldaezintasunaren egitatea ondo erabil daiteke. Gogoratu  $\psi^i$  materia-eremu multzo bati akoplatutako grabitatearen ekintza osoa GR-rako Hilbert-en ekintzaren gehi materia-ekintzaren baturak ematen duela.

$$S = \frac{1}{8\pi G} S_H[g_{\mu\nu}] + S_M[g_{\mu\nu}, \psi^i]. \quad (5.47)$$

Hilbert-en ekintza  $S_H$  difeomorfismo aldaezina da isolatuta kontuan hartuta, beraz, materia-ekintza  $S_M$  ere izan behar du ekintza bere osotasunean aldaezina izango bada.  $S_M$ -n aldakuntza difeomorfismo baten azpian honela idatz dezakegu

$$\delta S_M = \int d^n x \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \int d^n x \frac{\delta S_M}{\delta \psi^i} \delta \psi^i. \quad (5.48)$$

Ez ditugu eremuen aldaera arbitrarioak kontuan hartzen, difeomorfismo baten ondoriozkoak baizik. Dena den, higiduraren materia-ekuazioek esaten digute  $S_M$ -ren aldakuntza  $\psi^i$ -rekin alderatuta desagertuko dela edozein aldakuntzarako (ekintzaren zati grabitatorioak ez baititu materia-eremuak inplikutzen). Beraz, difeomorfismo aldaezinaren teoria baterako (5.35) eskuineko lehen terminoa desagertu egin behar da. Difeomorfismoa

$V^\mu(x)$  eremu bektorial batek sortzen badu, metrikaren aldaketa infinitesimala bere Lie deribatuak  $V^\mu$ -n zehar ematen du besterik gabe; (5.33) arabera dugu

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_V g_{\mu\nu} \quad (5.49)$$

$$= 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} . \quad (5.50)$$

$\delta S_M = 0$  ezartzeak orduan esan nahi du

$$0 = \int d^n x \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_\mu V_\nu \quad (5.51)$$

$$= - \int d^n x \sqrt{-g} V_\nu \nabla_\mu \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \right) , \quad (5.52)$$

bertan  $\nabla_{(\mu} V_{\nu)}$ -ren simetrizazioa kentzeko gai gara,  $\delta S_M / \delta g_{\mu\nu}$  dagoeneko simetrikoa baita.  $V^\mu$  eremu bektorial arbitrarioek sortutako difeomorfismoetarako (5.37) betetzen dela exijituz, eta energia-momentuaren tentsorearen (4.70) definizioa erabiliz, energia-momentuaren kontserbazioaren legea lortuko dugu, hain zuzen.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (5.53)$$

Horregatik, lehenago esan genuen  $T_{\mu\nu}$ -ren kontserbazioa Baliokidetasun Printzipioaren ondorio bat baino gehiago zela; hori baino askoz seguruagoa da, teoriaren difeomorfismoaren aldaezintasunean soilik oinarritzen da.

Atal honetan ezarri dugun makineriari beste erabilera bat emango diogu: tentsoreen simetriak.  $\phi$  difeomorfismo bat  $T$  tentsore baten **simetria** dela esaten dugu, tentsorea aldaezina bada  $\phi$  pean atzera bota ondoren:

$$\phi_* T = T . \quad (5.54)$$

Simetriak diskretuak izan daitezkeen arren, ohikoagoa da  $\phi_t$  parametro bakarreko simetria-familia bat izatea. Familia  $V^\mu(x)$  eremu bektorial batek sortzen badu, orduan (5.39) hau da.

$$\mathcal{L}_V T = 0 . \quad (5.55)$$

(5.25) simetria baten inplikazio bat zera da:  $T$  parametro bakarreko difeomorfismoen familia batzuen pean simetrikoa bada, beti aurki dezakegu koordenatu-sistema bat, zeinetan  $T$ -ren osagaiak guztiak independenteak diren. koordenatuak (eremu bektorialaren kurba integralaren koordenatua). Alderantziz ere egia da; osagai guztiak koordenatu batetik independenteak badira, orduan koordenatu horri lotutako deribatu partzialeko eremu bektorialak tentsorearen simetria sortzen du.

Simetria garrantzitsuenak metrikarenak dira, eta horretarako  $\phi_* g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ . Mota honetako difeomorfismoari **isometria** deitzen zaio. Parametro bakarreko isometria-familia bat  $V^\mu(x)$  bektorial-eremu batek sortzen badu,  $V^\mu$  **Killing vector-eremua** bezala eza-gutzen da.  $V^\mu$  Killing bektore bat izateko baldintza hau da

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 0 , \quad (5.56)$$



edo (5.33)

$$\nabla_{(\mu} V_{\nu)} = 0 . \quad (5.57)$$

Azken bertsio hau **Killing-en ekuazioa** da. Espazio-denbora batek Killing bektore bat badu, badakigu metrika koordenatuetatik independentea den koordenatu-sistema bat aurki dezakegula.

Killing bektoreei buruzko datu erabilgarriena *Killing bektoreek partikula askeen higidurarekin lotutako kantitate kontserbatuak dakartza* da.  $x^\mu(\lambda)$   $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$  bektore tangentea duen geodesikoa bada eta  $V^\mu$  Killing bektore bat bada, orduan

$$U^\nu \nabla_\nu (V_\mu U^\mu) = U^\nu U^\mu \nabla_\nu V_\mu + V_\mu U^\nu \nabla_\nu U^\mu \quad (5.58)$$

$$= 0 , \quad (5.59)$$

non lehen terminoa Killing-en ekuaziotik desagertzen den eta bigarrena  $x^\mu(\lambda)$  geodesiko bat dela. Beraz,  $V_\mu U^\mu$  kantitatea partikulen mundu-lerroan zehar kontserbatzen da. Hau fisikoki uler daiteke: definizioz metrika ez da aldatzen Killing bektorearen norabidean. Laxoki hitz eginez, beraz, partikula aske batek ez du inongo “indar” sentituko norabide horretan, eta, ondorioz, norabide horretan duen momentuaren osagaia kontserbatu egingo da.

Aspaldi simetria maximoko espazioaren kontzeptua aipatzen genuen, definizio zorrotzik eskaini gabe. Definizio zorrotza zera da: **espazio simetriko maximoa** Killing bektore kopuru handiena duen bat dela,  $n$  dimentsioko bariedade batean  $n(n+1)/2$  dena. Ez dugu baieztapen hori frogatuko, baina erraza da ulertzea maila informalean. Demagun  $\mathbb{R}^n$  euklidear espazioa, non isometriak ezagunak zaizkigun: translazioak eta biraketak. Oro har,  $n$  itzulpenak egongo dira, bat mugitu dezakegun norabide bakoitzeko.  $n(n-1)/2$  biraketa ere izango dira;  $n$  dimentsio bakoitzeko  $n-1$  noranzkoak daude biratu ahal izateko, baina bitan banatu behar dugu gainzenbaketa saihesteko ( $x$   $y$  biratzea eta  $y$   $x$  biratzea bi bertsio dira gauza berekoa). Badugu, beraz

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (5.60)$$

Killing bektore independenteak. Zenbaketa-argumentu mota bera makurdura duten espazio simetriko maximoetan (esferak adibidez) edo sinadura ez-euklidearra (esaterako, Minkowski espazioa) aplikatzen da, nahiz eta xehetasunak oso desberdinak izan.

Killing-en ekuazioa edozein espazio-denboran ebaztea erraza izan daitekeen edo ez izan arren, maiz posible da Killing bektore batzuk ikuskapen bidez idaztea. (Noski metrika “generiko batek” ez dauka Killing bektorerik, baina gauzak sinpleak mantentzeko sarritan simetria maila altuko metrikekin lan egiten dugu.) Adibidez,  $\mathbb{R}^2 ds^2 = dx^2 + dy^2$  metrikoarekin,  $x$  eta  $y$  osagai metrikoen independentziak bi Killing bektore sortzen ditu berehala:

$$X^\mu = (1, 0) , \quad (5.61)$$

$$Y^\mu = (0, 1) . \quad (5.62)$$

Hauek argi adierazten dituzte bi itzulpenak. Biraketa bakarra  $R = \partial/\partial\theta$  bektoreari dagokion koordenatu polarretan egongo bagina; koordenatu kartesiaretan hau bihurtzen da

$$R^\mu = (-y, x) . \quad (5.63)$$

Zuk zeuk egiaztatu dezakezu horrek Killing-en ekuazioa konpontzen duela.

Kontuan izan  $n \geq 2$  dimentsioetan dimentsioak baino Killing bektore gehiago egon daitezkeela. Hori gertatzen da Killing eremu bektorialen multzo bat linealki independentea izan daitekeelako, nahiz eta askotariko edozein puntutan puntu horretako bektoreak linealki menpekoak izan. Hutsa da erakustea (beraz, zuk zeuk egin beharko zenuke) Killing bektoreen konbinazio lineal bat *constant* koefizienteak Killing bektore bat dela oraindik (kasu horretan konbinazio lineala ez da Killing bektore independente gisa zenbatzen), baina hau ez da nahitaez egia aldakuntzan zehar aldatzen diren koefizienteekin. Era berean, Killing eremu bektorial biren konmutatzailea Killing eremu bektoriala dela erakutsiko duzu; hori jakitea oso erabilgarria da, baina gerta daiteke konmutadorak linealki independentea ez den eremu bektorial bat ematea (edo besterik gabe desagertzea). Metriko baten Killing bektore guztiak aurkitzeko arazoa, beraz, zaila da, batzuetan ez baitago argi noiz utzi begiratzeari.

## Capítulo 6

# Eremu ahulak eta erradiazio grabitatorioa

Einsteinen ekuazioak lehen aldiz atera genituenean, bide onetik ginel a egiaztatu genuen Newtonen muga kontuan hartuta. Honek eremu grabitatorioa ahula izatea, estatikoa izatea (denbora deribaturik ez) eta probako partikulak poliki-poliki mugitzea eskatzen zuen. Atal honetan murriztaile gutxiagoko egoera bat hartuko dugu kontuan, eremua oraindik ahula baita baina denborarekin alda daitekeen eta probako partikulen mugimenduan murrizketarik ez dagoena. Horri esker, teoria newtondarrean absenteak edo anbiguoak diren fenomenoak eztabaidatuko ditugu, hala nola, erradiazio grabitatorioa (eremua denboraren arabera aldatzen den) eta argiaren desbideratzea (partikula azkarrak barne hartzen dituen).

Grabitazio-eremuaren ahultasuna berriro ere adierazten da metrika Minkowski-ren metrika lauan gehi perturbazio txiki bat deskonposatzeko dugun gaitasun gisa.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 . \quad (6.1)$$

$\eta_{\mu\nu}$ -k bere forma kanonikoa hartzen duen koordenadetara mugatuko gara,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ ,  $h_{\mu\nu}$  txikia dela suposatzeak kantitate honetan lehen ordena baino handiagoa den edozer alde batera uzteko aukera ematen digu, eta hortik berehala lortzen dugu.

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} , \quad (6.2)$$

non  $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$ . Lehen bezala, indizeak igo eta jaitsi ditzakegu  $\eta^{\mu\nu}$  eta  $\eta_{\mu\nu}$  erabiliz, zuzenketak perturbazioan ordena handiagokoak izango lirakeelako. Izan ere, erlatibitate orokorraren bertsio linealizatua ( $h_{\mu\nu}$ -n lehen ordena baino goragoko efektuak alde batera uzten diren)  $h_{\mu\nu}$  atzealde lauko espazio-denbora baten gainean hedatzen den  $h_{\mu\nu}$  eremu tentsore simetriko baten teoria deskribatzen duela pentsa dezakegu. Teoria hau Lorentz aldaezina da erlatibitate bereziaren zentzuan; Lorentz-en  $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu}x^{\mu}$  transformazio baten pean,  $\eta_{\mu\nu}$  metrika laua aldaezina da, perturbazioa gisa eraldatzen den bitartean.

$$h_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\mu}\Lambda_{\nu'}^{\nu}h_{\mu\nu} . \quad (6.3)$$

(Kontuan izan Minkowskiren espazioaz gain beste hondoko espazio-denborari buruzko perturbazio txikiak kontuan izan genitzakeela. Kasu horretan metrika  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$  idatziko litzateke, eta  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  metrika duen espazio kurbatua hedatzen den tentsore simetrikoko baten teoria aterako genuke. Ikuspegi hori beharrezkoa da, adibidez, kosmologian).

$h_{\mu\nu}$  perturbazioek betetzen duten higidura-ekuazioa aurkitu nahi dugu, Einstein-en ekuazioak lehen ordenan aztertuz datozenak. Hasten dugu Christoffel sinboloekin, zeinak emandakoak

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \quad (6.4)$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) . \quad (6.5)$$

Konexio-koefizienteak lehen mailako kantitateak direnez, Riemann-en tentsoreari egin-dako ekarpen bakarra  $\Gamma$ -en deribatuetatik etorriko da, ez  $\Gamma^2$  terminoetatik. Erosotasu-nerako indize bat jaitsiz, lortuko dugu

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\lambda}\partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \quad (6.6)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma}) . \quad (6.7)$$

Ricci tentsorea  $\mu$  eta  $\rho$  baino gehiago kontratatzetik dator, eta

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu}) , \quad (6.8)$$

$\mu$  eta  $\nu$ -n nabarmen simetrikoa dena. Adierazpen honetan perturbazioaren arrastoa  $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = h^{\mu}_{\mu}$  gisa definitu dugu, eta D'Alembertiarra espazio lautik datorrena besterik ez da,  $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ . Berririo kontratatuz Ricciren etekin eskalarra lortzeko

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h . \quad (6.9)$$

Guztia elkartuz Einstein tentsorea lortuko dugu:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \quad (6.10)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\square h) . \quad (6.11)$$

Teoria linealizatua hondo lau batean tentsore simetrikoko bat deskribatzen duenaren interpretazioarekin bat etorritik, Einstein tentsore linealizatua (6.8) erator daiteke  $h_{\mu\nu}$ -ri dagokionez honako Lagrangiar hau aldatuz:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_{\mu}h^{\mu\nu})(\partial_{\nu}h) - (\partial_{\mu}h^{\rho\sigma})(\partial_{\rho}h^{\mu}_{\sigma}) + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu}h^{\rho\sigma})(\partial_{\nu}h_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu}h)(\partial_{\nu}h) \right] . \quad (6.12)$$

Xehetasunak gordeko dizkizut.

Eremu linealizatuaren ekuazioa  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$  da noski, non  $G_{\mu\nu}$  (6.8)-k ematen duen eta  $T_{\mu\nu}$  energia-momentuaren tentsorea den,  $h_{\mu\nu}$ -n zerogarren ordenan kalkulatu.

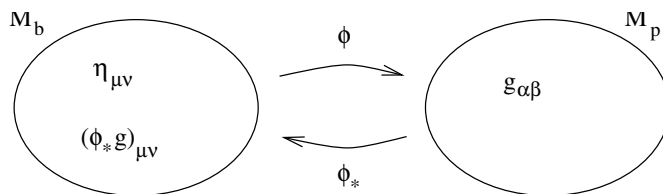
Energia-momentuaren tentsoreari ez diegu goi mailako zuzenketak sartzen, energia- eta momentu-kopurua bera txikia izan behar delako eremu ahuleko muga aplikatzeko. Beste era batera esanda,  $T_{\mu\nu}$ -n desagertzen ez den ordena baxuena perturbazioaren magnitude-ordena berekoa da automatikoki. Kontuan izan ordena txikieneko kontserbazio-legea  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  besterik ez dela. Gehienetan hutsaren ekuazioez arduratuko gara, ohi bezala  $R_{\mu\nu} = 0$  besterik ez baita, non  $R_{\mu\nu}$  (6.6) bidez ematen den.

Eremu linealizatuaren ekuazioak eskuan, ia prest gaude horiek ebatzen hasteko. Lehenik, ordea, neurgailuaren aldaezintasunaren gai arantzatsua landu beharko genuke. Arazo hau sortzen da  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ -k ez duelako guztiz zehazten espazio-denboran koordenatu-sistema; beste koordenatu-sistema batzuk egon daitezke metrika oraindik Minkowskiren metrika gehi perturbazio txiki bat bezala idatz daitekeen, baina perturbazioa ezberdina izango da. Beraz, metrikaren deskonposizioa hondo lau batean gehi perturbazio batean ez da bakarra.

Goi mailako ikuspuntutik hausnartu dezakegu. Teoria linealizatua hondo lau batean tentsore-eremuen portaera gobernatzen duen ideia gisa har daitekeela “fondo espazio-denbora”  $M_b$ , “espazio-denbora fisikoa”  $M_p$  baten arabera formalizatu daiteke. eta  $\phi : M_b \rightarrow M_p$  difeomorfismoa.  $M_b$  eta  $M_p$  anizkunak “berdinak” direnez (difeomorfoak direnez), baina tentsore-eremu ezberdin batzuk dituztela irudikatzen dugu;  $M_b$ -n  $\eta_{\mu\nu}$  Minkowski-ren metrika laua definitu dugu, eta  $M_p$ -n Einsteinen ekuazioak betetzen dituen  $g_{\alpha\beta}$  metrika bat dugu. (Uste dugu  $M_b$   $x^\mu$  koordenatuekin hornituta dagoela eta  $M_p$   $y^\alpha$  koordenatuekin hornituta dagoela, nahiz eta hauek ez duten rol nabarmenik izango.)  $\phi$  difeomorfismoak atzealdearen eta espazio-denbora fisikoen artean tentsoreak aurrera eta atzera mugitzeko aukera ematen digu. Gure teoria linealizatua hondoko espazio-denbora lauan gertatzen den moduan eraiki nahi genukeenez, metrika fisikoaren  $(\phi_*g)_{\mu\nu}$  atzerapena interesatzen zaigu. Perturbazioa atzera botatako metrika fisikoaren eta laua-aren arteko diferentzia gisa defini dezakegu:

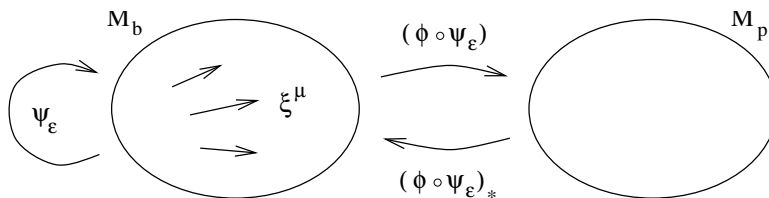
$$h_{\mu\nu} = (\phi_*g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} . \quad (6.13)$$

Definizio honetatik, ez dago arrazoirik  $h_{\mu\nu}$  osagaiak txikiak izateko; hala ere,  $M_p$  eremu grabitatorioak ahulak badira, *zenbait* difeomorfismoetarako  $\phi |h_{\mu\nu}| \ll 1$  izango dugu. Beraz, gure arreta hori egia den difeomorfismo horietara mugatzen dugu. Orduan,  $g_{\alpha\beta}$ -k Einsteinen ekuazioak espazio-denbora fisikoan betetzen dituela esan nahi du  $h_{\mu\nu}$ -k atzealdeko espazio-denborako ekuazio linealizatuak beteko dituela ( $\phi$ , difeomorfismo gisa, Einstein-en ekuazioak beraiek atzera botatzeko erabil baitaiteke).



Hizkuntza honetan, gauge inbarientziaren arazoa  $M_b$  eta  $M_p$  artean difeomorfismo onargarri ugari egotea besterik ez da (non “baimenduzkoa” perturbazioa txikia dela esan nahi du). Demagun  $\xi^\mu(x)$  eremu bektorial bat atzeko espazio-denboran. Eremu bektorial

honek  $\psi_\epsilon : M_b \rightarrow M_b$  difeomorfismoen parametro bakarreko familia bat sortzen du.  $\epsilon$  aski txikirako,  $\phi$  (6.10)-k definitutako perturbazioa txikia den difeomorfismoa bada ( $\phi \circ \psi_\epsilon$ ) izango da, nahiz eta perturbazioak balio ezberdina izango duen.



Zehazki,  $\epsilon$ -k parametrizatutako perturbazio-familia bat defini dezakegu:

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = [(\phi \circ \psi_\epsilon)_* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (6.14)$$

$$= [\psi_{\epsilon*}(\phi_* g)]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} . \quad (6.15)$$

Bigarren berdintasuna konposizio baten azpian atzerapena kontrako ordenan egindako pullbacken osarak ematen duela oinarritzen da, hau da, pullback-ak berak jatorrizko maparen kontrako norabidean mugitzen dituelako. (6.10) erlazioa sartuz, aurkituko dugu

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = \psi_{\epsilon*}(h + \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (6.16)$$

$$= \psi_{\epsilon*}(h_{\mu\nu}) + \psi_{\epsilon*}(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu} \quad (6.17)$$

(bi tentsoreen baturaren pullbacka pullbacken batura baita). Orain  $\epsilon$  txikia dela uste dugu; kasu honetan  $\psi_{\epsilon*}(h_{\mu\nu})$   $h_{\mu\nu}$ -ren berdina izango da ordena baxuenerako, eta beste bi terminoek Gezur deribatua ematen digute:

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = \psi_{\epsilon*}(h_{\mu\nu}) + \epsilon \left[ \frac{\psi_{\epsilon*}(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\epsilon} \right] \quad (6.18)$$

$$= h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} \quad (6.19)$$

$$= h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} . \quad (6.20)$$

Azken berdintasuna metrikaren (5.33) Lie deribatuaren aurreko kalkulutik dator, gehi deribatu kobarianteak ordena txikieneko deribatu partzialak besterik ez direla.

$\phi_\epsilon$  difeomorfismo infinitesimalek egoera fisiko beraren irudikapen ezberdina ematen dute, perturbazioa txikia izateko gure eskakizuna mantenduz. Beraz, (6.12) emaitzak adierazten digu zer nolako perturbazio metrikok adierazten duten espazio-denbora fisiko-ki baliokideak —  $2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}$ -k elkarren artean erlazionatuta daudenak,  $\xi^\mu$  bektore batzuen-tzat. Gure teoriaren inbariantzia horrelako transformazioetan  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$  elektromagnetismoaren gauge inbariantzia tradizionalen antzekoa da. (Analogia elektromagnetismoarekin marraztu genuen aurreko analogiarekin alderatuta desberdina da, marko ortonormal-formalismoan Lorentz-en eraldaketa lokalak barne-sorta bektorial bateko oinarri-aldaetekin erlazionatuz). Elektromagnetismoan inbariantza sortzen da  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  eremuaren indarra aldatu gabe geratzen delako gauge-eraldaketak; era

berean, (6.13) transformazioak Riemann tentsore linealizatua aldatzen duela aurkitzen dugu

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu\partial_\mu\xi_\sigma + \partial_\rho\partial_\nu\partial_\sigma\xi_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho + \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\rho\xi_\nu \quad (6.21)$$

$$- \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\mu\xi_\rho - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\rho\xi_\mu - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\nu\xi_\sigma - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\sigma\xi_\nu) \quad (6.22)$$

$$= 0 . \quad (6.23)$$

Perturbazio metrikorako gauge transformazio egokiaren gure deribazio abstraktua kurbadura (eta, beraz, espazio-denbora fisikoa) aldatu gabe uzten duela egiaztatzen da.

Gauge inbarientzia koordenatuen transformazio infinitesimalen bide apur bat baxuago baina dezente zuzenagotik ere uler daiteke. Gure difeomorfismoa  $\psi_\epsilon$   $x^\mu$ -tik  $x^\mu - \epsilon\xi^\mu$ -ra koordenatuak aldatzea dela pentsa daiteke. (Minus ikurra, ez-ohikoa dena, “berria” metrika distantzia txiki batetik aurrera kurba integraletan zehar atzera botatzen denetik dator, hau da, koordenatuak kurbetan zehar atzerago distantzia txikian daudenekin ordezkatzearen baliokidea da. .) Koordenatu-eraldaketan tentsoreak eraldatzeko ohiko arauai jarraituz, zehatz-mehatz (6.13) erator dezakezu — tentsoreen osagaiak bi koordenatu-sistema desberdinetan berdinduz zertxobait iruzur egin behar duzun arren. Ikus Schutz edo Weinberg adibide gisa.

Zenbait neurgailu-eraldaketaren pean aldaezina den sistema baten aurrean, gure lehen sena neurgailu bat konpontzea da. Dagoeneko eztabaidatu dugu koordenatu harmonikoen sistemaz, eta horretara itzuliko gara orain eremu-muga ahularen testuinguruan. Gogoratu neurgailu hau  $\square x^\mu = 0$ -k zehaztu zuela, eta horren baliokidea zela erakutsi genuen

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0 . \quad (6.24)$$

Eremu ahulean hau bihurtzen da

$$\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) = 0 , \quad (6.25)$$

edo

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda - \frac{1}{2}\partial_\lambda h = 0 . \quad (6.26)$$

Baldintza hau Lorentz neurgailu gisa ere ezagutzen da (edo Einstein neurgailu edo Hilbert neurgailu edo de Donder neurgailu edo Fock neurgailu). Lehen bezala, neurgailuaren askatasun pixka bat geratzen zaigu, funtzio harmoniko (infinitesimal) bidez gure koordenatuak alda ditzakegulako.

Neurgailu honetan,  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$  Einsteinen ekuazio linealizatuak zertxobait sinplifikatzen dira,

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h = -16\pi GT_{\mu\nu} , \quad (6.27)$$

hutseko ekuazioak  $R_{\mu\nu} = 0$  forma dotorea hartzen duen bitartean

$$\square h_{\mu\nu} = 0 , \quad (6.28)$$

hau da, uhin-ekuazio erlatibista konbentzionala besterik ez dena. (6.19) eta (6.17) batera, eremu grabitatorioan hutsean dagoen asaldura baten bilakaera zehazten dute neurgailu harmonikoan.

Askotan komenigarria da perturbazio metrikoaren deskribapen apur bat ezberdin batekin lan egitea. Honen bidez definitzen dugu “traza alderantzikatua” perturbazioa  $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h . \quad (6.29)$$

Izenak zentzuzkoa du,  $\bar{h}^\mu{}_\mu = -h^\mu{}_\mu$  geroztik. (Einstein tentsorea aztarnaren alderantzizko Ricci tentsorea besterik ez da.)  $\bar{h}_{\mu\nu}$ -ri dagokionez, neurgailu harmonikoaren baldintza bihurtzen da

$$\partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\lambda = 0 . \quad (6.30)$$

Eremu osoko ekuazioak dira

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} , \quad (6.31)$$

hortik berehala ondorioztatzen da hutsaren ekuazioak direla

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (6.32)$$

(6.22) eta Newton-en mugaren aurreko esploraziotik, erraza da eremu ahuleko metrika ateratzea iturri esferiko geldia baterako, hala nola planeta edo izar batentzat. Gogoratu aurretik aurkitu genuela Einstein-en ekuazioak  $h_{00}$ -k eremu ahuleko muga Poisson-en (4.51) ekuazioa betetzen zuela aurreikusten zuela, eta horrek inplikutzen zuen.

$$h_{00} = -2\Phi , \quad (6.33)$$

non  $\Phi$  potentzial newtoniar konbentzionala den,  $\Phi = -GM/r$ . Demagun orain gure iturriaren energia-momentuaren tentsorea bere atsedeen-energia dentsitatea  $\rho = T_{00}$  nagusi dela. (Horrelako hipotesi bat ez da beharrezkoa eremu ahuleko muga, baina, zalantzarik gabe, planeta edo izar bati eutsiko dio, hau da, momentuz kontuan hartu nahiko genukeena). Orduan,  $T_{\mu\nu}$ -ren beste osagaiak  $T_{00}$  baino askoz txikiagoak izango dira eta (6.22) berdina izan behar da  $\bar{h}_{\mu\nu}$ -rako.  $\bar{h}_{00}$   $\bar{h}_{ij}$  baino askoz handiagoa bada, izango dugu

$$h = -\bar{h} = -\eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{00} , \quad (6.34)$$

eta gero (6.20) berehala lortzen dugu

$$\bar{h}_{00} = 2h_{00} = -4\Phi . \quad (6.35)$$

$\bar{h}_{\mu\nu}$ -ren beste osagaiak arbuigarriak dira, eta horietatik erator dezakegu

$$h_{i0} = \bar{h}_{i0} - \frac{1}{2}\eta_{i0}\bar{h} = 0 , \quad (6.36)$$

eta

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}\bar{h} = -2\Phi\delta_{ij} . \quad (6.37)$$



Eremu ahuleko mugan dagoen izar edo planeta baten metrika da, beraz

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (6.38)$$

Eremu ahuleko mugaren aplikazio zertxobait ez hain sinplista bat grabitazio-erradiazioari dagokio. Elektromagnetismoaren antzeko arazoa ezagutzen duzuenok prozedura ia berdina dela ohartuko dira. Ekuazio linealizatuak hutsean (6.23) kontuan hartzen hasiko gara. D'Alembertian-espazio lauak  $\square = -\partial_t^2 + \nabla^2$  forma duenez, eremu-ekuazioa  $\bar{h}_{\mu\nu}$ -ren uhin-ekuazioan dago. Fisikari on guztiek dakienez, horrelako ekuazio baten aurrean egin beharreko gauza balio konplexuko soluzioak idaztea da, eta gero benetako parte hartzea egunaren amaieran. Beraz, aitortzen dugu uhin-ekuazio honen soluzio-multzo bereziki erabilgarriak direla uhin lauak, emandakoak

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} , \quad (6.39)$$

non  $C_{\mu\nu}$  (0, 2) tentsore konstante eta simetrikoa den eta  $k^\sigma$  **uhin-bektorea** izenez eza-  
gutzen den bektore konstantea den. Irtenbide bat dela egiaztatzeko, konektatzen dugu:

$$0 = \square \bar{h}_{\mu\nu} \quad (6.40)$$

$$= \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} \quad (6.41)$$

$$= \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho (ik_\sigma \bar{h}_{\mu\nu}) \quad (6.42)$$

$$= -\eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} \quad (6.43)$$

$$= -k_\sigma k^\sigma \bar{h}_{\mu\nu} . \quad (6.44)$$

(soluzio interesgarri baterako)  $h_{\mu\nu}$ -ren osagai guztiak zero izango ez direnez edonon, izan behar dugu

$$k_\sigma k^\sigma = 0 . \quad (6.45)$$

Uhin laua (6.30) beraz, ekuazio linealizatuen soluzioa da uhin-bektorea nulua bada; hau argiaren abiaduran grabitazio-uhinak hedatzen direla dioen adierazpenean itzultzen da. Uhin-bektorearen denboraren osagaiari askotan uhinaren **maiztasuna** esaten zaio eta  $k^\sigma = (\omega, k^1, k^2, k^3)$  idazten dugu. (Orokorrean, lau abiadurako  $U^\mu$  mugitzen den behatzaileak uhinak  $\omega = -k_\mu U^\mu$  maiztasuna duela ikusiko luke.) Orduan, uhin-bektorea nulua izateko baldintza bihurtzen da

$$\omega^2 = \delta_{ij} k^i k^j . \quad (6.46)$$

Jakina, gure olatua irtenbide orokorrenetik urrun dago; uhin plano desberdinen edozein (agian infinitua) batu daiteke eta oraindik (6.23) ekuazio lineala ebatziko du. Izan ere, edozein soluzio idatz daiteke halako gainjartze gisa.

Uhina zehazteko parametro libre batzuk daude: hamar zenbaki  $C_{\mu\nu}$  koefizienteetarako eta hiru  $k^\sigma$  bektore nulurako. Horietako asko koordinatu-askatasunaren eta neurgailu-askatasunaren ondorio dira, orain ezabatzeari ekin dioguna. Gauge harmonikoaren baldintza ezarriz hasiko gara, (6.21). Horrek esan nahi du

$$0 = \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \quad (6.47)$$

$$= \partial_\mu (C^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (6.48)$$

$$= iC^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} , \quad (6.49)$$

egia bada bakarrik

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0 . \quad (6.50)$$

Uhin-bektorea  $C^{\mu\nu}$ -rekin ortogonal dela esaten dugu. Lau ekuazio dira,  $C_{\mu\nu}$ -ren osagai independenteen kopurua hamarretik seira murrizten dutenak.

Orain neurgailu harmonikoaren baldintza ezarri badugu ere, oraindik koordenatu-askatasun batzuk geratzen dira. Gogoratu formaren edozein koordenatu-eraldaketa dela

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \zeta^\mu \quad (6.51)$$

koordinatu harmonikoen baldintza utziko du

$$\square x^\mu = 0 \quad (6.52)$$

daukagun bitartean pozik

$$\square \zeta^\mu = 0 . \quad (6.53)$$

Jakina, (6.38) bera  $\zeta^\mu$ -ren uhin-ekuazioa da; behin irtenbide bat aukeratzen dugunean, gure neurgailuaren askatasun guztia agortu egingo dugu. Aukera dezagun irtenbide hau:

$$\zeta_\mu = B_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} , \quad (6.54)$$

non  $k_\sigma$  gure grabitazio-uhinaren uhin-bektorea den eta  $B_\mu$  koefiziente konstanteak.

Orain aldarrikatzen dugu geratzen den askatasun horrek gure grabitazio-uhinak ezau-garritzen dituen  $C_{\mu\nu}^{(\text{old})}$  koefizienteetatik  $C_{\mu\nu}^{(\text{new})}$  multzo berri batera bihurtzeko aukera ematen duela, hala nola

$$C^{(\text{new})\mu}{}_\mu = 0 \quad (6.55)$$

eta

$$C_{0\nu}^{(\text{new})} = 0 . \quad (6.56)$$

(Egia esan, azken baldintza hau neurgailuaren eta Lorentz markoaren aukeraketa bat da. Neurgailuaren aukeraketak  $U^\mu C_{\mu\nu}^{(\text{new})} = 0$  ezartzen du  $U^\mu$  denbora-bektore konstante baterako, eta fotograma aukeratzeak, berriz,  $U^\mu$  puntua egiten du denbora-ardatzeari. Ikus dezagun nola posible den  $B_\mu$  beharrezko koefizienteak esplizituki ebatziz. (6.36) transformazioaren arabera, gure perturbazio metrikoaren ondoriozko aldaketa idatz daiteke

$$h_{\mu\nu}^{(\text{new})} = h_{\mu\nu}^{(\text{old})} - \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu , \quad (6.57)$$

horrek arrastoaren alderantzizko perturbazioan aldaketa bat eragiten du,

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{new})} = h_{\mu\nu}^{(\text{new})} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(\text{new})} \quad (6.58)$$

$$= h_{\mu\nu}^{(\text{old})} - \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (h^{(\text{old})} - 2\partial_\lambda \zeta^\lambda) \quad (6.59)$$

$$= \bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{old})} - \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \zeta^\lambda . \quad (6.60)$$

Ebazpenerako (6.30) eta transformaziorako (6.39) forma espezifikoa erabiliz, lortuko dugu

$$C_{\mu\nu}^{(\text{new})} = C_{\mu\nu}^{(\text{old})} - ik_\mu B_\nu - ik_\nu B_\mu + i\eta_{\mu\nu} k_\lambda B^\lambda . \quad (6.61)$$

Inposatzeak (6.40) esan nahi du, beraz

$$0 = C^{(\text{old})\mu}_{\mu} + 2ik_{\lambda}B^{\lambda} , \quad (6.62)$$

edo

$$k_{\lambda}B^{\lambda} = \frac{i}{2}C^{(\text{old})\mu}_{\mu} . \quad (6.63)$$

Orduan (6.41) inposa dezakegu, lehenengo  $\nu = 0$ -rako:

$$0 = C^{(\text{old})}_{00} - 2ik_0B_0 - ik_{\lambda}B^{\lambda} \quad (6.64)$$

$$= C^{(\text{old})}_{00} - 2ik_0B_0 + \frac{1}{2}C^{(\text{old})\mu}_{\mu} , \quad (6.65)$$

edo

$$B_0 = -\frac{i}{2k_0} \left( C^{(\text{old})}_{00} + \frac{1}{2}C^{(\text{old})\mu}_{\mu} \right) . \quad (6.66)$$

Ondoren, ezarri (6.41)  $\nu = j$ -rako:

$$0 = C^{(\text{old})}_{0j} - ik_0B_j - ik_jB_0 \quad (6.67)$$

$$= C^{(\text{old})}_{0j} - ik_0B_j - ik_j \left[ \frac{-i}{2k_0} \left( C^{(\text{old})}_{00} + \frac{1}{2}C^{(\text{old})\mu}_{\mu} \right) \right] , \quad (6.68)$$

edo

$$B_j = \frac{i}{2(k_0)^2} \left[ -2k_0C^{(\text{old})}_{0j} + k_j \left( C^{(\text{old})}_{00} + \frac{1}{2}C^{(\text{old})\mu}_{\mu} \right) \right] . \quad (6.69)$$

Aukera hauek elkarrekiko koherenteak direla egiaztatzeko, (6.48) eta (6.50) berriro konektatu beharko genituzke (6.40), eta hori utziko dizut. Demagun eraldaketa hori egin dugula, eta  $C^{(\text{new})}_{\mu\nu}$  osagai berriei  $C_{\mu\nu}$  izenez besterik ez.

Horrela,  $C_{\mu\nu}$  matrize simetrikoko hamar zenbaki independenteekin hasi gara. Gauge harmonikoa aukeratzeak lau baldintza (6.35) inplikutzen zituen, eta horrek osagai independenteen kopurua seira jaitsi zuen. Gainerako neurgailuaren askatasuna erabiltzeak baldintza bat (6.40) eta lau baldintza (6.41) ekarri zituen; baina  $\nu = 0$  (6.41) (6.35) inplikutzen denean, beraz, guztira lau murrizketa gehigarri ditugu, eta horrek bi osagai independentetara eramaten gaitu. Gure askatasun posible guztia erabili dugu, beraz, bi zenbaki hauek neurgailu honetan gure uhin hegazkinaren ezaugarri fisikoa adierazten dute. Hau esplizituago ikus daiteke gure koordenatu espazialak aukeratuz, hala nola uhina  $x^3$  norabidean bidaiatzen ari den; hori da,

$$k^{\mu} = (\omega, 0, 0, k^3) = (\omega, 0, 0, \omega) , \quad (6.70)$$

non  $k^3 = \omega$  hori dakigun uhin-bektorea nulua delako. Kasu honetan,  $k^{\mu}C_{\mu\nu} = 0$  eta  $C_{0\nu} = 0$  batera esan nahi dute

$$C_{3\nu} = 0 . \quad (6.71)$$

$C_{\mu\nu}$ -ren zero ez diren osagai bakarrak, beraz,  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  eta  $C_{22}$  dira. Baina  $C_{\mu\nu}$  arrastorik gabekoa eta simetrikoa da, beraz, oro har, idatz dezakegu

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.72)$$

Beraz,  $x^3$  noranzkoan bidaiatzen duen neurgailu honetako uhin plano baterako,  $C_{11}$  eta  $C_{12}$  bi osagaiek ( $\omega$  maiztasunarekin batera) guztiz ezaugarritzen dute uhina.

Gure neurgailuaren askatasun guztia erabiltzean, **arrastorik gabeko neurgailu zeharkako** (edo batzuetan “erradiazio neurgailua”) izenez ezagutzen den neurgailu harmonikoaren azpigaugura batera joan gara. Izena perturbazio metrikoa arrastorik gabekoa eta uhin-bektorearekiko perpendikularra izateagatik dator. Noski,  $\bar{h}_{\mu\nu}$  aztarnaren alderantzizko perturbazioarekin lanean aritu gara  $h_{\mu\nu}$  perturbazioarekin baino; baina  $\bar{h}_{\mu\nu}$  arrastorik gabekoa denez ( $C_{\mu\nu}$  delako) eta  $h_{\mu\nu}$ -ren traza-alderantzizkoaren berdina denez, neurgailu honetan dugu

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{TT}} = h_{\mu\nu}^{\text{TT}} \quad (\text{transverse traceless gauge}). \quad (6.73)$$

Beraz, barrak  $h_{\mu\nu}$  gainean jar ditzakegu, betiere neurgailu honetan gauden bitartean.

Zeharkako arrastorik gabeko neurgailuaren ezaugarri polita da uhin plano baten osagaiak neurgailu arbitrario batean ematen badizute, erraz bihur ditzakezula zeharkako arrastorik gabeko osagaietan. Lehenik eta behin, proiektzio-operadore gisa jotzen duen  $P_{\mu\nu}$  tentsorea definitzen dugu:

$$P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \quad (6.74)$$

Honek bektoreak  $n_\mu$  bektore unitarioarekiko ortogonal diren hiperplanoetan proiektatzen dituela egiazta dezakezu. Hemen  $n_\mu$  *spacelike* bektore unitariotzat hartuko dugu, uhinaren hedapen-noranzkoan zehar geratzea aukeratzen duguna:

$$n_0 = 0, \quad n_j = k_j/\omega. \quad (6.75)$$

Orduan  $h_{\mu\nu}$  perturbazio baten zeharkako zatia  $P_\mu{}^\rho P_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma}$  proiektzioa besterik ez da, eta zeharkako aztarnarik gabeko zatia arrastoari kenduz lortzen da:

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = P_\mu{}^\rho P_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} P_{\mu\nu} P^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}. \quad (6.76)$$

Kasu orokorragoetarako egokiak diren xehetasunetarako, ikus Misner, Thorne eta Wheeler-en eztabaida.

Grabitazio-uhinen eragin fisikoen sentsazioa lortzeko, komeni da uhin baten aurrean probako partikulen mugimendua kontuan hartzea. Zalantzarik gabe, ez da nahikoa partikula bakar baten ibilbidea ebatzea, horrek mundu-lerroan dauden koordenatuen balioak baino ez liguke esango. (Izan ere, edozein partikularentzat aztarnarik gabeko zeharkako

koordinatuak aurki ditzakegu, zeinetan partikula geldirik agertzen den  $h_{\mu\nu}$ -n lehen ordenan). Uhinaren efektuen koordinatu independentea den neurria lortzeko, hurbileko partikulen higidura erlatiboa kontuan hartuko dugu, desbideratze geodesikoaren ekuazioak deskribatzen duen moduan.  $U^\mu(x)$  eremu bektorial bakarrak eta  $S^\mu$  bereizketa-bektorea deskribatutako lau abiadura duten hurbileko partikula batzuk kontuan hartzen baditugu,

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma . \quad (6.77)$$

Ezkerreko aldea  $h_{\mu\nu}$  lehenengo ordenan kalkulatu nahi dugu. Gure probako partikulak poliki-poliki mugitzen ari direla hartzen badugu, orduan lau-abiadura bektore unitate gisa adieraz dezakegu denboraren norabidean gehi  $h_{\mu\nu}$  ordenako zuzenketak eta hantziagoak; baina badakigu Riemann-en tentsorea lehen mailakoa dela jada, beraz,  $U^\nu$ -ren zuzenketak baztertu egin daitezke eta idazten dugu

$$U^\nu = (1, 0, 0, 0) . \quad (6.78)$$

Beraz,  $R^\mu{}_{00\sigma}$  edo baliokidea den  $R_{\mu 00\sigma}$  kalkulatu behar dugu. (6.5)-tik dugu

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{00} - \partial_\sigma \partial_0 h_{\mu 0} - \partial_\mu \partial_0 h_{\sigma 0}) . \quad (6.79)$$

Baina  $h_{\mu 0} = 0$ , beraz

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma} . \quad (6.80)$$

Bien bitartean, poliki-poliki mugitzen diren gure partikulen kasuan,  $\tau = x^0 = t$  dugu ordena baxuenean, beraz, desbideratze geodesikoaren ekuazioa bihurtzen da

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^\mu{}_\sigma . \quad (6.81)$$

$x^3$  norabidean bidaiatzen duen gure uhinarentzat, horrek esan nahi du  $S^1$  eta  $S^2$  bakarrik eragingo duela — probako partikulak uhin-bektorearekiko norabide perpendikularretan soilik asaldatzen dira. Hori jakina da elektromagnetismotik ezaguna, non uhin plano bateko eremu elektriko eta magnetikoak uhin-bektorearekiko perpendikularrak diren.

Gure olatua bi zenbakiek bereizten dute, etorkizuneko erosotasunerako  $C_+ = C_{11}$  eta  $C_\times = C_{12}$  izenez aldatuko ditugunak. Azter ditzagun haien ondorioak bereizita,  $C_\times = 0$  kasutik hasita. Orduan dugu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (6.82)$$

eta

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) . \quad (6.83)$$

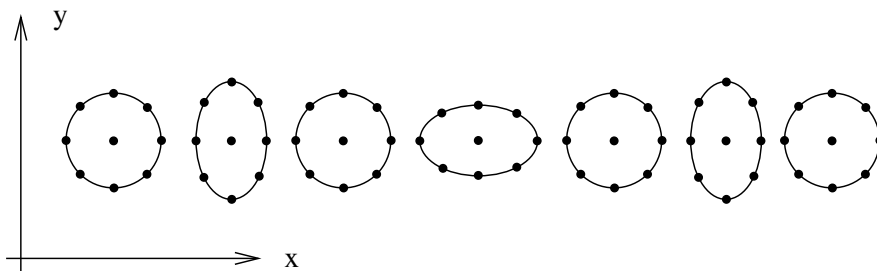
Hauek berehala ebatzi daitezke errendimendurako, maila baxuenean,

$$S^1 = \left(1 + \frac{1}{2} C_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^1(0) \quad (6.84)$$

eta

$$S^2 = \left(1 - \frac{1}{2}C_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^2(0) . \quad (6.85)$$

Horrela, hasieran  $x^1$  noranzkoan banandutako partikulek  $x^1$  noranzkoan batera eta bestera oszilatuko dute, eta, era berean, hasierako  $x^2$  bereizketa dutenentzat. Hau da,  $x$ - $y$  planoko partikula geldikoen eraztun batekin hasten bagara, uhina igaro ahala “+” baten forman errebota egingo dute:



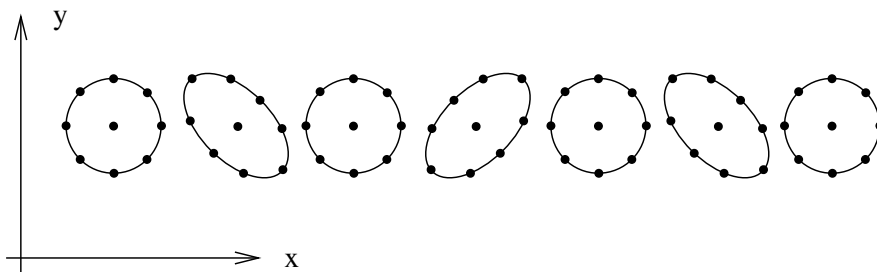
Bestalde,  $C_+ = 0$  baina  $C_\times \neq 0$  irtenbidea emango lukeen kasurako analisi baliokidea

$$S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2}C_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^2(0) \quad (6.86)$$

eta

$$S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2}C_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^1(0) . \quad (6.87)$$

Kasu honetan, partikulen zirkuluak atzera eta atzera egingo luke “ $\times$ ” baten forman:

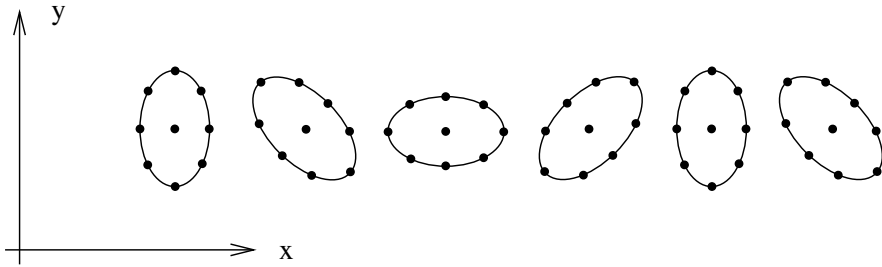


$C_+$  eta  $C_\times$  notazioa, beraz, argia izan behar da. Bi kantitate hauek grabitazio-uhinaren polarizazio linealaren bi modu independenteak neurtzen dituzte. Gustuko bagenu eskuineko eta ezkerreko modu zirkularrez polarizatutako moduak kontuan har genitzake definituz

$$C_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ + iC_\times) , \quad (6.88)$$

$$C_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ - iC_\times) . \quad (6.89)$$

$C_R$  uhin hutsaren eragina partikulak eskuineko zentzuan biratzea izango litzateke,



eta berdin  $C_L$  ezkerreko modurako. (Kontuan izan partikula indibidualak ez direla eraz-tunaren inguruan bidaiatzen; epiziklo txikietan mugitzen dira.)

Grabitazio-uhin klasikoen polarizazio-egoerak kuantizazioan aurkitzea espero geni-tuzkeen partikula-motekin erlaziona ditzakegu. Ereku elektromagnetikoak bi polarizazio-egoera independente ditu, bektoreek  $x$ - $y$  planoan deskribatzen dituztenak; modu balio-kidean, polarizazio-modu bakarra aldaezina da plano honetan  $360^\circ$ -ren biraketa baten pean. Kuantizazioan teoria honek fotoia ematen du, masarik gabeko spin-partikula bat. Neutrinoa, berriz, masarik gabeko partikula bat ere bada,  $360^\circ$  biraketan minus zeinua jasotzen duen eremu batek deskribatua;  $720^\circ$ -ren errotazioetan aldaezina da, eta spin- $\frac{1}{2}$  duela esaten dugu. Arau orokorra da  $S$  spina  $\theta$  angeluarekin erlazionatuta dagoela zei-naren azpian polarizazio-moduak  $S = 360^\circ/\theta$  aldaezinak diren. Ereku grabitatorioak, zeinaren uhinak argiaren abiaduran hedatzen diren, masarik gabeko partikulak ekarri beharko lituzke teoria kuantikoan. Deskribatu ditugun polarizazio moduak  $x$ - $y$  planoan  $180^\circ$ -ren errotazioetan aldaezinak direla ohartuta, elkartutako partikulak —“grabitoiak” — spin-2 izatea espero dugu. Urruti gaude horrelako partikulak detektatzeko (eta ez litzateke harritzekoa izango inoiz zuzenean detektatuko ez balira), baina grabitatearen teoria kuantiko errespetagarri orok haien existentzia iragarri beharko luke.

Gure esku dauden hutseko ekuazio linealizatuen uhin planoko soluzioekin, iturriek erradiazio grabitatorioaren sorrera eztabaidatzea geratzen da. Horretarako materiari ako-platutako ekuazioak kontuan hartu behar dira,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} . \quad (6.90)$$

Ekuazio horren soluzioa Green-en funtzio bat erabiliz lor daiteke, elektromagnetismoko problema analogikoaren modu berean. Hemen metodoaren eskema berrikusiko dugu.

Green-en  $G(x^\sigma - y^\sigma)$  funtzioa  $\square$  D'Alembertiar operadorearentzat uhin-ekuazioaren soluzioa da delta-funtzio iturri baten aurrean:

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma) , \quad (6.91)$$

non  $\square_x$  D'Alembertarra adierazten du  $x^\sigma$  koordenatuekiko. Funtzio horren erabilgarritasuna (6.70) bezalako ekuazio baten soluzio orokorra idatz daitekeela da.

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y , \quad (6.92)$$

berehala egiazta daitekeen bezala. (Ohartu  $\sqrt{-g}$  faktorerik ez dela beharrezkoa, gure atzeko plano espazio-denbora laua besterik ez baita.) (6.71)-ren konponbideak aspal-

di landu dira, noski, eta “atzeratuak” edo “aurreratuak” direla pentsa daitezke, denboran aurrera edo atzera doazen olatuak adierazten dituzten ala ez. Gure interesa Green atzeratuaren funtzioan dago, zeinak kontuan hartutako puntuaren iraganeko seinaleen metatutako efektuak adierazten dituen. Emandakoa da

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta[|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0) . \quad (6.93)$$

Hemen letra lodia erabili dugu  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$  eta  $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$  bektore espazialak adierazteko,  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = [\delta_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j)]^{1/2}$  arauarekin. Theta funtzioa  $\theta(x^0 - y^0)$  1 berdina da  $x^0 > y^0$  denean, eta zero bestela. (6.73)-ren eratorpenak urrutiegi eramango gintuzke, baina elektrodinamika edo fisikako ekuazio diferentzial partzialei buruzko edozein testu estandaretan aurki daiteke.

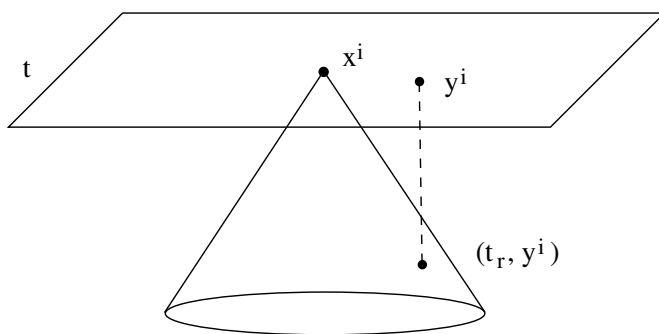
(6.73) (6.72) konektatzean, delta funtzioa erabil dezakegu integrala  $y^0$  gainean egiteko, eta horrela utziz.

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}) d^3y , \quad (6.94)$$

non  $t = x^0$ . “Denbora atzeratua” terminoa kantitateari erreferentzia egiteko erabiltzen da

$$t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| . \quad (6.95)$$

(6.74)-ren interpretazioa argia izan behar da:  $(t, \mathbf{x})$ -ko eremu grabitatorioko perturbazioa iraganeko argi-konoan  $(t_r, \mathbf{x} - \mathbf{y})$  puntuan dauden energia eta momentu-iturrien eragin batura da.



Har dezagun soluzio orokor hau eta har dezagun erradiazio grabitatorioa materia ez-erlatibistaz osatutako iturri isolatu batek igortzen duen kasua; hurbilketa horiek zehatzagoak izango dira aurrera goazen heinean. Lehenik eta behin Fourier transformatuetaarako konbentzio batzuk ezarri behar ditugu, fenomeno oszilatarioei aurre egiteko beti bizitza errazten dutenak.  $\phi(t, \mathbf{x})$  espazio-denboraren funtzioa emanda, dugu bere Fourier-en transformazioa (eta alderantzizkoa) interesatzen zaie denborari bakarrik,

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \phi(t, \mathbf{x}) , \quad (6.96)$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) . \quad (6.97)$$



Perturbazio metrikoaren transformazioa hartuta, lortuko dugu

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \quad (6.98)$$

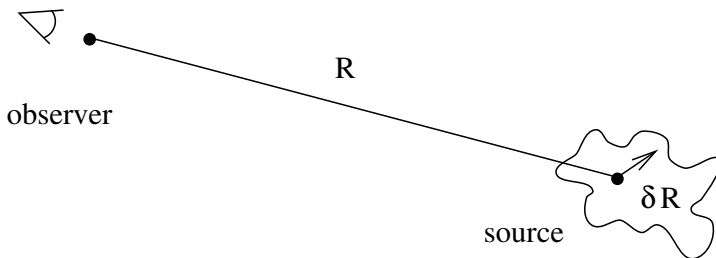
$$= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt d^3y e^{i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (6.99)$$

$$= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r d^3y e^{i\omega t_r} e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (6.100)$$

$$= 4G \int d^3y e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} . \quad (6.101)$$

Sekuentzia honetan, lehenengo ekuazioa Fourier transformazioaren definizioa besterik ez da, bigarren lerroa (6.74) soluziotik dator, hirugarren lerroa  $t$   $t_r$  aldagaien aldaketa da eta laugarren lerroa behin. berriro Fourier transformatuaren definizioa.

Orain hurbilketak egiten ditugu gure iturria isolatuta, urrun eta poliki-poliki mugitzen dela. Horrek esan nahi du iturburua  $R$  distantzia (espazialean) zentratuta dagoela kontsidera dezakegula, iturriaren zati desberdinak  $R + \delta R$  distantzietara  $\delta R$  dela. Poliki-poliki mugitzen ari denez, igorritako erradiazio gehiena  $\omega$  maiztasun nahiko baxuetan egongo da  $\delta R \omega^{-1}$  baino. (Funtsean, argiak iturriaren osagaiak berak baino askoz azkarrago zeharkatzen du iturria).



Hurbilketa hauen arabera,  $e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  terminoa  $e^{i\omega R}/R$ -rekin ordezkatu eta integraletik kanpo eraman daiteke. Horrek uzten gaitu

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega R}}{R} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}) . \quad (6.102)$$

Izan ere, ez dago  $\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$ -ren osagai guztiak kalkulatu beharrik, Fourier espazioko  $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 0$  neurgailu harmonikoaren egoerak esan nahi baitu.

$$\tilde{h}^{0\nu} = \frac{i}{\omega} \partial_i \tilde{h}^{i\nu} . \quad (6.103)$$

Beraz,  $\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$ -ren espazio-itxurako osagaiez bakarrik arduratu behar dugu. (6.78)-tik, beraz,  $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$ -ren espazio-itxurako osagaien integrala hartu nahi dugu. Alderantziz zatika integratzen hasiko gara:

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = \int \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) d^3y - \int y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}) d^3y . \quad (6.104)$$

Lehenengo terminoa gainazaleko integrala da, iturria isolatuta dagoenez desagertuko dena, eta bigarrena, berriz,  $\tilde{T}^{0j}$ -rekin erlazionatu daiteke  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  Fourier-espazioko bertsioaren bidez:

$$-\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu} . \quad (6.105)$$

Horrela,

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = i\omega \int y^i \tilde{T}^{0j} d^3y \quad (6.106)$$

$$= \frac{i\omega}{2} \int (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) d^3y \quad (6.107)$$

$$= \frac{i\omega}{2} \int [\partial_l (y^i y^j \tilde{T}^{0l}) - y^i y^j (\partial_l \tilde{T}^{0l})] d^3y \quad (6.108)$$

$$= -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j \tilde{T}^{00} d^3y . \quad (6.109)$$

Bigarren lerroa justifikatuta dago ezkerreko aldea  $i$  eta  $j$ -n simetrikoa dela dakigunez, hiruugarren eta laugarren lerroak, berriz,  $T^{\mu\nu}$  zatien eta kontserbazioaren alderantzizko integrazioaren errepikapenak besterik ez dira. Ohikoa da iturriaren energia-dentsitatearen **momentu laupoloko tentsorea** definitzea,

$$q_{ij}(t) = 3 \int y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}) d^3y , \quad (6.110)$$

tentsore konstante bat denbora konstanteko gainazal bakoitzean. Momentu koadripolarren Fourier-en transformazioari dagokionez, gure soluzioak forma trinkoa hartzen du

$$\tilde{h}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{2G\omega^2}{3} \frac{e^{i\omega R}}{R} \tilde{q}_{ij}(\omega) , \quad (6.111)$$

edo, berriro  $t$  bihurtuz,

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2G}{3R} \int d\omega e^{-i\omega(t-R)} \omega^2 \tilde{q}_{ij}(\omega) \quad (6.112)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2G}{3R} \frac{d^2}{dt^2} \int d\omega e^{-i\omega t_r} \tilde{q}_{ij}(\omega) \quad (6.113)$$

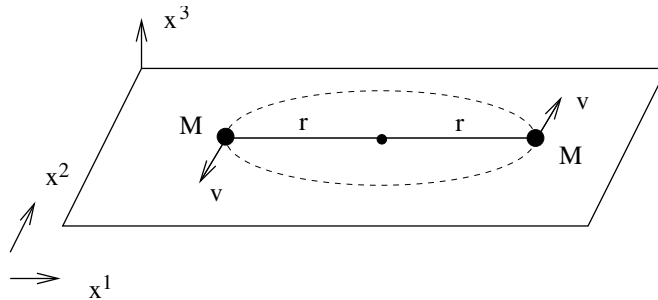
$$= \frac{2G}{3R} \frac{d^2 q_{ij}}{dt^2}(t_r) , \quad (6.114)$$

non  $t_r = t - R$  aurretik bezala.

Objektu ez-erlatibista isolatu batek sortutako grabitazio-uhina, beraz, behatzailearen iraganeko argi-konoa iturburua ebakitzen duen puntuan energia-dentsitatearen momentu koadripoloaren bigarren deribatuarekiko proportzionala da. Aitzitik, erradiazio elektromagnetikoaren ekarpen nagusia karga-dentsitatearen *dipolo* momentu aldakortik dator. Desberdintasuna grabitazioaren izaera unibertsalean aurki daiteke. Momentu dipolar aldakorren dentsitate-zentroaren higidurari dagokio — karga-dentsitatea elektromagnetismoaren kasuan, energia-dentsitatea grabitazioaren kasuan. Objektu baten karga-zentroa

oszilatzeari uzteko ezer ez dagoen arren, sistema isolatu baten masa-zentroaren oszilazioak momentuaren kontserbazioa urratzen du. (Gorputz bat gora eta behera astin dezakezu, baina zuk eta lurra apur bat astindu kontrako norabidean konpentsatzeko.) Sistemaren forma neurtzen duen momentu koadripoloa, oro har, momentu dipolarra baino txikiagoa da, eta horregatik (baita materiaren grabitatearekin akoplatze ahula ere) erradiazio grabitatorioa erradiazio elektromagnetikoa baino askoz ahulagoa da normalean.

Beti hezigarria da irtenbide orokor bat hartu eta interes-kasu zehatz bati aplikatzea. Benetako interes kasu bat izar bitar batek (bi izar bata bestearen inguruan orbitan) igortzen duen erradiazio grabitatorioa da. Sinpletasunerako, har ditzagun  $M$  masako bi izar  $x^1$ - $x^2$  planoko orbita zirkular batean, haien masa-zentro komunitik  $r$  distantziara.



Astroen higidura Newtonen hurbilketa tratatuko dugu, non haien orbita Keplerrek egingo lukeen bezala eztabaidatu ahal izateko. Orbiten zirkuluak errazen bereizten dira grabitatearen ondoriozko indarra kanpoko indar “zentrifugoarekin” berdintzean:

$$\frac{GM^2}{(2r)^2} = \frac{Mv^2}{r} , \quad (6.115)$$

ematen diguna

$$v = \left( \frac{GM}{4r} \right)^{1/2} . \quad (6.116)$$

Orbita bakarra osatzeko behar den denbora besterik ez da

$$T = \frac{2\pi r}{v} , \quad (6.117)$$

baina guretzat erabilgarriagoa da orbitaren maiztasun angeluarra,

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \left( \frac{GM}{4r^3} \right)^{1/2} . \quad (6.118)$$

$\Omega$ -ri dagokionez,  $a$  izarren bide esplizitua idatz dezakegu,

$$x_a^1 = r \cos \Omega t , \quad x_a^2 = r \sin \Omega t , \quad (6.119)$$

eta  $b$  izarra,

$$x_b^1 = -r \cos \Omega t , \quad x_b^2 = -r \sin \Omega t . \quad (6.120)$$

Dagokion energia-dentsitatea da

$$T^{00}(t, \mathbf{x}) = M\delta(x^3) [\delta(x^1 - r \cos \Omega t)\delta(x^2 - r \sin \Omega t) + \delta(x^1 + r \cos \Omega t)\delta(x^2 + r \sin \Omega t)] . \quad (6.121)$$

Delta-funtzioen ugaritasunak hau zuzenean integratzeko aukera ematen digu (6.83)-tik momentu quadrupoloa lortzeko:

$$q_{11} = 6Mr^2 \cos^2 \Omega t = 3Mr^2(1 + \cos 2\Omega t) \quad (6.122)$$

$$q_{22} = 6Mr^2 \sin^2 \Omega t = 3Mr^2(1 - \cos 2\Omega t) \quad (6.123)$$

$$q_{12} = q_{21} = 6Mr^2(\cos \Omega t)(\sin \Omega t) = 3Mr^2 \sin 2\Omega t \quad (6.124)$$

$$q_{i3} = 0 . \quad (6.125)$$

Honetatik, aldi berean, erraza da (6.85) perturbazio metrikoaren osagaiak lortzea:

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{8GM}{R} \Omega^2 r^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.126)$$

$\bar{h}_{\mu\nu}$ -ren gainerako osagaiak neurgailu harmonikoaren baldintza betetzea eskatzetik erator litezke. (Ez dugu neurri subsidiarioko baldintzarik ezarri, beraz, libre gaude oraindik).

Puntu honetan naturala da erradiazio grabitatorioaren bidez igorritako energiaz hitz egitea. Halako eztabaidak, ordea, berehala jasaten ditu arazo teknikoak zein filosofikoak. Lehen aipatu dugunez, ez dago eremu grabitatorioan energiaren benetako tokiko neurririk. Jakina, eremu-muga ahulean, non grabitazioa hondoko metrika finko batean hedatzen den tentsore simetriko batek deskribatzen duela pentsatzen dugun, espero genezake  $h_{\mu\nu}$  fluktuazioetarako energia-momentuaren tentsorea ateratzea, halaxe egingo genukeen bezala. elektromagnetismoa edo beste edozein eremu-teoria. Neurri batean hori posible da, baina oraindik zailtasunak daude. Zailtasun hauen ondorioz, literaturan hainbat proposamen ezberdin daude eremu ahulean grabitaziorako energia-momentuaren tentsore gisa erabili behar dugunari buruz; guztiak desberdinak dira, baina gehienetan erantzun berdina ematen dituzte fisikoki ondo planteatutako galderetarako, hala nola sistema bitar batek igortzen duen energia-tasa.

Maila teknikoan, energia-momentuaren tentsoreak zer forma hartu behar duen kontuan hartzen dugunean hasten dira zailtasunak sortzen. Elektromagnetismoaren eta eremu eskalarren teoriarako energia-momentuaren tentsoreak aipatu ditugu, eta biek ezaugarri garrantzitsu bat partekatzen zuten — koadratikoak ziren dagokion eremuetan. Hipotesiaren arabera eremu ahularen mugari buruzko hurbilketa perturbazio metrikoan linealak diren terminoak soilik mantentzea izan da. Horregatik, grabitazio-uhinek garraiatzen duten energiaren jarraipena egiteko, gure kalkuluak gutxienez bigarren ordenara luzatu beharko ditugu  $h_{\mu\nu}$ -n. Izan ere, denbora guztian iruzur apur bat egon gara. Grabitazio-uhinek probako partikulen gainean dituzten ondorioak eta sistema bitar baten bidez uhinen sorrerari buruz eztabaidatzean, probako partikulak geodesikoetan zehar mugitzen direla erabili dugu. Baina dakigunez, hau energia-momentuaren kontserbazio kobariantetik eratorria da,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Lan egin dugun ordenan, ordea,  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

dugu, eta horrek esan nahi du probako partikulak lerro zuzenetan mugitzen direla hondo lauko metrikari. Eredu ahulen mugaren oinarritzko inkoherentziaren sintoma da hau. Praktikan, egin daitekeen onena eremu ahulen ekuazioak ordena egoki batean ebaztea da, eta gero justifikatzea soluzioaren baliozkotasuna.

Gai hauek kontuan izanda, har ditzagun Einsteinen ekuazioak (hutsan) bigarren ordenara, eta ikus ditzagun emaitza nola interpreta daitekeen eremu grabitatoriorako energia-momentuaren tentsore baten arabera. Neurria  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  gisa idazten badugu, lehen ordenan dugu

$$G_{\mu\nu}^{(1)}[\eta + h] = 0 , \quad (6.127)$$

non  $G_{\mu\nu}^{(1)}$  Einsteinen tentsorea  $h_{\mu\nu}$ -n lehen ordenara hedatua den. Ekuazio hauek  $h_{\mu\nu}$  neurgailu-transformazio (saihestezinak) arte zehazten dituzte, beraz, ekuazioak bigarren ordenan betetzeko ordena handiagoko perturbazio bat gehitu behar dugu eta idatzi

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(2)} . \quad (6.128)$$

Einstein-en ekuazioaren bigarren ordenako bertsioak termino guztiek osatzen dute:  $h_{\mu\nu}$  koadratikoa edo  $h_{\mu\nu}^{(2)}$  lineala. Edozein termino gurutzatuak gutxienez hirugarren ordenakoak izango liratekeenez, dugu

$$G_{\mu\nu}^{(1)}[\eta + h^{(2)}] + G_{\mu\nu}^{(2)}[\eta + h] = 0 . \quad (6.129)$$

Hemen,  $G_{\mu\nu}^{(2)}$  perturbazio metrikoan bigarren mailakoa den Einstein tentsorearen zatia da. Bigarren ordenako Ricci tentsoretik kalkula daiteke, hau da

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\nu h_{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma} + \frac{1}{4} (\partial_\mu h_{\rho\sigma}) \partial_\nu h^{\rho\sigma} + (\partial^\sigma h^\rho{}_\nu) \partial_{[\sigma} h_{\rho]\mu} \quad (6.130)$$

$$+ \frac{1}{2} \partial_\sigma (h^{\rho\sigma} \partial_\rho h_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} (\partial_\rho h_{\mu\nu}) \partial^\rho h - (\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \partial^\rho h) \partial_{(\mu} h_{\nu)\rho} . \quad (6.131)$$

(6.97) forma iradokitzailean bota dezakegu

$$G_{\mu\nu}^{(1)}[\eta + h^{(2)}] = 8\pi G t_{\mu\nu} , \quad (6.132)$$

definituz besterik gabe

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)}[\eta + h] . \quad (6.133)$$

Notak, noski, iradoki nahi du  $t_{\mu\nu}$  energia-momentuaren tentsorea dela pentsatzen dugula, zehazki eremu grabitatorikoa (eremu ahuleko erregimenen behintzat). Erreklamazio hau sinesgarria izan dadin, kontuan izan  $G_{\mu\nu}^{(1)}[\eta + h^{(2)}]$ -ren Bianchi identitateak  $t_{\mu\nu}$  espazio lauaren zentzuan kontserbatzen dela esan nahi duela.

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0 . \quad (6.134)$$

Zoritarrez,  $t_{\mu\nu}$  energia-momentuaren tentsore gisa interpretatzean muga batzuk daude. Noski ez da batere tentsore bat teoria osoan, baina hori alde batera uzten ari gara hipotesiatatik. Are garrantzitsuagoa dena, ez da aldaezina gauge transformazioetan

(difeomorfismo infinitesimalak), zuzeneko kalkuluaren bidez egiaztatu dezakezun bezala. Hala ere, zenbait gauge-eraldaketa mota berezitan aldaezinak diren kantitate globalak eraiki ditzakegu (funtsean, infinituan nahikoa azkar desagertzen direnak; ikus Wald). Horien artean, denbora konstanteko  $\Sigma$  gainazaleko energia osoa dago,

$$E = \int_{\Sigma} t_{00} d^3x , \quad (6.135)$$

eta infinituraino irradiatutako energia osoa,

$$\Delta E = \int_S t_{0\mu} n^{\mu} d^2x dt . \quad (6.136)$$

Hemen, integrala  $S$  espazio-itxurako bi-esferaz osaturiko gainazal denbora-itxurako batean hartzen da, infinituan eta denbora-tarteren batean, eta  $n^{\mu}$   $S$ -ren espazio-bektore normal bat da.

Formula hauek irradiazio-iturri baten momentu laupoloaren arabera ebaluatzeak kalkulatu luze bat dakar, hemen erreproduzituko ez duguna. Gehiagorik gabe, irradiatutako energia kantitatea idatz daiteke

$$\Delta E = \int P dt , \quad (6.137)$$

non potentzia  $P$ -k ematen duen

$$P = \frac{G}{45} \left[ \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right]_{t_r} , \quad (6.138)$$

eta hemen  $Q_{ij}$  momentu koadripoloaren arrastorik gabeko zatia da,

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} q_{kl} . \quad (6.139)$$

(6.93) bidez adierazten den sistema bitarrentzat, kuadripoloaren arrastorik gabeko zatia da

$$Q_{ij} = Mr^2 \begin{pmatrix} (1 + 3 \cos 2\Omega t) & 3 \sin 2\Omega t & 0 \\ 3 \sin 2\Omega t & (1 - 3 \cos 2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \quad (6.140)$$

eta bere hirugarren denbora deribatua da, beraz

$$\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} = 24Mr^2 \Omega^3 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.141)$$

Bitarrak irradiatzen duen potentzia horrela da

$$P = \frac{2^7}{5} GM^2 r^4 \Omega^6 , \quad (6.142)$$

edo, maiztasunerako (6.89) adierazpena erabiliz,

$$P = \frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{r^5} . \quad (6.143)$$

Jakina, hori benetan ikusi da. 1974an Hulse eta Taylor-ek sistema bitar bat aurkitu zuten, PSR1913 + 16, zeinetan bi izarrak oso txikiak diren (beraz, efektu klasikoak arbuiagarriak dira, edo gutxienez kontrolpean daudenak) eta bat pulsar bat den. Orbitaren epea zortzi ordukoa da, estandar astrofisikoen arabera oso txikia. Izarretako bat pulsarra izateak erloju oso zehatza eskaintzen du, eta sistemak energia galtzen duen heinean aldiaren aldaketa neur daiteke. Eraitza koherentea da erlatibitate orokorraren iragarpenarekin grabitate-erradiazioen bidezko energia-galera. Hulse eta Taylorrek Nobel saria eman zieten 1993an egindako ahaleginagatik.

## Capítulo 7

# Schwarzschild irtenbidea eta zulo beltzak

Eremu ahulen mugaren domeinutik Einstein-en ekuazio ez-lineal osoen soluzioetara igaroko gara. Minkowskiren espazioa izan ezik, alde handiz, horrelako soluziorik garrantzitsuena Schwarzschild-ek aurkitutakoa da, huts-espazio-denbora esferikoki simetrikoak deskribatzen dituenak. Hutsean gaudenez, Einsteinen ekuazioak  $R_{\mu\nu} = 0$  bihurtzen dira. Jakina, honelako ekuazio diferentzialen multzo baten soluzio proposatzen badugu, nahikoa litzateke proposatutako soluzioa konektatzea hura egiaztatzeko; hobeto egin nahiko genuke, ordea. Izan ere, Birkhoff-en teoremaren frogatzea bat zirriborratuko dugu, Schwarzschild-en soluzioa hutsean Einsteinen ekuazioen *bakarrik* soluzio esferikoki simetrikoa dela dioena. Prozedura izango da lehenik eta behin esferikoki simetrikoko edozein metrik (Einsteinen ekuazioak ebatzen dituen ala ez) forma jakin bat hartu behar duen argudio ez-zorrotz batzuk aurkeztea, eta, ondoren, hortik lan egitea kasu horretan benetako soluzioa kontu handiz ateratzeko.

“Esferikoki simetrikoa” esan nahi du “esfera baten simetria berdina izatea.” (Atal honetan “esfera” hitzak  $S^2$  esan nahi du, ez dimentsio handiagoko esferak.) Interesgarri zaigun objektua aniztasun diferentziagarri baten metrika denez, horrelako simetriak dituzten metrika horiekin arduratzen gara. Badakigu nola ezaugarritzen diren metrikaren simetriak — Killing bektoreen existentziak ematen dira. Gainera, badakigu  $S^2$ -ren Killing bektoreak zein diren, eta hiru daudela. Hori dela eta, esferikoki simetrikoa den sorta bat da  $S^2$ -n dauden hiru Killing bektorial-eremu dituenak. “Berdin bezala” esan nahi dugu Killing bektoreen aldatzailea berdina dela kasu batean zein bestean — hizkuntza goxoago batean, bektoreek sortutako aljebra berdina dela. Erakutsi ez dugun zerbait, baina egia da,  $S^2$ -n gure hiru Killing bektoreak  $(V^{(1)}, V^{(2)}, V^{(3)})$  izan daitezen hauta ditzakegula da,

$$[V^{(1)}, V^{(2)}] = V^{(3)} \quad (7.1)$$

$$[V^{(2)}, V^{(3)}] = V^{(1)} \quad (7.2)$$

$$[V^{(3)}, V^{(1)}] = V^{(2)}. \quad (7.3)$$

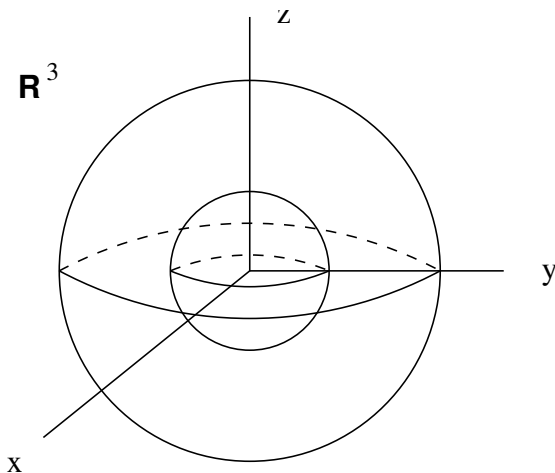
Komunikazio-erlazioak  $SO(3)$ renak dira, hiru dimentsiotako biraketaren taldea. Hau ez da



kasualitatea, noski, baina ez dugu hona hemen jarraituko. Behar duguna da esferikoki simetrikoa den anizkera bat da, goiko komunztadura-erlazioekin hiru Killing bektorial-eremu dituen.

Hirugarren atalean Frobenius-en teorema aipatu dugu, zeinak dioen eremu bektorialen multzo bat baldin badaukazu, koordinatu-funtzio multzo bat existitzen dela dio, eremu bektorialak funtzio horiei dagokienez deribatu partzialak direla. Izan ere, teorema ez da hor gelditzen, baina *ez* joan-etorria egiten duten eremu bektorial batzuk baditugu, baina konmutadorea ixten badute — multzoko bi eremuren konmutadorea konbinazio lineala da. multzoko beste eremu batzuen — gero eremu bektorial hauen kurba integralak “elkarrekin bat egiten dute”, denak definituta dauden anizkunaren azpianiztunak deskribatzeko. Azpimultiploidaren dimentsioa bektore kopurua baino txikiagoa izan daiteke, edo berdina izan daiteke, baina, jakina, ez handiagoa. (7.1) betetzen duten eremu bektorialek 2-esfera osatuko dute noski. Eremu bektorialak espazioan zehar hedatzen direnez, puntu bakoitza zehazki esfera horietako batean egongo da. (Egia esan, ia puntu guztiak dira — behean erakutsiko dugu nola huts egin dezakeen puntu guztiak erabat.) Beraz, esferikoki simetriko-multzo bat **foliatu** esferetan izan daitekeela esaten dugu.

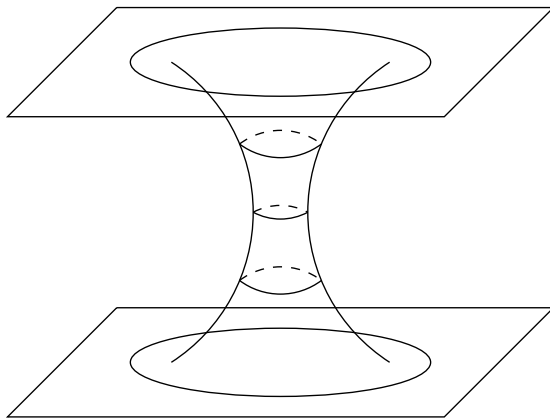
Ikus ditzagun adibide batzuk hau lurrera ekartzeko. Adibiderik errazena hiru dimentsioko espazio euklidear laua da. Jatorri bat hautatzen badugu,  $\mathbb{R}^3$  argi eta garbi esferikoki simetrikoa da jatorri honen inguruko biraketan aldean. Horrelako errotazioetan (*ie*, Killing bektore-eremuen fluxuaren azpian) puntuak elkarren artean mugitzen dira, baina puntu bakoitza  $S^2$  batean geratzen da jatorritik distantzia finko batera.



Esfera hauek dira  $\mathbb{R}^3$  foliatzen dutenak. Jakina, ez dute espazio guztia hostatzen, jatorria bera biraketan menpe geratzen baita — ez da bi esfera batean mugitzen. Baina argi izan behar da ia espazio guztia behar bezala foliatuta dagoela, eta hori nahikoa izango zaigula.

Simetria esferikoa ere izan dezakegu “jatorria” gabe gauzak inguruan biratzeko. Adibide bat “zizare-zuloa” batek ematen du,  $\mathbb{R} \times S^2$  topologia duena. Dimentsio bat kentzen badugu eta gure bi esferak zirkulu gisa marrazten baditugu, honelako espazioa izan liteke:

Kasu honetan aniztasun osoa bi esferen bidez foliatu daiteke.



Egitura hostotsu honek iradokitzen du koordenatuak jartzen ditugula gure aniztegiaren foliaziora egokitutako moduan. Honekin esan nahi dugu,  $n$  dimentsioko bariedade bat  $m$  dimentsioko azpimultzoekin foliatua badugu,  $m$  koordenatu-funtzioen  $u^i$  azpimultzoetan eta  $n - m$  koordenatu-multzo bat erabil dezakegu.  $v^I$  funtzioak zein azpimultpletan gauden esateko. (Beraz,  $i$  letik  $m$  bitartekoa da, eta  $I$  letik  $n - m$  bitartean.) Ondoren,  $v$  eta  $u$ -en bildumak espazio osoa koordinatzen du. Azpimultzoak espazio maximo simetrikoak badira (bi esferak diren bezala), orduan honako teorema indartsu hau dago: beti posible da  $u$ -koordinatuak aukeratzea, hala nola, askotariko metrika formakoa izan dadin.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{IJ}(v) dv^I dv^J + f(v) \gamma_{ij}(u) du^i du^j. \quad (7.4)$$

Hona hemen  $\gamma_{ij}(u)$  azpimultzoko metrika. Teorema honek bi gauza esaten ditu aldi berean: ez dagoela  $dv^I du^j$  gurutze-terminorik, eta  $g_{IJ}(v)$  eta  $f(v)$  biak  $v^I$ -ren funtzioak direla,  $u^i$ -tik independenteak. Teorema frogatzea nahaspila da, baina Weinberg-en 13. kapituluaren ikustera gomendatzen zaituzte. Hala ere, guztiz zentzuzkoa den emaitza da. Gutxi gorabehera,  $g_{IJ}$  edo  $f$   $u^i$ -ren menpe egongo balira, metrika aldatu egingo litzateke azpimultzo bakar batean mugitzen garen heinean, eta horrek simetriaren hipotesiak urratzen ditu. Nahi ez diren gurutze-terminoak, berriz, ezaba daitezke  $\partial/\partial v^I$  bektore ukitzaileak azpimultzoekiko ortogonalak direla ziurtatuz — hau da, gure azpimultzoak espazio osoan era berean lerrotatzen ditugula.

Orain eskuz astintzearekin amaitu dugu, eta kalkulu zintzo batzuk has ditzakegu. Eskura dugun kasurako, gure azpimultplidak bi esfera dira, eta normalean  $(\theta, \phi)$  koordenatuak aukeratzen ditugu eta horietan metrikak forma hartzen du.

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (7.5)$$

Lau dimentsioko espazio-denbora interesatzen zaigunez, beste bi koordenatu behar ditugu,  $a$  eta  $b$  deitu ditzakegunak. (7.2) teorema esferikoki simetriko espazio-denbora baten metrika forman jar daitekeela esaten ari zaigu.

$$ds^2 = g_{aa}(a, b) da^2 + g_{ab}(a, b)(dad b + dbda) + g_{bb}(a, b) db^2 + r^2(a, b) d\Omega^2. \quad (7.6)$$

Hona hemen  $r(a, b)$  oraindik zehaztu gabeko funtzio bat, zeinari etiketa iradokitzaile bat besterik ez diogu eman. Dena den, ez dago ezer eragozten  $(a, b)$ -tik  $(a, r)$ -ra koordenatuak

aldatzea,  $r(a, b)$  alderantzikatuz. (Litekeena da geldiarazi gintezkeen gauza bakarra  $r$   $a$ -ren funtzioa izango balitz bakarrik; kasu honetan, berdin-berdin alda genitzake  $(b, r)$ -ra, beraz, ez dugu egoera hau bereizita aztertuko.) Metrikoa da orduan

$$ds^2 = g_{aa}(a, r)da^2 + g_{ar}(a, r)(dadr + drda) + g_{rr}(a, r)dr^2 + r^2d\Omega^2 . \quad (7.7)$$

Gure hurrengo urratsa  $t(a, r)$  funtzio bat aurkitzea da,  $(t, r)$  koordenatu-sisteman, metrikari  $dt dr + dr dt$  gurutze-terminorik ez egotea. Kontuan izan

$$dt = \frac{\partial t}{\partial a}da + \frac{\partial t}{\partial r}dr , \quad (7.8)$$

beraz

$$dt^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 da^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)(dadr + drda) + \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 dr^2 . \quad (7.9)$$

Metrikoko lehenengo hiru terminoak (7.5) ordezkatu nahiko genituzke

$$mdt^2 + ndr^2 , \quad (7.10)$$

$m$  eta  $n$  funtzio batzuetarako. Hau eskakizunen baliokidea da

$$m\left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 = g_{aa} , \quad (7.11)$$

$$n + m\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 = g_{rr} , \quad (7.12)$$

eta

$$m\left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right) = g_{ar} . \quad (7.13)$$

Beraz,  $t(a, r)$ ,  $m(a, r)$  eta  $n(a, r)$  hiru ezezagunetarako hiru ekuazio ditugu, zehatz-mehatz zehazteko ( $t$ -ren hasierako baldintzetara arte). (Noski,  $g_{aa}$ ,  $g_{ar}$  eta  $g_{rr}$  funtzio ezezagunen arabera “zehazten dira”, beraz, zentzu honetan oraindik zehaztu gabe daude.) Beraz, gure metrika forman jar dezakegu

$$ds^2 = m(t, r)dt^2 + n(t, r)dr^2 + r^2d\Omega^2 . \quad (7.14)$$

Orain arte  $t$  eta  $r$  bi koordenatuen arteko desberdintasun bakarra  $r$  aukeratu dugula bi esferaren metrika biderkatzen duena izan dadin. Aukera hau Minkowski espazio lauaren metrikari buruz dakigunak bultzatu zuen,  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2$  idatz daitekeena. Badakigu kontuan hartzen dugun espazio-denbora lorentziarra dela, beraz,  $m$  edo  $n$  negatiboak izan beharko dira. Aukera dezagun  $m$ ,  $dt^2$ -ren koefiziente, negatiboa izateko. Hau ez da besterik gabe egin behar dugun aukera, eta, egia esan, gero ikusiko dugu gaizki atera daitekeela, baina oraingoz bere gain hartuko dugu. Suposizioa ez da guztiz zentzugabea, badakigulako Minkowskiren espazioa bera esferikoki simetrikoa dela, eta, beraz, (7.12) deskribatuko dela. Aukera honekin  $m$  eta  $n$  funtzioak  $\alpha$  eta  $\beta$  funtzio berriekin trukatu ditzakegu, hala nola

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t, r)}dt^2 + e^{2\beta(t, r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 . \quad (7.15)$$

Hau da metrika orokor baterako egin dezakegun onena espazio-denbora esferikoki simetriko batean. Hurrengo urratsa Einsteinen ekuazioak benetan ebatzea da,  $\alpha(t, r)$  eta  $\beta(t, r)$  funtzioak esplizituki zehazteko aukera emango diguna. Zoritzarrez beharrezkoa da (7.13) Christoffel sinboloak kalkulatzera, eta hortik atera dezakegu kurbadura tentsorea eta, beraz, Ricci tentsorea.  $(t, r, \theta, \phi)$ -rako  $(0, 1, 2, 3)$  etiketak ohiko moduan erabiltzen baditugu, Christoffel-en sinboloak honela ematen dira.

$$\Gamma_{00}^0 = \partial_0 \alpha \quad \Gamma_{01}^0 = \partial_1 \alpha \quad \Gamma_{11}^0 = e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta \quad (7.16)$$

$$\Gamma_{00}^1 = e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha \quad \Gamma_{01}^1 = \partial_0 \beta \quad \Gamma_{11}^1 = \partial_1 \beta \quad (7.17)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-2\beta} \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad (7.18)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} . \quad (7.19)$$

(Esplizituki idatzita ez dagoena zero izan nahi da, edo simetrien bidez idatzitakoarekin erlazionatuta dago.) Hauetatik Riemann-en tentsorearen osagai ez-desagergarri hauek lortzen ditugu:

$$R^0_{101} = e^{2(\beta-\alpha)} [\partial_0^2 \beta + (\partial_0 \beta)^2 - \partial_0 \alpha \partial_0 \beta] + [\partial_1 \alpha \partial_1 \beta - \partial_1^2 \alpha - (\partial_1 \alpha)^2] \quad (7.20)$$

$$R^0_{202} = -re^{-2\beta} \partial_1 \alpha \quad (7.21)$$

$$R^0_{303} = -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \alpha \quad (7.22)$$

$$R^0_{212} = -re^{-2\alpha} \partial_0 \beta \quad (7.23)$$

$$R^0_{313} = -re^{-2\alpha} \sin^2 \theta \partial_0 \beta \quad (7.24)$$

$$R^1_{212} = re^{-2\beta} \partial_1 \beta \quad (7.25)$$

$$R^1_{313} = re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \beta \quad (7.26)$$

$$R^2_{323} = (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta . \quad (7.27)$$

Uzkurdura ohi bezala hartuta, Ricciren tentsorea lortzen da:

$$R_{00} = [\partial_0^2 \beta + (\partial_0 \beta)^2 - \partial_0 \alpha \partial_0 \beta] + e^{2(\alpha-\beta)} [\partial_1^2 \alpha + (\partial_1 \alpha)^2 - \partial_1 \alpha \partial_1 \beta + \frac{2}{r} \partial_1 \alpha] \quad (7.28)$$

$$R_{11} = -[\partial_1^2 \alpha + (\partial_1 \alpha)^2 - \partial_1 \alpha \partial_1 \beta - \frac{2}{r} \partial_1 \beta] + e^{2(\beta-\alpha)} [\partial_0^2 \beta + (\partial_0 \beta)^2 - \partial_0 \alpha \partial_0 \beta] \quad (7.29)$$

$$R_{01} = \frac{2}{r} \partial_0 \beta \quad (7.30)$$

$$R_{22} = e^{-2\beta} [r(\partial_1 \beta - \partial_1 \alpha) - 1] + 1 \quad (7.31)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta . \quad (7.32)$$

Gure lana  $R_{\mu\nu} = 0$  ezartzea da.  $R_{01} = 0$ -tik lortzen dugu

$$\partial_0 \beta = 0 . \quad (7.33)$$

$R_{22} = 0$  denboraren deribatua hartu eta  $\partial_0 \beta = 0$  erabiltzea kontuan hartzen badugu, lortuko dugu

$$\partial_0 \partial_1 \alpha = 0 . \quad (7.34)$$

Idatz dezakegu, beraz

$$\beta = \beta(r) \quad (7.35)$$

$$\alpha = f(r) + g(t) . \quad (7.36)$$

(7.13) metrikoko lehen terminoa  $-e^{2f(r)}e^{2g(t)}dt^2$  da, beraz. Baina beti gure denbora-koordinatua birdefinitu genezake  $dt \rightarrow e^{-g(t)}dt$  ordezkatzuz; bestela esanda,  $t$   $g(t) = 0$  hautatzeko aske gaude, nondik  $\alpha(t, r) = f(r)$ . Badugu, beraz

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 . \quad (7.37)$$

Osagai metriko guztiak  $t$  koordinatutik independenteak dira. Horrenbestez, emaitza erabakigarria frogatu dugu: *Esferikoki simetrikoko huts-metriko orok denboraren antzeko Killing bektore bat dauka.*

Propietate honek hain da interesgarria non bere izena hartzen duela: Killing bektore denboraren antzeko bat duen metrika **geldirik** deritzo. Propietate murriztaileago bat ere badago: metrika bat **estatikoa** deitzen zaio baldin eta hiperazalen familia baten ortogonal den Killing bektore denporala badu. ( $n$  dimentsioko aldagai bateko hiperazalera bat ( $n - 1$ ) dimentsioko azpimultzo bat da.) Metrika (7.20) geldikoa ez ezik, estatikoa ere bada;  $\partial_0$  Killing bektore-eremua  $t = \text{const}$  gainazalekiko ortogonal da (ez baitago  $dt dr$  eta abar bezalako gurutze-terminorik). Gutxi gorabehera, metrika estatikoa ezer mugitzen ez den bat da, metrika geldiak, berriz, gauzak mugitzea ahalbidetzen du, baina modu simetrikotan soilik. Esaterako, metrika esferikoki simetrikoko estatikoak (7.20) birakariak ez diren izarrek edo zulo beltzak deskribatuko ditu, eta sistema birakariak (uneoro biratzen jarraitzen dutenak) metrika geldoen bidez deskribatuko dira. Zaila da zein hitz eta zein kontzepturekin bat datorren gogoratzea, baina bi kontzeptuen arteko bereizketa ulergarria izan behar da.

Jarraian dezagun irtenbidea bilatzen.  $R_{00}$  eta  $R_{11}$  biak desagertzen direnez, idatz dezakegu

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)}R_{00} + R_{11} = \frac{2}{r}(\partial_1\alpha + \partial_1\beta) , \quad (7.38)$$

horrek  $\alpha = -\beta + \text{constant}$  dakar. Berriro ere, konstantea ken dezakegu gure koordinatuak eskalatuz, beraz

$$\alpha = -\beta . \quad (7.39)$$

Jarraian, joan gaitezen  $R_{22} = 0$ -ra, orain irakurtzen duena

$$e^{2\alpha}(2r\partial_1\alpha + 1) = 1 . \quad (7.40)$$

Hau guztiz baliokidea da

$$\partial_1(re^{2\alpha}) = 1 . \quad (7.41)$$

Hau ebatzi dezakegu lortzeko

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{\mu}{r} , \quad (7.42)$$

non  $\mu$  zehaztu gabeko konstante bat den. (7.22) eta (7.25) gure metrika bihurtzen da

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\mu}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 . \quad (7.43)$$

Orain ez zaigu askatasunik geratzen  $\mu$  konstante bakarra izan ezik, beraz, forma honek hobeto ebazten ditu gainerako  $R_{00} = 0$  eta  $R_{11} = 0$  ekuazioak; erraza da egiaztatzea  $\mu$ -ren edozein baliotarako.

Egin beharreko gauza bakarra  $\mu$  konstantea parametro fisikoren baten arabera interpretatzea da. Hutseko soluzio esferikoki simetriko baten erabilerarik garrantzitsuena izar edo planetatik kanpo dagoen espazio-denbora irudikatzea da. Kasu horretan eremu-muga ahula  $r \rightarrow \infty$  gisa berreskuratzea espero dugu. Muga honetan, (7.26) dakar

$$g_{00}(r \rightarrow \infty) = -\left(1 + \frac{\mu}{r}\right), \quad (7.44)$$

$$g_{rr}(r \rightarrow \infty) = \left(1 - \frac{\mu}{r}\right). \quad (7.45)$$

Eremu muga ahulak, berriz, badu

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi), \quad (7.46)$$

$$g_{rr} = (1 - 2\Phi), \quad (7.47)$$

$\Phi = -GM/r$  potentzialarekin. Beraz, neurketak bat datoz muga honetan,  $\mu = -2GM$  ezartzen badugu.

Gure azken emaitza **Schwarzschild metric** ospetsua da,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.48)$$

Hau egia da Einsteinen ekuazioen huts-soluzio esferikoki simetrikorako;  $M$  parametro gisa funtzionatzen du, dakiguna grabitazio-iturritik distantzia handietan orbitak aztertuz neurtuko genukeen newtoniako masa konbentzionala bezala interpreta daitekeela. Kontuan izan  $M \rightarrow 0$  gisa Minkowski espazioa berreskuratzen dugula, eta hori espero da. Kontuan izan, gainera, metrika pixkanaka Minkowskian bihurtzen dela  $r \rightarrow \infty$ -ra goazen heinean; propietate hau **lautasun asintotikoa** izenez ezagutzen da.

**Birkhoff-en teorema** izenez ezagutzen da Schwarzschild-en metrika soluzio ona ez ezik, huts-soluzio esferikoki simetriko bakarra dela. Interesgarria da emaitza metrika estatiko bat dela. Ez dugu ezer esan iturriari buruz, esferikoki simetrikoa izan ezik. Zehazki, ez genuen iturburua bera estatikoa izatea exijitu; erortzen den izar bat izan liteke, betiere kolapsuak simetrikoak badira. Beraz, supernoben leherketa bezalako prozesu batek, funtsean esferikoa dena, erradiazio grabitatorio gutxi sortzea espero litzateke (beste kanaletatik askatzen den energia kantitatearen aldean). Hau elektromagnetismoan lortuko genukeen emaitza bera da, non karga-banaketa esferiko baten inguruko eremu elektromagnetikoak ez diren kargen banaketa erradialaren menpe.

Proba partikulen portaera Schwarzschild-en geometrian aztertu aurretik, singularitasunei buruz zerbait esan beharko genuke. (7.29)-ren formatik, koefiziente metrikoak infinitu bihurtzen dira  $r = 0$  eta  $r = 2GM$ -n — zerbait gaizki doala dirudien seinale. Koefiziente metrikoak, noski, koordenatuen menpeko kantitateak dira, eta, beraz, ez ditugu haien balioak gehiegi egin behar; Zalantzarik gabe, posible da “koordinatu berezitasuna” izatea, azpiko anizkunaren ordezkari koordinatu-sistema zehatz baten apurketaren ondoriozkoa. Adibide bat planoko koordinatu polarren jatorrian gertatzen da, non

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$  metrika endekatu egiten den eta alderantzizko metrikaren  $g^{\theta\theta} = r^{-2}$  osagaia lehertzen den, nahiz eta askotariko puntu hori ez den beste edozeinengandik ezberdina izan.

Zer nolako koordenatu-independente den seinale bilatu beharko genuke geometriari buruzko zerbait kontroletik kanpo dagoelako abisu gisa? Erantzuteko galdera zaila da hau, eta liburu osoak idatzi dira erlatibitate orokorrean singularitasunen izaerari buruz. Ez dugu gai honetan zehatz-mehatz sartuko, baizik eta zerbait gaizki joan denean irizpide soil batera joko dugu — kurbadura infinitua denean. Kurbadura Riemann-en tentsoreak neurtzen du, eta zaila da esatea noiz bihurtzen den infinitua, bere osagaiak koordenatuen menpekoak baitira. Baina kurbaduratik hainbat kantitate eskalar eraiki ditzakegu, eta eskalarrak koordenatuetatik independenteak direnez esanguratsua izango da infinitu bihurtzen direla esatea. Horrelako eskalar sinpleena Ricci eskalarra  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  da, baina maila altuagoko eskalarrak ere eraiki ditzakegu, hala nola  $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ,  $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ,  $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho\sigma\lambda\tau} R_{\lambda\tau}{}^{\mu\nu}$  eta abar. Eskalar hauetakoren bat (ez derrigorrez denak) puntu batera hurbildu ahala infinitura joaten bada, puntu hori kurbaduraren berezitasun gisa hartuko dugu. Egiaztatu beharko genuke, gainera, puntua ez dagoela “infinitamente urrun”; hau da, kurba batean zehar distantzia finitu bat eginez irits daitekeela.

Baldintza nahikoa dugu, beraz, puntu bat berezitasuntzat hartzeko. Ez da beharrezko baldintza, ordea, eta orokorrean zailagoa da puntu jakin bat singularrekoa ez dela erakustea; gure helburuetarako geodesiak ondo portatzen diren ala ez aztertzeko proba besterik ez dugu eginen dagoen puntuan, eta hala bada, puntua ez-singularizat hartuko dugu. Schwarzschild metrikaren kasuan (7.29), zuzeneko kalkuluak hori agerian uzten du

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12G^2 M^2}{r^6} . \quad (7.49)$$

Hau nahikoa da  $r = 0$ -k berezitasun zintzoa adierazten duela sinestarazteko. Beste arazo-puntuan,  $r = 2GM$ , egiaztatu eta ikus dezakezu kurbadura aldaezinetako bat ere ez dela lehertzen. Beraz, benetan ez dela singularra pentsatzen hasten gara, eta besterik gabe koordenatu-sistema txarra aukeratu dugu. Ahal izanez gero, koordenatu egokiagoak bihurtzea da onena. Laster ikusiko dugu kasu honetan posible dela, eta  $r = 2GM$  gainazala oso ondo portatzen dela (interesgarria bada ere) Schwarzschild-en metrikari.

Singularitasunekin apur bat kezkatuta egonda, adierazi behar dugu Schwarzschild-en  $r \leq 2GM$ -n izandako jokaerak eguneroko ondorio gutxi duela. Eratorri dugun soluzioak hutsean baino ez du balio, eta izarra bezalako gorputz esferiko batetik kanpo edukiko duela espero dugu. Hala ere, Eguzkiaren kasuan erradio batera hedatzen den gorputz baten aurrean gaude

$$R_{\odot} = 10^6 GM_{\odot} . \quad (7.50)$$

Beraz,  $r = 2GM_{\odot}$  eguzki-barnealdetik urrun dago, eta ez dugu espero Schwarzschild-en metrikak esan nahi duenik. Izan ere, izar barruko soluzio errealistak formakoak dira

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (7.51)$$

Ikus Schutz xehetasunetarako. Hemen  $m(r)$   $r$ -ren funtzio bat da,  $r$  bera baino azkarago doan zerora, beraz, ez dago inolako berezitasunik tratatzeko. Hala ere, badira

Schwarzschild-en metrika osoa behar duten objektuak — zulo beltzak — eta, beraz, gure irudimena eguzki-sistematik urrun ibiltzen utziko dugu atal honetan.

Metrika hau hobeto ulertzeko emango dugun lehen urratsa geodesikaren portaera kontuan hartzea da. Schwarzschildentzako Christoffel sinboloak behar ditugu:

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{GM}{r^3}(r - 2GM) \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{-GM}{r(r - 2GM)} \quad \Gamma_{01}^0 = \frac{GM}{r(r - 2GM)} \quad (7.52)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{22}^1 = -(r - 2GM) \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad (7.53)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -(r - 2GM) \sin^2 \theta \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} . \quad (7.54)$$

Ekuazio geodesikoa, beraz, lau ekuazio hauetan bihurtzen da, non  $\lambda$  parametro afina den:

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r(r - 2GM)} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0 , \quad (7.55)$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^3}(r - 2GM) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{GM}{r(r - 2GM)} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \quad (7.56)$$

$$- (r - 2GM) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] = 0 , \quad (7.57)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0 , \quad (7.58)$$

eta

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0 . \quad (7.59)$$

Ez dirudi itxaropen handirik dagoenik ekuazio akoplatuen multzo hau ikuskapen bidez ebazteko. Zorionez, gure zeregina asko errazten da Schwarzschild-en metrikaren simetria maila altuagatik. Badakigu lau Killing bektore daudela: hiru simetria esferikorako, eta bat denbora-translazioetarako. Horietako bakoitzak higiduraren konstante batera eramango du partikula aske baterako;  $K^\mu$  Killing bektore bat bada, badakigu

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{constant} . \quad (7.60)$$

Horrez gain, bada geodesiketarako beti daukagun higiduraren beste konstante bat; bateragarritasun metrikoak bidearen zehar kantitatea dela esan nahi du

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (7.61)$$

konstantea da. Jakina, partikula masibo baterako  $\lambda = \tau$  aukeratzen dugu normalean, eta erlazio hori  $\epsilon = -g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = +1$  bihurtzen da. Masarik gabeko partikula baterako beti dugu  $\epsilon = 0$ . Espazio antzeko geodesiak ere arduratuko gara (nahiz eta partikulen bideekin bat ez datozenak), horretarako  $\epsilon = -1$  aukeratuko dugu.



Killing bektoreekin lotutako lau kantitate kontserbatuen adierazpen esplizituak behar behar idatzi beharrean, pentsa dezagun zer esaten diguten. Kontuan izan irudikatzen dituzten simetriak espazio-denbora lauan ere badirela, non eramaten dituzten kantitate kontserbatuak oso ezagunak diren. Denbora-translazioen araberrako aldaezintasunak energiaren kontserbazioa dakar, eta errotazio espazialen aldaezintasunak momentu angeluarren hiru osagaien kontserbazioa dakar. Funtsean, gauza bera gertatzen da Schwarzschild-en metrikarekin. Momentu angeluarra hiru bektore gisa pentsa dezakegu magnitudea (osagai bat) eta norabidea (bi osagai). Momentu angelurraren noranzkoaren kontserbazioak esan nahi du partikula plano batean mugituko dela. Hau aukeratu dezakegu gure koordenatu-sistemaren plano ekuatoriala izateko; partikula plano honek ez badago, koordenatuak biratu ditzakegu egon arte. Beraz, momentu angelurraren noranzkoaren kontserbazioa dakarten bi Killing bektoreek adierazten dute

$$\theta = \frac{\pi}{2} . \quad (7.62)$$

Killing gainerako bi bektoreak energiari eta momentu angeluarren magnitudeari dagozkio. Energia  $K = \partial_t$  Killing bektore denboraren antzekotik sortzen da, edo

$$K_\mu = \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right), 0, 0, 0 \right) . \quad (7.63)$$

Momentu angelurraren magnitudea duen kantitate kontserbatua  $L = \partial_\phi$  da, edo

$$L_\mu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2 \theta) . \quad (7.64)$$

(7.40) gure intereseko geodesikoetan  $\sin \theta = 1$  dela adierazten duenez, bi kantitate kontserbatuak dira

$$\left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E , \quad (7.65)$$

eta

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L . \quad (7.66)$$

Masarik gabeko partikulen kasuan, hauek energia eta momentu angeluarra bezala har daitezke; partikula masiboentzat partikularen masa unitateko energia eta momentu angeluarra dira. Kontuan izan (7.44)-ren konstantzia Keplerren bigarren legearen GR baliokidea dela (eremu berdinak denbora berdinetan ekortzen dira).

Kontserbatutako kantitate hauek elkarrekin Schwarzschild-en geometrian partikulen orbitak ulertzeko modu erosoak eskaintzen dute. Zabal dezagun (7.39) adierazpena  $\epsilon$  lortzeko

$$- \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = -\epsilon . \quad (7.67)$$

Hau  $(1 - 2GM/r)$ z biderkatzen badugu eta  $E$  eta  $L$ -rako gure esamoldeak erabiltzen baditugu, lortuko dugu

$$-E^2 + \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + \epsilon \right) = 0 . \quad (7.68)$$

Hau aurrerapena da, zalantzarik gabe, ekuazio akoplatuen sistema nahasia hartu eta  $r(\lambda)$ -rako ekuazio bakarra lortu dugulako. Are politagoa dirudi berriro idazten badugu

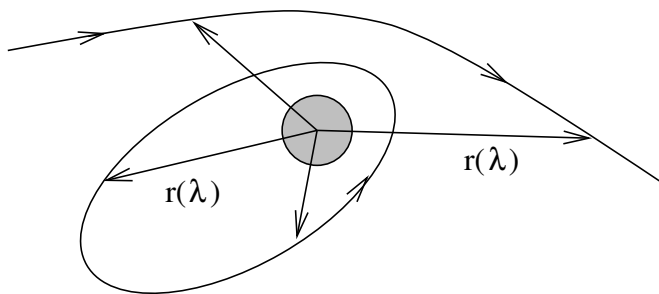
$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} E^2, \quad (7.69)$$

non

$$V(r) = \frac{1}{2} \epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}. \quad (7.70)$$

(7.47)  $V(r)$ -k emandako dimentsio bakarreko potentzial batean higitzen den masa unitarioko eta “energia”  $\frac{1}{2} E^2$  partikula klasiko baten ekuazioa dugu hain zuzen. (Masa unitateko benetako energia  $E$  da, baina  $r$  koordenatuaren potentzial eraginkorrak  $\frac{1}{2} E^2$ -ri erantzuten dio.)

Jakina, gure egoera fisikoa nahiko ezberdina da dimentsio batean mugitzen den partikula klasiko baten aldean. Kontuan hartzen diren ibilbideak izar baten edo beste objektu baten inguruko orbitak dira:



Gure intereseko kantitateak  $r(\lambda)$  ez ezik,  $t(\lambda)$  eta  $\phi(\lambda)$  ere badira. Hala ere, orbita guztiak ulertzeko bide luzea egin dezakegu haien portaera erradiala ulertuz, eta portaera hori konpontzen dakigun arazo batera murriztea lagungarria da.

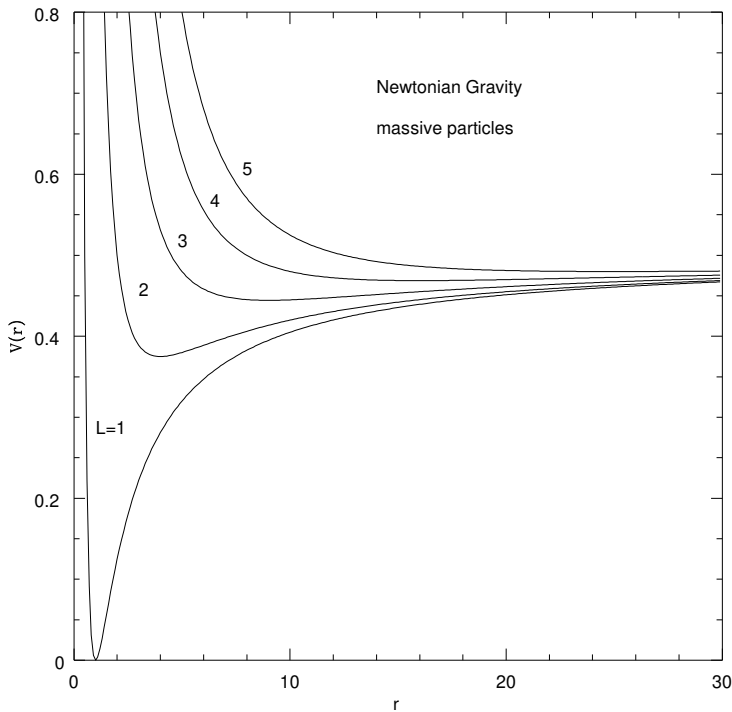
Grabitate newtondarreko orbiten antzeko azterketa batek antzeko emaitza emango zuen; (7.47) ekuazio orokorra berdina izango zen, baina potentzial eraginkorrak (7.48) ez zuen azken terminoa izango. (Kontuan izan ekuazio hau ez dela potentzia-serie bat  $1/r$ , zehatza da.) Potentzialean (7.48) lehen terminoa konstante bat besterik ez da, bigarren terminoa Newtoniako potentzial grabitatorioari dagokio zehazki, eta hirugarren terminoa grabitate newtondarrean eta erlatibitate orokorrean forma bera hartzen duen momentu angeluarren ekarpena da. Azken terminoak, GR ekarpenak, alde handia izango du, batez ere  $r$  txikian.

Azter ditzagun orbita posibleak, irudietan azaltzen den bezala.  $V(r)$  kurba desberdinak daude  $L$ -ren balio desberdinetarako; Kurba horietako edozein entzat, orbitaren portaera epai daiteke  $\frac{1}{2} E^2$  eta  $V(r)$  alderatuz. Partikularen portaera orokorra potentzialean mugitzea izango da  $V(r) = \frac{1}{2} E^2$  “inflexio puntura” iritsi arte, non beste noranzkoan higitzen hasiko den. Batzuetan, baliteke jotzeko inflexio punturik ez egotea, kasu horretan partikulak aurrera jarraitzen du. Beste kasu batzuetan, partikula  $r_c = \text{const}$  erradioan orbita zirkular batean mugi daiteke; hau gerta daiteke potentziala laua bada,  $dV/dr = 0$ .

(7.48) desberdinduz, orbita zirkularrak gertatzen direnean aurkituko dugu

$$\epsilon GM r_c^2 - L^2 r_c + 3GML^2 \gamma = 0 , \quad (7.71)$$

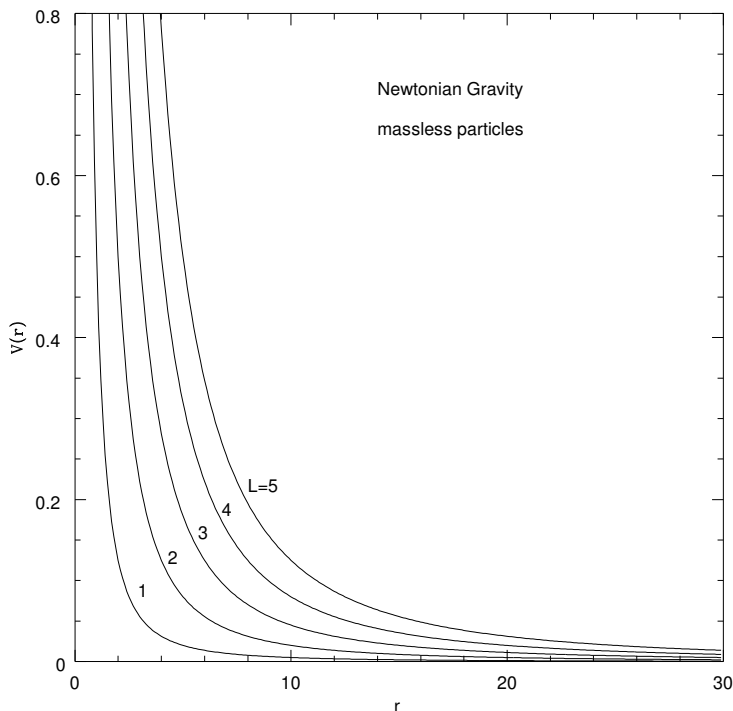
non  $\gamma = 0$  grabitate newtondarrean eta  $\gamma = 1$  erlatibitate orokorrean. Orbitak egonkorak izango dira potentzialaren minimo bati dagozkionak, eta ezegonkorak maximo bati dagozkionak. Zirkularrak ez diren orbita lotuek orbita zirkular egonkorren erradioaren inguruan oszilatuko dute.



Grabitate newtondarrari helduz, orbita zirkularrak agertzen dira

$$r_c = \frac{L^2}{\epsilon GM} . \quad (7.72)$$

$\epsilon = 0$  masarik gabeko partikulen kasuan, eta ez dago orbita zirkularrik; hau koherentea da irudiarekin, eta horrek erakusten du ez dagoela inolako orbita loturik. Koordenatu-sistema honetan zertxobait ilunduta dagoen arren, masarik gabeko partikulak benetan lerro zuzen batean mugitzen dira, masarik gabeko partikula baten gaineko grabitazio-indar newtoniarra nulua baita. (Noski, Newtonen teorian masarik gabeko partikulen posizioa arazo samarra da, baina oraingoz alde batera utziko dugu.) Potentzial eraginkorrari dagokionez,  $E$  energia jakin bat duen fotoi bat  $r = \infty$  tik sartuko da eta pixkanaka “moteldu” egingo da (egia esan,  $dr/d\lambda$  txikiagotuko da, baina argiaren abiadura ez da aldatzen) arte. inflexio puntura iristen da, eta orduan hasiko da urruntzen  $r = \infty$ -ra.  $L$ -ren balio baxuak, eta horretarako fotoia hurbilduko da urruntzen hasi baino lehen, hasieran gorputz grabitatoriora hurbiltzen diren ibilbideak besterik ez dira. Partikula

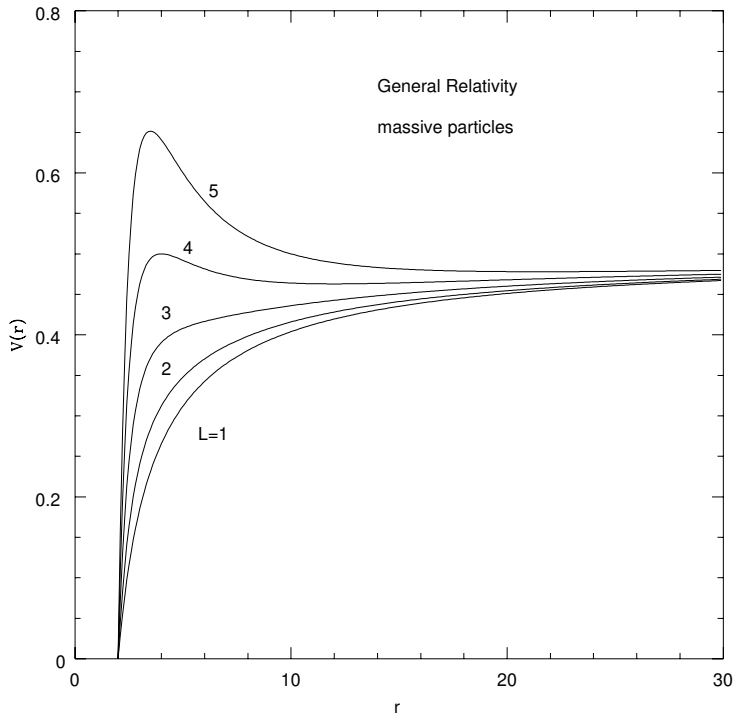


masiboentzat orbita zirkular egonkorak egongo dira erradioan  $(7,50)$ , baita erradio horren inguruan oszilatzen duten orbita lotuak ere. Energia  $E = 1$  balio asintotikoa baino handiagoa bada, orbitak lotu gabe geratuko dira, izarra hurbildu eta gero atzera egiten duen partikula bat deskribatuz. Badakigu Newtonen teoriako orbitak sekzio konikoak direla — orbita lotuak zirkuluak edo elipseak dira, eta lotu gabekoak, berriz, parabolak edo hiperbolak — hemen hori erakutsiko ez dugun arren.

Erlatibitate orokorrean egoera ezberdina da, baina  $r$  nahikoa txikia da. Desberdintasuna  $-GML^2/r^3$  terminoan dagoenez,  $r \rightarrow \infty$  gisa jokabideak berdinak dira bi teoretan. Baina  $r \rightarrow 0$  gisa potentziala  $-\infty$ -ra doa  $+\infty$ -ra, Newtonen kasuan bezala.  $r = 2GM$ -n potentziala beti nulua da; erradio horren barruan zulo beltza dago, geroago sakonago aztertuko duguna. Masarik gabeko partikulen kasuan beti dago hesi bat ( $L = 0$  izan ezik, potentziala berdin-berdin desagertzen baita), baina nahikoa energia-fotoi bat hesiaren gainetik pasako da eta ezinbestean arrastaka eramango du erdigunera. (Kontuan izan “nahikoa energetikoa” esan nahi duela “bere momentu angeluarrarekin alderatuta” — hain zuzen ere, fotoiaren maiztasuna ez da garrantzizkoa, adierazten duen norabidea bakarrik.) Hesiaren goialdean orbita zirkular ezegonkorak daude.  $\epsilon = 0$ ,  $\gamma = 1$ -rako, erraz ebatzi dezakegu (7.49) lortzeko

$$r_c = 3GM . \quad (7.73)$$

Irudiak egiaztatzen du,  $V(r)$  gehienez  $r = 3GM/L$  bakoitzeko erakusten duena. Horrek esan nahi du fotoi batek betirako zirkulu batean orbitatu dezakeela erradio horretan, baina edozein perturbazioek  $r = 0$  edo  $r = \infty$  aldera hegan egingo du.



Partikula masiboentzat berriz ere erregimen desberdinak daude momentu angelurra-  
ren arabera. Orbita zirkularrak etan daude

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM} . \quad (7.74)$$

$L$  handietarako bi orbita zirkular egongo dira, bat egonkorra eta bestea ezegonkorra.  
 $L \rightarrow \infty$  muga haien erradioak honela ematen dira

$$r_c = \frac{L^2 \pm L^2(1 - 6G^2M^2/L^2)}{2GM} = \left( \frac{L^2}{GM}, 3GM \right) . \quad (7.75)$$

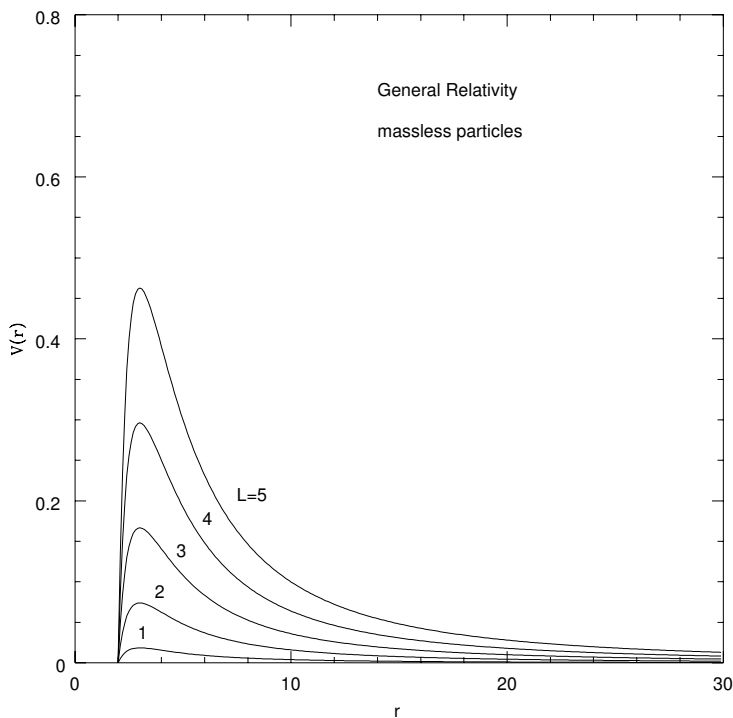
Muga honetan orbita zirkular egonkorra gero eta urrunago bihurtzen da, ezegonkorra  
 $3GM$ ra hurbiltzen den bitartean, masarik gabeko kasuaren paralelo den portaera.  $L$   
txikiagotu ahala bi orbita zirkularrak elkarrengana hurbiltzen dira; bat datoz (7.52)-ko  
diskriminatzailea desagertzen denean, at

$$L = \sqrt{12GM} , \quad (7.76)$$

zeinentzat

$$r_c = 6GM , \quad (7.77)$$

eta guztiz desagertu  $L$  txikiagorako. Beraz,  $6GM$  Schwarzschild-en metrikan orbita zir-  
kular egonkor baten erradio ahalik eta txikiena da. Lotu gabeko orbitak ere badaude, in-  
finitutik sartu eta buelta ematen dutenak, eta lotuak baina zirkuluak ez direnak, erradio

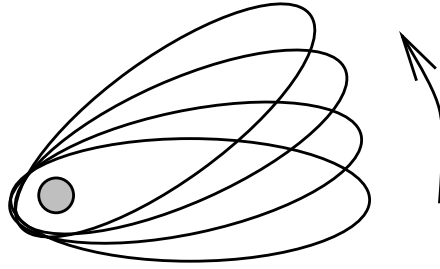


zirkular egonkorren inguruan oszilatzen dutenak. Kontuan izan grabitate newtondarrean sekzio koniko zehatzak deskribatuko lituzkeen orbita horiek ez dutela GR-n egingo, nahiz eta  $d\phi/dt$ -ren ekuazioa ebatzi beharko genukeen frogatzeko. Azkenik, infinitutik datozen eta  $r = 0$ -ra arte jarraitzen duten orbitak daude; hau gerta daiteke energia hesia baino handiagoa bada, edo  $L < \sqrt{12}GM$ -n, hesia guztiz desagertzen denean.

Beraz, aurkitu dugu Schwarzschild-en soluzioak  $r > 6GM$ -rako orbita zirkular egonkorak dituela eta  $3GM < r < 6GM$ -rako orbita ezegonkorak dituela. Garrantzitsua da gogoratzea hauek geodesikoak baino ez direla; ez dago ezerk azeleratutako partikula bat  $r = 3GM$  azpian murgiltzea eta azaleratzea eragozteko, betiere  $r = 2GM$ -tik haratago geratzen den bitartean.

Erlatibitate orokorreko proba esperimental gehienek eguzki-sistemako saiakuntza-partikulen mugimendua dakar eta, hortaz, Schwarzschild-en metrikaren geodesiak; leku ona da, beraz, proba hauek pausatzeko eta kontuan hartzeko. Einsteinek hiru proba iradoki zituen: argiaren desbideratzea, periheliaren prezesioa eta grabitazio-gorrira. Argiaren desbideratzea eremu ahuleko muga ikusten da, eta, beraz, ez da Schwarzschild geometriaren forma zehatzaren proba ona. Desbideratze horren behaketak Eguzkiaren eklipseetan egin dira, GR iragarpenarekin bat datozen emaitzekin (nahiz eta ez den esperimentu bereziki garbia). Periheliaren prezesioak orbita ez-zirkularrak elipse itxiak ez direla islatzen du; hurbilketa onean, lore-eredu bat deskribatzen duten elipseak dira.

Gure ekuazio geodesikoak erabiliz,  $d\phi/d\lambda$  potentzia-serie gisa ebatzi genezake orbitaren  $e$  eszentrikotasunean, eta hortik  $\omega_a$  maiztasun absidala lor genezake,  $2\pi$  gisa



definituta dagoena lortzeko denborarekin zatituta. elipsea behin baino gehiagotan aurrezteko. Xehetasunetarako Weinberg-en begiratu dezakezu; erantzuna da

$$\omega_a = \frac{3(GM)^{3/2}}{c^2(1-e^2)r^{5/2}} \quad (7.78)$$

bertan  $c$  berreskuratu dugu behaketarekin alderatzea errazteko. (Ariketa ona da hori zeure burua desagertzen ez den ordena baxuenera eramatea, kasu horretan  $e^2$  falta da.) Historikoki Merkurioren prezesioa GRren lehen proba izan zen. Merkuriorentzat zenbaki garrantzitsuak dira

$$\frac{GM_\odot}{c^2} = 1,48 \times 10^5 \text{ cm} \quad (7.79)$$

$$a = 5,55 \times 10^{12} \text{ cm} \quad (7.80)$$

eta noski  $c = 3,00 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ . Honek  $\omega_a = 2,35 \times 10^{-14} \text{ segundo}^{-1}$  ematen du. Beste era batera esanda, Merkurioren orbitaren ardatz nagusiak 42,9 arku-seg-ko abiaduran irauten du 100 urtean behin. Behatutako balioa 5601 arkuseg/100 urte da. Hala ere, horren zati handi bat gure koordenatu sistema geozentrikoko ekinozioen prezesioari zor zaio; 5025 arku segundo/100 urte, zehazki. Beste planeten grabitazio-perturbazioek 532 arkusegu/100 urte gehigarri bat eragiten dute, eta GR-k 43 arkusegu/100 urte baino gehiago ematen ditu, nahiko ondo egiten duena.

Gorriantantz lerratze grabitatorioa, ikusi dugunez, eremu-muga ahulean dagoen beste efektu bat da, eta, hain zuzen ere, Baliokidetasun Printzipioari men egiten dion grabitate-teoriak iragarriko du. Hala ere, hau espazio-denborako eskualde aski txikiei bakarrik aplikatzen zaie; distantzia handiagoetan, gorrira lerratze kopuru zehatza metrikaren arabera izango da, eta, beraz, auzitan dagoen teoriaren arabera izango da. Beraz, merezi du Schwarzschild-en geometrian gorri-lehiaketa kalkulatzeko. Geodesikoetan mugitzen ez diren bi behatzaile kontuan hartzen ditugu, baina  $(r_1, \theta_1, \phi_1)$  eta  $(r_2, \theta_2, \phi_2)$  koordenatu espazialen balio finkoetan itsatsita daudenak. (7.45) arabera,  $i$  behatzailearen denbora egokia  $t$  koordenatu-denborarekin erlazionatuta egongo da.

$$\frac{d\tau_i}{dt} = \left(1 - \frac{2GM}{r_i}\right)^{1/2} \quad (7.81)$$

Demagun  $\mathcal{O}_1$  behatzaileak  $\mathcal{O}_2$  behatzailera bidaiatzen duen argi-pultsu bat igortzen duela, horrela  $\mathcal{O}_1$ -k argi-uhinaren ondoz ondoko bi gandoren arteko denbora  $\Delta\tau_1$  izateko

neurtzen duela. Gandor bakoitzak bide beretik jarraitzen du  $\mathcal{O}_2$  aldera, koordenatu-denbora batez bereizita daudela izan ezik

$$\Delta t = \left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right)^{-1/2} \Delta \tau_1 . \quad (7.82)$$

Koordenatu-denboran bereizketa hori ez da aldatzen fotoien ibilbideetan zehar, baina bigarren behatzaileak segidako gandorraren arteko denbora bat neurtzen du.

$$\Delta \tau_2 = \left(1 - \frac{2GM}{r_2}\right)^{1/2} \Delta t \quad (7.83)$$

$$= \left(\frac{1 - 2GM/r_2}{1 - 2GM/r_1}\right)^{1/2} \Delta \tau_1 . \quad (7.84)$$

$\Delta \tau_i$  tarte hauek uhin elektromagnetiko baten bi gandoren arteko denbora egokia neurtzen dutenez, behatutako maiztasunak erlazionatuko dira.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\Delta \tau_1}{\Delta \tau_2} \quad (7.85)$$

$$= \left(\frac{1 - 2GM/r_1}{1 - 2GM/r_2}\right)^{1/2} . \quad (7.86)$$

Hau maiztasun-aldaketaren emaitza zehatza da; dugun  $r \sim 2GM$  mugan

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \frac{GM}{r_1} + \frac{GM}{r_2} \quad (7.87)$$

$$= 1 + \Phi_1 - \Phi_2 . \quad (7.88)$$

Honek adierazten digu maiztasuna jaisten dela  $\Phi$  handitzen den heinean, eta hori grabitazio-eremutik ateratzen garenean gertatzen da; horrela, gorrira lerratze bat. Gure aurreko kalkuluarekin bat datorrela egiaztatu dezakezu baliokidetasun-printzipioan oinarrituta.

Einsteinek hiru proba klasikoak proposatu zituenetik, GRaren proba gehiago proposatu dira. Ospetsuena, noski, aurreko atalean aztertutako pulsar bitarra da. Beste bat Shapirok aurkitutako (eta behatutako) denbora-atzerapen grabitatorioa da. Hau da, bi gertaeren arteko bi ibilbide ezberdinetan igarotako denborak ez duela zertan berdina izan. Artizarraren eta Marteren radarraren seinaleak islatuz neurtu da, eta berriro ere bat dator GR iragarpenarekin. Oraindik ikusi ez den efektu bat Lente-Thirring edo fotograma arrastatzearen efektua da. Epe luzerako ahalegina egin da proposatutako satelite bati, Gravity Probe B deiturikoa, zeinaren prezesioa neurtu eta GR-ren ekarpena konpondu ahal izango lukeen giroskopio oso zehatzak izango lituzkeena. Bide bat dauka martxan jarri aurretik, ordea, eta horrelako proiektuen biziraupena beti izaten da urtez urte.

Gaur egun badakigu zerbait geodesikaren portaeraz  $r = 2GM$  erradio arazotsutik kanpo, hau da, eguzki-sistamarako eta beste egoera astrofisiko gehienentzat interesgarri den erregimena. Schwarzschild-en soluzioak  $2GM$  baino erradio txikiagoetan ere deskribatzen dituen objektuen azterketara joko dugu — zulo beltzak. (Momentuz “zulo beltza” terminoa erabiliko dugu, nahiz eta horrelako objektu bati esanahi zehatzik sartu ez.)



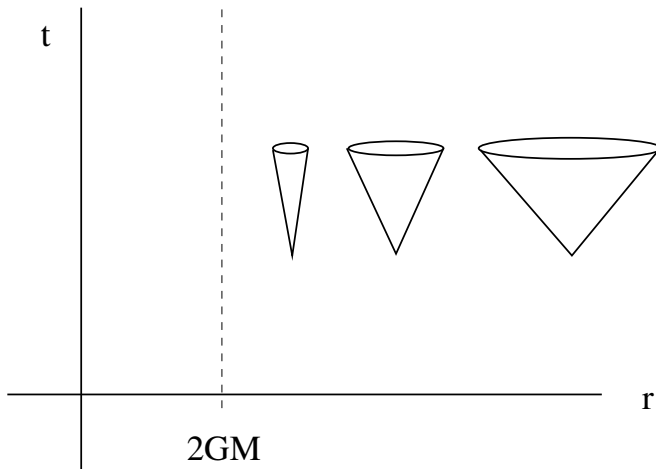
Geometria bat ulertzeko modu bat bere egitura kausala arakatzeari da, argi-konoek definitzen duten moduan. Beraz, kurba nulu erradialak kontuan hartzen ditugu,  $\theta$  eta  $\phi$  konstanteak eta  $ds^2 = 0$  dituztenak:

$$ds^2 = 0 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2, \quad (7.89)$$

hortik ikusten dugun hori

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1}. \quad (7.90)$$

Honek, noski, argi-konoen malda neurtzen du  $t$ - $r$  planoko espazio-denbora diagraman.  $r$  handirako malda  $\pm 1$  da, espazio lauan egongo litzatekeen bezala,  $r = 2GM$ -ra hurbildu ahala, berriz,  $dt/dr \rightarrow \pm \infty$  lortzen dugu, eta argi-konoak “hurbil”:

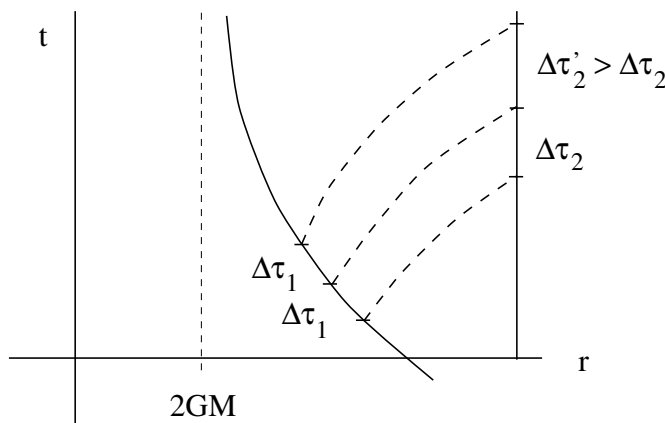


Beraz,  $r = 2GM$ -ra hurbiltzen den argi izpi bat ez omen da inoiz iristen, koordenatu-sistema honetan behintzat; ordez erradio horri asintota egiten duela dirudi.

Ikusiko dugunez, ilusio bat da, eta argi izpiak (edo partikula masibo batek) ez du arazorik  $r = 2GM$ -ra iristeko. Baina urrutiko begirale batek ezingo luke inoiz esan. Kanpoan geratuko bagina behaketa orokor erlatibista ausart bat zulo beltzean sartzen den bitartean, seinaleak atzera bidaliz, seinaleak gero eta polikiago iristen zaizkigula ikusiko genuke.

Irudietan argi geratu behar da, eta  $\Delta\tau_1/\Delta\tau_2$ -ren kalkuluaren bidez berresten da gorri-lehiaketa grabitatorioaz (7.61) eztabaidatu genuenean. Astronautak erortzen diren  $r = 2GM$  hurbiltzen diren heinean, beren denbora egokiaren  $\Delta\tau_1$  tarte finko oro  $\Delta\tau_2$  tarte luzeago bati dagokio gure ikuspuntutik. Honek betirako jarraitzen du; ez genuke inoiz ikusiko  $r = 2GM$  astronauta gurutzatu, gero eta astiroago mugitzen ikusiko genuke (eta gero eta gorriago, ia zulo beltz batean murgiltzea bezain ergela egin izanak lotsatuko balituzte bezala).

Erortzen ari diren astronautak  $r = 2GM$ -ra iristen ez direnik ikustea adierazpen esanguratsua da, baina haien ibilbidea  $t$ - $r$  hegazkinean inoiz hara iristea ez da. Gure



koordinatu-sistemaren menpekotasun handia du, eta koordinatuetatik independentea goa den galdera bat egin nahiko genuke (adibidez, astronautak iristen al dira erradio honetara behar den denbora mugatuan?). Horretarako modurik onena  $r = 2GM$ -n portatera hobe duen sistema batera koordinatuak aldatzea da. Halako koordinatuen multzo bat existitzen da, eta orain bilatzen dugu. Ez dago koordinatu-erlaketarik “derrizteko” modurik, noski, koordinatu berriak zein diren esan eta formulak konektatu besterik ez dugu egiten. Baina koordinatu hauek hainbat urratsetan garatuko ditugu, aukerak motibatu samarrak badirudi egiteko asmoz.

Gure egungo koordinatuen arazoa  $dt/dr \rightarrow \infty$   $r = 2GM$ -ra hurbiltzen diren geodesiko erradial nulletan zehar da;  $r$  norabidean aurrerapena gero eta motelagoa da  $t$  koordinatu-denborari dagokionez. Arazo hau konpontzen saia gaitezke  $t$  geodesika nulletan zehar “polikiago mugitzen den” koordinatu batekin ordezkatzuz. Lehenik eta behin ohartu kurba nulu erradialak ezaugarritzen dituen (7.64) baldintza esplizituki ebatzi dezakegula lortzeko

$$t = \pm r^* + \text{constant} , \quad (7.91)$$

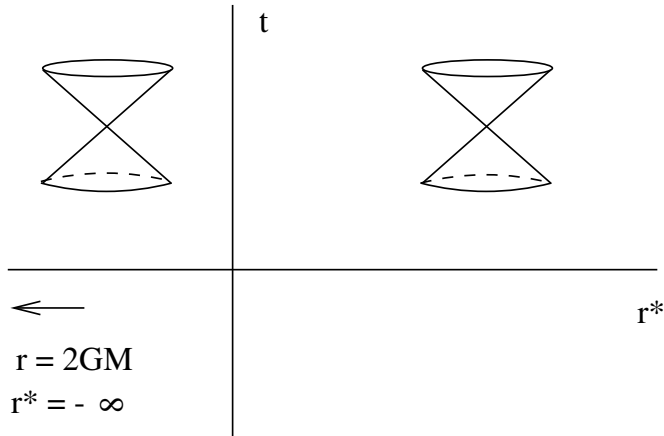
non **dortoka koordinatua**  $r^*$  honela definitzen da

$$r^* = r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right) . \quad (7.92)$$

(Dortokaren koordinatua  $r$ -rekin soilik erlazionatuta dago  $r \geq 2GM$  denean, baina hortik haratago gure koordinatuak ez dira oso onak hala ere.) Dortokaren koordinatuari dagokionez, Schwarzschild-en metrika bihurtzen da

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( -dt^2 + dr^{*2} \right) + r^2 d\Omega^2 , \quad (7.93)$$

non  $r$   $r^*$ -ren funtziotzat hartzen den. Honek aurrerapen bat adierazten du, argi-konoak orain ez direlako ixten; gainera, koefiziente metrikoetako bat ere ez da infinitu bihurtzen  $r = 2GM$ -n (nahiz eta biak  $g_{tt}$  eta  $g_{r^*r^*}$  zero bihurtu). Ordaindu dugun prezioa, ordea,  $r = 2GM$ -ko interes-azalera infinitura eramán berri dela da.



Gure hurrengo mugimendua geodesiko nulueta modu naturalean egokitzen diren koordenatuak definitzea da. Uzten badugu

$$\tilde{u} = t + r^* \quad (7.94)$$

$$\tilde{v} = t - r^* , \quad (7.95)$$

orduan erortzen diren geodesiko erradial nuluak  $\tilde{u} =$  konstantez bereizten dira, eta irteerakoek  $\tilde{v} =$  konstantea betetzen dute. Orain kontuan hartu  $r$  jatorrizko koordenatu erradialera itzultzea, baina  $t$  denbora antzeko koordenatua  $\tilde{u}$  koordenatu berriarekin ordezkatzeari. Hauek **Eddington-Finkelstein koordenatuak** izenez ezagutzen dira. Horiei dagokienez, metrika da

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) d\tilde{u}^2 + (d\tilde{u}dr + drd\tilde{u}) + r^2 d\Omega^2 . \quad (7.96)$$

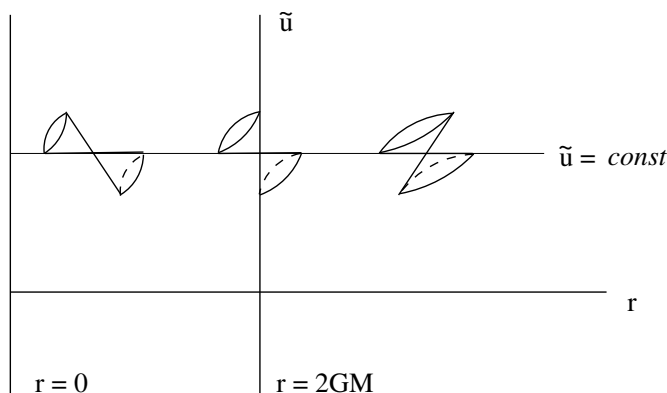
Hemen ikusten dugu benetako aurrerapenaren lehen seinalea.  $g_{\tilde{u}\tilde{u}}$  koefiziente metrikoa  $r = 2GM$ -n desagertzen den arren, ez dago benetako endekapenik; metrikaren determinatzailea da

$$g = -r^4 \sin^2 \theta , \quad (7.97)$$

$r = 2GM$ -n guztiz erregularra dena. Beraz, metrika alderantzigarria da, eta behingoz ikusten dugu  $r = 2GM$  gure jatorrizko  $(t, r, \theta, \phi)$  sisteman koordenatu-singularitasuna besterik ez dela. Eddington-Finkelstein koordenatueta kurba nulu erradialen baldintzarekin ebazten da

$$\frac{d\tilde{u}}{dr} = \begin{cases} 0 , & (\text{infalling}) \\ 2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} . & (\text{outgoing}) \end{cases} \quad (7.98)$$

Beraz, zer gertatu den ikus dezakegu: koordenatu-sistema honetan argi-konoak ondo portatzen dira  $r = 2GM$ -n, eta gainazal hori koordenatu-balio finituan dago. Ez dago arazorik gainazaletik igarotzen diren partikula nuluen edo denboraren antzekoen ibilbideak trazatzeko. Bestalde, zerbait interesgarria gertatzen ari da, zalantzarik gabe. Argi-konoak ixten ez badira ere, okertu egiten dira, horrela  $r < 2GM$ -rako etorkizunera zuzendutako bide guztiak  $r$  gutxitzeko noranzkoan daudela.



$r = 2GM$  gainazala, lokalki guztiz erregularra den arren, globalki itzulerarik gabeko puntu gisa funtzionatzen du — probako partikula bat haren azpian murgiltzen denean, ezin da inoiz itzuli. Horregatik  $r = 2GM$  **gertaeren horizontea** izenez ezagutzen da;  $r \leq 2GM$ -ko ezein gertaerak ezin du eraginik  $r > 2GM$ -ko beste edozein gertaera. Kontuan izan gertaera-horizontea gainazal nulua dela, ez denboraren antzekoa. Kontuan izan, halaber, gertaeren horizontetik ezer ihes egin ezin denez, ezinezkoa zaigula “barruan ikustea” — horrela **zulo beltza** izena.

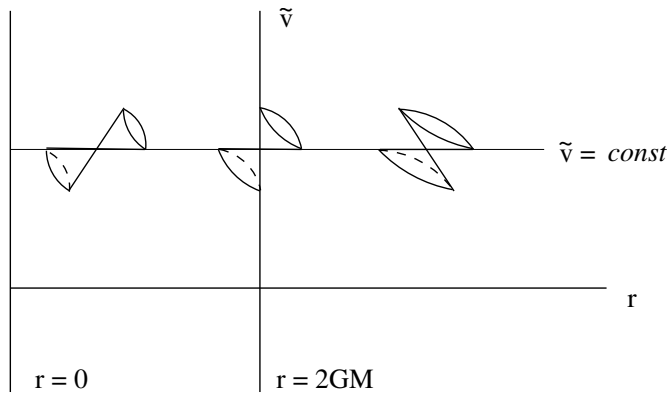
Kontuan izan dezagun zer egin dugun. Gure koordenatuak askotariko osoarentzat onak ez zirelako susmopean jokatzuz, gure jatorrizko  $t$  koordenatutik  $\tilde{u}$  berrira aldatu gara, zeinak propietate polita baitu  $r$  erradial batean zehar txikitzen badugu. kurba nulua kurba  $\tilde{u} = \text{konstantea}$ , gertaeren horizontetik joango gara arazorik gabe. (Izan ere, bidaia egiten duen tokiko behatzaile batek ez luke zertan jakingo noiz zeharkatu den gertaeren horizontea — tokiko geometria ez da beste inon baino desberdina). Beraz, ondorioztatzen dugu gure susmoa zuzena zela eta gure hasierako koordenatu-sistemak ez zuela lan ona egin askotariko osoa estaltzeko.  $r \leq 2GM$  eskualdea gure espazio-denboran sartu beharko litzateke zalantzarik gabe, partikula fisikoak erraz irits baitaitezke bertara eta igaro. Hala ere, ez dago bermerik amaituta gaudenik; beharbada, gure aniztasuna zabaltzeko beste norabide batzuk ere badaude.

Izan ere badira. Kontuan izan  $(\tilde{u}, r)$  koordenatu-sisteman gertaeren horizontea gurutzatu dezakegula etorkizunera zuzendutako bideetan, baina ez iraganera zuzendutakoetan. Honek zentzugabea dirudi, denboraz kanpoko irtenbide batekin hasi baikara. Baina  $\tilde{v}$  aukeratu genezake  $\tilde{u}$  ordez, eta kasu horretan metrika izango zen

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) d\tilde{v}^2 - (d\tilde{u}dr + drd\tilde{u}) + r^2 d\Omega^2. \quad (7.99)$$

Orain berriro ere gertaeren horizontetik pasa gaitezke, baina oraingoan iraganari zuzendutako kurbetatik soilik.

Hau sorpresa bat da agian: etengabe jarraitu ditzakegu etorkizunera edo iraganera zuzendutako kurbak  $r = 2GM$  bidez, baina leku ezberdinetara iristen gara. Egia esan, espero zen, izan ere (7.68) definizioetatik,  $\tilde{u}$  konstante mantentzen badugu eta  $r$  txikitzen badugu  $t \rightarrow +\infty$  izan behar dugu, eta  $\tilde{v}$  konstante mantentzen badugu eta  $r$  txikitzen badugu, berriz.  $t \rightarrow -\infty$ . ( $r^*$  dortokaren koordenatua  $-\infty$ -ra doa  $r \rightarrow 2GM$  gisa.)



Beraz, espazio-denbora bi norabide ezberdinetan zabaldu dugu, bata etorkizunera eta bestea iraganera.

Hurrengo urratsa espazioaren antzeko geodesiak jarraitzea izango litzateke, oraindik eskualde gehiago deskubrituko ditugun ikusteko. Erantzuna baietz da, espazio-denboraren beste zati batera iritsiko ginateke, baina lasterbidera dezagun prozesua guztian onak diren koordinatuak zehaztuz. Lehen asmakizun bat  $\tilde{u}$  eta  $\tilde{v}$  aldi berean erabiltzea izan daiteke ( $t$  eta  $r$ -en ordeztuz), eta horrek

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) (d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}d\tilde{u}) + r^2 d\Omega^2, \quad (7.100)$$

$r$  inplizituki definitu duena  $\tilde{u}$  eta  $\tilde{v}$  arabera

$$\frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v}) = r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right). \quad (7.101)$$

Egia esan, hasi ginen endekapena berriro sartu dugu; koordinatu hauetan  $r = 2GM$  “infinitamente urrun” dago ( $\tilde{u} = -\infty$  edo  $\tilde{v} = +\infty$ ). Egin beharrekoa da puntu horiek koordinatu-balio finituetara eramaten dituzten koordinatuetara aldatzea; aukera ona da

$$u' = e^{\tilde{u}/4GM} \quad (7.102)$$

$$v' = e^{-\tilde{v}/4GM}, \quad (7.103)$$

hau da, gure jatorrizko  $(t, r)$  sistemari dagokionez

$$u' = \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right)^{1/2} e^{(r+t)/4GM} \quad (7.104)$$

$$v' = \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right)^{1/2} e^{(r-t)/4GM}. \quad (7.105)$$

$(u', v', \theta, \phi)$  sisteman Schwarzschild-en metrika da

$$ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (du'dv' + dv'du') + r^2 d\Omega^2. \quad (7.106)$$

Azkenik  $r = 2GM$ -ren izaera ez-singularra guztiz agerikoa da; forma honetan koefiziente metriko batek ere ez du inolako portaera berezirik gertaeren horizontean.

Biak  $u'$  eta  $v'$  koordenatu nuluak dira, haien deribatu partzialak  $\partial/\partial u'$  eta  $\partial/\partial v'$  bektore nuluak direlako. Ez dago ezer okerrik, sistema honetan lau bektore deribatu partzialen (bi nulu eta bi espazio-antzeko) bilketak espazio tangenterako oinarri ezin hobe gisa balio baitu. Hala ere, zertxobait erosoago ari gara lanean koordenatu bat denboraren antzekoa den eta gainerakoak espazioaren antzekoak diren sistema batean. Beraz, definitzen dugu

$$u = \frac{1}{2}(u' - v') \quad (7.107)$$

$$= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh(t/4GM) \quad (7.108)$$

eta

$$v = \frac{1}{2}(u' + v') \quad (7.109)$$

$$= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh(t/4GM) , \quad (7.110)$$

horren arabera, metrika bihurtzen da

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2 , \quad (7.111)$$

non  $r$  inplizituki definitzen den

$$(u^2 - v^2) = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{r/2GM} . \quad (7.112)$$

$(v, u, \theta, \phi)$  koordenatuak **Kruskal koordenatuak** izenez ezagutzen dira, edo batzuetan Kruskal-Szekres koordenatuak. Kontuan izan  $v$  denboraren antzeko koordenatua dela.

Kruskal koordenatuek propietate miragarri batzuk dituzte.  $(t, r^*)$  koordenatuek bezala, kurba nulu erradialek espazio lauan duten itxura dute:

$$v = \pm u + \text{constant} . \quad (7.113)$$

$(t, r^*)$  koordenatuetan ez bezala, ordea,  $r = 2GM$  gertaera-horizontea ez dago infinitu urrun; hain zuzen ere zehazten da

$$v = \pm u , \quad (7.114)$$

gainazal nulua izatearekin bat. Orokorrean,  $r =$  gainazalak konstante har ditzakegu. (7.81) hauek betetzen dituzte

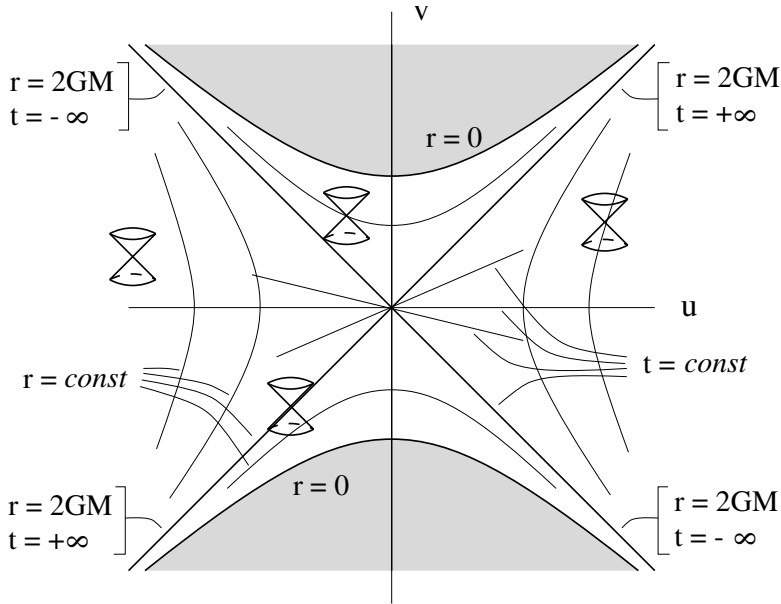
$$u^2 - v^2 = \text{constant} . \quad (7.115)$$

Horrela, hiperbola gisa agertzen dira  $u$ - $v$  planoan. Gainera,  $t$  konstantearen gainazalak honela ematen dira

$$\frac{v}{u} = \tanh(t/4GM) , \quad (7.116)$$

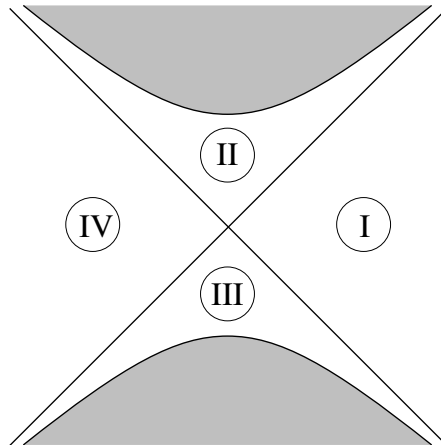
$\tanh(t/4GM)$  malda duten jatorriaren bidez zuzenak definitzen dituen. Kontuan izan  $t \rightarrow \pm\infty$  gisa hau (7.83) berdin bihurtzen dela; beraz, gainazal hauek  $r = 2GM$  berdina dira.

Orain, gure  $(v, u)$  koordenatuek har dezaketen balio guztietan barne hartzen utzi beharko lukete  $r = 2GM$ -n benetako singularitatea jo gabe; baimendutako eskualdea, beraz,  $-\infty \leq u \leq \infty$  eta  $v^2 < u^2 + 1$  da. Orain espazio-denbora-diagrama bat marraz dezakegu  $v$ - $u$  planoan ( $\theta$  eta  $\phi$  kenduta), “Kruskal diagrama” izenez ezagutzen dena, Schwarzschild-en metrikari dagokion espazio-denbora osoa adierazten duena.



Diagramako puntu bakoitza bi esfera bat da.

$(t, r)$  gure jatorrizko koordenatuak  $r > 2GM$ -rako bakarrik ziren onak, hau da, Kruskal diagraman irudikatzen den anizkuntzaren zati bat baino ez da. Komenigarria da diagrama lau eskualdetan banatzea:



Hasi ginen eskualdea I. eskualdea izan zen; etorkizunera zuzendutako izpi nuluei jarraituz II eskualdera iritsi ginen, eta iraganera zuzendutako izpi nuluei jarraituz III. Espazio antzeko geodesikoak arakatu izan bagenu, IV eskualdera eramango ginateke.  $(u, v)$  eta  $(t, r)$  erlazionatzen duten (7.78) eta (7.79) definizioak I. eskualdean baino ez dira onak; gainerako eskualdeetan minus zeinu egokiak sartu behar dira koordinatuak irudimenezko bihur ez daitezen.

Schwarzschild-en geometria hedatu ondoren, espazio-denbora nabarmena deskribatu dugu. II eskualdea, noski, zulo beltza dela uste duguna da. Ezer I eskualdetik IIra bidaiatzen denean, ezin da inoiz itzuli. Izan ere, II. eskualdeko etorkizunera zuzendutako bide guztiek  $r = 0$ -n singularitatea jotzen amaitzen dute; behin gertaeren horizontean sartuta, erabat kondematuta zaude. Hori azpimarratzekoa da; I. eskualdera ihes egin ez ezik, ezin duzu zeure buruari  $r$  murritzeko norabidean mugitzea utzi ere egin, hori denboraren antzeko norabidea besterik ez baita. (Hau gure jatorrizko koordinatu-sisteman ikusi zitekeen;  $r < 2GM$ -rako,  $t$  espazio-itxura bihurtzen da eta  $r$  denbora-itxurakoa.) Beraz, ezin diozu berezitasunera joateari utzi zahartzeari baino. Denbora egokia geodesiko batean maximizatzen denez, luzeena biziko zara borrokatzen ez baduzu, baina erlaxatu besterik ez duzu berezitasunera hurbiltzen zaren bitartean. Ez da denbora luzea izango duzu lasaitzeko. (Ezta bidaia oso lasaigarria izango dela; berezitasunera hurbildu ahala marearteko indarrak infinitu bihurtzen dira. Berezitasunera erortzen zarenean zure oinak eta burua elkarrengandik urrunduko dira, zure enborra argaltasun infinitesimalera estutu bitartean. Zulo beltz batera erortzen den astrofisikari baten heriotza lazgarria Misner, Thorne eta Wheeler-en 32.6 atalean azaltzen da. Kontuan izan fotograma ortonormalak erabiltzen dituztela [ez duela bidaia atseginagoa egiten].)

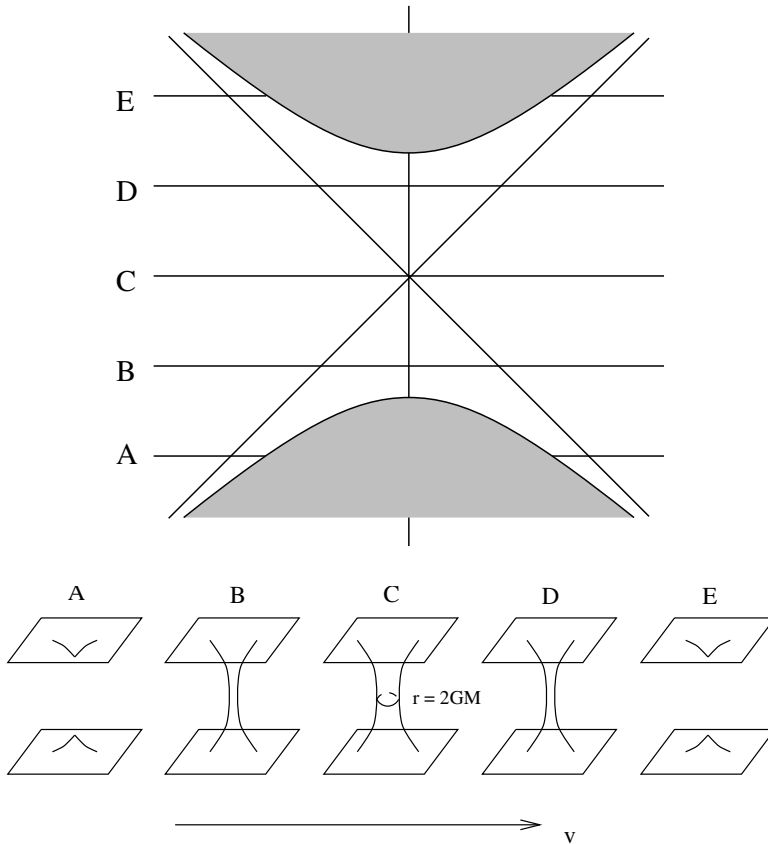
III eta IV eskualdeak ustekabekoak izan daitezke. III. eskualdea II. eskualdearen denbora-alderantzizkoa besterik ez da, espazio-denboraren zati bat, bertatik gauzek ihes egin dezaketenak, gu inoiz iritsi ez garen bitartean. “zulo zuria” dela pentsa daiteke. Iraganen badago berezitasun bat, unibertsoa sortzen dela dirudi. III eskualdearen mugari iraganeko gertaeren horizontea deitzen zaio batzuetan, eta II eskualdearen mugari, berriz, etorkizuneko gertaeren horizontea. IV. Eskualdetik, berriz, ezin da gure eskualdetik heldu, ez aurrera ez atzera denboran (ezta handik guregana ere iritsi). Espazio-denboraren beste eskualde asintotikoki laua da, gure ispilu-irudia. I. eskualdearekin “zizare-zulo” baten bidez lotuta dagoela pentsa daiteke, bi eskualde ezberdin batzen dituen lepoaren antzeko konfigurazioa. Demagun Kruskal diagrama  $v$  konstantearen espazio-itxurako gainazaletan zatitzea:

Orain xerra bakoitzaren irudiak marraz ditzakegu, argitasunerako koordinatu angeluar bat berreskuratuz:

Beraz, Schwarzschild-en geometriak benetan deskribatzen ditu elkarrengana iristen diren bi eskualde asintotikoki lauak, pixka bat harra zulo baten bidez elkartzen direnak eta gero deskonektatzen direnak. Baina zizare-zuloa azkarregi ixten da edozein denbora-behatailek eskualde batetik bestera zeharkatzeko.

Sinesgaitz samarra dirudi, bi espazio-denbora bereizi buruzko istorio hau denbora batez elkarrengana heldu eta gero askatu. Izan ere, ez da espero mundu errealean gertatzea, Schwarzschild-en metrikak ez baitu unibertso osoa zehaztasunez modelatzen. Gogoratu hutsean bakarrik balio duela, adibidez izar batetik kanpo. Izarrak  $2GM$  baino erradio

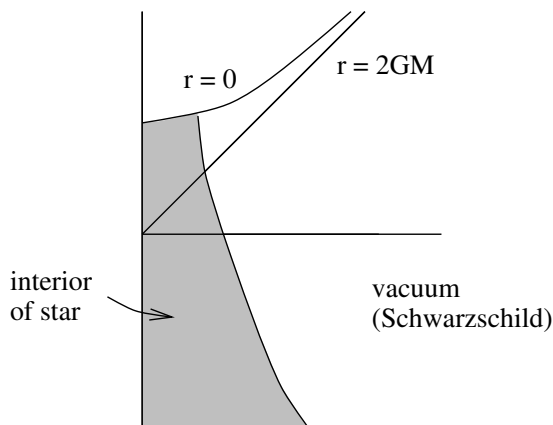




handiagoa badu, ez dugu inoiz kezkatu behar gertaera-horizonteez. Baina uste dugu badaudela izarrek beren grabitate-erakarpeneren pean kolapsatzen direnak,  $r = 2GM$  azpitik behera murrizten direnak eta berezitasun batean gehiago, zulo beltz bat sortuz. Ez dago zulo zuri baten beharrik, ordea, espazio-denbora horren iraganak ez baitu Schwarzschild soluzio osoaren antzekorik. Gutxi gorabehera, izarren kolapsoaren Kruskal-itxurako diagrama hau itxura izango luke:

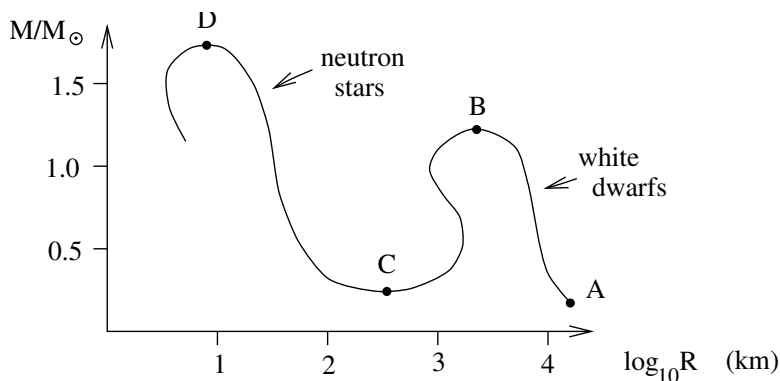
Ilunpeko eskualdea ez du Schwarzschild-ek deskribatzen, beraz, ez dago zulo zuriei eta zizareei buruz kezkatu beharrik.

Gaian gauden bitartean, izar masiboetatik zulo beltz astrofisikoen sorrerari buruz zerbait esan dezakegu. Izar baten bizitza grabitatearen barne-erakartzearen eta presioaren kanporatzearen arteko etengabeko borroka da. Izarra bere muinean erregai nuklearra erretzen ari denean, presioa erreketak horrek sortutako berotik dator. («Erretzea» jarri beharko genuke komatxo artean, fusio nuklearrak oxidazioarekin zerikusirik ez duelako). Erregaia agortzen denean, tenperaturak behera egiten du eta izarra uzkuertzen hasten da grabitateak borroka irabazten hasten den heinean. Azkenean, prozesu hau gelditzen da elektroiak hain hurbil jartzen direnean, non konpresio gehiago jasaten dutenean, Pauliren bazterketa-printzipioaren arabera (ezin dira bi fermioi egoera berean egon). Sortzen den objektuari **nano zuria** deitzen zaio. Masa nahikoa altua bada, ordea, elektroien degenerazio-presioa ere ez da nahikoa, eta elektroiak protoiekin konbinatuko dira fase-



trantsizio dramatiko batean. Eraitza **neutroi izar** bat da, ia osorik neutroiz osatua (nahiz eta neutroi izarren barrualdea ez den oso ondo ulertzen). Neutroi izar baten erdigunean dauden baldintzak lurrekoekin alderatuta oso desberdinak direnez, ez dugu egoera-ekuazioa ezin hobeto ulertzen. Hala ere, uste dugu neutroi izar nahiko masibo batek ezin izango duela grabitatearen erakarriari aurre egin eta kolapsatzen jarraituko duela. Neutroi-fluido bat gaur egun pentsa dezakegun material trinkoena denez, uste da kolapso horren eraitza saihestezina zulo beltza dela.

Prozesua erradioaren vs. diagrama honetan laburbiltzen da. masa:



Diagramaren puntua zera da,  $M$  edozein masatarako, izarrek erradioa txikiagotuko duela lerrora jo arte. Nano zuriak  $A$  eta  $B$  puntuen artean aurkitzen dira, eta neutroi izarrek  $C$  eta  $D$  puntuen artean.  $B$  puntua 1,4 eguzki-masa baino zertxobait gutxiagoko altueran dago;  $D$ -ren altuera ez da hain ziurra, baina ziurrenik 2 eguzki-masa baino txikiagoa da. Kolapso-prozesua korapilatsua da, eta eboluzioan zehar izarrek masa galdu edo irabazi dezake, beraz, izar jakin baten amaiera zaila da aurreikustea. Hala ere, nano zuriak leku guztietan daude, neutroi izarrek ez dira arraroak, eta zulo beltzak dituztela uste duten sistema ugari daude. (Noski, ezin duzu zuzenean zulo beltza ikusi. Ikus dezakezuna zuloan sartzen den materiaren erradiazioa da, hurbiltzen den heinean berotu egiten da eta erradiazioa igortzen du).

Ikusi dugu Kruskal koordinatu-sistemak Schwarzschild-en geometriaren irudikapen

oso erabilgarria ematen duela. Beste zulo beltz mota batzuetara pasatu baino lehen, espazio-denbora honi buruz pentsatzeko beste modu bat aurkeztuko dugu, Penrose (edo Carter-Penrose, edo konformala) diagrama. Ideia eraldaketa konformatu bat egitea da, eta horrek aniztasun osoa eskualde trinko batera ekartzen du, espazio-denbora paper batean egokitzeko.

Has gaitezen Minkowski espaziotik, teknika nola funtzionatzen duen ikusteko. Koordinatu polarretan metrika da

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (7.117)$$

$\theta, \phi$  koordenatuekin ez da ezer arrarorik gertatuko, baina beste bi koordenatuen barrutien jarraipena zaindu nahi dugu. Kasu honetan jakina dugu

$$-\infty < t < +\infty \quad (7.118)$$

$$0 \leq r < +\infty . \quad (7.119)$$

Teknikoki,  $r = 0$  mundu-lerroak koordenatu berezitasun bat adierazten du eta beste adabaki batek estali beharko luke, baina denok dakigu zer gertatzen ari den, beraz,  $r = 0$  ondo portatzen den bezala jokatu dugu.

Gure zeregina zertxobait errazten da koordenatu nuluetara aldatzen badugu:

$$u = \frac{1}{2}(t + r) \quad (7.120)$$

$$v = \frac{1}{2}(t - r) , \quad (7.121)$$

by emandako dagozkion barrutiek

$$-\infty < u < +\infty \quad (7.122)$$

$$-\infty < v < +\infty \quad (7.123)$$

$$v \leq u . \quad (7.124)$$

Barruti hauek irudian azaltzen diren bezala daude, puntu bakoitzak  $r = u - v$  erradioko 2 esfera adierazten baitu. Koordinatu hauetan metrika honek ematen du

$$ds^2 = -2(dudv + dvdu) + (u - v)^2 d\Omega^2 . \quad (7.125)$$

Orain “infinituak” koordenatu-balio finitua hartzen duten koordenadetara aldatu nahi dugu. Aukera ona da

$$U = \arctan u \quad (7.126)$$

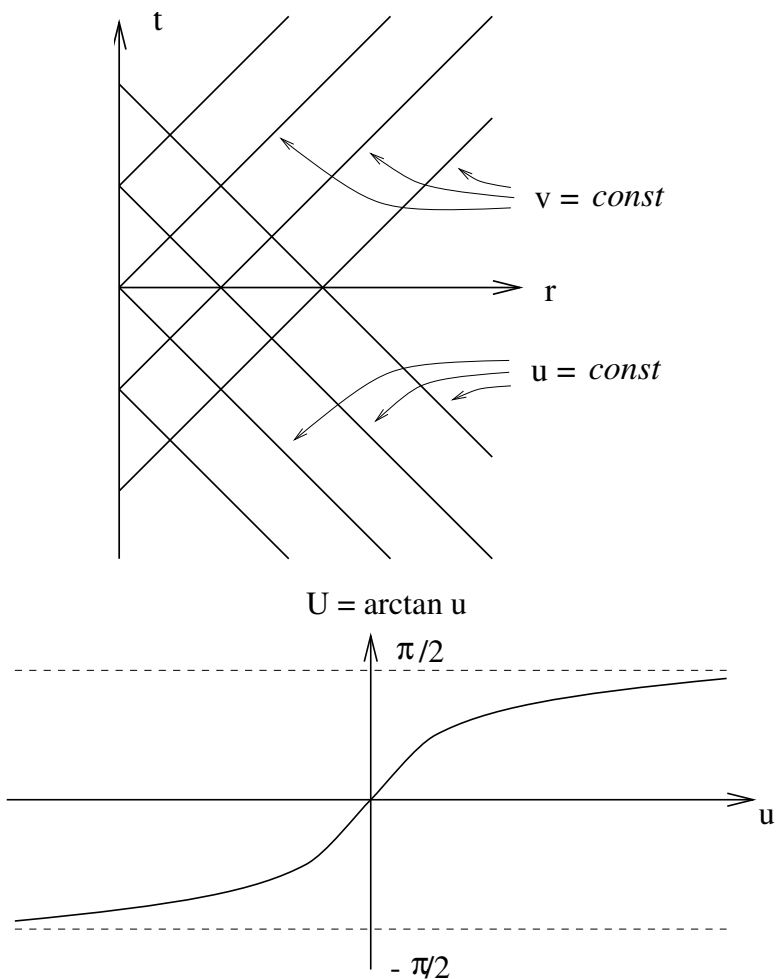
$$V = \arctan v . \quad (7.127)$$

Barrutiak orain daude

$$-\pi/2 < U < +\pi/2 \quad (7.128)$$

$$-\pi/2 < V < +\pi/2 \quad (7.129)$$

$$V \leq U . \quad (7.130)$$



Neurria lortzeko, erabili

$$dU = \frac{du}{1+u^2}, \quad (7.131)$$

eta

$$\cos(\arctan u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad (7.132)$$

eta berdin  $v$ . Gu gara eramaten

$$dudv + dvdu = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} (dUdV + dVdU). \quad (7.133)$$

Bitartean,

$$(u-v)^2 = (\tan U - \tan V)^2 \quad (7.134)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} (\sin U \cos V - \cos U \sin V)^2 \quad (7.135)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} \sin^2(U - V). \quad (7.136)$$

Beraz, koordenatu hauetan Minkowskiren metrika da

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} [-2(dUdV + dVdU) + \sin^2(U - V)d\Omega^2] . \quad (7.137)$$

Horrek nolabaiteko erakargarritasuna du, metrika faktore orokor batez biderkatuta nahiko adierazpide soil gisa agertzen baita. Are hobe egin dezakegu  $\eta$  denbora-itxurako koordenatu batera eta  $\chi$  espazio-itxurako (erradial) koordenatu batera eraldatuz, bidez.

$$\eta = U + V \quad (7.138)$$

$$\chi = U - V , \quad (7.139)$$

barrutiek

$$-\pi < \eta < +\pi \quad (7.140)$$

$$0 \leq \chi < +\pi . \quad (7.141)$$

Orain metrika da

$$ds^2 = \omega^{-2} (-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) , \quad (7.142)$$

non

$$\omega = \cos U \cos V \quad (7.143)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos \eta + \cos \chi) . \quad (7.144)$$

Minkowskiren metrika, beraz, “ez-fisiko” metrikarekin eraldaketa konformal baten bidez erlazionatuta dagoela pentsa daiteke.

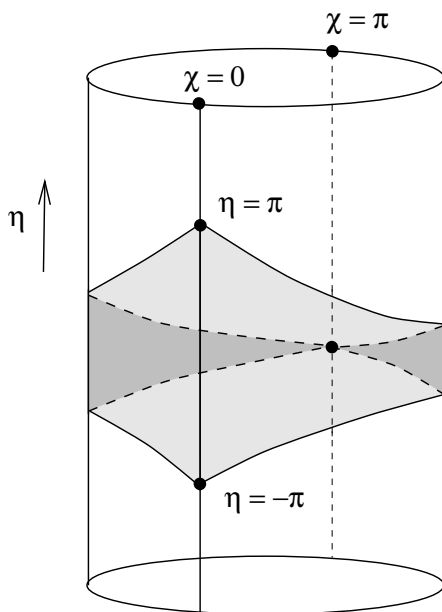
$$d\bar{s}^2 = \omega^2 ds^2 \quad (7.145)$$

$$= -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 . \quad (7.146)$$

Honek  $\mathbb{R} \times S^3$  anizkuntza deskribatzen du, non 3-esfera maximo simetrikoa eta estatikoa den. Makurdura dago metrika honetan, eta ez da hutsean Einsteinen ekuazioaren soluzioa. Horrek ez gaitu molestatu behar, fisikoa ez baita; benetako metrika fisikoa, transformazio konformal baten bidez lortua, espazio-denbora laua besterik ez da. Izan ere, metrika hau “Einsteinen unibertso estatikoa” da, fluido perfektuarekin eta konstante kosmologikoarekin Einsteinen ekuazioen soluzio estatiko (baina ezegonkorra). Jakina,  $\mathbb{R} \times S^3$ -n koordenatu-sorta osoa  $-\infty < \eta < +\infty$ ,  $0 \leq \chi \leq \pi$  izango litzateke normalean, eta Minkowski-ren espazioa (7.99) arabera definitutako azpiespazioan mapatzen da.  $\mathbb{R} \times S^3$  osoa zilindro gisa marraz daiteke, zeinetan zirkulu bakoitza hiru esfera den, hurrengo orrian erakusten den moduan.

Itzalpeko eskualdeak Minkowskiren espazioa adierazten du. Kontuan izan zilindro honetako  $(\eta, \chi)$  puntu bakoitza bi esfera baten erdia dela, non beste erdia  $(\eta, -\chi)$  puntua den. Itzalpeko eskualdea ireki dezakegu Minkowskiren espazioa triangelu gisa irudikatzeko, irudian ikusten den bezala.

**Penrose diagrama** da. Puntu bakoitzak bi esfera bat adierazten du.



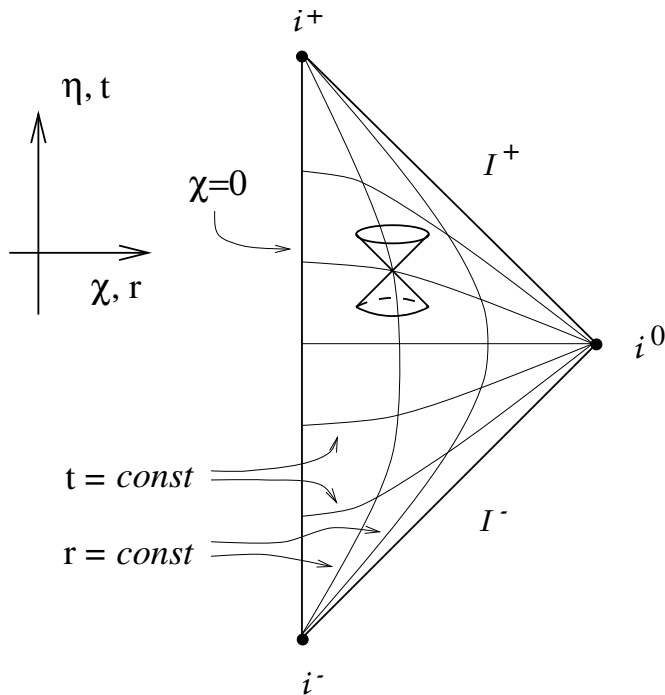
Izan ere, Minkowski espazioa goiko diagramaren *barrualdea* baino ez da ( $\chi = 0$  barne); mugak ez dira jatorrizko espazio-denboraren parte. Elkarrekin **infinitu konformatu** deitzen zaie. Penrose diagramaren egiturak infinitu konformatua eskualde desberdin batzuetan zatitzeko aukera ematen digu:

$$\begin{aligned}
 i^+ &= \text{future timelike infinity } (\eta = \pi, \chi = 0) \\
 i^0 &= \text{spatial infinity } (\eta = 0, \chi = \pi) \\
 i^- &= \text{past timelike infinity } (\eta = -\pi, \chi = 0) \\
 \mathcal{I}^+ &= \text{future null infinity } (\eta = \pi - \chi, 0 < \chi < \pi) \\
 \mathcal{I}^- &= \text{past null infinity } (\eta = -\pi + \chi, 0 < \chi < \pi)
 \end{aligned}$$

( $\mathcal{I}^+$  eta  $\mathcal{I}^-$  “scri-plus” eta “scri-minus” gisa ahoskatzen dira, hurrenez hurren.) Kontuan izan  $i^+$ ,  $i^0$  eta  $i^-$  benetan *puntuak* direla,  $\chi = 0$  eta  $\chi = \pi$   $S^3$ ren ipar eta hego poloak baitira. Bien bitartean,  $\mathcal{I}^+$  eta  $\mathcal{I}^-$  gainazal nuluak dira,  $\mathbb{R} \times S^2$ -ren topologiarekin.

Minkowskiren espazio-denborarako Penrose diagramaren ezaugarri garrantzitsu batzuk daude.  $i^+$  eta  $i^-$  puntuak normalak denbora antzekoak diren espazio-itxurako gainazalen mugak direla pentsa daiteke; alderantziz,  $i^0$  normalak espazio antzekoak diren denboraren antzeko gainazalen mugatzat har daiteke. Geodesiko erradialak  $\pm 45^\circ$ -n daude diagraman. Denboraren antzeko geodesia guztiak  $i^-$ -n hasten dira eta  $i^+$ -n amaitzen dira; geodesiko nulu guztiak  $\mathcal{I}^-$ -n hasten dira eta  $\mathcal{I}^+$ -n amaitzen dira; espazio-itxurako geodesiko guztiak  $i^0$ -n hasten dira eta amaitzen dira. Bestalde, egon daitezke geodesikorik gabeko denbora-itxurako kurba, infinitu nuluan amaitzen direnak (“asintotikoki nulu bihurtzen badira”).

Polita da Minkowskiren espazio guztia paper txiki batean sartzeko gai izatea, baina ez dugu benetan ezagutzen ez genekien gauza handirik ikasten. Penrose diagramak erabilgarriagoak dira espazio-denbora apur bat interesgarriagoak irudikatu nahi ditugunean, adibidez, zulo beltzenak. Penrose diagramen jatorrizko erabilera espazio-denborak



Minkowskiren espazioarekin “infinituan” alderatzea izan zen — “asintotikoki laua”ren definizio zorrotza funtsean espazio-denbora batek Minkowskiren espazioa bezala infinitu konformatua duela da. Ez ditugu gai hauek zehatz-mehatz aztertuko, baizik eta Schwarzschild zulo beltz baten Penrose diagramaren analisira zuzenean jo.

Ez ditugu beharrezkoak diren manipulazioak zehatz-mehatz aztertuko, Minkowskiren kasua paraleloan baitaude konplexutasun aljebraiko gehigarri handiarekin. Kruskal koordenatuen bertsio nuluarekin hasiko ginateke, zeinetan metrikak forma hartzen duen

$$ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r}e^{-r/2GM}(du'dv' + dv'du') + r^2d\Omega^2, \quad (7.147)$$

non  $r$  inplizituki bidez definitzen den

$$u'v' = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)e^{r/2GM}. \quad (7.148)$$

Orduan, funtsean, espazio-denbora lauan erabilitako transformazio bera nahikoa da infinitua koordenatu-balio finituetara ekartzeko:

$$u'' = \arctan\left(\frac{u'}{\sqrt{2GM}}\right) \quad (7.149)$$

$$v'' = \arctan\left(\frac{v'}{\sqrt{2GM}}\right), \quad (7.150)$$

barrutiek

$$\begin{aligned} -\pi/2 &< u'' < +\pi/2 \\ -\pi/2 &< v'' < +\pi/2 \\ -\pi &< u'' + v'' < \pi. \end{aligned}$$

Metrikoaren  $(u'', v'')$  zatia (hau da, koordenatu angeluar konstantetan) Minkowskiren espazioarekin konforme dago orain. Koordenatu berrietan  $r = 0$ -ko singulartasunak eskualde asintotiko batean denbora-itxurako infinitutik bestean denbora-itxurako infinitura luzatzen diren lerro zuzenak dira. Schwarzschild-en soluzio maximo hedatua den Penrose diagramak honela dauka:

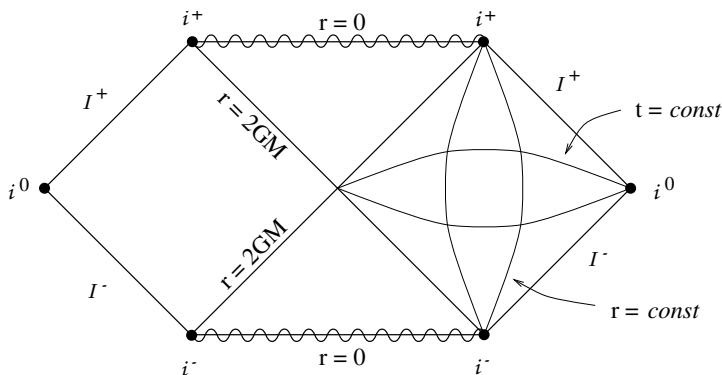
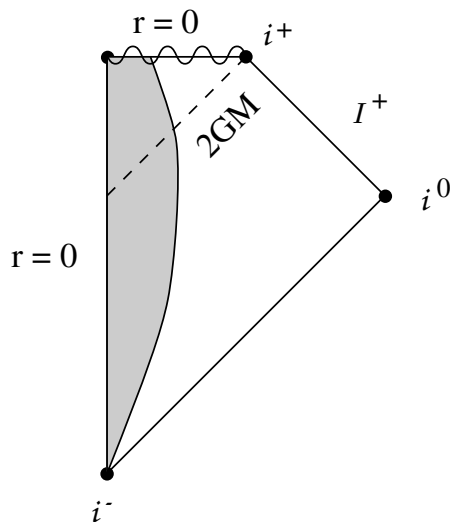


Diagrama honen benetako sotiltasun bakarra  $i^+$  eta  $i^-$   $r = 0$ -tik bereizten direla ulertu beharra da (badaude berezitasunarekin bat egiten ez duten denboraren antzeko bide ugari). Kontuan izan, gainera, infinitu konformatuaren egitura Minkowskiren espazioaren antzekoa dela, Schwarzschild asintotikoki laua dela dioenarekin bat. Gainera, zulo beltza osatzen duen izar kolapso baten Penrose diagrama espero dezakezuna da, hurrengo orrialdean erakusten den moduan.

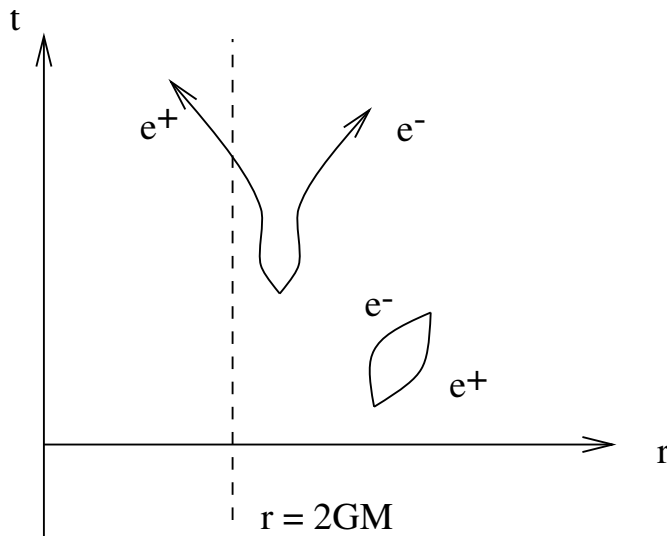


Berrir ere espazio-denbora hauetarako Penrose diagramek ez digute benetan eza-gutzen ez genuen ezer esaten; horien erabilgarritasuna nabaria izango da zulo beltz orokorrak kontuan hartzen ditugunean. Printzipioz askotariko zulo beltzak egon litezke, eratu ziren prozesuaren arabera. Harrigarria bada ere, ez da horrela gertatzen; zulo beltza nola eratzen den edozein dela ere, masa, karga eta momentu angeluarra baino ez diren



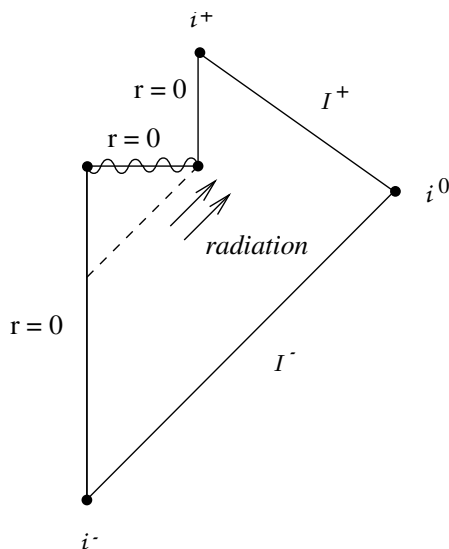
egoera batean finkatzen da (nahiko azkar). Zuloaren eraikuntzan pentsa daitekeen eremu ezberdinetarako banan-banan frogatu behar den propietate hau maiz esaten da “zulo beltzek ilerik ez dute”. Erakuts dezakezu, adibidez, hasiera batean kolapso ez-homogeneo batetik eratzen den zuloak “astintzen” duela edozein pikorkeria erradiazio grabitatorioa igorritz. Hau “ilerik gabeko teorema” baten adibidea da. Zulo beltza finkatu ondoren nolakoa den interesatzen bazaigu, beraz, zulo kargatu eta birakariez arduratu behar dugu. Bi kasuetan metrikaren soluzio zehatzak daude, eta arretaz aztertu ditzakegu.

Baina lehenik eta behin, saihezbide labur bat egin dezagun zulo beltzen lurrunketaren mundura. Arraroa da zulo beltz bat “lurruntzen” dela pentsatzea, baina mundu errealean zulo beltzak ez dira benetan beltzak — energia irradiatzen dute  $T = \hbar/8\pi kGM$  tenperaturako gorputz beltz bat balitz bezala, non  $M$  den. zuloaren masa eta  $k$  Boltzmannen konstantea da. Efektu honen deribazioa, **Hawking erradiazioa** izenez ezagutzen dena, eremu-teoria kuantikoa espazio-denbora kurbatuan erabiltzea dakar eta gure esparrutik kanpo dago orain. Ideia informala, hala ere, ulargarria da.



Eremu kuantikoen teorian “hutsean gorabeherak” daude — espazio hutsean partikula/antipartikula bikoteak berez sortzea eta suntsitzea. Gorabehera hauek osziladore harmoniko sinple baten zero puntuko gorabeheren antzekoak dira, hain zuzen. Normalean, horrelako gorabeherak ezinezkoak dira detektatu, batez besteko energia total zero ematen baitute (nahiz eta inork ez daki zergatik; hori da konstante kosmologikoaren arazoa). Gertaeren horizonte baten aurrean, ordea, noizean behin bikote birtualeko kide bat zulo beltzera eroriko da bere bikoteak infinitura ihes egiten duen bitartean. Infinitura iristen den partikulak energia positiboa izan beharko du, baina energia osoa kontserbatzen da; beraz, zulo beltzak masa galdu behar du. (Nahi baduzu, erortzen den partikula masa negatiboa duela pentsa dezakezu.) Ihes egiten diren partikulak Hawking erradiazio gisa ikusten ditugu. Ez da oso efektu handia, eta masa igo ahala tenperatura jaisten doa, beraz, eguzkiaren pareko masa-zulo beltzentzat guztiz arbuigarria da. Hala ere, printzipioz, zulo beltzak bere masa guztia gal lezake Hawking erradiazioarekin, eta

prozesuan ezerezean geratu. Dagokion Penrose diagrama honelakoa izan daiteke:



Bestalde, baliteke ez. Diagrama honen arazoa “informazioa galtzen da” da — singularitatearen iraganera espazio-itxurako gainazal bat marrazten badugu eta etorkizunera eboluzionatzen badugu, horren zati bat berezitasunarekin talka egiten eta suntsitzen da. Ondorioz, erradiazioak berak jatorriz espazio-denboran zegoen informazioa baino informazio gutxiago dauka. (Hau zulo beltzean ile falta baino okerragoa da. Gauza bat da informazioa gertaeren horizonte barruan harrapatuta egon dela pentsatzea, baina kez-kagarriagoa da guztiz desagertu dela pentsatzea.) Baina prozesu horrek erlatibitate orokorrean zein eremu kuantikoen teorian inplizitua dagoen informazioaren kontserbazioa urratzen du, iragarpena ekarri zuten bi teoriak. Paradoxa hau gauza handitzat hartzen da egun, eta informazioa nolabait nola berreskuratu daitekeen ulertzeko hainbat ahalegin egiten dira. Gaur egun ezaguna den azalpen bat soken teorian oinarritzen da, eta, funtsean, zulo beltzek ile asko dutela dio, gertaeren horizontetik gertu bizi diren harizko egoera birtualen moduan. Espero dut ez duzula hutsik egingo entzutean ez dugula hau oso ondo aztertuko; baina jakin beharko zenuke zein den arazoa eta ikerketa aktiboaren eremua dela egun.

Hori gure sistematik kanpo, elektrikoki kargatutako zulo beltzetara jotzen dugu. Hasieran nahikoa arrazoizko objektuak dirudite, ez baitago ezer kargatu gabeko zulo beltz batean karga garbiren bat botatzea eragozten digun ezer. Egoera astrofisiko batean, ordea, karga-kopuru osoa oso txikia izatea espero da, batez ere masarekin alderatuta (grabitate-efektu erlatiboek dagokienez). Hala ere, zulo beltz kargatuak hainbat pentsamendu-esperimentutarako proba-gune erabilgarria eskaintzen dute, beraz, merezi dute gure kontuan.

Kasu honetan problemaren simetria esferiko osoa oraindik presente dago; badakigu, beraz, metrika honela idatz dezakegula

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (7.151)$$

Orain, ordea, jada ez gaude hutsean, zuloak eremu elektromagnetiko nulua izango baitu, eta, aldi berean, energia-momentu-iturri gisa jokatzeko du. Elektromagnetismorako energia-momentuaren tentsorea honela ematen da

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) , \quad (7.152)$$

non  $F_{\mu\nu}$  eremu elektromagnetikoko indarraren tentsorea den. Simetria esferikoa dugunez, eremu-indarraren tentsore orokorrenak osagaiak izango ditu

$$F_{tr} = f(r, t) = -F_{rt} \quad (7.153)$$

$$F_{\theta\phi} = g(r, t) \sin \theta = -F_{\phi\theta} , \quad (7.154)$$

non  $f(r, t)$  eta  $g(r, t)$  eremu-ekuazioek zehaztu beharreko funtzio batzuk diren, eta idatzi gabeko osagaiak zero dira.  $F_{tr}$  eremu elektriko erradialari dagokio, eta  $F_{\theta\phi}$ , berriz, eremu magnetiko erradialari. ( $\sin \theta$ -ri buruz galdetzen ari zaretenok, gogoratu  $\theta$  eta  $\phi$ -tik independentea izan behar den gauza eremu magnetikoaren osagai erradiala dela,  $B^r = \epsilon^{01\mu\nu}F_{\mu\nu}$ . Simetriko esferikoko metrika baterako,  $\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\tilde{\epsilon}^{\rho\sigma\mu\nu}(\sin \theta)^{-1}$ -ren proportzionala da, beraz,  $\sin \theta$  faktorea nahi dugu  $F_{\theta\phi}$ -n.) Kasu honetan eremu-ekuazioak Einstein-en ekuazioak eta Maxwell-en ekuazioak dira:

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}F_{\nu\sigma} = 0 \quad (7.155)$$

$$\nabla_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0 . \quad (7.156)$$

Bi multzoak elkarrekin akoplatzen dira, eremu elektromagnetikoko indarraren tentsorea energia-momentuaren tentsorearen bidez Einsteinen ekuazioetan sartzen baita, eta metrika Maxwellen ekuazioetan esplizituki sartzen den bitartean.

Zailtasunak ez dira gaindiezinak, ordea, eta hutseko kasurako jarraitu genuenaren antzeko prozedura batek kargatutako kasurako ere konponbidea dakar. Ez ditugu urratsak esplizituki emango, azken erantzuna aipatu besterik ez dugu egin. Soluzioa **Reissner-Nordström metrika** izenez ezagutzen da, eta honela ematen da

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \quad (7.157)$$

non

$$\Delta = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(p^2 + q^2)}{r^2} . \quad (7.158)$$

Adierazpen honetan,  $M$  zuloaren masa gisa interpretatzen da berriro;  $q$  karga elektriko osoa da, eta  $p$  karga magnetiko osoa. Karga magnetiko isolatuak (monopoloak) ez dira inoiz naturan behatu, baina horrek ez digu eragozten existituko balira sortuko luketen metrika idaztea. Arrazoi teoriko onak daude monopoloak existitzen direla pentsatzeko, baina arraroak dira. (Noski, monopolorik ez badago ere zulo beltz batek karga magnetikoa izan dezakeen aukera ere badago). Izan ere, karga elektrikoak eta magnetikoak modu berean sartzen dira metrikan, beraz, ez dugu konplikazio gehigarririk sartuko  $p$  gure adierazpenetan mantenduz. Soluzio honi lotutako eremu elektromagnetikoak honako

hauek dira

$$F_{tr} = -\frac{q}{r^2} \quad (7.159)$$

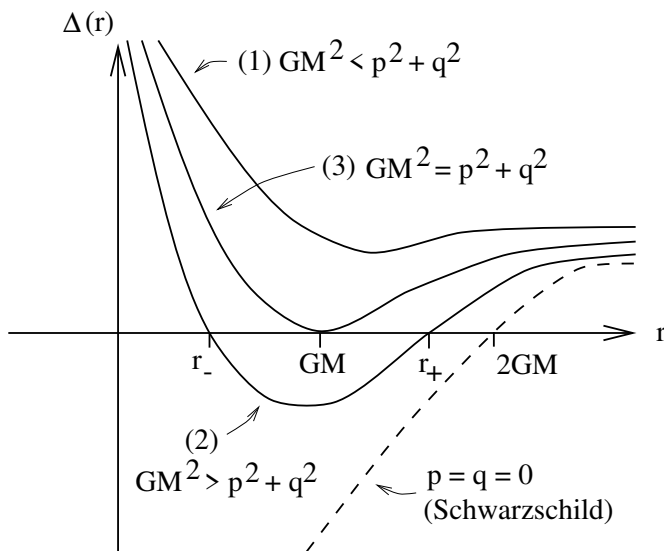
$$F_{\theta\phi} = p \sin \theta . \quad (7.160)$$

Kontserbadoreek  $p = 0$  ezar dezakete nahi badute.

Singularitasunen eta gertaeren horizonteen egitura metrika honetan Schwarzschild-en baino korapilatsuagoa da,  $\Delta(r)$  funtzioko termino gehigarria dela eta (hori pentsa daiteke “argi-konoak zenbat iraultzen diren” neurtzen duela) . Gauza batek berdin jarraitzen du:  $r = 0$ -n benetako kurbadura singularitate bat dago ( $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$  kurbadura eskalarra kalkulatzu egiaztatu liteke). Bien bitartean,  $r = 2GM$ -ren baliokidea  $\Delta$  desagertzen den erradioa izango da. Hau orduan gertatuko da

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - G(p^2 + q^2)} . \quad (7.161)$$

Honek bi, bat edo zero soluzio izan ditzake,  $GM^2$  eta  $p^2 + q^2$  balio erlatiboen arabera. Beraz, kasu bakoitza bereizita aztertuko dugu.

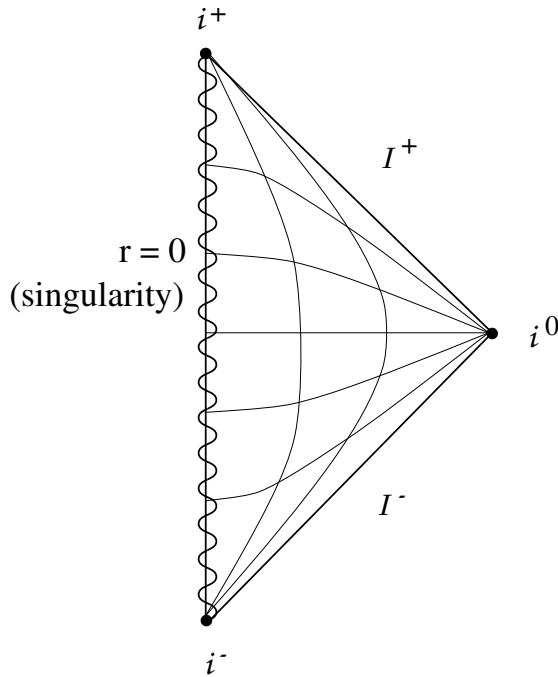


### Lehenengo kasua — $GM^2 < p^2 + q^2$

Kasu honetan  $\Delta$  koefizientea beti da positiboa (inoiz ez zero), eta metrika guztiz erregularra da ( $t, r, \theta, \phi$ ) koordinatuetan  $r = 0$  arte.  $t$  koordinatua denboraren antzekoa da beti, eta  $r$  beti espazioaren antzekoa da. Baina oraindik badago singularitasuna  $r = 0$ -n, gaur egun denboraren antzeko lerroa dena. Gertaeren horizontetik ez dagoenez, ez dago oztoporik behatzailea singularitasunera bidaiatu eta behatutakoaren berri ematera itzultzeko. Honi **singularitate biluzia** izenez ezagutzen da, horizonte batek babesten ez duena. Geodesikaren azterketa zehatz batek agerian uzten du, hala ere, singularitatea “errepelsiboa” dela — denboraren antzeko geodesikek ez dute inoiz  $r = 0$  gurutzatzen;

(Geodesiko nuluak singularitasunera irits daitezke, geodesiko ez diren denbora-itxurako kurbak bezala).

$r \rightarrow \infty$  soluzioa espazio-denbora laua hurbiltzen da, eta ikusi berri dugunez, egitura kausala “normala” da nonahi. Penrose-ren diagrama, beraz, Minkowskiren espazioaren antzekoa izango da, orain  $r = 0$  singularitatea dela izan ezik.

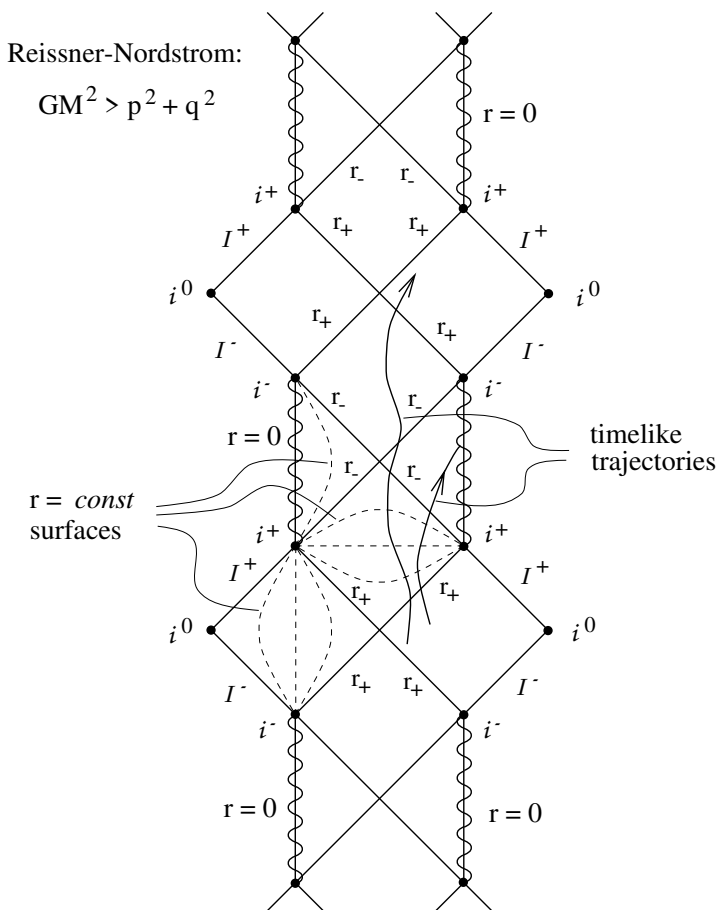


Singularitatearen biluztasunak gure dezentzia zentzua iraintzen du, baita **zentsura kosmikoaren aierua** ere, zeinak gutxi gorabehera materia fisikoaren konfigurazioen kolapso grabitatorioak ez duela singularitasun biluzirik sortuko. (Noski, aieru bat besterik ez da, eta baliteke zuzena ez izatea; Zenbakizko simulazioetatik zenbait erreklamazio daude ardatz-itxurako konfigurazioen kolapsak berezitasun biluziak sor ditzakeela). Izan ere, ez genuke inoiz espero  $GM^2 < p^2 + q^2$  duen zulo beltz bat aurkitzea grabitazio-kolapsoaren ondorioz. Gutxi gorabehera, baldintza honek dio zuloaren energia osoa eremu elektromagnetikoetatik bakarrik energiari egindako ekarpena baino txikiagoa dela — hau da, karga daraman materiaren masa negatiboa izan beharko litzateke. Beraz, soluzio hau, oro har, ez-fisikotzat jotzen da. Kontuan izan, halaber, ez daudela Cauchy-ren gainazal onak (espazio-itxurako xerrak, zeinen denbora-lerro hedaezin guztiek ebakitzen dituztenak) espazio-denbora honetan, denbora-lerroak singularitatean hasi eta amaitu daitezkeelako.

*Bigarren kasua* —  $GM^2 > p^2 + q^2$

Hau da benetako kolapso grabitatorioan aplikatzea espero dugun egoera; eremu elektromagnetikoko energia energia osoa baino txikiagoa da. Kasu honetan  $\Delta(r)$  koefiziente metrikoa positiboa da  $r$  handian eta  $r$  txikian, eta negatiboa  $r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - G(p^2 + q^2)}$  bi ihesguneen barruan. Metrikak koordinatu-singularitasunak ditu  $r_+$  eta  $r_-$ -n; bi kasuetan hauek Schwarzschild-ekin egin genuen bezala koordinatuen

aldaketaren bidez kendu litezke.



$r = r_{\pm}$ -k definitutako gainazalak nuluak dira biak, eta, hain zuzen ere, gertaeren horizontea dira (zentzu batean zehaztuko dugu une batean).  $r = 0$ -n singularitatea denboraren antzeko lerroa da (ez Schwarzschild-en bezala espazio-itxurako azalera). Urrutitik zulo beltzera erortzen den behatzailea bazara,  $r_+$  Schwarzschild-en metrikari  $2GM$  bezalakoa da; erradio honetan  $r$  espazio-itxurako koordinatu izatetik denbora-koordinatu batera aldatzen da, eta nahitaez  $r$  txikitzeko noranzkoan mugitzen zara. Zulo beltzetik kanpoko lekukoek kargarik gabeko zulo batetik kanpo egingo luketen fenomeno berberak ere ikusten dituzte — erortzen den behatzailea gero eta astiroago mugitzen dela ikusten da, eta gero eta gorriro lerratuta dago.

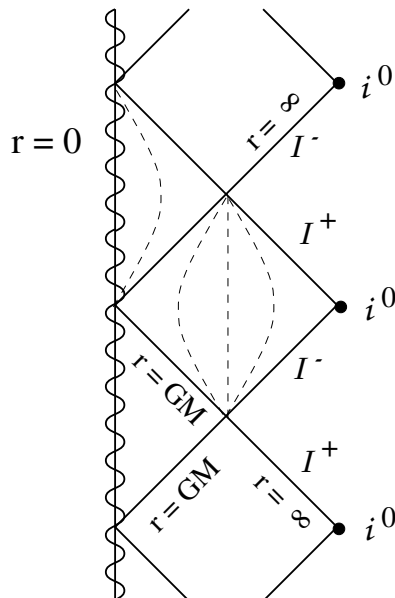
Baina  $r_+$ -tik gero eta beherantzagoak diren erradioetara erortzeak  $r = r_-$  gainazal nulura iritsi arte soilik irauten du, non  $r$  espazio-itxurako koordinatu izatera itzultzen den eta  $r$  txikitzeko noranzkoan higidura eten daitekeen. Beraz, ez duzu singularitasuna jo beharrik  $r = 0$ -n; hori espero da,  $r = 0$  denbora-lerroa baita (eta, beraz, ez du zertan zure etorkizunean). Izan ere, aukera dezakezu  $r = 0$ -ra jarraitzea edo  $r$  handitzeko norantzan hastea  $r = r_-$  gainazal nuluan zehar. Ondoren,  $r$  denboraren antzeko koordinatua izango da berriro, baina alderantzizko orientazioarekin; *handitzeko*  $r$  norabidean

mugitzera behartuta zaude. Azkenean,  $r = r_+$  baino gehiago irtengo zara berriro, hau da, zulo zuri batetik unibertsoaren gainerakoetara irtetea bezalakoa da. Hemendik zulo beltzera itzultzea — oraingoan, lehen sartu zenuena baino zulo ezberdin bat aukeratu dezakezu — eta nahi adina aldiz errepikatu bidaia. Istoriotxo hau datorren Penrose diagramari dagokio, noski koordinatu egokiak aukeratuz eta Reissner-Nordstrøm metrika analitikoki hedatuz zorrozkiago atera daitekeena.

Zenbatekoa da zientzia, zientzia fikzioaren aldean? Seguru asko ez.  $r_-$  gertaeren horizontea zeharkatzear dagoen zulo beltz barruko behatzaile batek ikusten duen mundua pentsatzen baduzu, ohartuko zara denboran atzera begiratu dezaketela kanpokoaren historia osoa ikusteko (asintotikoki laua) unibertsoa, zulo beltzetik ikusita behintzat. Baina historia hau (infinitu luzea) beren denbora egokian ikusten dute — beraz,  $r_-$  hurbiltzen diren heinean iristen zaien edozein seinale urdinez aldatu egiten da. Hori dela eta, arrazoizkoa da (frogarik ezagutzen ez dudan arren) Reissner-Nordstrøm zulo beltz batean sartzen den edozein perturbazio esferikoki simetrikoak deskribatu dugun geometria bortizki asaldatuko duela. Zaila da benetako geometria nolakoa izango den esatea, baina ez dago oso arrazoi onik uste izateko hainbat zizare-zuloren bidez elkarri lotzen diren eskualde asintotikoki lau kopuru infinitua eduki behar duela.

*Hirugarren kasua* —  $GM^2 = p^2 + q^2$

Kasu hau **extreme** Reissner-Nordstrøm soluzioa (edo, besterik gabe, “muturreko zulo beltza”) izenez ezagutzen da. Masa zehatz-mehatz orekatuta dago zentzu batean kargaren bidez — muturreko hainbat zulo beltzez osatutako soluzio zehatzak eraiki ditzakezu, elkarren artean geldirik geratzen direnak denbora guztian. Alde batetik muturreko zuloa jostailu teoriko dibertigarri bat da; konponbide horiek informazio galeraren paradoxaren eta zulo beltzek grabitate kuantikoan duten eginkizunaren azterketetan aztertzen dira maiz. Bestalde, oso ezegonkorra dirudi, materia pixka bat gehitzeak Bigarren kasura eramango baitu.



Muturreko zulo beltzek  $\Delta(r) = 0$  dute erradio bakarrean,  $r = GM$ . Horrek gertaeren horizontea adierazten du, baina  $r$  koordenatua ez da inoiz denboraren antzekoa; nulu bihurtzen da  $r = GM$ -n, baina bi aldeetan espazio antzekoa da.  $r = 0$ -n singularitatea denboraren antzeko lerroa da, gainerako kasuetan bezala. Beraz, zulo beltz honetarako berriz ere singularitasuna saihestu dezakezu eta etorkizunera mugitzen jarraitu asintotikoki laua den eskualdearen kopia gehigarrietara, baina singularitatea beti “ezkerrera” da. Penrose-ren diagrama erakusten da.

Noski, kargatutako irtenbideei buruzko xehetasun gehiago sartu genitzake, baina joan gaitezen zulo beltzak biratzera. Askoz zailagoa da kasu honetan metrikaren soluzio zehatza aurkitzea, simetria esferikoari uko egin diogu eta. Hasteko, dagoen guztia simetria axiala da (errotazio-ardatzaren inguruan), baina irtenbide geldikorrek ere eska ditza-kegu (Killing bektorea denboraren antzekoa). Schwarzschild eta Reissner-Nordström soluzioak erlatibitate orokorra asmatu eta gutxira aurkitu baziren ere, zulo beltz birakari baten soluzioa 1963an bakarrik aurkitu zuen Kerrek. Bere emaitza, **Kerr metrika**, honako nahaste honek ematen du:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2GMr}{\rho^2} (a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2, \quad (7.162)$$

non

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2, \quad (7.163)$$

eta

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (7.164)$$

Hemen  $a$ -k zuloaren biraketa neurtzen du eta  $M$  masa da.  $q$  eta  $p$  karga elektrikoak eta magnetikoak sartzea erraza da,  $2GMr - (q^2 + p^2)/G$ -rekin ordezkaturaz; emaitza **Kerr-Newman metrika** da. Fenomeno interesgarri guztiek kargarik ezean irauten dute, beraz,  $q = p = 0$  ezarriko dugu hemendik aurrera.

$(t, r, \theta, \phi)$  koordenatuak **Boyer-Lindquist koordenatuak** izenez ezagutzen dira.  $a \rightarrow 0$  gisa Schwarzschild koordenatueta murritzen direla egiaztatzea erraza da.  $a$  finko mantentzen badugu eta  $M \rightarrow 0$  uzten badugu, ordea, espazio-denbora laua berreskuratuko dugu baina ez koordenatu polar arruntetan. Metrika bihurtzen da

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}{(r^2 + a^2)} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (7.165)$$

eta honen zati espaziala espazio lau gisa ezagutzen dugu koordenatu elipsoidaletan. 3-espazio euklidearren koordenatu kartesiarrekin erlazionatuta daude

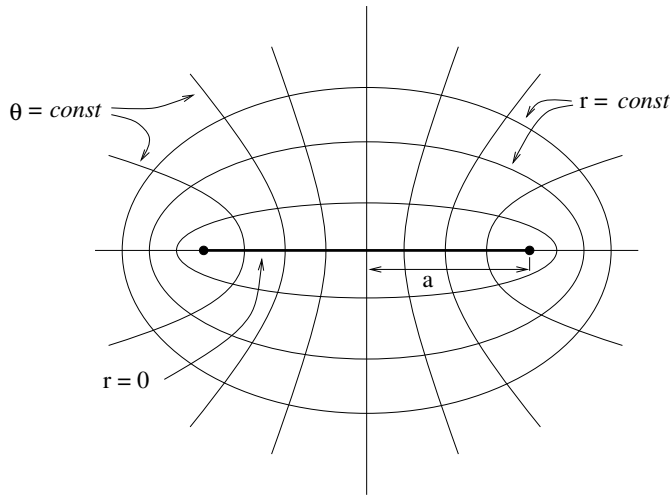
$$x = (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \cos(\phi) \quad (7.166)$$

$$y = (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \sin(\phi) \quad (7.167)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (7.168)$$

(7.114) metrikaren Killing bektore bi daude, biak agerikoak; Koefiziente metrikoak  $t$  eta  $\phi$ -en independenteak direnez, biak  $\zeta^\mu = \partial_t$  eta  $\eta^\mu = \partial_\phi$  Killing bektoreak dira. Noski  $\eta^\mu$ -k disoluzioaren simetria axiala adierazten du.  $\zeta^\mu$  bektorea ez da  $t =$  hiperazalera





konstanteekiko ortogonalak, eta, hain zuzen ere, ez da inongo hiperazalera ortogonalak; beraz, metrika hau geldia da, baina ez estatikoa. (Denborarekin ez da aldatzen, baina biraka ari da).

Gainera, Kerr metrik **Killing tentsorea** izeneko zerbait ere badu. Hau betetzen duen edozein  $(0, n)$   $\xi_{\mu_1 \dots \mu_n}$  tentsore simetrikoa da

$$\nabla_{(\sigma} \xi_{\mu_1 \dots \mu_n)} = 0 . \quad (7.169)$$

Killing tentsoreen adibide sinpleak metrika bera eta Killing bektoreen tentsore simetrizatutako produktuak dira. Killing bektore batek higidura geodesikoaren konstante bat inplikatzeko duen bezala, Killing tentsorea baldin badago, geodesiko batean zehar izango dugu

$$\xi_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{dx^{\mu_1}}{d\lambda} \dots \frac{dx^{\mu_n}}{d\lambda} = \text{constant} . \quad (7.170)$$

(Killing bektoreak ez bezala, maila altuagoko Killing tentsoreak ez datoz bat metrikaren simetriekin). Kerr geometrian  $(0, 2)$  tentsorea defini dezakegu

$$\xi_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu} . \quad (7.171)$$

Adierazpen honetan  $l$  eta  $n$  bi bektoreak (indizeak igota) honela ematen dira.

$$l^\mu = \frac{1}{\Delta} (r^2 + a^2, \Delta, 0, a) \quad (7.172)$$

$$n^\mu = \frac{1}{2\rho^2} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a) . \quad (7.173)$$

Bi bektoreak nuluak dira eta betetzen dituzte

$$l^\mu l_\mu = 0 , \quad n^\mu n_\mu = 0 , \quad l^\mu n_\mu = -1 . \quad (7.174)$$

(Balio duenagatik, espazio-denbora honetarako Petrov sailkapeneko “bektore nulu bereziak” dira). Definizio hauekin, zuk zeuk egiaztatu dezakezu  $\xi_{\mu\nu}$  Killing tentsorea dela.

Pentsa dezagun Kerr soluzio osoaren egituraz. Singulartasunak  $\Delta = 0$  eta  $\rho = 0$ -n agertzen direla dirudi; jar dezagun arreta lehenik  $\Delta = 0$ -ra. Reissner-Nordstrøm soluzioan bezala hiru aukera daude:  $G^2M^2 > a^2$ ,  $G^2M^2 = a^2$  eta  $G^2M^2 < a^2$ . Azken kasuak singularitate biluzi bat du, eta  $G^2M^2 = a^2$  muturreko kasua ezegonkorra da, Reissner-Nordstrøm-n bezala. Kasu hauek interes fisiko gutxiago dutenez eta denbora laburra denez,  $G^2M^2 > a^2$ -n zentratuko gara. Orduan  $\Delta$  desagertzen den bi erradio daude, arabera

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2} . \quad (7.175)$$

Bi erradioak gainazal nuluak dira, gertaeren horizonte bihurtuko direnak. Gainazal hauen azterketa Reissner-Nordstrøm kasuarekin analogia estuan egiten da; erraza da horizontetean zehar hedatzen diren koordinatuak aurkitzea.

$r_{\pm}$  gertaeren horizonteez gain, Kerr soluzioak interes-azalera gehigarri bat ere badu. Gogoratu soluzio esferikoki simetrikotetan,  $\zeta^{\mu} = \partial_t$  hiltze-bektorea “denbora-antzekoa” benetan nulu bihurtu zela gertaeren (kanpoko) horizontean, eta espazio-itxurakoa barruan. Kerr-en antzekoa non gertatzen den egiaztatuz, kalkulatzan dugu

$$\zeta^{\mu}\zeta_{\mu} = -\frac{1}{\rho^2}(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) . \quad (7.176)$$

Hau ez da desagertzen kanpoko gertaeren horizontean; izan ere,  $r = r_{+}$ -n (non  $\Delta = 0$ ), dugu

$$\zeta^{\mu}\zeta_{\mu} = \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \geq 0 . \quad (7.177)$$

Beraz, Killing bektorea espazio-itxurakoa da jada kanpoko horizontean, ipar eta hego poloetan izan ezik ( $\theta = 0$ ) non nulua den.  $\zeta^{\mu}\zeta_{\mu} = 0$  **Killing horizon** izenez ezagutzen den puntuen tokia, eta honela ematen da.

$$(r - GM)^2 = G^2M^2 - a^2 \cos^2 \theta , \quad (7.178)$$

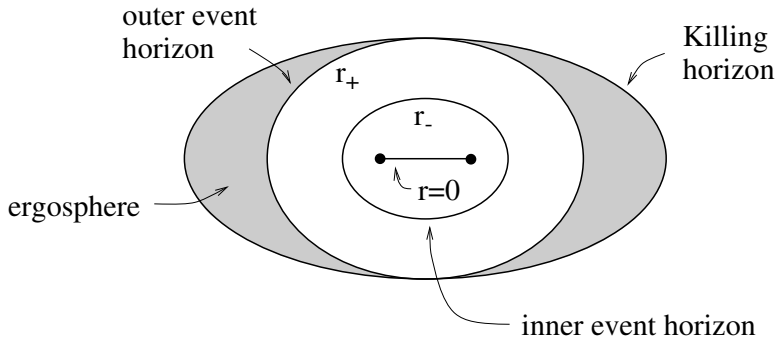
kanpoko gertaeren horizontea, berriz, arabera

$$(r_{+} - GM)^2 = G^2M^2 - a^2 . \quad (7.179)$$

Beraz, bi gainazal horien artean eskualde bat dago, **ergosfera** deritzona. Ergosferaren barruan, zulo beltzaren biraketaren noranzkoan mugitu behar zara ( $\phi$  noranzkoan); hala ere, gertaeren horizonterantz edo urrundu zaitezke (eta ez dago arazorik ergosferatik irteteko). Zeruertza zeharkatu aurretik ere gauza interesgarriak gerta daitezkeen lekua da; honi buruzko xehetasun gehiago geroago.

Penrose diagramak marrazten hasi aurretik, benetako kurbadura singularitatearen izaera ulertu behar dugu; hau ez da  $r = 0$ -n gertatzen espazio-denbora honetan,  $\rho = 0$ -n baizik.  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  bi kantitate bistan ez-negatiboren batura denez, bi kantitate biak zero direnean bakarrik desagertu daiteke, edo

$$r = 0 , \quad \theta = \frac{\pi}{2} . \quad (7.180)$$



Emaitza barregarria dirudi, baina gogoratu  $r = 0$  ez dela espazioko puntu bat, disko bat baizik;  $r = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  puntuen multzoa disko honen ertzean dagoen *eraztuna* da. Errotazioak “leundu” du Schwarzschild berezitasuna, eraztun baten gainean zabalduz.

Zer gertatzen da ring barruan sartzen bazara? Jarraipen analitiko zaindu batek (egin-go ez duguna) agerian utziko luke beste espazio-denbora asintotikoki lau batera irteten zarela, baina ez etorri zarenaren kopia berdina. Espazio-denbora berria Kerr-en metrikak deskribatzen du  $r < 0$ -rekin. Ondorioz,  $\Delta$  ez da inoiz desagertzen eta ez dago horizontetarik. Penrose diagrama Reissner-Nordstrøm-ren antzekoa da, orain singularitatetik pasa zaitezke izan ezik.

Zulo beltzaren bidez gureari loturiko eskualde asintotikoki lau horien ohiko bitxikeria ez ezik, eraztunaren berezitasunaren inguruko eskualdeak patologia osagarriak ditu: denboraren antzeko kurba itxiak.  $\phi$  inguratzen duten ibilbideak kontuan hartzen badituzu,  $\theta$  eta  $t$  konstante mantenduz eta  $r$  balio negatibo txiki bat mantenduz, bide horretako lerro-elementua da.

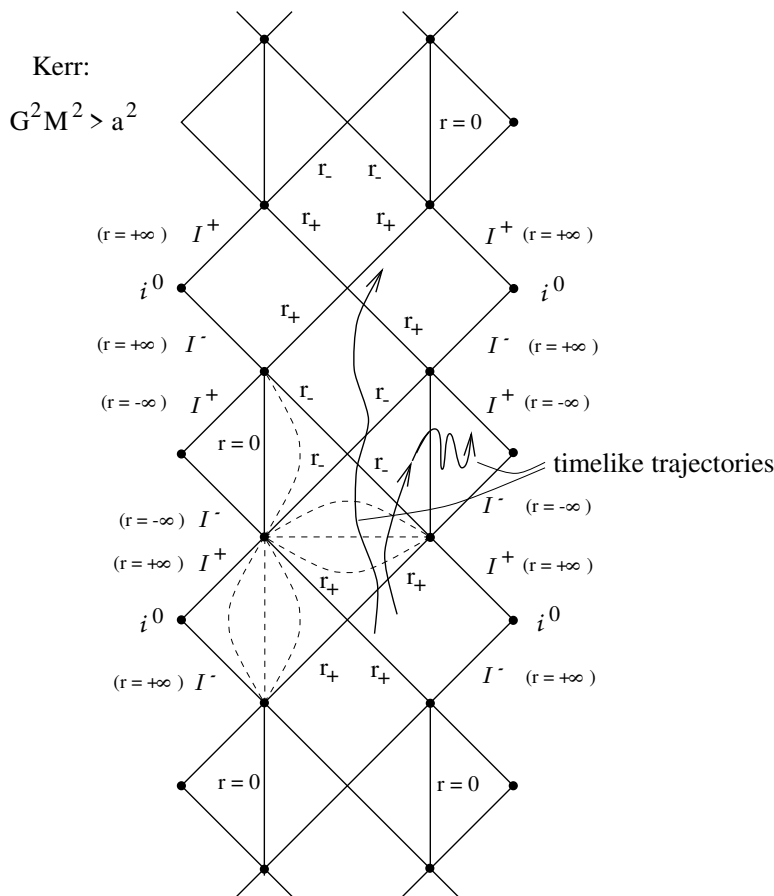
$$ds^2 = a^2 \left( 1 + \frac{2GM}{r} \right) d\phi^2, \quad (7.181)$$

$r$  negatibo txikirako negatiboa dena. Bide hauek itxita daudenez, CTCkoak direla jakina. Beraz, iraganean ezagutu dezakezu zure burua, horrek dakarren guztiarekin.

Jakina, Kerr-en hedapen analitikoari buruz esaten dugun guztia Schwarzschild eta Reissner-Nordstrøm-entzat aipatu ditugun oharpen berberen mende dago; nekez da kolapso grabitatorio errealistak espazio-denbora bitxi horietara ekartzea. Hala ere, beti da erabilgarria irtenbide zehatzak izatea. Gainera, Kerr-en metrikarentzat gauza arraroak gertatzen dira gertaeren horizontetik kanpo geratzen bagara ere, eta horietara jotzen dugu orain.

Hasteko, zuloaren abiadura angeluarra arreta handiz kontuan hartzen dugu. Jakina, abiadura angelurraren definizio konbentzionala zertxobait aldatu beharko da espazio-denboraren metrika bezain abstraktuari aplikatu ahal izateko. Azter dezagun Kerr zulo beltz baten  $\phi$  noranzkoan  $r$  erradio batzuetan ( $\theta = \pi/2$ ) ekuatore-planoan igortzen den fotoi baten patua. Igortzen den momentuan bere momentuak ez du osagairik  $r$  edo  $\theta$  norabidean, eta, beraz, nulua izateko baldintza da.

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + g_{t\phi}(dtd\phi + d\phi dt) + g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (7.182)$$



Hau berehala konpondu daiteke lortzeko

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} . \quad (7.183)$$

Kantitate hori Kerr metrikaren Killing horizontean ebaluatzen badugu,  $g_{tt} = 0$  dugu, eta bi soluzioak dira

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 , \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{2a}{(2GM)^2 + a^2} . \quad (7.184)$$

Nulua ez den soluzioak  $a$ -ren zeinu bera du; hau zuloaren biraketaren noranzko berean mugitzen den fotoia bezala interpretatzen dugu. Zero soluzioak esan nahi du zuloaren errotazioaren aurka zuzendutako fotoia ez dela batera mugitzen koordinatu-sistema honetan. (Hau ez da fotoiaren ibilbidearen soluzio osoa, bere aldiuneko abiadura zero dela dioen baieztapena baizik.) Lehen aipatu dugun “marko inertzialak arrastatzearen” adibide bat da. Ariketa honen helburua zera da: partikula masiboak, fotoiak baino motelago mugitu behar direnak, nahitaez arrastatu egiten direla zuloaren errotazioarekin batera Killing horizontearen barnean daudenean. Arrastatze honek  $r_+$ -n kanpoko gertaeren horizonterantz hurbiltzen garen heinean jarraitzen du; gertaeren horizontearen beraren

abiadura angeluarra,  $\Omega_H$ , horizontean partikula baten abiadura angeluar minimoa dela defini dezakegu. (7.132)-tik zuzenean aurkitzen dugu

$$\Omega_H = \left( \frac{d\phi}{dt} \right)_- (r_+) = \frac{a}{r_+^2 + a^2} . \quad (7.185)$$

Orain goazen mugimendu geodesikora,  $\zeta^\mu = \partial_t$  eta  $\eta^\mu = \partial_\phi$  Killing bektoreekin lotutako kantitate kontserbatuak kontuan hartuta sinplifikatuko dela dakiguna. Eskura ditugun helburuetarako gure arreta partikula masiboetara muga dezakegu, horretarako lau momentuarekin lan egin dezakegu.

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} , \quad (7.186)$$

non  $m$  partikularen gainerako masa den. Orduan gure bi kantitate kontserbatu gisa har ditzakegu partikularen benetako energia eta momentu angeluarra,

$$E = -\zeta_\mu p^\mu = m \left( 1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) \frac{dt}{d\tau} + \frac{2mGMa}{\rho^2} \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \quad (7.187)$$

eta

$$L = \eta_\mu p^\mu = -\frac{2mGMa}{\rho^2} \sin^2 \theta \frac{dt}{d\tau} + \frac{m(r^2 + a^2)^2 - m\Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} . \quad (7.188)$$

(Kontserbatutako kantitateei buruzko gure aurreko definizioetatik desberdinak dira, non  $E$  eta  $L$  energia eta momentu angeluarra *masa unitateko* gisa hartu ziren. Nolanahi ere kontserbatzen dira, noski.)

$E$  definizioaren minus ikurra hor dago, infinituan  $\zeta^\mu$  eta  $p^\mu$  denboraren antzekoak direlako, beraz, haien barne produktua negatiboa da, baina energia positiboa izatea nahi dugu. Ergosferaren barruan, ordea,  $\zeta^\mu$  espazio-itxura bihurtzen da; beraz, zeinetarako partikulak imajina ditzakegu

$$E = -\zeta_\mu p^\mu < 0 . \quad (7.189)$$

Horrek zenbateraino gogaitzen gaituen Killing horizontetik kanpoko *guztiek* energia positiboak izan behar dituztela ohartzeak zertxobait hobetzen du; beraz, energia negatiboa duen ergosferaren barneko partikula batek Killing horizontearen barruko geodesiko batean geratu behar du, edo azeleratu egin behar da bere energia positiboa izan arte ihes egin nahi badu.

Hala ere, gauzatze honek biraka egiten duen zulo beltz batetik energia ateratzeko modu bat dakar; metodoa **Penrose prozesua** izenez ezagutzen da. Ideia sinplea da; ergosferatik kanpotik abiatuta, harkaitz handi batez armatu eta zulo beltzera jauzi egiten zara.  $p^{(0)\mu}$  (zu + arroka) sistemaren lau momentuari  $p^{(0)\mu}$  deitzen badiogu, orduan  $E^{(0)} = -\zeta_\mu p^{(0)\mu}$  energia positiboa da, zalantzarik gabe, eta kontserbatu egiten da zure geodesikoan zehar mugitzen zaren heinean. Behin ergosferan sartuta, indar guztiakin botatzen duzu harria, oso modu zehatzean. Zure momentuari  $p^{(1)\mu}$  eta arrokaarenari  $p^{(2)\mu}$  deitzen badiogu, orduan botatzen duzun momentuan momentuaren kontserbazioa dugu erlatibitate berezian bezala:

$$p^{(0)\mu} = p^{(1)\mu} + p^{(2)\mu} . \quad (7.190)$$



$E^{(2)}$  negatiboa izateko antolatu dugunez eta  $\Omega_H$  positiboa denez, ikusten dugu partikula momentu angeluar negatiboa izan behar duela — zuloaren errotazioaren aurka mugitzen ari da. Ergosferatik ihes egin ondoren eta arroka gertaeren horizontearen barruan erori denean, zuloaren masa eta momentu angeluarra izan ohi zirenak gehi arrokaen ekarpen negatiboak dira:

$$\delta M = E^{(2)} \quad (7.196)$$

$$\delta J = L^{(2)}. \quad (7.197)$$

Hemen  $J$  notazioa sartu dugu zulo beltzaren momentu angeluarrarentzat; arabera ematen da

$$J = Ma. \quad (7.198)$$

Ez dugu hori justifikatuko, baina Wald-en begiratu dezakezu azalpen bat. Orduan (7.144) momentu angeluarra zenbat murriztu dezakezun muga bihurtzen da:

$$\delta J < \frac{\delta M}{\Omega_H}. \quad (7.199)$$

Zehazki muga horretara iristen bagara, botatzen dugun arroka gero eta nuluagoa denez, prozesu “ideala” dugu, zeinetan  $\delta J = \delta M/\Omega_H$ .

Emitza indartsua frogatzeko ideia hauek erabiliko ditugu orain: Penrose prozesua zulo beltzetik energia ateratzeko erabil dezakezun arren, ezin duzu inoiz gertaeren horizontearen azalera murriztu. Kerr-en metrika baterako, kalkulu sinple bat egin daiteke (metria eta bolumen-elementua proiektatuz eta abar) gertaeren horizontearen eremua kalkulatzeko:

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2). \quad (7.200)$$

Hau ez dela jaisten erakusteko, komenigarriena da zulo beltzaren **masa murriztezinaren** arabera lan egitea, honela definituta.

$$M_{\text{irr}}^2 = \frac{A}{16\pi G^2} \quad (7.201)$$

$$= \frac{1}{4G^2}(r_+^2 + a^2) \quad (7.202)$$

$$= \frac{1}{2} \left( M^2 + \sqrt{M^4 - (Ma/G)^2} \right) \quad (7.203)$$

$$= \frac{1}{2} \left( M^2 + \sqrt{M^4 - (J/G)^2} \right). \quad (7.204)$$

Desberdin dezakegu lortzeko, lan pixka bat egin ondoren,

$$\delta M_{\text{irr}} = \frac{a}{4G\sqrt{G^2 M^2 - a^2} M_{\text{irr}}} (\Omega_H^{-1} \delta M - \delta J). \quad (7.205)$$

(Uste dut ondo dauzkadala  $G$  faktoreak, baina egiaztatzeak ez luke kalterik izango.) Orduan gure muga (7.147) bihurtzen da

$$\delta M_{\text{irr}} > 0. \quad (7.206)$$

Murritzina den masa ezin da inoiz murriztu; hortik dator kio izena. Honen ondorioz, zulo beltz batetik atera dezakegun energia-kopurua zerora biraketa moteldu baino lehen da

$$M - M_{\text{irr}} = M - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( M^2 + \sqrt{M^4 - (J/G)^2} \right)^{1/2} . \quad (7.207)$$

Erauzketa oso honen emaitza  $M_{\text{irr}}$  masako Schwarzschild zulo beltza da. Gertatzen da egin dezakegun onena Kerr-en muturreko zulo beltz batetik hastea dela; orduan bere energia osoaren 29 % gutxi gorabehera atera dezakegu.

$M_{\text{irr}}$ -ren murriztuezinak berehala ekartzen du  $A$  eremua ezin dela inoiz murriztu. (7.149) eta (7.150) ditugu

$$\delta A = 8\pi G \frac{a}{\Omega_H \sqrt{G^2 M^2 - a^2}} (\delta M - \Omega_H \delta J) , \quad (7.208)$$

gisa birmolda daitekeena

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega_H \delta J , \quad (7.209)$$

non aurkeztu dugun

$$\kappa = \frac{\sqrt{G^2 M^2 - a^2}}{2GM(GM + \sqrt{G^2 M^2 - a^2})} . \quad (7.210)$$

$\kappa$  kantitatea zulo beltzaren **gainazaleko grabitatea** bezala ezagutzen da.

(7.154) bezalako ekuazioak izan ziren zulo beltzen eta termodinamikaren arteko erlazioaz pentsatzen hasi zirenak. Demagun termodinamikaren lehen legea,

$$dU = TdS + \text{work terms} . \quad (7.211)$$

Naturala da  $\Omega_H \delta J$  terminoa zulo beltzean harriak botaz egiten dugun “lana” dela pentsatzea. Orduan, analogia termodinamikoa forma hartzen hasten da  $A$  eremua  $S$  entropia gisa eta gainazaleko grabitatea  $\kappa / 8\pi G$  aldiz  $T$  tenperatura gisa identifikatzea pentsatzen badugu. Izan ere, erlatibitate orokor klasikoaren testuinguruan analogia funtsean perfektua da. Termodinamikaren “zero” legeak dio oreka termikoan tenperatura konstantea dela sistema osoan; zulo beltzen antzeko adierazpena da zulo beltz geldiek gainazaleko grabitate konstantea dutela horizonte osoan (egia). Ikusi dugunez, lehen legea (7.156) (7.154)-ren baliokidea da. Bigarren legea, entropia inoiz ez dela gutxitzen, horizontearen azalera inoiz ez dela murrizten dioen adierazpena besterik ez da. Azkenik, hirugarren legea da ezinezkoa dela  $T = 0$  edozein prozesu fisikotan lortzea, eta horrek esan nahi du ezinezkoa dela  $\kappa = 0$  edozein prozesu fisikotan lortzea.  $\kappa = 0$  muturreko zulo beltzei dagokie (Kerr-en edo Reissner-Nordström) — non singularitate biluziak agertuko ziren. Nolabait, bada, hirugarren legea zentsura kosmikoarekin lotuta dago.

Falta den pieza da *real* gorputz termodinamikoak ez direla hor esertzen; gorputz beltzaren erradiazioa igortzen dute haien tenperaturaren arabera espektro batekin. Zulo beltzak, pentsatu zen Hawkingek bere erradiazioa aurkitu aurretik, ez egin hori, benetan beltzak direlako. Historikoki, Bekensteinek zulo beltzak gorputz beltz zintzoak izan behar zirela pentsatu zuen, tenperatura egokian dagoen erradiazioa barne. Honek Hawking haserretu zuen, oker frogatzera abiatu zena, eta azkenean erradiazioa egongo zela frogatzen amaitu zuen. Beraz, analogia termodinamikoa espero genuena baino are hobea da, nahiz eta seguru esatea inork ez dakiela zergatik.



## Capítulo 8

# Kosmologia

Eredu kosmologiko garaikideak unibertsoa ia berdina dela nonahi ideian oinarritzen dira — **Kopernikar printzipioa** izenez ezagutzen den jarrera batzuetan. Horren aurrean, halako aldarrikapenak zentzugabea dirudi; eguzkiaren erdiguneak, adibidez, ez du antz gutxi izarrarteko espazioaren hotz hutsarekin. Baina Kopernikoko printzipioa oso eskala handienetan soilik aplikatzeko hartzen dugu, non dentsitate-aldakuntza lokalak batez bestekoak diren. Horrelako eskaletan duen baliotasuna hainbat behaketetan ageri da, hala nola, galaxien kopuruak eta  $X$  izpi difusioen eta  $\gamma$  izpi hondoen behaketetan, baina argiena  $3^\circ$  mikrouhin-hondoko erradiazioan dago. Gaur egun mikrouhin-hondoa guztiz leuna ez dela dakigun arren (eta inork ez zuen halakorik espero), erregularitasunarekiko desbideratzeak  $10^{-5}$  edo gutxiagokoak dira, zalantzarik gabe, oinarri egokia eskala handietan espazio-denbora gutxi gorabehera deskribatzeko. .

Printzipio kopernikarra anizkuntze batek izan ditzakeen bi propietate zehatzagorekin erlazionatuta dago: isotropia eta homogeneousuna. **Isotropia** espazioko puntu zehatz batean aplikatzen da, eta espazioak itxura berdina duela adierazten du edozein norabidetan begiratuta. Formalkiago,  $M$  anizkuna isotropoa da  $p$  puntu baten inguruan,  $V$  eta  $W$  edozein bektoretan  $T_p M$   $M$ -ren isometria bat badago,  $W$ -ren aurrerapena isometriaren azpian  $V$ -rekin paraleloa da (ez da aurrera eraman). Mikrouhinen hondoren behaketak adierazten duen isotropia da.

**Homogeneousuna** metrika espazio osoan berdina dela dioen adierazpena da. Beste era batera esanda,  $p$  eta  $q$   $M$ -ko edozein bi puntu kontuan hartuta,  $p$   $q$ -n hartzen duen isometria dago. Kontuan izan ez dagoela beharrezko erlaziorik homogeneousunaren eta isotropiaren artean; Multiple bat homogeneousoa izan daiteke baina inon isotropoa (esaterako  $\mathbb{R} \times S^2$  ohiko metrikari), edo puntu baten inguruan isotropoa izan daiteke homogeneousoa izan gabe (esaterako, kono bat, bere erpinaren inguruan isotropoa dena baina zalantzarik gabe homogeneousoa ez dena). Bestalde, espazio bat *nonahi* isotropoa bada, homogeneousoa da. (Era berean, puntu baten inguruan isotropoa bada eta homogeneousoa ere bada, puntu bakoitzaren inguruan isotropoa izango da.) Isotropiaren behaketa-froga ugari dagoenez, eta printzipio kopernikarrak unibertsoaren erdigunea ez garela sinetsaraziko digunez eta, beraz, beste nonbaiteko behatzaileek isotropia ere behatu beharko lukete, aurrerantzean homogeneousuna eta isotropia hartuko ditugu.

Harrapaketa bat dago. Urrutiko galaxiak begiratzen ditugunean, gugandik urruntzen ari direla dirudi; unibertsoa ez da itxuraz estatikoa, denborarekin aldatzen ari dena baizik. Horregatik, eredu kosmologikoak eraikitzen hasten gara unibertsoa espazioan homogeneoa eta isotropoa dela, baina ez denboran. Erlatibitate orokorrean, hori unibertsoa espazio-itxurako xaflatan foliatu daitekeen baieztapenean itzultzen da, xerra bakoitza homogeneoa eta isotropoa izan dadin. Beraz, gure espazio-denbora  $\mathbb{R} \times \Sigma$  dela kontsideratzen dugu, non  $\mathbb{R}$  denboraren norabidea adierazten duen eta  $\Sigma$  hiru-multiple homogeneo eta isotropo bat den. Homogeneitatearen eta isotropiaren erabilgarritasuna  $\Sigma$  espazio simetriko maximoa izan behar duela adierazten dute. (Pentsatu isotropia errotazioetan aldaezin gisa, eta homogeneotasuna translazioetan aldaezin gisa. Orduan, homogeneotasunak eta isotropiak batera, espazio batek Killing sektore kopuru maximoa duela adierazten dute.) Beraz, gure metrika formakotzat har dezakegu

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(u)du^i du^j . \quad (8.1)$$

Hemen  $t$  denboraren antzeko koordinatua da, eta  $(u^1, u^2, u^3)$   $\Sigma$  koordinatuak dira;  $\gamma_{ij}$   $\Sigma$ -ko metrika maximo simetrikoa da. Formula hau (7.2) kasu berezi bat da, Schwarzschild-en metrika ateratzeko erabili duguna,  $t$   $g_{tt} = -1$  horrela eskalatu dugun izan ezik.  $a(t)$  funtzioari **eskala faktorea** izenez ezagutzen da, eta  $\Sigma$   $t$  une honetan espazio-itxurako zatia “zenbat handia den” adierazten digu. Hemen erabiltzen diren koordinatuak, zeinetan metrika  $dt du^i$  gurutze-terminorik gabe dagoen eta espazio-itxurako osagaiak  $t$ -ren funtzio bakar baten proportzionalak diren, **koordinatu ibiltariak** izenez ezagutzen dira eta **konstantean geratzen den behatzailea**. **0A3K8** “comoving” ere deitzen zaio. Behatzaile erkor batek bakarrik pentsatuko du unibertsoak isotropo itxura duela; izan ere, Lurrean ez gaude guztiz komodiboan, eta, ondorioz, mikrouhin kosmikoaren hondoan dipolo anisotropia bat ikusten dugu Doppler efektu konbentzionalaren ondorioz.

Gure interesa, beraz,  $\gamma_{ij}$  hiru-metriko euklidear simetriko maximoetan dago. Badakigu metrika maximo simetrikoak obeditzen dituela

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) , \quad (8.2)$$

non  $k$  konstanteren bat den, eta  ${}^{(3)}$  goi-indize bat jarri dugu Riemann-en tentsorean hiru metriko  $\gamma_{ij}$  rekin lotuta dagoela gogorarazteko, ez espazio-denbora osoaren metrikarekin. Ricci tentsorea da orduan

$${}^{(3)}R_{jl} = 2k\gamma_{jl} . \quad (8.3)$$

Espazioa simetrikoa maximoa izango bada, esferikoki simetrikoa izango da zalantzarik gabe. Dagoeneko badakigu zerbait esferikoki simetriko espazioei buruz Schwarzschild soluzioaren esploraziotik; metrika forman jar daiteke

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (8.4)$$

Ricci tentsorearen osagaiak (7.16)tik lor daitezke, espazio-denbora esferikoki simetriko

baterako,  $\alpha = 0$  eta  $\partial_0\beta = 0$  ezarriz, eta horrek ematen du.

$${}^{(3)}R_{11} = \frac{2}{r}\partial_1\beta \quad (8.5)$$

$${}^{(3)}R_{22} = e^{-2\beta}(r\partial_1\beta - 1) + 1 \quad (8.6)$$

$${}^{(3)}R_{33} = [e^{-2\beta}(r\partial_1\beta - 1) + 1]\sin^2\theta . \quad (8.7)$$

Hauek metrikarekiko proportzionalak ezartzen ditugu (8.3) erabiliz, eta  $\beta(r)$  ebatzi dezakegu:

$$\beta = -\frac{1}{2}\ln(1 - kr^2) . \quad (8.8)$$

Honek espazio-denborari buruzko metrika hau ematen digu:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (8.9)$$

Hau da **Robertson-Walker metrika**. Oraindik ez ditugu Einsteinen ekuazioak erabili; horiek zehaztuko dute  $a(t)$  eskala-faktorearen portaera.

Kontuan izan ordezkapenak

$$k \rightarrow \frac{k}{|k|} \quad (8.10)$$

$$r \rightarrow \sqrt{|k|} r \quad (8.11)$$

$$a \rightarrow \frac{a}{\sqrt{|k|}} \quad (8.12)$$

utzi (8.7) aldaezin. Beraz, parametro garrantzitsu bakarra  $k/|k|$  da, eta hiru kasu interesgarri daude:  $k = -1$ ,  $k = 0$  eta  $k = +1$ .  $k = -1$  kasua  $\Sigma$ -ko kurbadura negatibo konstanteari dagokio, eta **irekia** deitzen zaio;  $k = 0$  kasuari  $\Sigma$ -n kurbaturarik ezari dagokio, eta **laua** deitzen zaio;  $k = +1$  kasua  $\Sigma$ -ko kurbatura positiboari dagokio, eta **itxia** deritzo.

Azter ditzagun aukera horietako bakoitza.  $k = 0$  kasu laurako  $\Sigma$ -ko metrika da

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (8.13)$$

$$= dx^2 + dy^2 + dz^2 , \quad (8.14)$$

espazio euklidear laua besterik ez dena. Mundu mailan,  $\mathbb{R}^3$  edo aniztasun konplikatuago bat deskriba dezake, adibidez, hiru toroko  $S^1 \times S^1 \times S^1$ .  $k = +1$  kasu itxirako  $r = \sin\chi$  defini dezakegu  $\Sigma$ -n metrika idazteko

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2 , \quad (8.15)$$

hau da, hiru esfera baten metrika. Kasu honetan egitura global posible bakarra hiru-esfera da benetan ( $\mathbb{RP}^3$  aldaera ez-orientagarria izan ezik). Azkenik  $k = -1$  kasu irekian  $r = \sinh\psi$  lor dezan ezarri dezakegu

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sinh^2\psi d\Omega^2 . \quad (8.16)$$

Hau kurbadura negatibo konstanteko hiru dimentsioko espazio baten metrika da; zaila da ikusaraztea, baina pentsa Hirugarren atalean hitz egin dugun jarlekuaren adibidea. Mundu mailan halako espazio bat betirako luza daiteke (hori da “ireki” hitzaren jatorria), baina soilki konektatuta ez den espazio trinko bat ere deskriba lezake (beraz, “irekia” ez da deskribapen zehatzena) .

Metrika eskuan, konexio-koefizienteak eta kurbadura-tentsorea kalkulatzeko hasi gaitzke.  $\dot{a} \equiv da/dt$  ezarrita, Christoffel ikurrak honela ematen dira

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2 \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (8.17)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (8.18)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2) \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \quad (8.19)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (8.20)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta . \quad (8.21)$$

Ricci tentsorearen osagai nuluak dira

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (8.22)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (8.23)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (8.24)$$

$$R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta , \quad (8.25)$$

eta Ricci eskalarra da orduan

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) . \quad (8.26)$$

Unibertsoa ez dago hutsik, beraz, ez zaizkigu interesatzen Einsteinen ekuazioen hutseko soluzioak. Unibertsoa materia eta energia fluido perfektu baten bidez modelatzea aukeratuko dugu. Lehen atalean fluido perfektuei buruz hitz egin dugu, non bere atsedeen-esparruan isotropoak diren fluido gisa definitu ziren. Fluido perfektu baten energia-momentuaren tentsorea idatz daiteke

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} , \quad (8.27)$$

non  $\rho$  eta  $p$  energia-dentsitatea eta presioa (hurrenez hurren) gainerako markoan neur-tutakoaren arabera, eta  $U^\mu$  fluidoaren lau abiadura den. Argi dago, marko batzuetan isotropo den fluido batek fotograma batzuetan isotropo den metrika batera eramaten badu, bi fotogramak bat egingo dute; hau da, fluidoa pausatuta egongo da koordinatu komunetan. Lau abiadura da orduan

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) , \quad (8.28)$$

eta energia-momentuaren tentsorea da

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix} . \quad (8.29)$$

Indize bat igota honek forma erosoena hartzen du

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) . \quad (8.30)$$

Kontuan izan arrastoa honek ematen duela

$$T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p . \quad (8.31)$$

Einsteinen ekuazioetara konektatu aurretik, hezigarria da energiaren ekuazioaren kontserbazioaren zero osagaia kontuan hartzea:

$$0 = \nabla_\mu T^\mu{}_0 \quad (8.32)$$

$$= \partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0{}_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda \quad (8.33)$$

$$= -\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) . \quad (8.34)$$

Aurrera egiteko **egoera-ekuazioa** aukeratu behar da,  $\rho$  eta  $p$  arteko erlazioa. Funtsean, kosmologiari dagozkion fluido perfektu guztiek egoera ekuazio sinpleari men egiten diote

$$p = w\rho , \quad (8.35)$$

non  $w$  denboraren independentea den konstantea den. Energiaren ekuazioaren kontserbazioa bihurtzen da

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a} , \quad (8.36)$$

lortzeko integra daitekeena

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} . \quad (8.37)$$

Fluido kosmologikoen bi adibide ezagunenak **hautsa** eta **erradiazioa** izenez eza-gutzen dira. Hautsa talkarik gabeko materia da, ez-erlatibista,  $w = 0$  betetzen duena. Adibideen artean, izar arruntak eta galaxiak daude, eta horien presioa arbuiagarria da energia-dentsitatearekin alderatuta. Hautsa “materia” izenez ere ezagutzen da, eta energia-dentsitatea gehienbat hautsari zor zaion unibertsoei **materia-mendeatutako** izenez ezagutzen dira. Materiaren energia-dentsitatea erortzen da

$$\rho \propto a^{-3} . \quad (8.38)$$

Unibertsoa hedatzen den heinean partikulen zenbaki-dentsitatearen murrizketa gisa interpretatzen da. (Hautsarentzat energia-dentsitatea gainerako energia da nagusi, hau da, zenbaki-dentsitatearekiko proportzionala dena.) “Erradiazioa” erabil daiteke benetako erradiazio elektromagnetikoa deskribatzeko, edo abiadura erlatiboarekin higitzen

diren partikula masiboak deskribatzeko. fotoietatik bereiztezin bilakatzen diren argia (gutxienez euren egoera-ekuazioari dagokionez). Erradiazioa fluido perfektua den arren eta, beraz, (8.15) bidez emandako energia-momentuaren tentsorea badu ere, badakigu  $T_{\mu\nu}$  eremuaren indarraren arabera adieraz daitekeela.

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}) . \quad (8.39)$$

Honen aztarna honek ematen du

$$T^{\mu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left[ F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} (4) F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right] = 0 . \quad (8.40)$$

Baina honek ere (8.19) berdindu behar du, beraz, egoera-ekuazioa da

$$p = \frac{1}{3} \rho . \quad (8.41)$$

Energia-dentsitate gehiena erradiazio moduan dagoen unibertsoari **erradiazioa nagusi den** deritzo. Erradiazioaren energia dentsitatea erortzen da

$$\rho \propto a^{-4} . \quad (8.42)$$

Horrela, erradiazioen energia-dentsitatea materian baino apur bat azkarrago jaisten da; hau da, fotioen dentsitatea partikula ez-erlatibistaren zenbaki-dentsitatearen modu berean murrizten delako, baina fotoi indibidualek ere  $a^{-1}$  energia galtzen dute gorriara mugitzen diren heinean, geroago ikusiko dugun bezala. (Era berean, partikula masiboek baina erlatibistak energia galduko dute koordinatu erlojikoetan “motelduz”). Uste dugu gaur egun unibertsoaren energia-dentsitatean materia nagusi dela,  $\rho_{\text{mat}}/\rho_{\text{rad}} \sim 10^6$ -rekin. Dena den, iraganean unibertsoa askoz txikiagoa zen, eta erradiazioen energia-dentsitatea oso garai goiztiarrean nagusi izango zen.

Batzuetan kontuan hartzen den beste energia-momentu bat dago, hutsarena bera alegia. Energia hutsean sartzea konstante kosmologiko bat sartzearen parekoa da. Konstante kosmologikoa duten Einsteinen ekuazioak dira

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} , \quad (8.43)$$

hau da, argi eta garbi, konstante kosmologikorik ez duten ekuazioen forma bera, baina hutsaren energia-momentuaren tentsorea,

$$T_{\mu\nu}^{(\text{vac})} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} . \quad (8.44)$$

Honek fluido perfektu baten forma du

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G} . \quad (8.45)$$

Beraz,  $w = -1$  dugu, eta energia-dentsitatea  $a$ -tik independentea da, hau da, hutsaren energia-dentsitaterako espero genukeena. Unibertsoa hedatzen den heinean materian eta

erradiazioaren energia-dentsitatea gutxitzen denez, huts-energia nulua ez bada epe luzera irabazteko joera du (unibertsoa uzurtzen hasten ez den bitartean). Hori gertatzen bada, unibertsoa **hutsean nagusitzen dela** esaten dugu.

Orain Einsteinen ekuazioetara joko dugu. Gogoratu (4.45) forman idatz daitezkeela:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) . \quad (8.46)$$

$\mu\nu = 00$  ekuazioa da

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) , \quad (8.47)$$

eta  $\mu\nu = ij$  ekuazioak ematen du

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p) . \quad (8.48)$$

( $\mu\nu = ij$ -ren ekuazio desberdin bakarra dago, isotropia dela eta.) (8.33) erabil dezakegu (8.34) bigarren deribatuak ezabatzeko, eta garbiketa pixka bat egin lortzeko

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) , \quad (8.49)$$

eta

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} . \quad (8.50)$$

Horiek batera **Friedmann-en ekuazioak** izenez ezagutzen dira, eta ekuazio horiei men egiten dieten (8.7) formako metrikek Friedmann-Robertson-Walker (FRW) unibertsoak definitzen dituzte.

Parametro kosmologikoekin lotzen den terminologia mordoa dago, eta hemen oinarriak aurkeztuko ditugu. Hedapen-abiadura **Hubble parametroa** da,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} . \quad (8.51)$$

Hubble parametroaren balioa oraingo garaian Hubble konstantea da,  $H_0$ . Gaur egun, bere benetako balioa zein den eztabaida handia dago, neurketak 40 eta 90 km/seg/Mpc bitartekoak direlarik. ("Mpc" "megaparsec" esan nahi du, hau da,  $3 \times 10^{24}$  cm.) Kontuan izan  $\dot{a}$   $a$  zatitu behar dugula kantitate neurgarria lortzeko,  $a$ -ren eskala orokorrak ez baitu garrantzirik. **dezelerazio parametroa** ere badago,

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} , \quad (8.52)$$

hedapen-abiaduraren aldaketa-tasa neurtzen duena.

Beste kantitate erabilgarria **dentsitate parametroa** da,

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad (8.53)$$

$$= \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} , \quad (8.54)$$

non **dentsitate kritikoa** honela definitzen da

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G} . \quad (8.55)$$

Kantitate horri (oro har denborarekin aldatuko dena) dentsitate “kritikoa” deritzo Friedmannen (8.36) ekuazioa idatz daitekeelako.

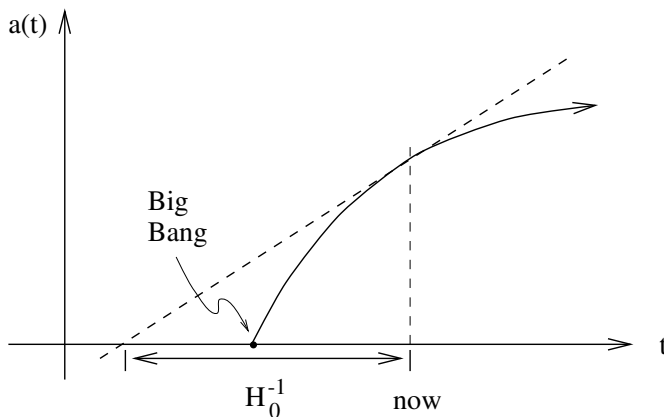
$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} . \quad (8.56)$$

$k$ -ren zeinua, beraz,  $\Omega$  bat baino handiagoa, berdina edo txikiagoa den erabakitzen da. Daukagu

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{\text{crit}} &\leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow k = -1 \leftrightarrow \text{open} \\ \rho = \rho_{\text{crit}} &\leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow k = 0 \leftrightarrow \text{flat} \\ \rho > \rho_{\text{crit}} &\leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow k = +1 \leftrightarrow \text{closed} . \end{aligned}$$

Dentsitate parametroak, beraz, Robertson-Walker-en hiru geometrietatik zeinek deskribatzen duen gure unibertsoa adierazten digu. Behaketa bidez zehaztea ikerketa biziko eremua da.

Friedmannen ekuazioak zehatz-mehatz ebaztea hainbat kasu errazetan, baina askotan erabilgarriagoa da hainbat aukeraren portaera kualitatiboa ezagutzea. Ezar dezagun momentuz  $\Lambda = 0$ , eta kontuan izan dezagun energia positiboko ( $\rho > 0$ ) eta presio ez negatiboko ( $p \geq 0$ ) fluidoek betetako unibertsoen portaera. Orduan (8.35) arabera  $\ddot{a} < 0$  izan behar dugu. Urrutiko galaxien behaketetatik dakigunez unibertsoa hedatzen ari dela ( $\dot{a} > 0$ ), horrek esan nahi du unibertsoa “dezeleratzen ari dela”. Hori da espero behar duguna, unibertsoan materiaren erakarpen grabitatorioak aurka egiten baitu. hedapena. Unibertsoa moteldu baino ezin daitekeela esan nahi du iraganean are azkarrago hedatzen ari zela; bilakaera denboran atzera egiten badugu, nahitaez singulartasun batera iritsiko gara  $a = 0$ -n. Kontuan izan  $\ddot{a}$  zero balitz,  $a(t)$  lerro zuzen bat izango litzatekeela eta unibertsoaren adina  $H_0^{-1}$  izango litzatekeela.  $\ddot{a}$  benetan negatiboa denez, unibertsoak hori baino zertxobait gazteagoa izan behar du.



$a = 0$ -ko berezitasun hau **Big Bang** da. Unibertsoaren sorrera egoera berezi batetik adierazten du, ez materiaren leherketa aurrez dagoen espazio-denbora batean. Espero zitekeen gure FRW unibertsoen simetria perfektua izan zela berezitasun horren erantzule,



baina, egia esan, ez da egia; singularitate teoremek  $\rho > 0$  eta  $p \geq 0$  dituen edozein unibertso singularitasun batean hasi behar dela aurreikusten dute. Jakina, energia-dentsitatea  $a \rightarrow 0$  bezain altua bihurtzen da, eta ez dugu espero erlatibitate orokor klasikoa naturaren deskribapen zehatza denik erregimen honetan; zorionez, grabitate kuantikoaren teoria koherente batek gauzak konpondu ahal izango ditu.

Etorkizuneko bilakaera desberdina da  $k$ -ren balio desberdinetarako. Kasu irekietarako eta lauetaarako,  $k \leq 0$ , (8.36) dakar

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + |k|. \quad (8.57)$$

Eskuineko aldea *zorrotz* positiboa da ( $\rho > 0$  suposatzen ari garenez), beraz,  $\dot{a}$  ez da inoiz zerotik pasatzen. Gaur egun  $\dot{a} > 0$  dela dakigunez, betirako positiboa izan behar du. Horrela, unibertso irekiak eta lauak betiko zabaltzen dira — denboran nahiz espazioan zabalik daude. (Mesedez, kontuan izan zer hipotesi sartzen diren honetan — hots, zero ez den energia-dentsitate positiboa dagoela. Energia-dentsitate negatiboko unibertsoek ez dute betiko hedatu beharrik, “irekiak” badira ere.)

Zein azkar hedatzen dira unibertso hauek? Demagun  $\rho a^3$  kantitatea (materia menpeko unibertsoetan konstantea dena). Energiaren ekuazioaren kontserbazioaren arabera (8.20) dugu

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = a^3 \left( \dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{a}}{a} \right) \quad (8.58)$$

$$= -3p a^2 \dot{a}. \quad (8.59)$$

Eskuineko aldea zero edo negatiboa da; beraz

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) \leq 0. \quad (8.60)$$

Horrek esan nahi du  $\rho a^2$  zerora joan behar dela etengabe hedatzen ari den unibertso batean, non  $a \rightarrow \infty$ . Horrela (8.42) hori esaten digu

$$\dot{a}^2 \rightarrow |k|. \quad (8.61)$$

(Gogoratu hori egia dela  $k \leq 0$ .) Horrela,  $k = -1$ -rako hedapena  $\dot{a} \rightarrow 1$  balio mugatzailerara hurbiltzen da,  $k = 0$ -rako, berriz, unibertsoa hedatzen jarraitzen du, baina gero eta polikiago.

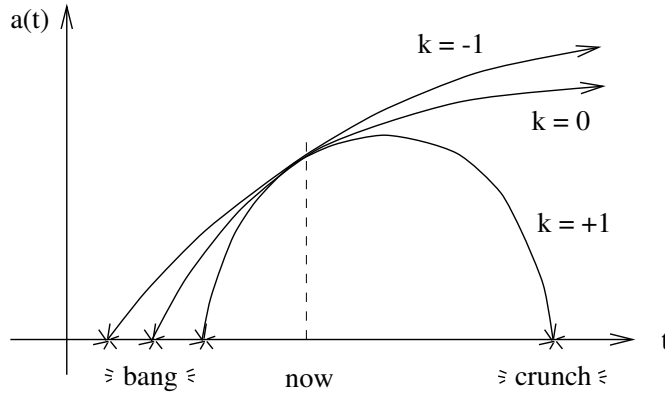
Unibertso itxietarako ( $k = +1$ ), (8.36) bihurtzen da

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - 1. \quad (8.62)$$

$\rho a^2 \rightarrow 0$   $a \rightarrow \infty$  gisa oraindik aplikatzen den argumentua; baina kasu horretan (8.46) negatibo bihurtuko litzateke, eta hori ezin da gertatu. Beraz, unibertsoa ez da mugagabe zabaltzen;  $a_{\max}$  goiko muga bat dauka.  $a_{\max}$ -ra hurbiltzen den heinean, (8.35) esan nahi du

$$\ddot{a} \rightarrow -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a_{\max} < 0. \quad (8.63)$$

Beraz,  $\ddot{a}$  finitua eta negatiboa da puntu honetan, beraz,  $a$   $a_{\max}$ -ra iristen da eta murrizten hasten da, non ( $\ddot{a} < 0$  geroztik) ezinbestean zeroraino uzkuertzen jarraituko du — Big Crunch. Beraz, unibertso itxiak (berriz ere,  $\rho$  positiboaren eta  $p$  ez negatiboaren gure hipotesien arabera) denboran zein espazioan itxita daude.



Orain energia-dentsitate mota bati dagozkion soluzio zehatz batzuk zerrendatuko ditugu. Hautsa soilik duten unibertsoetarako ( $p = 0$ ), komeni da **garapen-angelua**  $\phi(t)$  definitzea,  $t$  parametro gisa zuzenean erabiltzea beharrean. Irtenbideak, orduan, unibertso irekietarako,

$$\begin{cases} a = \frac{C}{2}(\cosh \phi - 1) \\ t = \frac{C}{2}(\sinh \phi - \phi) \end{cases} \quad (k = -1), \quad (8.64)$$

unibertso lauetaarako,

$$a = \left(\frac{9C}{4}\right)^{1/3} t^{2/3} \quad (k = 0), \quad (8.65)$$

eta unibertso itxietarako,

$$\begin{cases} a = \frac{C}{2}(1 - \cos \phi) \\ t = \frac{C}{2}(\phi - \sin \phi) \end{cases} \quad (k = +1), \quad (8.66)$$

non definitu dugun

$$C = \frac{8\pi G}{3}\rho a^3 = \text{constant}. \quad (8.67)$$

Erradiazioz betetako unibertsoetarako,  $p = \frac{1}{3}\rho$ , berriro ere unibertso irekiak ditugu,

$$a = \sqrt{C'} \left[ \left(1 + \frac{t}{\sqrt{C'}}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (k = -1), \quad (8.68)$$

unibertso lauak,

$$a = (4C')^{1/4} t^{1/2} \quad (k = 0), \quad (8.69)$$

eta unibertso itxiak,

$$a = \sqrt{C'} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t}{\sqrt{C'}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (k = +1) , \quad (8.70)$$

non oraingoan definitu dugun

$$C' = \frac{8\pi G}{3} \rho a^4 = \text{constant} . \quad (8.71)$$

Zeuk egiaztatu dezakezu soluzio zehatz hauek orokorrean esandako propietateak dituztela.

Konstante kosmologikoa salbu hutsik dauden unibertsoetan,  $\rho$  edo  $p$  negatiboa izango da,  $a(t)$ -ren portaera orokorra lortzeko lehen erabili ditugun hipotesiak urratuz. Kasu honetan ireki/itxi eta betiko zabaltzen/berrekolapsoen arteko lotura galtzen da.  $\Lambda < 0$  kontuan hartzen hasiko gara. Kasu honetan  $\Omega$  negatiboa da, eta (8.41) hau  $k = -1$  bada bakarrik gerta daiteke. Kasu honetan irtenbidea da

$$a = \sqrt{\frac{-3}{\Lambda}} \sin \left( \sqrt{\frac{-\Lambda}{3}} t \right) . \quad (8.72)$$

$\Lambda > 0$  irtenbide ireki bat ( $k = -1$ ) ere badago, honek emandakoa

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) . \quad (8.73)$$

Hutsean nagusi den unibertso lau batek  $\Lambda > 0$  izan behar du, eta irtenbidea da

$$a \propto \exp \left( \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) , \quad (8.74)$$

unibertso itxiak, berriz,  $\Lambda > 0$  ere izan behar du, eta betetzen du

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) . \quad (8.75)$$

Irtenbide hauek apur bat engainagarriak dira. Izan ere,  $\Lambda > 0$  — (8.57), (8.58) eta (8.59) —ren hiru soluzioek espazio-denbora bera adierazten dute, koordenatu desberdinetan. Espazio-denbora hau, **de Sitter espazioa** izenez ezagutzen dena, benetan espazio-denbora gisa maximo simetrikoa da. (Ikusi Hawking eta Ellis xehetasunetarako.)  $\Lambda < 0$  soluzioa (8.56) ere simetrikoa maximoa da, eta **anti-de Sitter espazioa** izenez ezagutzen da.

Argi dago behaketaz zehaztu nahiko genituzkeela zenbait kantitate, gure unibertsoari FRW ereduetatik zein dagokion erabakitzeko. Jakina,  $H_0$  zehaztu nahiko genuke, hori unibertsoaren adinarekin lotuta baitago. (Materia hutsean nagusi den  $k = 0$  unibertso baterako, (8.49) adina  $2/(3H_0)$  dela esan nahi du. Beste aukera batzuek antzeko erlazioak

iragarriko lituzke.)  $\Omega$  ere jakin nahiko genuke,  $k$  (8.41) bidez zehazten duena.  $\Omega$ -ren (8.39) definizioa kontuan hartuta, horrek esan nahi du biak  $H_0$  eta  $\rho_0$  ezagutu nahi ditugula. Zoritxarrez, bi kantitateak zailak dira zehaztasunez neurtzea, batez ere  $\rho$ . Baina konturatu  $q$  dezelerazio-parametroa  $\Omega$ -rekin erlazionatu daitekeela (8.35):

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (8.76)$$

$$= -H^{-2} \frac{\ddot{a}}{a} \quad (8.77)$$

$$= \frac{4\pi G}{3H^2}(\rho + 3p) \quad (8.78)$$

$$= \frac{4\pi G}{3H^2}\rho(1 + 3w) \quad (8.79)$$

$$= \frac{1 + 3w}{2}\Omega . \quad (8.80)$$

Hori dela eta,  $w$  zer den badakigula (*ie*, unibertsoa zer-nolako gauzez osatuta dagoen),  $\Omega$  zehaztu dezakegu  $q$  neurtuz. (Zoritxarrez ez gaude guztiz ziur  $w$  ezagutzen dugunik, eta  $q$  berez zaila da neurtzea. Baina jendea saiatzen ari da.)

Kantitate hauek nola neur daitezkeen ulertzeko, kontuan izan dezagun FRW unibertso mugimendu geodesikoa. Espazio antzeko Killing bektore batzuk daude, baina ez denboraren antzeko Killing bektorerik energia kontserbatuaren nozioa emateko. Bada, ordea, Killing tentsorea.  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$  behatzaile erkideen lau abiadura bada, orduan tentsorea

$$K_{\mu\nu} = a^2(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) \quad (8.81)$$

$\nabla_{(\sigma} K_{\mu\nu)} = 0$  betetzen du (konproba dezakezun bezala), eta, beraz, Killing tentsorea da. Horrek esan nahi du partikula batek  $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$  lau abiadura badu, kantitatea

$$K^2 = K_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = a^2[V_\mu V^\mu + (U_\mu V^\mu)^2] \quad (8.82)$$

konstante bat izango da geodesikoetan zehar. Pentsa dezagun, lehenik eta behin, partikula masiboetarako. Orduan  $V_\mu V^\mu = -1$  izango dugu, edo

$$(V^0)^2 = 1 + |\vec{V}|^2 , \quad (8.83)$$

non  $|\vec{V}|^2 = g_{ij}V^iV^j$ . Beraz (8.61) dakar

$$|\vec{V}| = \frac{K}{a} . \quad (8.84)$$

Beraz, partikula “moteldu egiten da” koordenatu higikorrei dagokienez, unibertsoa hedatu ahala. Izan ere, hau benetako moteltze bat da, hasieran abiadura erlatibo handiko partikulen gas bat unibertsoa hedatu ahala hoztuko den zentzuan.

Geodesiko nuluekin antzeko gauza bat gertatzen da. Kasu honetan  $V_\mu V^\mu = 0$ , eta (8.62) dakar

$$U_\mu V^\mu = \frac{K}{a} . \quad (8.85)$$

Baina fotoiaren maiztasuna behatzaile komun batek neurtuta  $\omega = -U_\mu V^\mu$  da.  $\omega_1$  maiztasunarekin igorritako fotoiaren maiztasuna, beraz,  $\omega_0$  maiztasun txikiagoarekin behatuko da unibertsoa hedatu ahala:

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{a_1}{a_0} . \quad (8.86)$$

Kosmologoek bi gertaeren arteko **gorrira lerratze**  $z$  uhin-luzeraren zatikako aldaketaren arabera definitzen den honetaz hitz egitea gustatzen zaie:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (8.87)$$

$$= \frac{a_0}{a_1} - 1 . \quad (8.88)$$

Kontuan izan gorrira lerratze hori ez dela Doppler efektu konbentzionalaren berdina; espazioaren hedapena da, ez behatzailearen eta igorlearen abiadura erlatiboak, gorrira lerraratzera eramaten duena.

Gorriantz neurtu dezakegun zerbait da; urruneko galaxietako erradiazioko hainbat lerro espektralren atsedeen-fotogramaren uhin-luzerak ezagutzen ditugu, beraz, jakin dezakegu zenbat aldatu diren haien uhin-luzerak bidean zehar igorri ziren  $t_1$  ordutik  $t_0$  behatu ziren unera arte. Beraz, bi garai hauetan eskala-faktoreen erlazioa ezagutzen dugu. Baina ez dakigu garaiak berak; fotoiak ez dira aski argiak beren bidaian zenbat koordenatu-denbora igaro den esateko. Gehiago lan egin behar dugu informazio hori ateratzeko.

Gutxi gorabehera, fotoi bat argiaren abiaduran mugitzen denez bere bidaia-denbora bere distantzia izan beharko litzateke. Baina zein da urruneko galaxia baten “distantzia” zabaltzen ari den unibertso batean? Distantzia ibiltaria ez da bereziki erabilgarria, ez baita neurgarria, eta, gainera, galaxiek orokorrean ibiltariak izan behar ez direlako. Horren ordez **argitasun distantzia** honela defini dezakegu

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F} , \quad (8.89)$$

non  $L$  iturriaren argitasun absolutua den eta  $F$  behatzaileak neurtutako fluxua (denbora-unitateko energia detektagailu baten azalera-unitateko). Definizioa espazio lauan,  $d$  distantziara dagoen iturri baterako argitasunaren gaineko fluxua iturriaren inguruan zentratuta dagoen esfera baten eremuan bat besterik ez dela,  $F/L = 1/A(d) = 1/4\pi d^2$ . FRW unibertso batean, ordea, fluxua diluitu egingo da. Fotoien kontserbazioak esaten digu iturriak igorritako fotoi-kopuru osoa azkenean esfera batetik igaroko dela igorletik  $r$  distantzia komodigarrian. Horrelako esfera bat  $d = a_0 r$  distantzia fisikora dago, non  $a_0$  eskala-faktorea den fotoiak behatzen direnean. Baina fluxua bi efektu gehigarriren bidez diluitzen da: fotoi indibidualak  $(1+z)$  faktore batez gorrira lerratzen dira, eta fotoiek maiztasun gutxiagoz jotzen dute esfera,  $\delta t$  denbora batera igorritako bi fotoi  $(1+z)\delta t$  tartean neurtuko baitira. . Beraz, izango dugu

$$\frac{F}{L} = \frac{1}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2} , \quad (8.90)$$

edo

$$d_L = a_0 r (1 + z) . \quad (8.91)$$

$d_L$  distira-distantzia neurtzea espero genezake, argitasun absolutuak ezagutzen diren iturri astrofisiko batzuk daudelako (“kandela estandarrek”). Baina  $r$  ez da behagarria, beraz, hori kendu behar dugu gure ekuaziotik. Geodesiko nulu batean (erradiala izan erosotasunagatik aukeratua) dugu

$$0 = ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2}{1 - kr^2} dr^2 , \quad (8.92)$$

edo

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} . \quad (8.93)$$

Oso urrun ez dauden galaxietarako, Taylor serie bateko eskala-faktorea zabal dezakegu bere egungo balioari buruz:

$$a(t_1) = a_0 + (\dot{a})_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}(\ddot{a})_0(t_1 - t_0)^2 + \dots . \quad (8.94)$$

Orduan (8.72)ren bi aldeak zabal ditzakegu aurkitzeko

$$r = a_0^{-1} \left[ (t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + \dots \right] . \quad (8.95)$$

Orain (8.67) gogoratuz, hedapena (8.73) berdina da

$$\frac{1}{1 + z} = 1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + \dots . \quad (8.96)$$

$H_0(t_1 - t_0)$  txikirako hau alderantzikatu daiteke errendimendurako

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \left[ z - \left( 1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \dots \right] . \quad (8.97)$$

Hau berriro ordezkatzuz (8.74) ematen du

$$r = \frac{1}{a_0 H_0} \left[ z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right] . \quad (8.98)$$

Azkenik, (8.70) hau erabiliz **Hubble-ren legea** lortzen da:

$$d_L = H_0^{-1} \left[ z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] . \quad (8.99)$$

Hori dela eta, galaxia kopuru nahiko baten argitasun-distantziak eta gorriara lerratzeak neurtzeak  $H_0$  eta  $q_0$  zehaztea ahalbidetzen digu, eta, hortaz, bide luzea eramaten gaitu zein FRW unibertso motatan bizi garen erabakitzeko. Behaketak beraiek oso zailak dira, eta parametro horien balioak mundu errealean eztabaidatzen dira oraindik. Hurrengo hamarkadan, hainbat estrategia berrik eta estrategia zaharren aplikazio zehatzagoek oso ondo erantzun dezakete behingoz galdera horiei.

# Bibliografía

- [1] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge, 1985) [\*]. This is a very nice introductory text. Especially useful if, for example, you aren't quite clear on what the energy-momentum tensor really means.
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972) [\*\*]. A really good book at what it does, especially strong on astrophysics, cosmology, and experimental tests. However, it takes an unusual non-geometric approach to the material, and doesn't discuss black holes.
- [3] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973) [\*\*]. A heavy book, in various senses. Most things you want to know are in here, although you might have to work hard to get to them (perhaps learning something unexpected in the process).
- [4] R. Wald, *General Relativity* (Chicago, 1984) [\*\*\*]. Thorough discussions of a number of advanced topics, including black holes, global structure, and spinors. The approach is more mathematically demanding than the previous books, and the basics are covered pretty quickly.
- [5] E. Taylor and J. Wheeler, *Spacetime Physics* (Freeman, 1992) [\*]. A good introduction to special relativity.
- [6] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford, 1992) [\*\*]. A book I haven't looked at very carefully, but it seems as if all the right topics are covered without noticeable ideological distortion.
- [7] A. P. Lightman, W. H. Press, R. H. Price, and S. A. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton, 1975) [\*\*]. A sizeable collection of problems in all areas of GR, with fully worked solutions, making it all the more difficult for instructors to invent problems the students can't easily find the answers to.
- [8] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Springer-Verlag, 1984) [\*\*\*]. A fairly high-level book, which starts out with a good deal of abstract geometry and goes on to detailed discussions of stellar structure and other astrophysical topics.

- [9] F. de Felice and C. Clarke, *Relativity on Curved Manifolds* (Cambridge, 1990) [\*\*\*]. A mathematical approach, but with an excellent emphasis on physically measurable quantities.
- [10] S. Hawking and G. Ellis, *The Large-Scale Structure of Space-Time* (Cambridge, 1973) [\*\*\*]. An advanced book which emphasizes global techniques and singularity theorems.
- [11] R. Sachs and H. Wu, *General Relativity for Mathematicians* (Springer-Verlag, 1977) [\*\*\*]. Just what the title says, although the typically dry mathematics prose style is here enlivened by frequent opinionated asides about both physics and mathematics (and the state of the world).
- [12] B. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge, 1980) [\*\*]. Another good book by Schutz, this one covering some mathematical points that are left out of the GR book (but at a very accessible level). Included are discussions of Lie derivatives, differential forms, and applications to physics other than GR.
- [13] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology* (Prentice-Hall, 1974) [\*\*]. An entertaining survey of manifolds, topology, differential forms, and integration theory.
- [14] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists* (Academic Press, 1983) [\*\*\*]. Includes homotopy, homology, fiber bundles and Morse theory, with applications to physics; somewhat concise.
- [15] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Springer-Verlag, 1983) [\*\*\*]. The standard text in the field, includes basic topics such as manifolds and tensor fields as well as more advanced subjects.

Liburuen zailtasun-maila tipikoa (matematika batez ere) izartxo batzuen bidez adierazten da, bata hasierako esanahia gehienetan eta hiru aurreratua. Izartxoak hitzaldi-ohar hauekin normalizatuta daude, [\*\*] emango liratekeenak. Ohar hauen prestaketan maiz kontsultatu ziren lehen lau liburuak, hurrengo zazpiak baliagarri izan zaizkidan erlatibitate-testu batzuk dira, eta azken laurak atzealde matematikoko erreferentziak.