Лабораторная работа №2 (ряды Фурье)

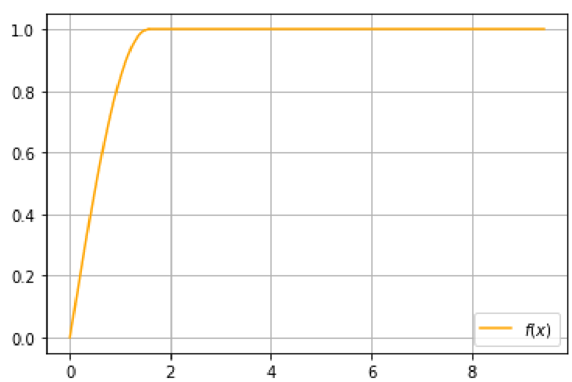
Выполнил:
Фам Куок Ань, студент группы R3138 (Факультет систем управления и робототехники)
Санкт-Петербург, 2022

Вариант 6

Функция:

$$f(x) = \begin{cases} sin(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x \in [\frac{\pi}{2}, 3\pi] \end{cases}$$

Построим график данной функции на отрезке $[0, 3\pi]$:



Разложение функции в ряд

Общий тригонометрический ряд

В общем случае найдем коэффициенты тригонометрического ряда по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{3\pi} \int\limits_0^{3\pi} f(x)dx = \frac{1}{3\pi}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} dx)$$

$$a_n = \frac{2}{3\pi} \int\limits_0^{3\pi} f(x)cos(\frac{2nx}{3})dx = \frac{2}{3\pi}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)cos(\frac{2nx}{3})dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} cos(\frac{2nx}{3})dx)$$

$$b_n = \frac{2}{3\pi}\int\limits_0^{3\pi} f(x)sin(\frac{2nx}{3})dx = \frac{2}{3\pi}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)sin(\frac{2nx}{3})dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} sin(\frac{2nx}{3})dx)$$

Можем записать:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{3\pi}(1 + \frac{5\pi}{2})$$

Произведем несколько промежуточных вычислений:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)cos(\frac{2nx}{3})dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(sin(x + \frac{2nx}{3}) - sin(-x + \frac{2nx}{3}))dx =$$
$$= \frac{1}{2}(-\frac{3}{3+2n}cos(x + \frac{2nx}{3})|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{-3+2n}cos(-x + \frac{2nx}{3})|_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{3+2n} + \frac{3}{3+2n}sin(\frac{\pi n}{3}) - -\frac{3}{-3+2n} +$$
$$\frac{3}{-3+2n}sin(\frac{\pi n}{3})) = \frac{1}{2}\frac{-18+6nsin(\frac{\pi n}{3})}{4n^2-9} = \frac{9-6nsin(\frac{\pi n}{3})}{9-4n^2}$$

Аналогично:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)sin(\frac{2nx}{3})dx = \frac{6ncos(\frac{\pi n}{3})}{9-4n^2}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} cos(\frac{2nx}{3})dx = \frac{3(sin(2\pi n) - sin(\frac{\pi n}{3}))}{2n} = \frac{-3sin(\frac{\pi n}{3})}{2n}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} sin(\frac{2nx}{3})dx = \frac{3(cos(\frac{\pi n}{3}) - cos(2\pi n))}{2n} = \frac{3(cos(\frac{\pi n}{3})-1)}{2n}$$

Тогда:

$$a_n = \frac{2}{3\pi}(\frac{9-6nsin(\frac{\pi n}{3})}{9-4n^2} - \frac{3sin(\frac{\pi n}{3})}{2n}) = \frac{-6n+9sin(\frac{\pi n}{3})}{\pi n(4n^2-9)}$$

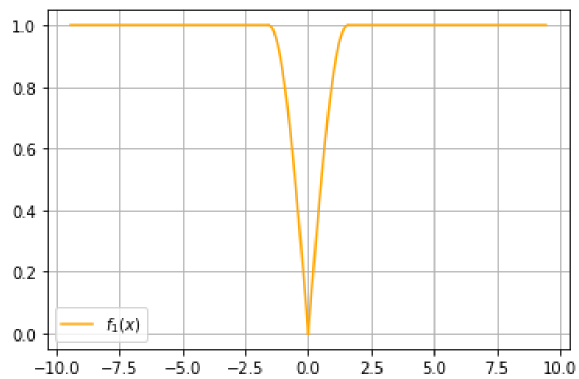
$$b_n = \frac{2}{3\pi}(\frac{6ncos(\frac{\pi n}{3})}{9-4n^2} + \frac{3(cos(\frac{\pi n}{3})-1)}{2n}) = \frac{-4n^2-9cos(\frac{n\pi}{3})+9}{\pi n(4n^2-9)}$$

$$S_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx))$$

Ряд по косинусам

Дополним функцию до четной:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, x \in [-3\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ -sin(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ sin(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x \in [\frac{\pi}{2}, 3\pi] \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{3\pi}\int\limits_0^{3\pi} f(x)dx = \frac{1}{3\pi}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} dx) = -//- = \frac{1}{3\pi}(1+\frac{5\pi}{2})$$

$$a_n = \frac{2}{3\pi}\int\limits_0^{3\pi} f(x)cos(\frac{nx}{3})dx = \frac{2}{3\pi}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)cos(\frac{nx}{3})dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} cos(\frac{nx}{3})dx)$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)cos(\frac{nx}{3})dx = \frac{3(nsin(\frac{\pi}{6})-3)}{n^2-9}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} cos(\frac{nx}{3})dx = \frac{3(sin(\pi n)-sin(\frac{\pi n}{6}))}{n} = \frac{-3sin(\frac{\pi n}{6})}{n}$$

$$a_n = \frac{2}{3\pi}(\frac{3(nsin(\frac{\pi}{6})-3)}{n^2-9} - \frac{3sin(\frac{\pi n}{6})}{n}) = \frac{6n-18sin(\frac{\pi n}{6})}{\pi n(9-n^2)}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3\pi}$$

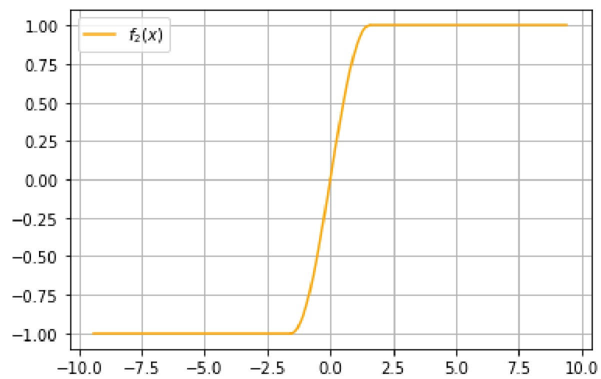
$$b_n = 0$$

$$S_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx)$$

Ряд по синусам

Дополним функцию до нечетной:

$$f_2(x) = \begin{cases} -1, x \in [-3\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ sin(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x \in [\frac{\pi}{2}, 3\pi] \end{cases}$$



$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{3\pi}\int\limits_0^{3\pi} f(x)sin(\frac{nx}{3})dx = \frac{2}{3\pi}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)sin(\frac{nx}{3})dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} sin(\frac{nx}{3})dx)$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)sin(\frac{nx}{3})dx = \frac{3nsin(\frac{\pi n}{6})}{9-n^2}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} sin(\frac{nx}{3})dx = \frac{3(cos(\frac{\pi n}{6})-cos(\pi n))}{n} = \frac{3(cos(\frac{\pi n}{6})+(-1)^{n+1})}{n}$$

$$b_n = \frac{2}{3\pi}(\frac{3nsin(\frac{\pi n}{6})}{9-n^2} + \frac{3(cos(\frac{\pi n}{6})+(-1)^{n+1})}{n}) = \frac{-2((n^2-9)(-1)^n+9cos(\frac{\pi n}{6}))}{\pi n(n^2-9)}$$

$$b_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3\pi}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k sin(kx)$$

Визуализация

В качестве примера визуализации сумм ряда возьмем код для общего тригонометрического ряда:

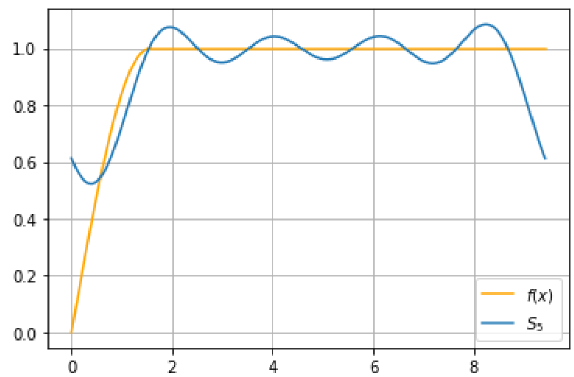
```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

def get_a_n(n):
    if n == 0:
        return (1 + 5 / 2 * np.pi) / (3 * np.pi)
    return (-6 * n + 9 * np.sin(np.pi * n / 3)) / (np.pi * n * (4 * n ** 2 - 9))


def get_b_n(n):
    return  (-4 * n ** 2 + 9 - 9 * np.cos(np.pi * n / 3)) / (np.pi * n * (4 * n ** 2 - 9))


def getSum(n, x):
    s = get_a_n(0)
    if n == 1:
        return np.zeros_like(x) + s
    for i in range(1, n):
        s += get_a_n(i) * np.cos(i * 2 * x / 3) + get_b_n(i) * np.sin(i * 2 * x / 3)
    return s
```

```
plt.plot(np.linspace(0, np.pi / 2), np.sin(np.linspace(0, np.pi / 2)), c="orange", label=r"$f(x)$")
plt.plot(np.linspace(np.pi / 2, 3 * np.pi), [1] * 50, c="orange")
num = 100
num_str = "{" + str(num) + "}"
plt.plot(np.linspace(0, 3 * np.pi, 1000), getSum(num, np.linspace(0, 3 * np.pi, 1000)), c="b", label=fr"$S_{num_str}$")
plt.grid(True)
plt.legend()
```

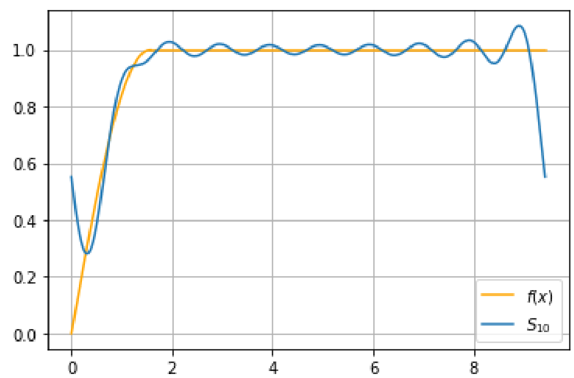
Построим графики:

▼ Общий ряд

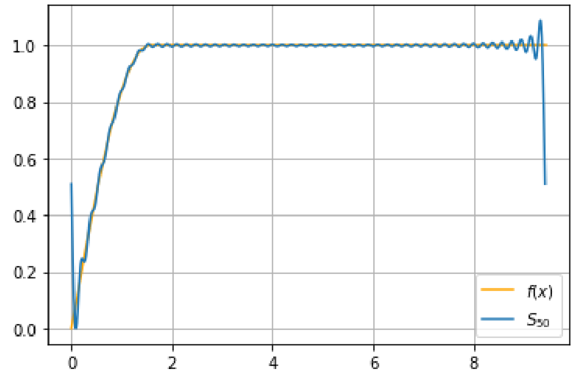
▼ S_5



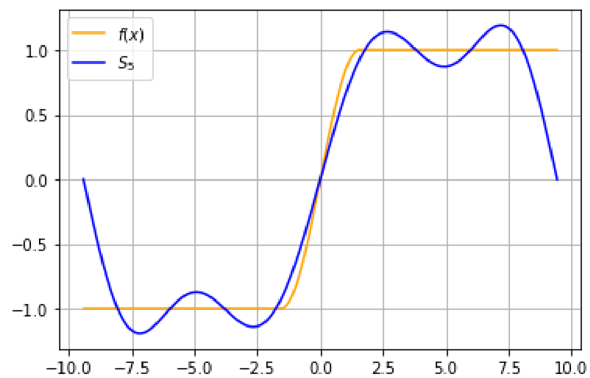
▼ S_{10}



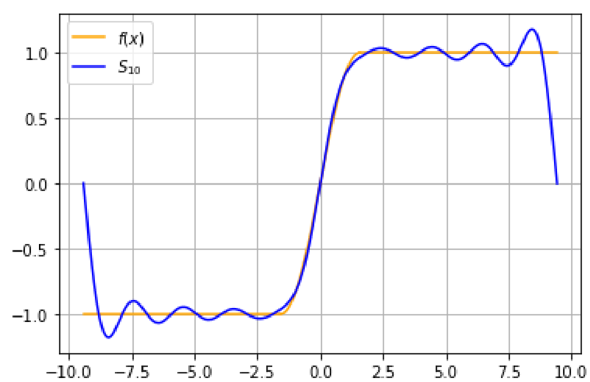
▼ S_{50}



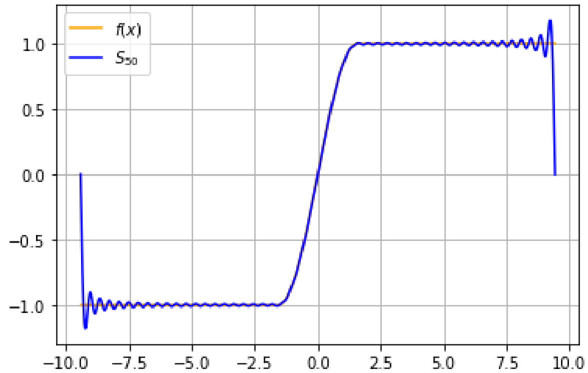
- По синусам
  - S_5



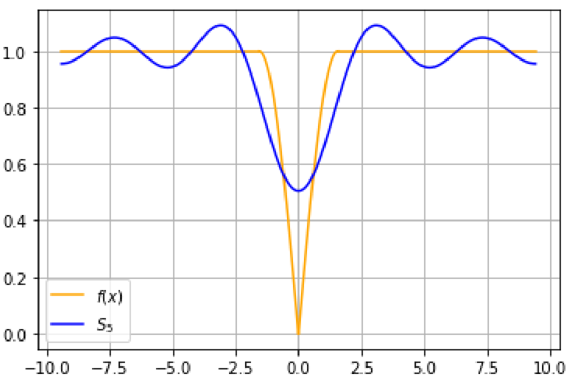
  - S_{10}



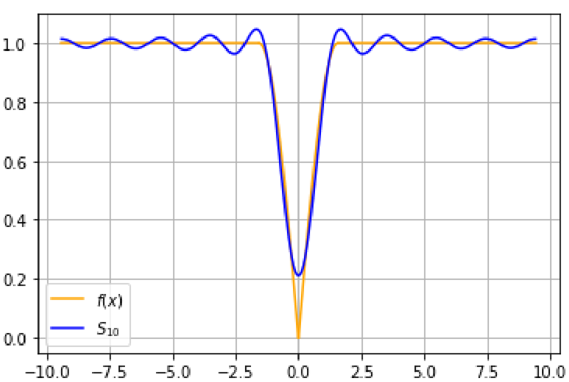
  - S_{50}



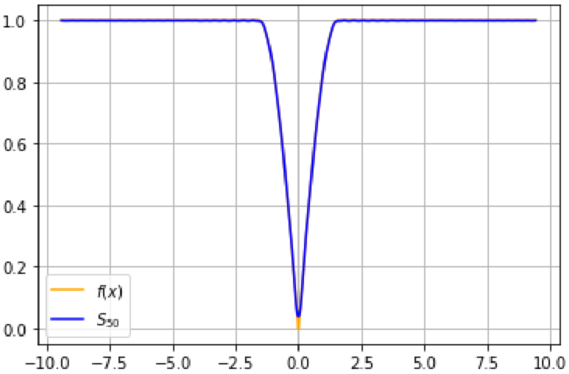
- По косинусам
  - S_5



  - S_{10}



  - S_{50}



Вывод

Построив графики функции и ее приближений с помощью частичных сумм убедимся что погрешность приближения убывет с увеличением n. Данное замечание подтвержадете теорию: т.к. функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле (или может удовлетворять им благодаря некоторым преобразованиям) ряд Фурье сходится к ней на всем интересующем нас промежутке.