ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

BỘ MÔN KĨ THUẬT HÀNG KHÔNG

PHƯƠNG PHÁP SỐ - ĐỘNG LỰC HỌC LƯU CHẤT

BÀI TẬP LỚN 1

Lớp P01 – Học kỳ 232

Sinh viên thực hiện:	**Mã số sinh viên:**
Nguyễn Minh Huy	2111325
Mai Nguyễn Minh Nhật	2111920
Đoàn Thanh Long	2111660

GVHD: PGS. TS Lê Tuấn Phương Nam

Tp Hồ Chí Minh, ngày tháng 4 năm 2024

Mục lục

Danh mục hình ảnh và biểu đồ:

Danh mục hình ảnh:

Danh mục biểu đồ:

I. Mục tiêu bài tập lớn.

Trong môn học Phương pháp số - Động lực học lưu chất, việc nghiên cứu các vấn đề đối lưu – khuếch tán đóng vai trò quan trọng trong việc hiểu hành vi của các quá trình vật lý khác nhau, như truyền nhiệt trong lưu chất. Vấn đề ổn định hai chiều về đối lưu và khuếch tán, được đặc trưng bởi truyền nhiệt, là một tình huống cơ bản gặp trong nhiều ứng dụng kỹ thuật. Trong vấn đề này, phân bố nhiệt độ trong một miền tính toán được xác định bởi sự tương tác giữa đối lưu (do chuyển động của chất lỏng) và khuếch tán (do truyền nhiệt năng lượng phân tử). Các phương trình điều khiển cho vấn đề này bao gồm phương trình đạo hàm riêng (PDEs) mô tả sự tiến triển của nhiệt độ theo các tọa độ không gian.

Nhóm xem xét vấn đề đối lưu – khuếch tán hai chiều của nhiệt độ như sau,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\Pr Re}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0$$

với *Pr* là hằng số Prandtl và *Re* là số Reynolds. Điều kiện biên theo phương thẳng đứng như sau $T(0,y) = 0, T(1,y) = 1$, và miền tính toán $0 \le x \le 1$ và $0 \le y \le 2$.

Trong đó, *T(x, y)* là nhiệt độ phân bố trong miền tính toán cần được xác định, (u, v) là các thành phần vận tốc theo phương x và y tương ứng, $u = -\sin(\pi x)\cos(\pi y)$ và $v = \cos(\pi x)\sin(\pi y)$. Điều kiện biên theo phương ngang xem xét như sau:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=2} = 0$$

Mục đích của nghiên cứu này là điều tra hành vi của phân bố nhiệt độ (T(x, y)) trong một miền tính toán xác định dưới ảnh hưởng của quá trình đối lưu và khuếch tán. Cho các giá trị $Pr = 1$ và $Re = 15$, viết chương trình (code) dùng phương pháp FVM để tìm sự phân bố nhiệt độ trong miền tính toán theo thời gian bằng phương pháp Forward Euler-Explicit, đã biết $T(x,y)$ là một hàm tuần hoàn theo y với chu kỳ là 2.Cụ thể hơn, các vấn đề cần giải quyết như sau:

1. *Ảnh hưởng của bước thời gian:*

Dùng giản đồ số *central* cho các số hạng đối lưu, dùng lưới hội tụ để tính phân bố nhiệt độ T tại $t = 0.1s, 0.5s, 1.0s$ với các bước thời gian $\Delta t = 0.0001s$ và $\Delta t = 0.001s$

2. *Xác định bước thời gian cho tính ổn định:*

Xác định Δt có thể để đảm bảo tính ổn định và tính phân bố nhiệt độ T cho đến khi hội tụ với tiêu chuẩn hội tụ như sau,

$$|T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}|_{max} \leq 10^{-4}$$

Sau đó, phân tích cách kết quả đạt được cho các vấn đề trên và thể hiện trường giá trị ban đầu $t = 0s$ (sự phân bố giá trị ban đầu trong miền tính toán trên Hình).

Bằng cách tiến hành các mô phỏng số học để đạt được các mục tiêu này, nhóm nhằm mục đích tìm hiểu và nâng cao hiểu biết trong vận dụng Phương pháp số - Động lực học lưu chất vào tính toán các hiện tượng khuếch tán – đối lưu, xem xét các kỹ thuật, phương pháp tính toán hiệu quả.

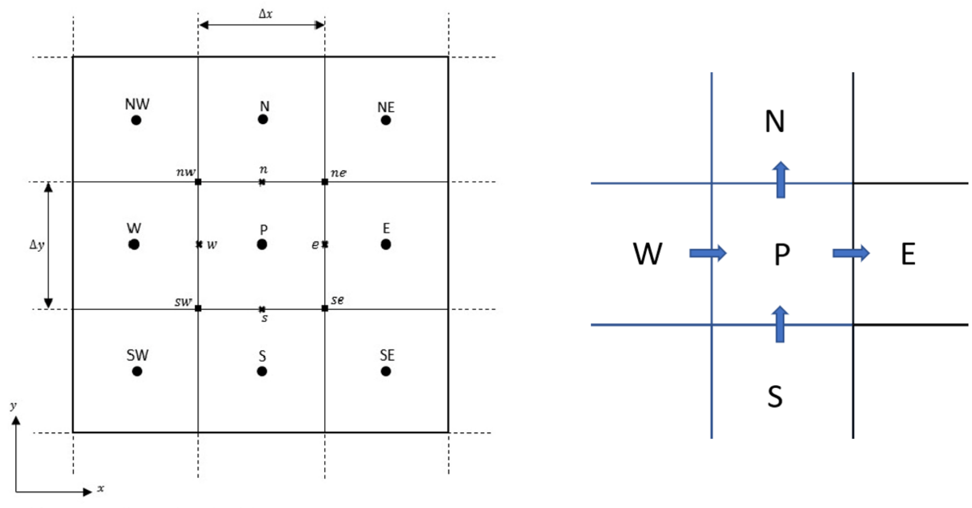
II. Phương pháp.

Phương pháp thể tích hữu hạn (FVM) là một trong những kỹ thuật rời rạc linh hoạt nhất được sử dụng trong CFD. Dựa trên phương trình động lực học lưu chất rời rạc của phương trình vận tốc, bước đầu tiên trong FVM là chia miền thành một số lượng thể tích kiểm soát (còn được gọi là ô kiểm soát, phần tử) nơi biến số quan tâm nằm ở trọng tâm của thể tích kiểm soát. Các lý thuyết, phương pháp giải cụ thể sẽ được tóm tắt ở phần sau đây.

1. Cơ sở lý thuyết.

a) Phương pháp thể tích hữu hạn cho 2D (Finite Volume Method - FVM):

Dựa trên việc thỏa mãn các phương trình bảo toàn, phương pháp thể tích hữu hạn dựa trên miền tính toán là các thể tích kiểm soát. Với lưới sau khi được chia, các cạnh được xem là biên của thể tích kiểm soát và điểm cần tính toán sẽ nằm giữa thể tích kiểm soát. *Hình 1* thể hiện lưới đã được chia với điểm tính toán nằm tại tâm của các "cells" trong lưới, quy ước P là điểm xem xét, W, E, N, S lần lược là các hướng trái phải, trên dưới của P. Ở bài toán này, ta chỉ quan tâm đến lưới 2D.



Hình 1: Lưới và các phương trong tính toán FVM 2D

Theo đó, đối với tính toán 2D, tuân thủ định luật bảo toàn, ta có công thức:

$$flux_e - flux_w = source$$

$$flux_n - flux_s = source$$

Trong đó:

$$flux = advection - diffusion$$

$$advection = \rho u A \phi$$

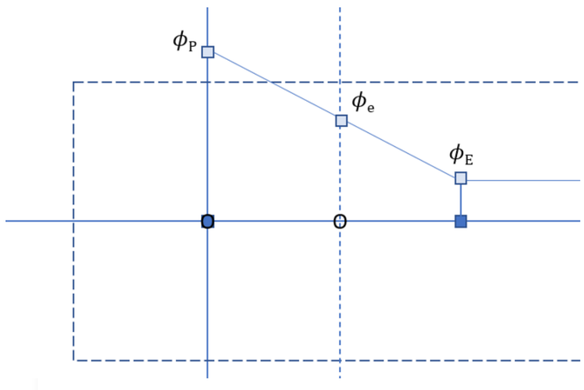
$$diffusion = \Gamma A \frac{d\phi}{dx}$$

Từ các phương trình này và các điều kiện biên biết trước, ta hoàn toàn có thể giải quyết bài toán truyền nhiệt 2D với các thành phần vận tốc và phương trình đối lưu – khuếch tán đã được cho.

b) Giản đồ số central cho các số hạng đối lưu:

Hình 2 thể hiện giản đồ *central*, có sai số thấp hơn giản đồ *upwind*, sử dụng nội suy tuyến tính cho tâm của những cell liền kề, với:

$$\phi_e = 0.5\ (\phi_P + \phi_E)$$



Hình 2: Mô tả giản đồ central áp dụng trong lưới 1D

Áp dụng giản đồ này, ta có thể giải quyết các vấn đề đặt ra ở mục tiêu báo cáo.

c) Phương pháp Forward Euler-Explicit:

Phương pháp Forward Euler-Explicit là dựa trên xấp xỉ đạo hàm bằng đạo hàm tiến. Đối với bài toán phân bố nhiệt độ, chúng ta muốn xác định sự thay đổi của nhiệt độ theo thời gian tại mỗi điểm trong miền tính toán.

$$\phi_{n+1} = \phi_n + F_n \Delta t$$

Trong đó:

F_n là đạo hàm của hàm số tại thời điểm n và t_n.

ϕ_n là giá trị của hàm số tại thời điểm n.

ϕ_{n+1} là giá trị của hàm số tại thời điểm $n + 1$.

Δt là bước thời gian.

2. Phân tích bài toán:

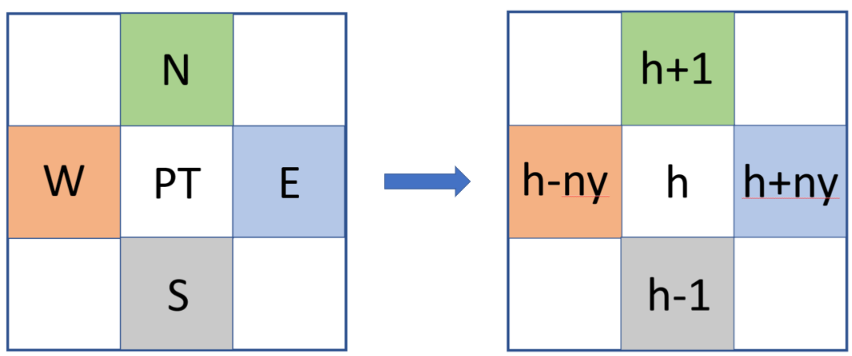
Xem xét bài toán đặt ra và các điều kiện biên, ta có vấn đề đối lưu – khuếch tán hai chiều ổn định như sau:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\Pr Re}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0$$

với các điều kiện biên dọc: $T(0,y) = 0, T(1,y) = 1.$

biên ngang: $(\frac{\partial T}{\partial Y})_{y=0} = (\frac{\partial T}{\partial Y})_{y=2} = 0$

Rời rạc lưới, ta chia không gian tính toán thành một lưới Các phần tử lưới, mỗi điểm lưới có giá trị T tương ứng. Quy ước các thành phần hướng, Các phần tử trong lưới thay đổi từ hệ W,E,S,N thành *h*, cụ thể như *Hình 3*.



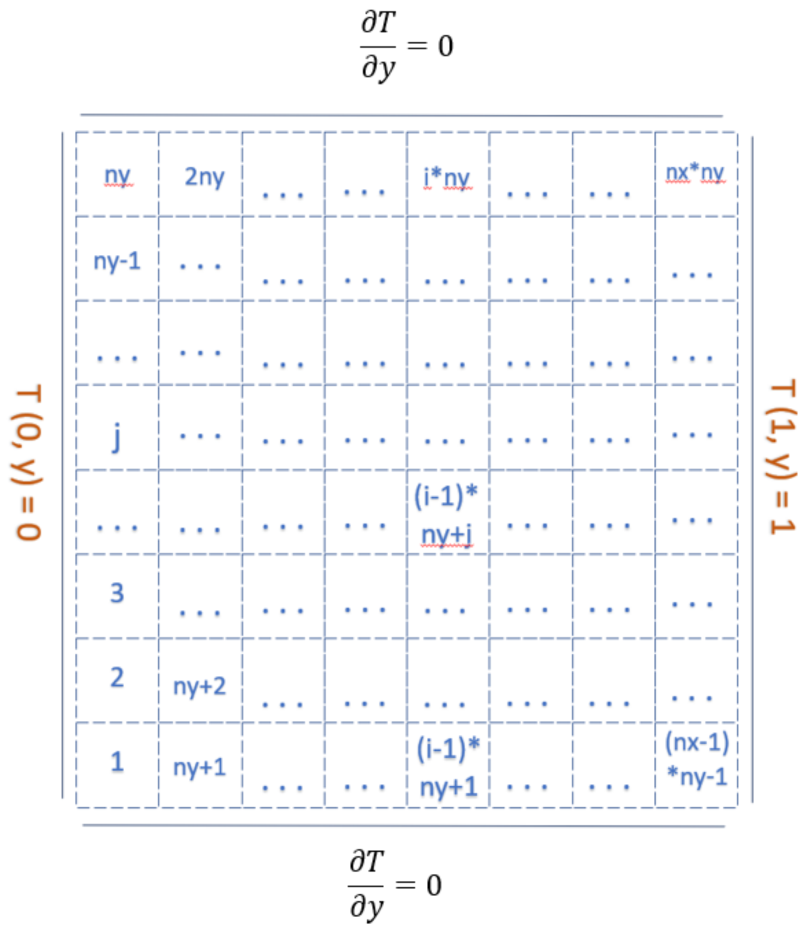
Hình 3: Quy ước các thành phần biến trong lưới

Số lượng điểm lưới phụ thuộc vào cách chia lưới, nhưng có 9 điểm lưới đặc biệt, đại diện cho cách tính toán Các phần tử lưới còn lại trong lưới, cụ thể lưới như *Hình 4*. Các phần tử đặc biệt lần lượt là:

Các phần tử tại 4 góc: T_1 ; T_{ny} ; $T_{(nx-1)*ny+1}$; T_{nx*ny}

Các phần tử tiếp xúc 4 biên: T_j ; T_{iny} ; $T_{(nx-1)*ny+j}$; $T_{(i-1)*ny+1}$

Điểm không tiếp xúc biên: T_{iny+j}



Hình 4: Lưới tính toán

Qua đó, khi giải quyết bài toán, ta xét tại từng *cell* và tính toán trên từng phương ngang và dọc. Khi *Pr* và *Re* là hằng số, ta chọn:

$$k = -\frac{1}{\Pr Re}$$

Từ đây, ta áp dụng giản đồ *central* để lập ma trận và giải tìm *T* tại các cell.

III. Giải bài toán.

Các thành phần vận tốc theo phương x, y tương ứng được biết trước là

$$u = -\sin(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$v = \cos(\pi x)\sin(\pi y)$$

Xem xét tại các giá trị $Pr = 1$ và $Re = 15$, ta sẽ giải, tạo tiền đề cho việc viết chương trình, tìm sự phân bố nhiệt độ $T(x, y)$ trong miền tính toán và nhiệt độ tại các đường $x = 0.5$ và $y = 1$. Đầu tiên, giải quyết các vấn đề sau:

1. **Sử dụng giản đồ central.**

Với giản đồ *central* ta có:

Theo phương *x*: $T_{face,E} = 0.5(T_{pt} + T_E)$

$T_{face,W} = 0.5(T_{pt} + T_W)$

Theo phương *y*: $T_{face,S} = 0.5(T_{pt} + T_S)$

$T_{face,N} = 0.5(T_{pt} + T_N)$

Theo đó, ta tính toán tại 9 điểm đặc biệt theo giản đồ *central* và dùng các bước giản lược tại phần *Phân tích bài toán* như sau:

$$V\frac{\partial T}{\partial t} + A\left[\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\right] = 0$$

$$<=> \frac{T_h^{n+1} - T_h^n}{\Delta t} = -\frac{A}{V}\left[\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$<=> T_h^{n+1} = T_h^n - \Delta t\frac{A}{V}\left[\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\right]$$

Ta gọi $G(x,y) = \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$

Với V: thể tích phần tử

A: diện tích mặt bên của phần tử

Ta quy ước mắt lưới có phần tử đang xét là T_h^n, các ô xung quanh sẽ như *Hình 3*.

Chỉ số n chỉ giá trị của T_h sau một bước thời gian Δt.

Ví dụ giá trị của T_h^n tại $t = 0{,}1s$ với bước thời gian $\Delta t = 0{,}001s$ thì $n = \frac{0{,}1}{0{,}001} = 100$

a) Phần tử không nằm ở biên.

Phân rã phương trình đối lưu-khuếch tán theo giản đồ "central", ta có các biểu thức:

Theo phương x:

$$u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - u_w \frac{T_{h-ny}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - \frac{T_h^n - T_{h-dy}^n}{dx}\right) \qquad (1.1)$$

Theo phương y:

$$v_n \frac{T_{h+1}^n + T_h^n}{2} - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+1}^n - T_h^n}{dy} - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right) \qquad (1.2)$$

$G(x, y)$ cho phần tử không nằm ở biên có dạng là:

$$G_1(x, y) = (1.1) + (1.2)$$

b) Phần tử nằm ở góc trên cùng bên trái (có biên là các đường x=0 và y=2).

Đối với các phần tử ở biên, ta không dùng biến lặp h như ở trên. Ta sử dụng biến i và j lần lượt là số hàng và số cột của ma trận.

Theo phương x:

$$u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - \frac{T_h^n - 0}{\frac{dx}{2}}\right) \qquad (2.1)$$

Theo phương y:

$$v_n \frac{2T_h^n}{2} - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(0 - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right) \qquad (2.2)$$

$G(x, y)$ cho phần tử này có dạng là:

$$G_2(x, y) = (2.1) + (2.2)$$

c) Phần tử nằm ở góc trên cùng bên phải (có biên là các đường x=1 và y=2).

Theo phương x:

$$0 - u_w \frac{T_{h-dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{1 - T_h^n}{\frac{dx}{2}} - \frac{T_h^n - T_{h-dy}^n}{dx}\right) \tag{3.1}$$

Theo phương y, tương tự biểu thức 2.2

$$v_n \frac{2T_h^n}{2} - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(0 - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right) \tag{2.2}$$

$G(x, y)$ cho phần tử này có dạng là:

$$G_3(x, y) = (3.1) + (2.2)$$

d) Phần tử nằm ở góc dưới bên phải (có biên là các đường x=1 và y=0).

Theo phương x:

$$0 - u_w \frac{T_{h-dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{1 - T_h^n}{\frac{dx}{2}} - \frac{T_h^n - T_{h-dy}^n}{dx}\right) \tag{3.1}$$

Theo phương y:

$$v_n \frac{T_{h+1}^n + T_h^n}{2} - v_s \frac{2T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+1}^n - T_h^n}{dy} - 0\right) \tag{4.1}$$

$G(x, y)$ cho phần tử này có dạng là:

$$G_4(x, y) = (4.1) + (3.1)$$

e) Phần tử nằm ở góc dưới bên trái (có biên là các đường x=0 và y=0).

Theo phương x, tương tự biểu thức 2.1

$$u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - \frac{T_h^n - 0}{\frac{dx}{2}}\right) \tag{2.1}$$

Theo phương y, tương tự biểu thức 4.1

$$v_n \frac{T_{h+1}^n + T_h^n}{2} - v_s \frac{2T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+1}^n - T_h^n}{dy} - 0\right) \quad (4.1)$$

$G(x, y)$ cho phần tử này có dạng là:

$$G_5(x, y) = (2.1) + (4.1)$$

f) Phần tử nằm ở giữa biên trái (có biên là đường x=0).

Theo phương x, tương tự như biểu thức 2.1.

$$u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - \frac{T_h^n - 0}{\frac{dx}{2}}\right) \quad (2.1)$$

Theo phương y, tương tự như biểu thức 1.2.

$$v_n \frac{T_{h+1}^n + T_h^n}{2} - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+1}^n - T_h^n}{dy} - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right) \quad (1.2)$$

$G(x, y)$ cho phần tử này có dạng là:

$$G_6(x, y) = (2.1) + (1.2)$$

g) Phần tử nằm ở giữa biên trên (có biên là đường y=2).

Theo phương x, tương tự như biểu thức 1.1.

$$u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - u_w \frac{T_{h-ny}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - \frac{T_h^n - T_{h-dy}^n}{dx}\right) \quad (1.1)$$

Theo phương y, tương tự như biểu thức 2.2.

$$v_n \frac{2T_h^n}{2} - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(0 - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right) \quad (2.2)$$

$G(x, y)$ cho phần tử này có dạng là:

$$G_7(x, y) = (1.1) + (2.2)$$

h) Phần tử nằm ở giữa biên phải (có biên là đường x=1).

Theo phương x, tương tự như biểu thức 3.1.

$$0 - u_w \frac{T_{h-dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{1 - T_h^n}{\frac{dx}{2}} - \frac{T_h^n - T_{h-dy}^n}{dx}\right) \tag{3.1}$$

Theo phương y, tương tự như biểu thức 1.2.

$$v_n \frac{T_{h+1}^n + T_h^n}{2} - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+1}^n - T_h^n}{dy} - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right) \tag{1.2}$$

$G(x, y)$ cho phần tử này có dạng là:

$$G_8(x, y) = (3.1) + (1.2)$$

i) Phần tử nằm ở giữa biên dưới (có biên là đường y=0).

Theo phương x, tương tự như biểu thức 1.1.

$$u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - u_w \frac{T_{h-ny}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - \frac{T_h^n - T_{h-dy}^n}{dx}\right) \tag{1.1}$$

Theo phương y, tương tự như biểu thức 4.1.

$$v_n \frac{T_{h+1}^n + T_h^n}{2} - v_s \frac{2T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+1}^n - T_h^n}{dy} - 0\right) \tag{4.1}$$

$G(x, y)$ cho phần tử này có dạng là:

$$G_9(x, y) = (1.1) + (4.1)$$

2. Sử dụng phương pháp Forward Euler – Explicit.

Dựa vào những phương trình ở trên ta có thể tìm ra sự phân bố nhiệt độ $T(x, y)$ theo thời gian.

Lấy ví dụ với phần tử nằm ở góc trên cùng bên trái (có biên là các đường $x = 0$ và $y = 1$). Phương trình biểu diễn mối liên hệ của một giá trị nhiệt độ trước và sau một bước thời gian Δt trong một mắt lưới là.

$$T_h^{n+1} = T_h^n - \Delta t \frac{A}{V}\left[u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - \frac{T_h^n - 0}{\frac{dx}{2}}\right) + v_n \frac{2T_h^n}{2} - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(0 - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right)\right] = 0$$

Đối với phần tử này ta có $V = \Delta x \Delta y$, $A_e = A_w = \Delta y$, $A_n = A_s = \Delta x$

Từ đó ta có:

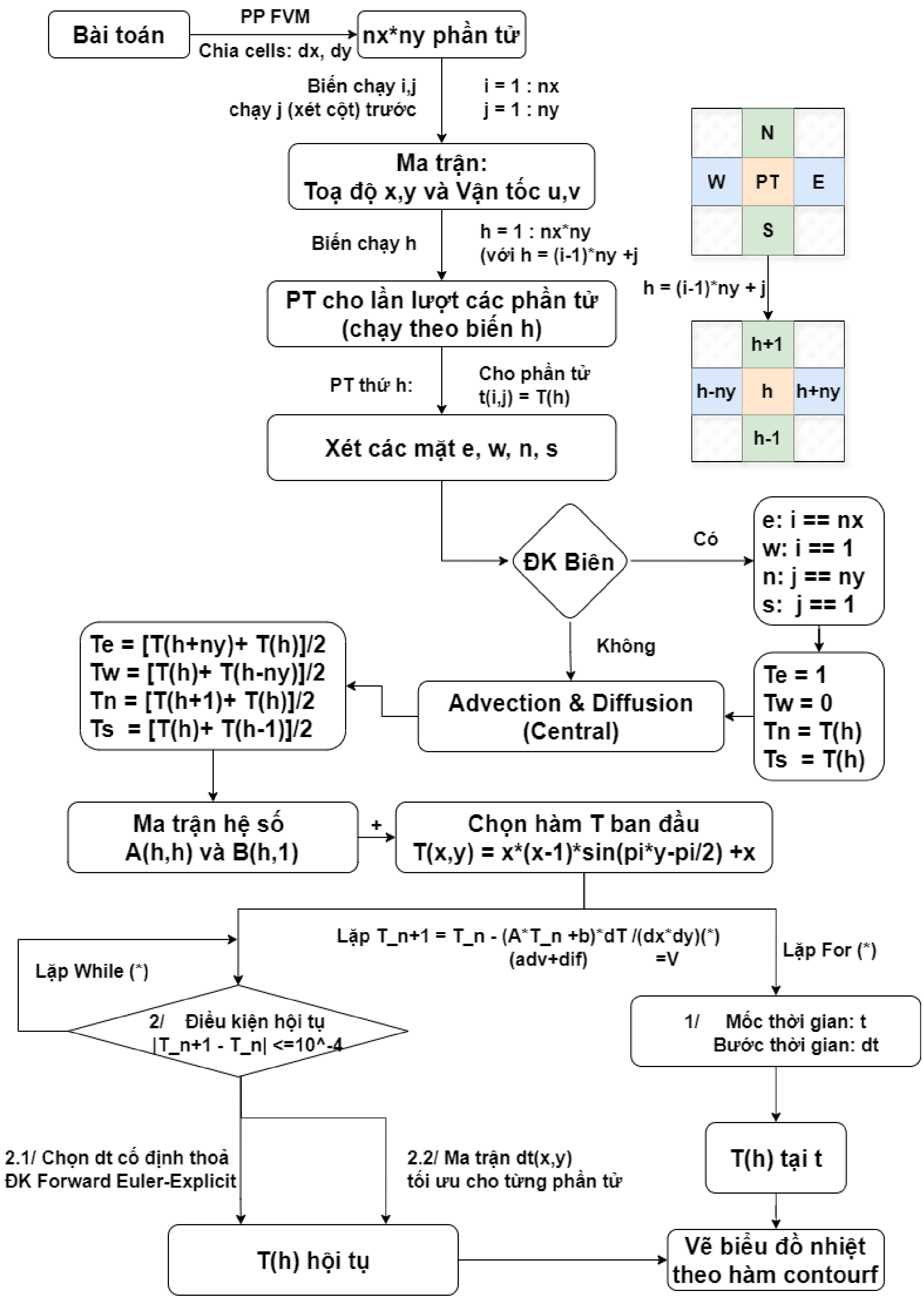
$$T_h^{n+1} = T_h^n - \Delta t \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta y}\left[u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - \frac{T_h^n - 0}{\frac{dx}{2}}\right)\right] - \Delta t \frac{\Delta x}{\Delta x \Delta y}\left[v_n \frac{2T_h^n}{2} - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(0 - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right)\right] = 0$$

Cuối cùng ta có phương trình biểu diễn sự phụ thuộc của T_h^{n+1} theo T_h^n cho phần tử này là:

$$T_h^{n+1} = T_h^n - \Delta t \frac{1}{\Delta x}\left[u_e \frac{T_{h+dy}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(\frac{T_{h+dy}^n - T_h^n}{dx} - 2\frac{T_h^n - 0}{dx}\right)\right] - \Delta t \frac{1}{\Delta y}\left[v_n T_h^n - v_s \frac{T_{h-1}^n + T_h^n}{2} - \frac{1}{PrRe}\left(0 - \frac{T_h^n - T_{h-1}^n}{dy}\right)\right] = 0$$

IV. Viết chương trình tính toán.

1. Sơ đồ khối của thuật toán.



Hình 5: Sơ đồ khối của thuật toán

2. Bước thời gian hội tụ:

Từ phương trình tổng quát mà đề bài cho, ta có thể viết lại dưới dạng sau:

$$T_h^{n+1} = T_h^n - \Delta t \frac{A}{V}[A_h \boldsymbol{T} - B_h]$$

Trong đó $A_h \boldsymbol{T} - B_h$ là phương trình đối lưu khuếch tán ổn định xét tại phần tử **h.**

Ta có:

$$T_h^{n+1} = T_h^n \left(1 - \Delta t \frac{A}{V} A(h,h)\right) + B_h \Delta t \frac{A}{V}$$

Điều kiện Forward Euler là hệ số của T_h^n lớn hơn không.

$$1 - \Delta t \frac{A}{V} A(h,h) > 0$$

$$<=> \quad \Delta t < \frac{1}{\frac{A}{V} A(h,h)}$$

Ở trên là điều kiện cho từng Δt của từng phần tử, để tìm được Δt thỏa mãn tất cả các phần tử thì ta cần tìm Δt bé nhất.

Có nhiều phương pháp để giải quyết vấn đề này, ở đây nhóm tác giả chọn lý thuyết về chuẩn vô cùng của một vector.

Gọi vector **dt** có các phần tử là các giá trị giới hạn của Δt như trình bày ở trên tương ứng với mắt lưới đang xét.

$$dt = [(\Delta t)_{1\_max}, \\ (\Delta t)_{2\_max}, \\ (\Delta t)_{3\_max}, \\ \dots]$$

Ta có chuẩn vô cùng của một vector cột là phần tử có giá trị tuyệt đối lớn nhất. Nhưng ta đang cần tìm giá trị $(\Delta t)_{max}$ bé nhất. Vì vậy ta xét:

$$\|1 - dt\|_\infty = \max_k \left|1 - (\Delta t)_{k\_max}\right|$$

Ta nhận thấy, giá trị lớn nhất sẽ đạt được khi $(\Delta t)_{k\_max}$ là bé nhất, đó là giá trị $(\Delta t)_{solution}$ mà ta đang tìm. Vì vector **dt** không có phần tử nào lớn hơn 1, vì vậy:

$$\max_k \left|1-(\Delta t)_{k\_max}\right| = 1-(\Delta t)_{solution}$$

⇨ $1-\|1-dt\|_{\infty} = (\Delta t)_{solution}$

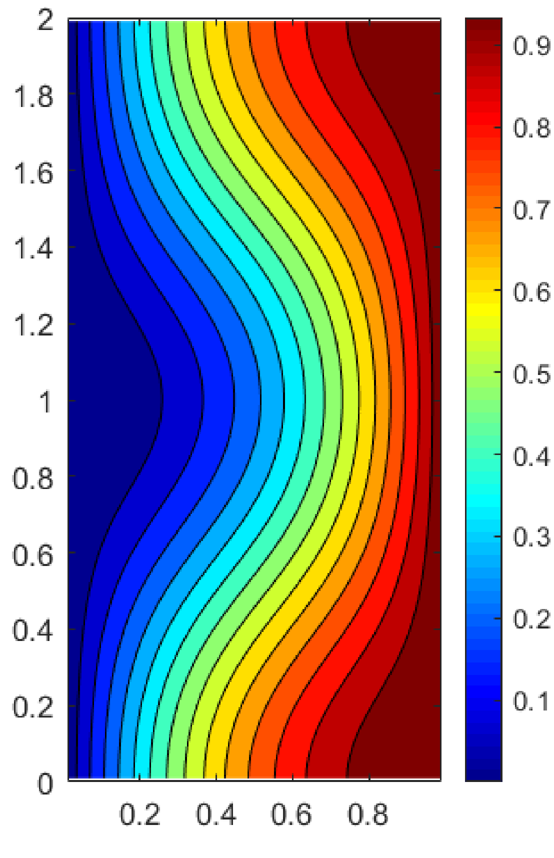
V. Phân tích kết quả.

Chọn hàm phân bố nhiệt độ ban đầu $T(x,y)$ chọn theo điều kiện đề bài:

Hàm tuần hoàn theo y với chu kỳ là 2 (dạng sin πy) và các điều kiện biên:

$$T(0,y)=0;\quad T(1,y)=1;\quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=2} = 0$$

$$\boldsymbol{T(x,y) = x\cdot(x-1)\cdot \sin\left(\pi y - \frac{\pi}{2}\right) + x} \qquad \mathbf{(5.1)}$$



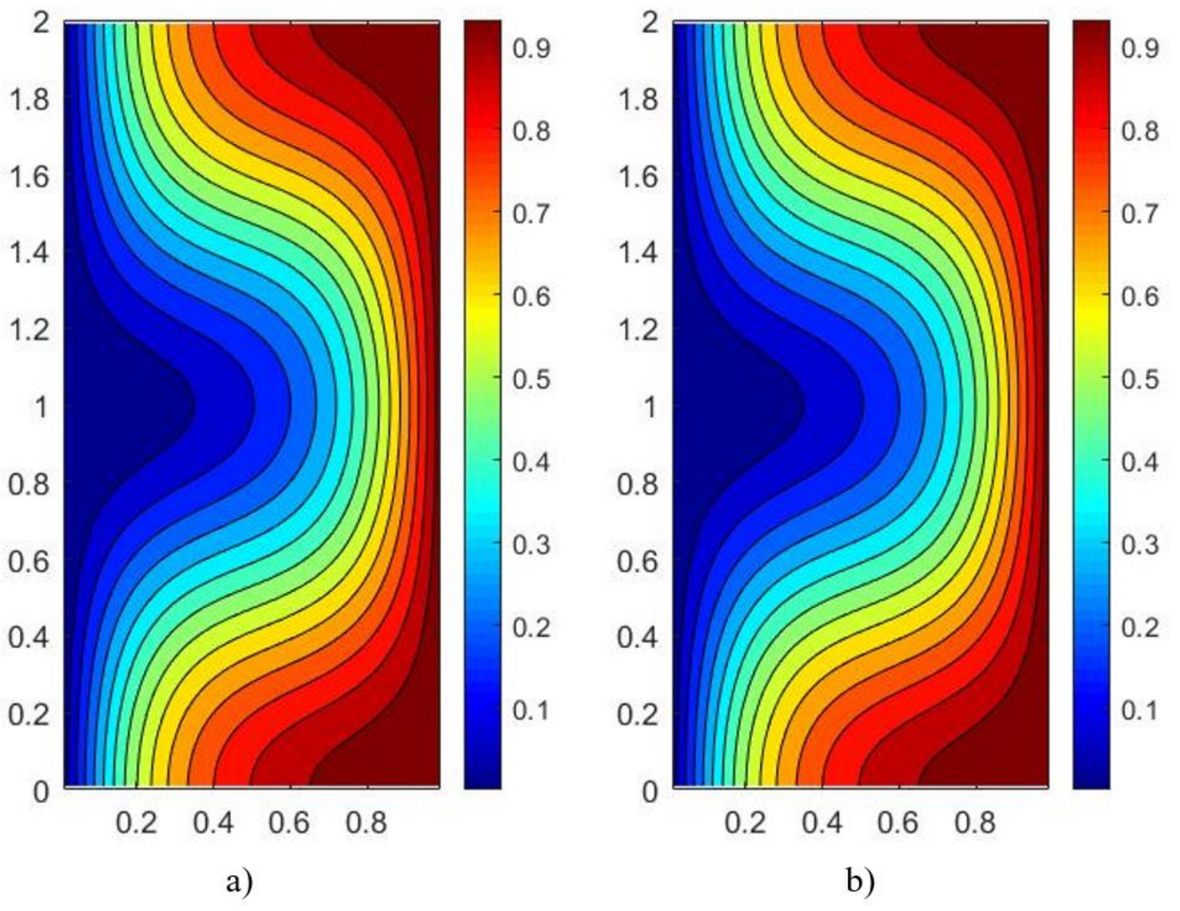
Đồ thị 1 Phân bố nhiệt độ tại thời điểm ban đầu

Sau khi hoàn thành chương trình tính toán cho vấn đề đối lưu – khuếch tán haichiều, ta sẽphân tích các kết quả theo các yếu tố ảnh hưởng sau:

1. Ảnh hưởng của bước thời gian.

Chúng ta sẽ thực hiện một loạt các mô phỏng bằng giản đồ *central* với các bước thời gian khác nhau để tính phân bố nhiệt độ T tại $t = 0.1s, 0.5s, 1.0s$ đánh giá tác động của bước thời gian đến kết quả. Bằng cách này, chúng ta có thể đánh giá được sự ổn định và chính xác của phương pháp Forward Euler-Explicit trong việc mô phỏng phân bố nhiệt độ trong miền tính toán. Bằng cách thay đổi bước thời gian, chúng ta có thể quan sát sự biến đổi của nhiệt độ theo thời gian và đánh giá hiệu quả của phương pháp giải quyết bài toán.

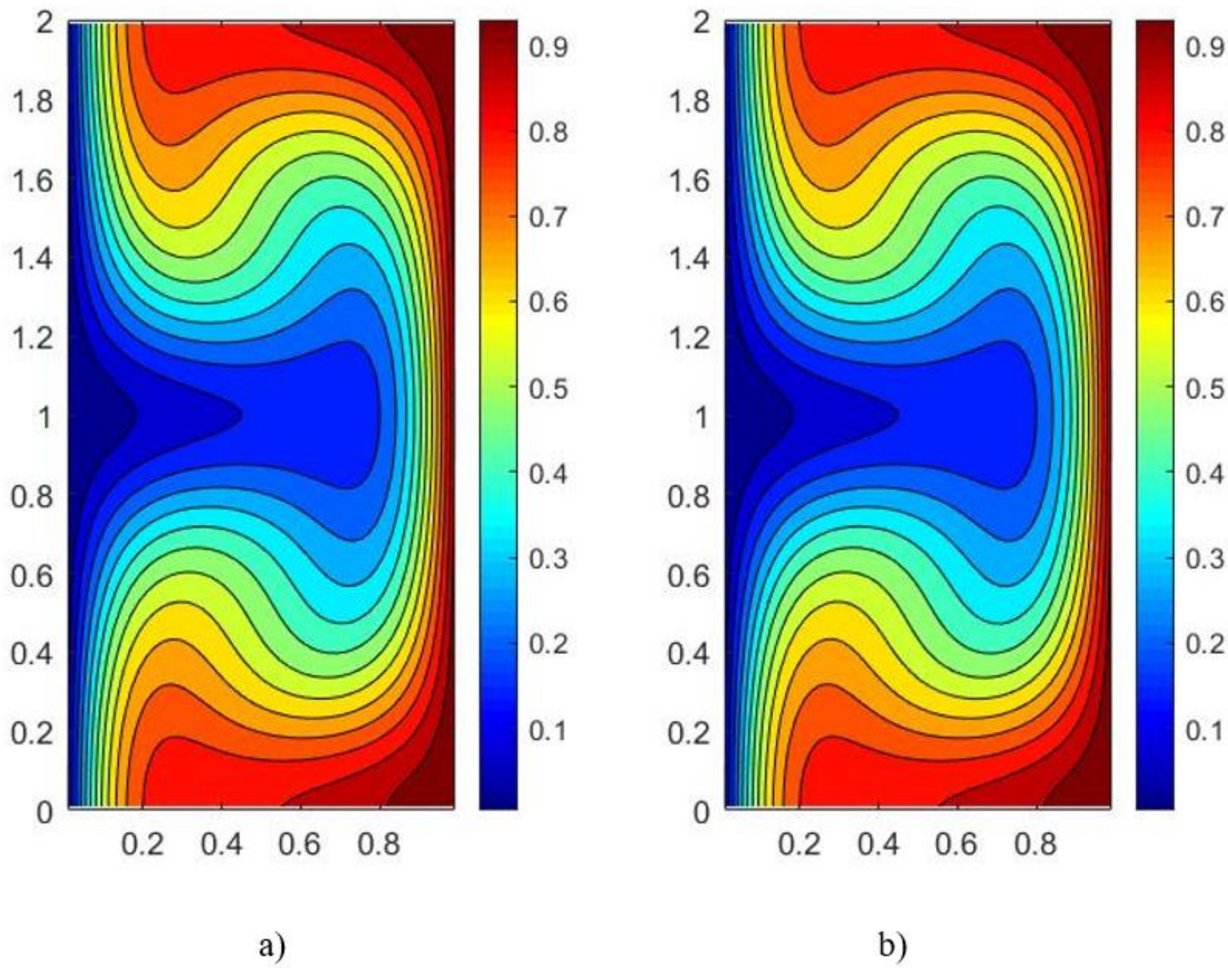
a) Tại $t = 0.1s$:



Đồ thị 2 Phân bố nhiệt độ tại t = 0.1s, a) dt = 0.0001s; b) dt = 0.001s

Ta nhận thấy không có sự khác biệt đáng kể giữa hai bước thời gian. Phân bố nhiệt độ ít bị ảnh hưởng bởi kích thước bước thời gian nhỏ. Tuy nhiên, chưa đạt được sự hội tụ đầy đủ và chỉ có ít xoáy.

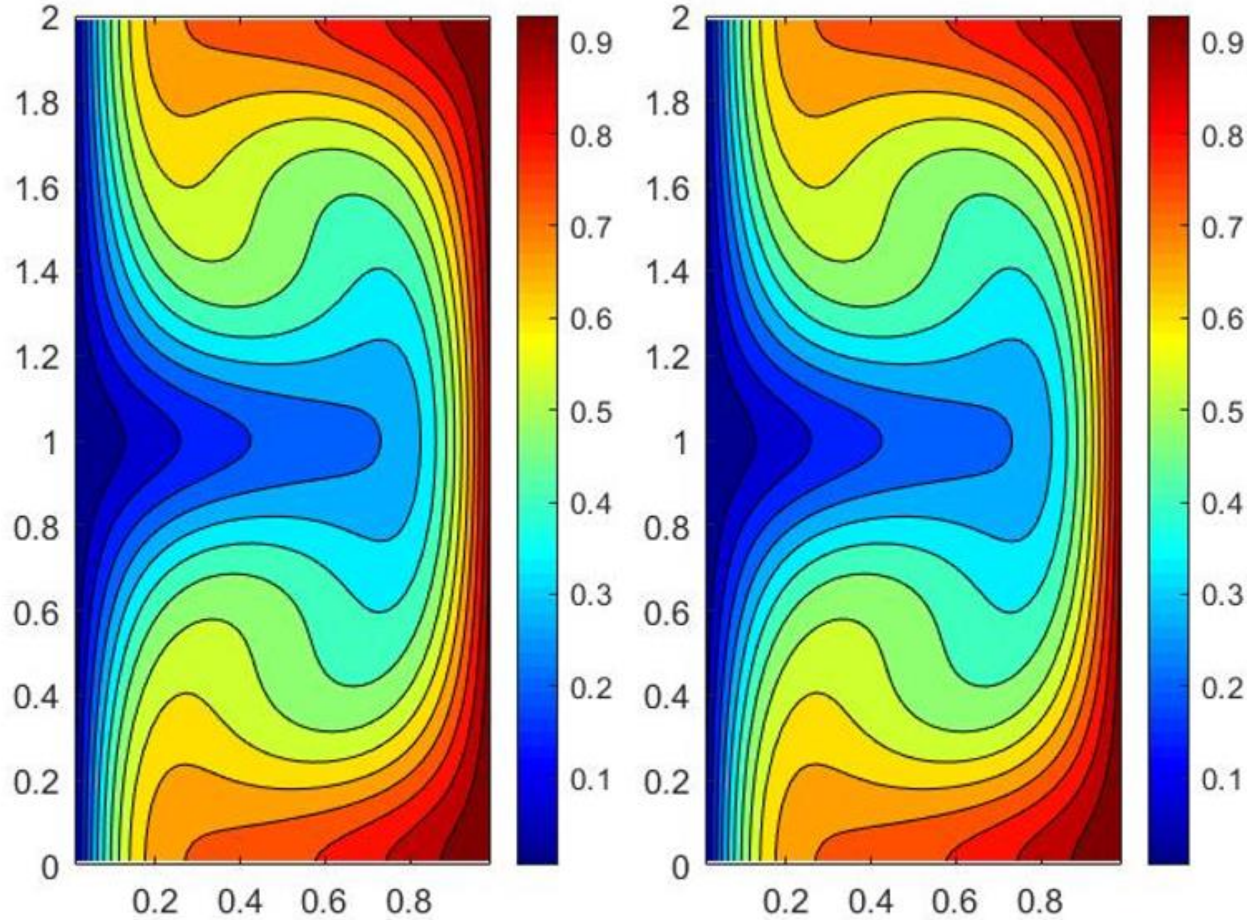
b) *Tại t = 0.5s:*



Đồ thị 3 Phân bố nhiệt độ tại t = 0.5s, a) dt = 0.0001s; b) dt = 0.001s

Nhận thấy, đồ thị tương đối hội tụ, xoáy thể hiện rõ hơn ở mốc thời gian t = 0.1s, nhưng chưa thể hiện đúng giá trị nhiệt độ hội tụ; giữa các bước thời gian khác nhau vẫn không có sự khác biệt rõ rệt.

c) Tại t = 1s:



a) b)

Đồ thị 4 Phân bố nhiệt độ tại t = 1s, a) dt = 0.0001s; b) dt = 0.001s

Tương đối hội tụ, có sự khác biệt về nhiệt độ so với thời điểm t = 0.5s trước đó. Có sự hiện diện của xoáy rõ rệt hơn. Tại t=1s, phân bố nhiệt độ hội tụ, có sự khác biệt về nhiệt độ so với thời điểm t = 0.5s trước đó. Có sự hiện diện của xoáy rõ rệt hơn, và đều hơn, thể hiện rõ ảnh hưởng của nhân tố đối lưu khuếch tán đến tính ổn định và giá trị nhiệt độ hội tụ về như miền trên.

Tóm lại, thông qua loạt các mô phỏng này, chúng ta cũng có thể đưa ra các nhận xét về sự ổn định của giải pháp. Khi chọn bước thời gian nhỏ, chúng ta có thể đạt được sự ổn định cao hơn và kết quả chính xác hơn, nhưng cũng đi kèm với thời gian tính toán tăng lên.

Đồng thời, khi bước thời gian quá nhỏ dẫn đến kết quả gần như không thay đổi khi giảm thêm bước thời gian. Ở bài này, kết quả giữa hai bước thời gian $dt = 0.001s$ và $dt = 0.0001s$ tương đương nhau. Với các bước thời gian khác nhau (nhỏ hơn điều kiện Forward Euler - Explicit: $\mathrm{dt} \leq 0.0012\mathrm{s}$), bài toán đều dần hội tụ theo cùng các mốc thời gian.

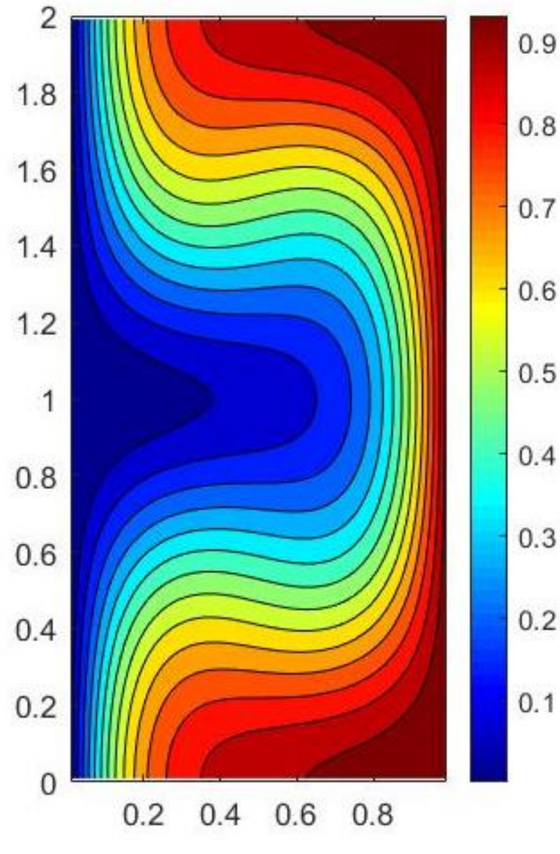
Bằng cách này, chúng ta có thể hiểu rõ hơn về ảnh hưởng của bước thời gian đối với phương pháp Forward Euler-Explicit và có thể điều chỉnh các tham số mô phỏng để đảm bảo sự ổn định và chính xác của kết quả, từ đó xác định bước thời gian cho tính ổn định ở phần sau.

2. Xác định bước thời gian ổn định.

Để đảm bảo tính ổn định và tính phân bố của nhiệt độ T cho đến khi hội tụ theo tiêu chuẩn hội tụ đã cho, chúng ta cần xác định bước thời gian Δt thích hợp. Để làm điều này, chúng ta có thể sử dụng một phương pháp thử và lỗi, thực hiện các mô phỏng với các bước thời gian khác nhau và kiểm tra xem liệu $|T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}|_{max}$ có nhỏ hơn 10^{-4} hay không.

Điều kiện cho Forward Euler-Explicit: $\mathrm{dt} \leq 0.0012\mathrm{s}$:

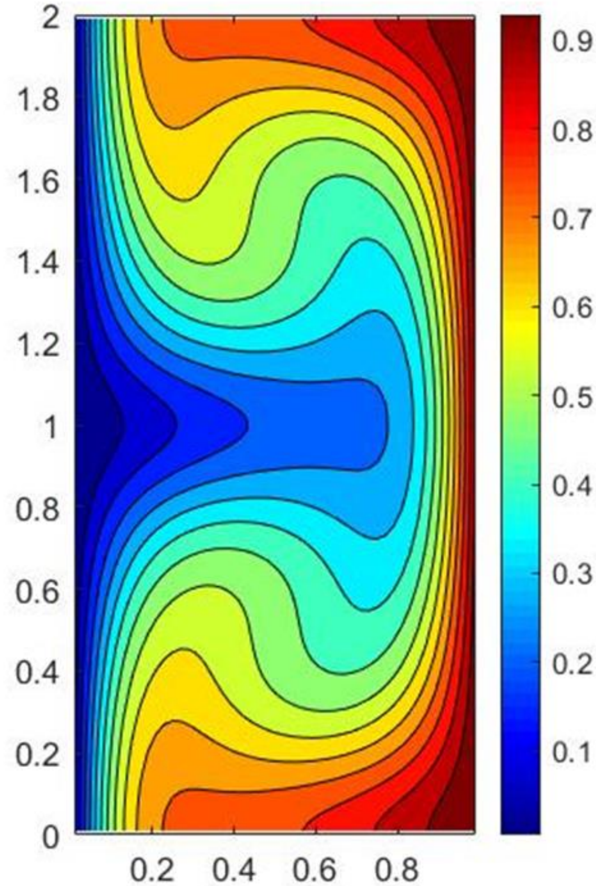
- $dt = 0.0001s$



Đồ thị 5 Phân bố nhiệt độ với dt = 0.0001s

Bước thời gian quá nhỏ, không đáp ứng tiêu chuẩn hội tụ do sự tương đồng giữa nhiệt độ sau và trước là quá cao. Khi đó, phương pháp Forward Euler, vì bước thời gian quá nhỏ dẫn đến nhiệt độ tại bước sau xấp xỉ bằng với bước trước.

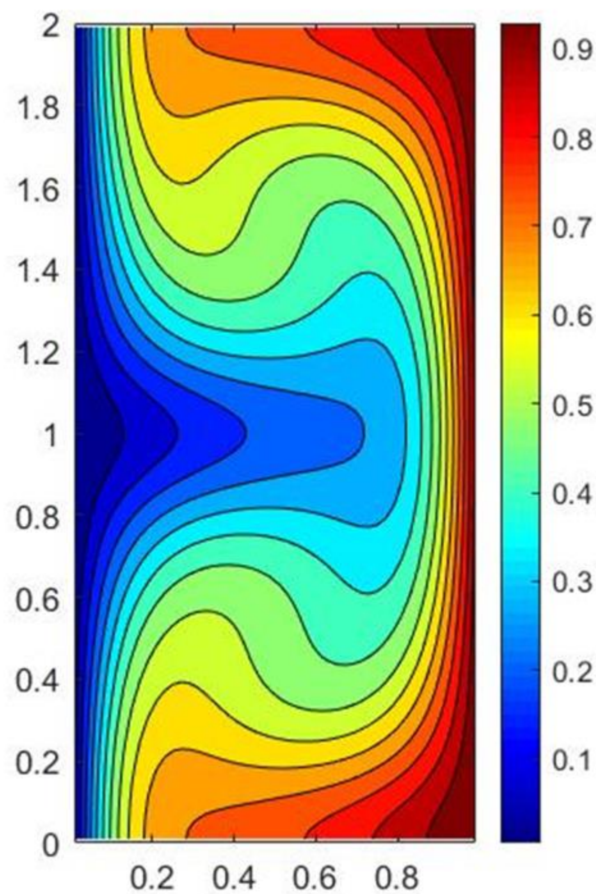
- $dt = 0.0005s$



Đồ thị 6 Phân bố nhiệt độ với dt = 0.0005s

Tại bước thời gian này tiêu chuẩn hội tụ được đảm bảo, phân bố nhiệt độ hội tụ. Do đó, lựa chọn $dt = 0.0005s$ là hợp lý.

- $dt = 0.001s$



Đồ thị 7 Đồ thị 7: Phân bố nhiệt độ với dt = 0.001s

Nhận thấy tại bước thời gian này phân bố nhiệt độ hội tụ.

Cùng với kết quả trên, ta quan sát được sự thay đổi trong thời gian lặp và số lần lặp tương ứng với các kích thước bước thời gian khác nhau. Kết quả được tổng hợp trong bảng dưới đây:

dx=dy=0.02	dt	Thời gian lặp (s)	Số lần lặp
2.1 (max= 0.0012)	0.0001	23.062	2394
	0.0005	17.1529	1742
	0.001	10.1336	1067
2.2	dt tối ưu	7.6592	805

Với các mốc thời gian dt cố định được xét đến, ta nhận xét: Với 0.0005≤dt≤0.0012 (s), phân bố nhiệt độ của bài toán hội tụ và điều kiện hội tụ được đảm bảo. Trong khoảng này, dt càng lớn và gần với giá trị 0.0012s thì thời gian hội tụ càng nhanh và số lần lặp càng giảm nhiều.

Từ bảng, ta nhận thấy rằng khi sử dụng kích thước bước thời gian tối ưu, thời gian lặp và số lần lặp giảm đáng kể, từ 10.1336 giây và 1067 lần lặp xuống còn 7.6592 giây và 805 lần lặp. Số lần lặp khi chọn dt tối ưu càng giảm nhiều với các lưới thưa hơn. Điều này cho thấy rằng việc lựa chọn kích thước bước thời gian tối ưu là một yếu tố quan trọng để cải thiện hiệu suất của thuật toán mô phỏng.

Tóm lại bằng cách xác định bước thời gian ổn định, chúng ta có thể hiểu rõ hơn về ảnh hưởng của bước thời gian và các tham số khác đối với tính ổn định và chính xác của giải pháp, cũng như hiểu rõ hơn về sự biến đổi của nhiệt độ trong miền tính toán theo thời gian.

VI. Kết luận.

Nhóm đã thực hiện một loạt các mô phỏng số học để khám phá ảnh hưởng của bước thời gian đối với tính ổn định và chính xác của giải pháp phân bố nhiệt độ trong miền tính toán. Bằng cách thay đổi bước thời gian và sử dụng phương pháp Forward Euler-Explicit, chúng ta đã có cơ hội đánh giá hiệu quả của phương pháp giải quyết vấn đề.

Kết quả của chúng ta đã cho thấy rằng việc xác định bước thời gian thích hợp rất quan trọng để đảm bảo tính ổn định của giải pháp. Bằng cách xác định Δt sao cho $|T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}|_{max} \leq 10^{-4}$, chúng ta có thể đạt được sự hội tụ của giải pháp và đảm bảo tính chính xác của kết quả.

Ngoài ra, bằng cách phân tích kết quả thu được và so sánh với sự phân bố giá trị ban đầu, chúng ta đã có cái nhìn sâu hơn về sự biến đổi của nhiệt độ trong miền tính toán theo thời gian và hiểu rõ hơn về ảnh hưởng của các tham số và phương pháp tính toán đối với kết quả.

Tóm lại, nghiên cứu này đã cung cấp một cái nhìn toàn diện về vấn đề đối lưu – khuếch tán hai chiều ổn định và phương pháp giải quyết bằng phương pháp Forward Euler-Explicit. Bằng cách thực hiện các mô phỏng và phân tích kết quả, chúng ta đã có cơ hội nâng cao hiểu biết và kỹ năng trong lĩnh vực Phương pháp số - Động lực học lưu chất.

Code:

```
clear
close all
Pr = 1; Re = 15;    k = -1/Re/Pr;
%Variables
dx = input('Nhap khoang chia x: ');      nx = 1/dx;
dy = input('Nhap khoang chia y: ');      ny = 2/dy;
%Matrices
x = zeros(nx,ny);
y = zeros(nx,ny);
t_ = zeros(nx,ny);
A = zeros(nx*ny,nx*ny);
B = zeros(nx*ny,1);
T = zeros(nx*ny,1);
dt_ = zeros(nx*ny,1);
disp('CFD BTL2: ');
disp('1. Phan bo nhiet do theo buoc thoi gian');
disp('2. Xac dinh buoc thoi gian');
mode = input('Chon [ 1 | 2 ]: ');

%Code
%Velocity functions
u= @(x,y) -sin(pi*x).* cos(pi*y);
v= @(x,y)  cos(pi*x).* sin(pi*y);

%Temperature function T(x,y)at t=0s
T_f = @(x,y) x.*(x-1).* sin(pi*y-pi*0.5) +x;


%FOR loop for (h) via (i,j)
for i = 1 : nx
    for j = 1 : ny
        h = (i-1)*ny + j;
```

```
        %Xet lap               %Tao ma tran toa do x,y
    x_ = dx*i - dx/2;           x(i,j) = dx*i - dx/2;
    y_ = dy*j - dy/2;           y(i,j) = dy*j - dy/2;
    T(h) =T_f(x_,y_);

%Advection - Central
   %E
    if i == nx
        B(h)= B(h) -u(x_+dx/2,y_)*dy;    %Te=1
    else
        A(h,h) = A(h,h) + u(x_+dx/2,y_)*dy;
        A(h,h+ny) = A(h,h+ny) + u(x_+dx/2,y_)*dy;
    end
   %W
    if i == 1                             %Tw=0
    else
        A(h,h) = A(h,h) - u(x_-dx/2,y_)*dy;
        A(h,h-ny) = A(h,h-ny) - u(x_-dx/2,y_)*dy;
    end
   %N
    if j == ny
        A(h,h) = A(h,h) + v(x_,y_+dy/2)*dx;
    else
        A(h,h) = A(h,h) + v(x_,y_+dy/2)*dx;
        A(h,h+1) = A(h,h+1) + v(x_,y_+dy/2)*dx;
    end
   %S
    if j == 1
        A(h,h) = A(h,h) - v(x_,y_-dy/2)*dx;
    else
        A(h,h) = A(h,h) - v(x_,y_-dy/2)*dx;
        A(h,h-1) = A(h,h-1) - v(x_,y_-dy/2)*dx;
    end

 %2nd order  - Diffusion
  %E
    if i == nx       %1 - A(h,h) / dx/2!!!
            B(h) = B(h) -2*k/dx *dy;   %Te=1
            A(h,h) = A(h,h) - 2*k/dx *dy;
    else,   A(h,h+ny) = A(h,h+ny) + k/dx *dy;
            A(h,h) = A(h,h) - k/dx *dy;
    end
  %W
    if i == 1        %- (A(h,h)-0) / dx/2!!!
```

```
                B(h) = B(h);            %Tw=0
                A(h,h) = A(h,h) - 2*k/dx *dy;
        else,   A(h,h-ny) = A(h,h-ny) + k/dx *dy;
                A(h,h) = A(h,h) - k/dx *dy;
        end
     %N
        if j == ny      % 0 - ..
        else,   A(h,h+1) = A(h,h+1) + k/dy *dx;
                A(h,h) = A(h,h) - k/dy *dx;
        end
     %S
        if j == 1       % .. - 0
        else,   A(h,h-1) = A(h,h-1) + k/dy *dx;
                A(h,h) = A(h,h) - k/dy *dx;
        end
     end
end

%1.
if mode == 1
    time = input('Nhap moc thoi gian xet hoi tu: ');
    dt = input('Nhap buoc thoi gian: ');

    for n = 1 : time/dt
        T = T - (A *T -B) *dt/(dx*dy);
    end

%2.
elseif mode == 2
    disp('2.1. Buoc thoi gian co dinh.');
    disp('2.2. Buoc thoi gian toi uu.');
    mode2 = input('Chon [ 1 | 2 ]: ');
    for h = 1 : nx*ny
        dt_(h)=(dx*dy)/A(h,h);
    end
    dt_min = 1 - norm(ones(nx*ny,1)-dt_,Inf);
    count =1;
    max_dT =1;

    if mode2 == 1,      tic;
        fprintf('Dieu kien Forward Euler-Explicit: dt <=
%.4f\n',dt_min);
        dt=input('Nhap buoc thoi gian: ');
        while  max_dT > 0.0001
```

```
            T_ = T - (A *T -B) *dt/(dx*dy);
            max_dT = norm ( abs(T_ - T) , Inf );
            T = T_;
            count = count+1;
        end;            runtime = toc;

    elseif mode2 == 2, tic;
        while  max_dT > 0.0001
            T_ = T - (A *T -B) .*dt_/(dx*dy);
            max_dT = norm ( abs(T_ - T) , Inf );
            T = T_;
            count = count+1;
        end;            runtime = toc;
    end
end

for i = 1 : nx
    for j = 1 : ny
        h = (i-1)*ny + j;
        t_(i,j) = T(h);
    end
end

%Temperature diagram - Contours
contourf(x,y,t_,round(sqrt(nx))*2);
xlim([0 1]);
ylim([0 2]);
axis equal;
colormap(jet);
colorbar;
```

Tài liệu tham khảo:

1. Lê Thái Thanh, “Giáo trình Phương pháp tính”, Đại học Bách Khoa TP Hồ Chí Minh, 2016.
2. Oliver Rübenkönig, “The Finite Volume Method (FVM)”, Albert Ludwigs University of Freiburg, 2012.
3. Lê Tuấn Phương Nam, “Bài giảng Phương pháp số - Động lực học lưu chất”, Đại học Bách Khoa TP Hồ Chí Minh, 2024.