

Algoritmos Numéricos II

Exercício 4

Kelvin Steiner Santos
Murilo Ferri Schirmer

10 de maio de 2019

Resumo

Este relatório é referente ao quarto exercício desenvolvido para a disciplina de Algoritmos Numéricos II.

Sumário

1	Introdução	3
2	Análise de erro	3
3	Aplicações	4
3.1	Conservação de Calor em uma haste longa e fina	4
3.2	Resfriador Unidimensional	5
4	Conclusão	7

1 Introdução

O intuito do exercício é analisar a utilização do método das diferenças finitas na resolução de problemas de valor no contorno (PVC) ao considerar três condições: Condição de Dirichlet (em que o valor da função no ponto é conhecido), Condição de Neumann (em que o valor da derivada da função no ponto é conhecida) e Condição de Robin (em que o valor da combinação linear das duas condições anteriores é conhecido).

2 Análise de erro

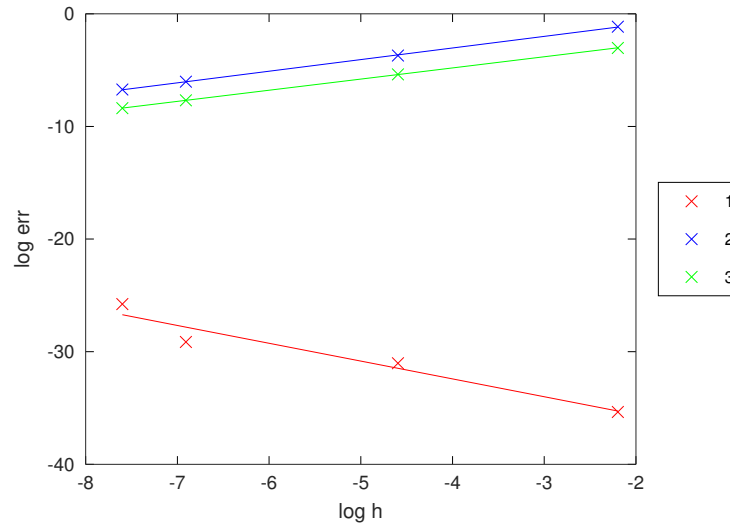
Para essa primeira parte consideramos os Problemas de Valor de Contorno de exemplo dados pela seguinte equação:

$$u'' - \frac{1}{2}u' + u = x^2 + \frac{1}{2}$$

combinada com cada um dos conjuntos de restrições de contorno:

1. $u(0) = -1$
 $u(1) = 1$
2. $u'(0) = 1$
 $u(1) = 1$
3. $u(0) = -1$
 $-u'(1) + 2u(1) = -1$

A aplicação do método para 4 diferentes valores de n (10, 100, 1000, 2000) — que resultam em diferentes valores de h — nos produziu os valores de erro que podem ser observados no gráfico:



Sendo as inclinações das retas de regressão linear mostradas no gráfico:

	a
1	-1.582594
2	1.031030
3	0.989612

Podemos notar imediatamente um resultado inesperado: o comportamento dos pontos de erro para o primeiro PVC divergiu dos outros pois a inclinação da regressão linear, neste caso, é negativa. Esse é um resultado bastante contraintuitivo visto que o valor de erro nesse PVC está aumentando com o aumento da resolução da discretização, e espera-se que aconteça justamente o contrário.

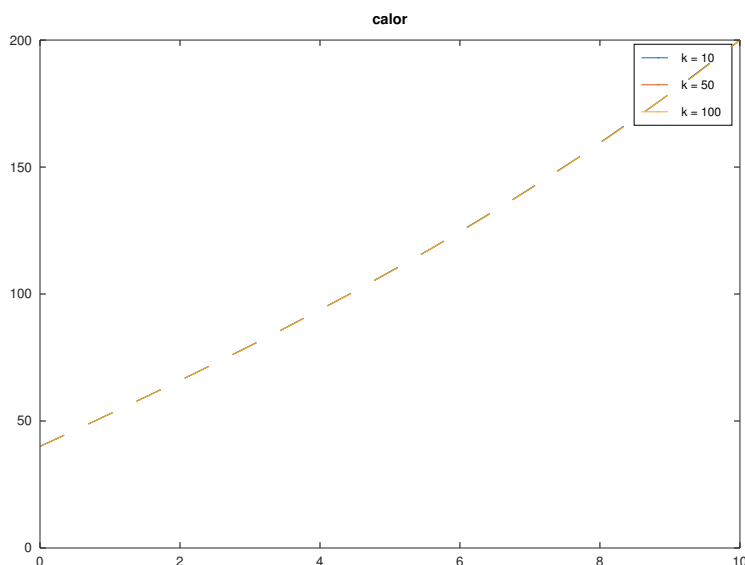
De todo modo, podemos observar que a ordem dos valores de erro para o primeiro PVC (o único que possui valor prescrito em ambos lados) ainda é consideravelmente menor que os outros dois, que possuem fluxo prescrito e condição mista em um dos lados, apesar do comportamento inesperado.

3 Aplicações

3.1 Conservação de Calor em uma haste longa e fina

É possível modelar a Conservação de Calor (unidimensional) numa haste longa e fina através de um PVC. Nesta aplicação, ambas as condições de con-

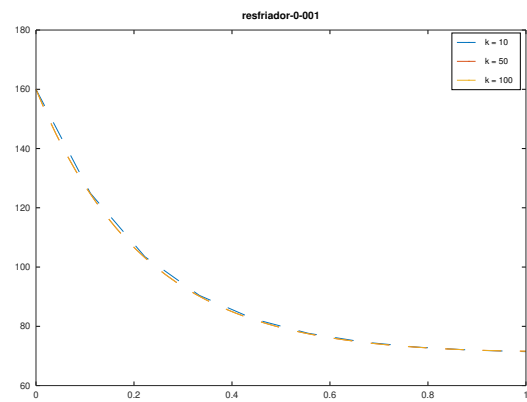
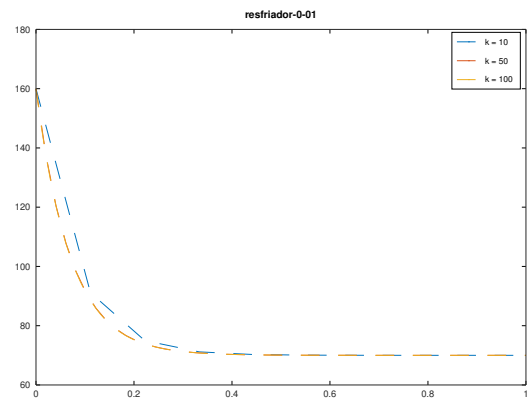
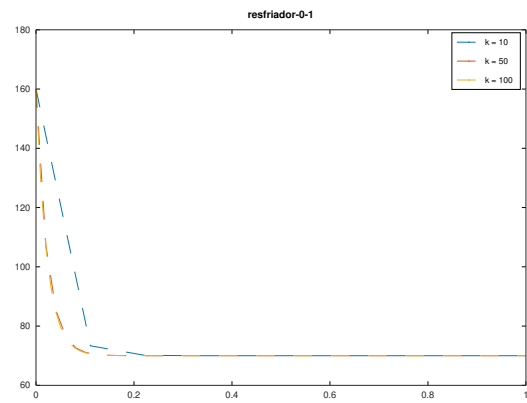
torno são de valor prescrito (Condição de Dirichlet). É possível observar os resultados obtidos em relação a distribuição da temperatura na haste no gráfico abaixo:

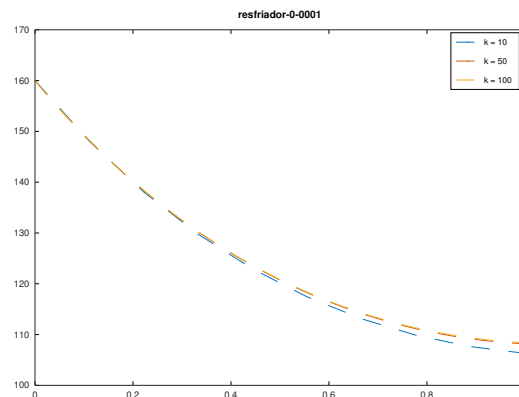


Percebe-se que mesmo variando o valor de k , o gráfico da conservação de calor permanece igual. Um dos motivos para isso ocorrer, é que para esse problema de valor no contorno, ambas condições de contorno são de valores prescritos, ou seja, mais bem definidas de forma a diminuir o erro.

3.2 Resfriador Unidimensional

Agora trataremos o problema de resfriar uma massa muito quente utilizando a transferência do calor para uma região próxima mais fria. A partir do modelo matemático encontrado no artigo Computational Modeling with Methods and Analysis foi possível modelar esta questão para um problema de Valor no Contorno. Os resultados obtidos estão representados nos gráficos abaixo:





Para este problema, os resultados foram os esperados. No último gráfico em que o c_{ref} é bem pequeno, a temperatura diminui mais lentamente. É possível perceber, também, que existe uma relação entre o tamanho da discretização e a eficiência do método para atingir uma aproximação boa da solução exata. É um *trade-off*, pois ao mesmo tempo que aumentar a quantidade de pontos analisados melhora a solução, também aumenta bastante o tempo computacional.

4 Conclusão

A relação entre o tamanho da discretização e a qualidade do resultado é uma questão a ressaltar deste exercício, pois o *trade-off* é um conceito recorrente quando trata-se de problemas computacionais. Outra relação importante é qualidade do método para se aproximar da solução exata quando as bordas possuem a Condição de Dirichlet (valor prescrito).

Além disso, com o desenvolvimento desse exercício, foi possível compreender mais profundamente o método das diferenças finitas, problemas de valor no contorno e como esses conceitos se relacionam com diferentes aplicações.