Лабораторная работа №1
Интеграл Римана
Вариант №22

Выполнил: Фам Куок Ань

Работа выполнена:

0.1 Постановка задачи

Составьте интегральную сумму для интеграла Римана данной функции по данному промежутку. Вычислите интеграл через предел интегральных сумм. Докажите, что соответствующий интеграл существует. Проверьте с помощью формулы Ньютона–Лейбница. Напишите программу (язык любой), вычисляющую и рисующую интегральные суммы для данной функции на данном отрезке. Входные данные для программы: число точек разбиения, способ выбора оснащения (левые, правые, средние). Найдите погрешность оценки, сравните ее с теоретической погрешностью (формулы выведите с использованием формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа). Разбиение равномерное.

Функция:

$$f(x) = x^3, [-2, 0] \tag{1}$$

0.2 Аналитическая часть

Докажем существования интеграла Римана для нашей функции на заданном отрезке. Функция x^3 непрерывна на отрезке $[-2, 0]$, а значит наша функция и интегрируема на этом отрезке, стало быть интеграл Римана $\int\limits_{-2}^{0} x^3 dx$ существует.

Теперь найдем интегральную сумму. Введем оснащенное разбиение τ на отрезке $[-2, 0]$, $x_k = \frac{2i}{n} - 2, i \in \{0, ..., n\}$, а $\xi_k = x_k$, тогда интегральная сумма:

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} - 2\right)^3 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8i^3}{n^3} - \frac{24i^2}{n^2} + \frac{24i}{n} - 8\right)$$

$$= \frac{16}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{48}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{48}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i - 16 = \frac{16}{n^4} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{48}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$$

$$+ \frac{48}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 16 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 4 - 16 + 24 - 16 = -4$$

Найдем этот же интеграл при помощи формулы Ньютона - Лейбница:

$$\int\limits_{-2}^{0} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^{0} = -\frac{2^4}{4} = -4$$

Значения интеграла совпали, значит предел интегральной суммы был посчитан правильно.

0.3 Графики, полученные в результате программы

Ссылка на github: https://github.com/StriderOne/MatanLab1.git

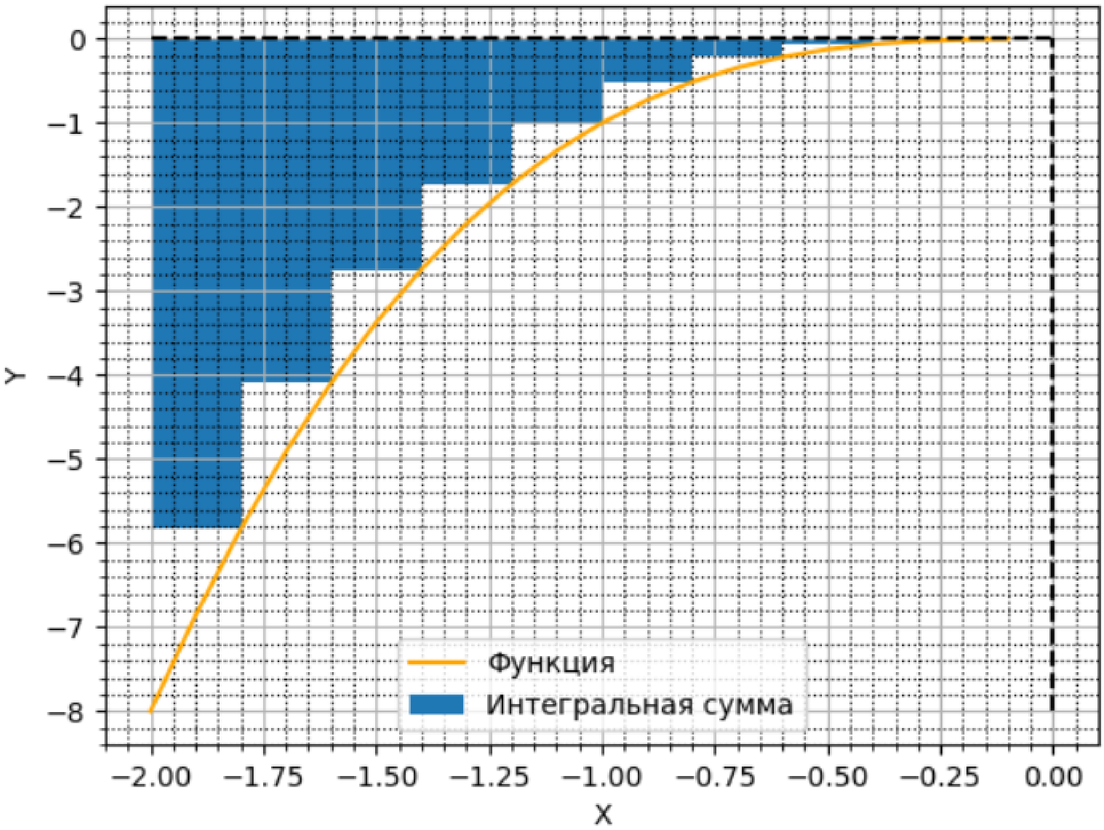

Рис. 1: График функции с изображенной интегральной суммой при параметре n = 10 и взятых правых точках на отрезках

```
Square: -3.2400000000000007
Infelicity: 0.7599999999999993
```

Рис. 2: Значения площади интегральной суммы и погрешности в результате выполнения программы, для параметров Рис. 1.

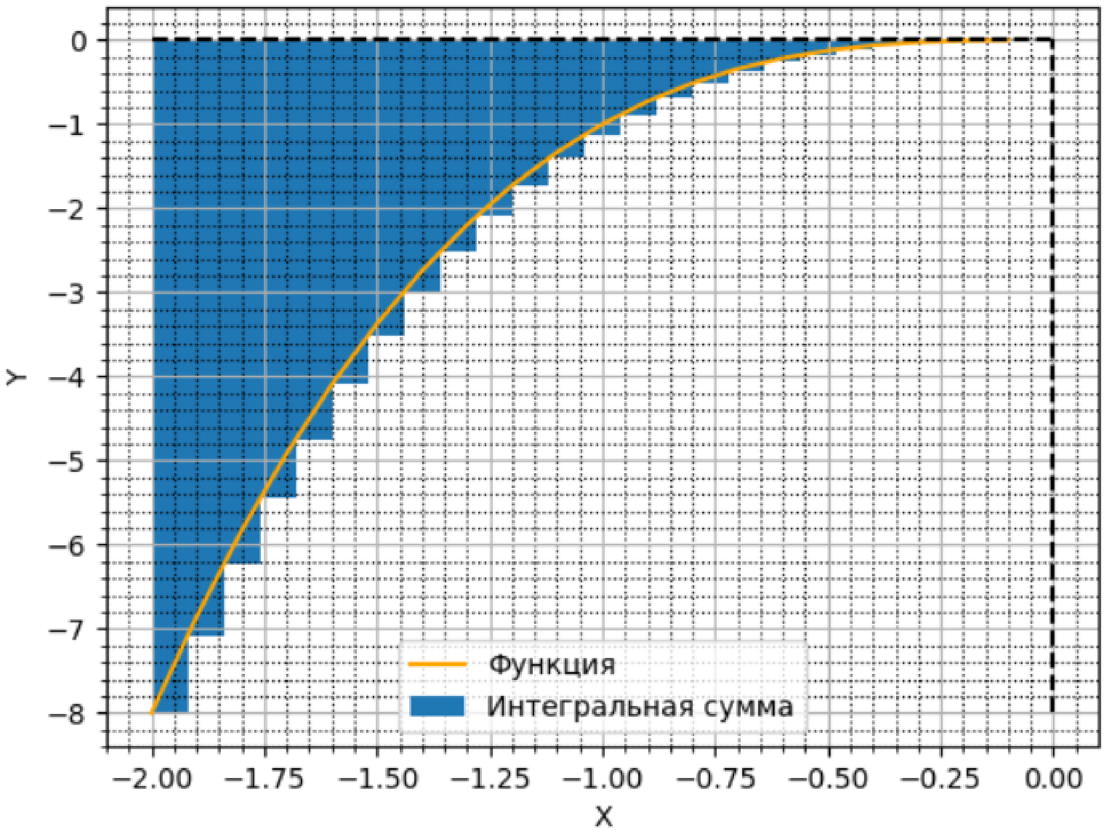

Рис. 3: График функции с изображенной интегральной суммой при параметре n = 25 и взятых левых точках на отрезках

```
Square: -4.3264
Infelicity: 0.3263999999999996
```

Рис. 4: Значения площади интегральной суммы и погрешности в результате выполнения программы, для параметров Рис. 3.

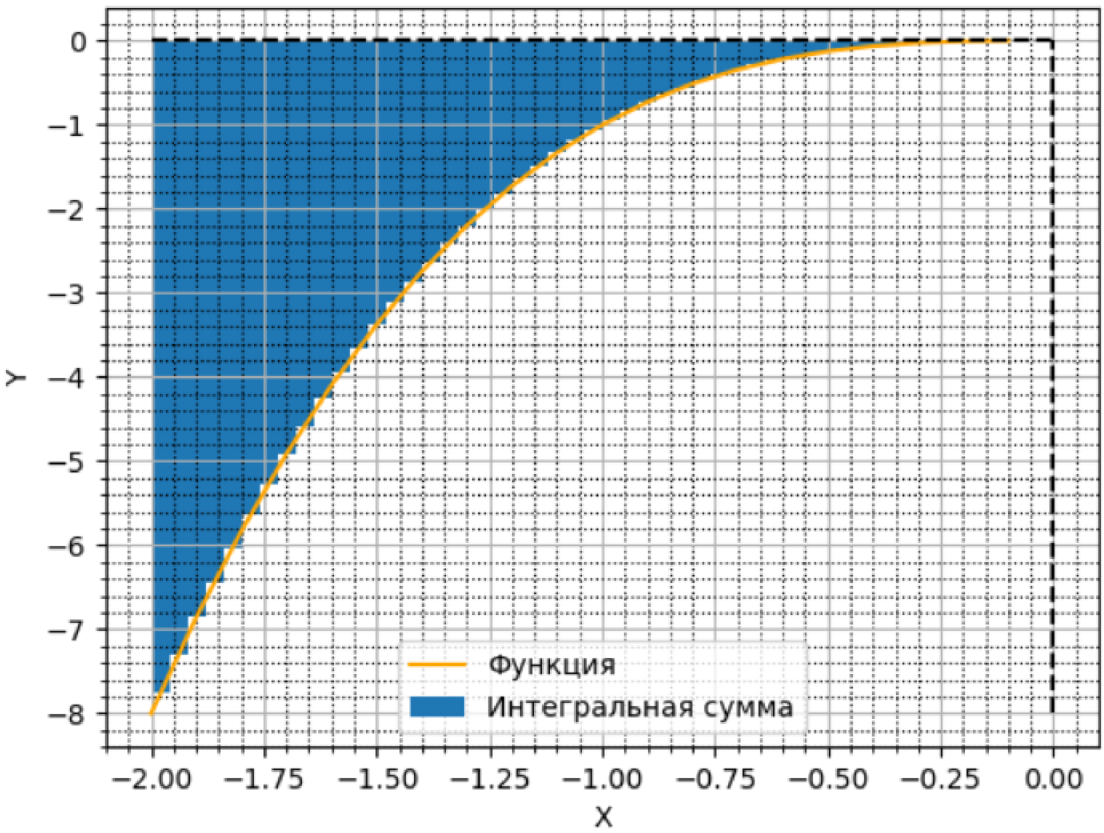

Рис. 5: График функции с изображенной интегральной суммой при параметре n = 50 и взятых центральных точках на отрезках

```
Square: -3.999199999999999
Infelicity: 0.0008000000000008001
```

Рис. 6: Значения площади интегральной суммы и погрешности в результате выполнения программы, для параметров Рис. 5.

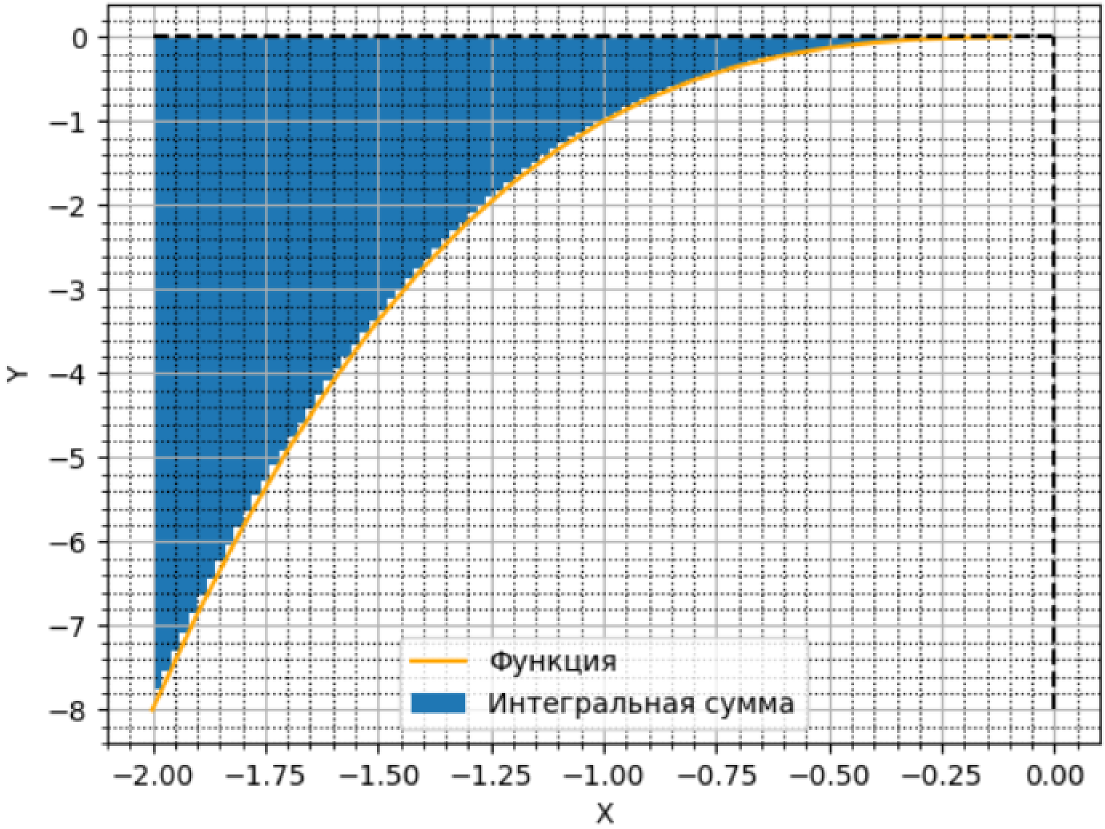

Рис. 7: График функции с изображенной интегральной суммой при параметре n = 100 и взятых правых точках на отрезках

```
Square: -3.9204000000000001
Infelicity: 0.07959999999999878
```

Рис. 8: Значения площади интегральной суммы и погрешности в результате выполнения программы, для параметров Рис. 7.

0.4 Рассчет погрешностей

Для большей ясности рассмотрим рис. 1. На отрезке $[-2, 0]$ введем равномерное разбиение, состоящее из n отрезков: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = b$, тогда длина каждого отрезка $l_i = \frac{l}{n}$, где l - длина отрезка. Введем обозначение R_i как погрешность на i отрезке или, иначе говоря на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Погрешность - это разность по модулю между получившимся значением и реальным. В нашем случае реальным значением будет значение интеграла данной функции на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, обозначим это значение как I_i. А получившимся значением будет площадь соответствующего прямоугольника интегральной суммы на этом же отрезке, обозначим это значение как S_i. Тогда, $R_i = |I_i - S_i|$. Но $I_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, а $S_i = \frac{l}{n} \cdot f(\xi_i)$, ξ_i - выбранные точки на отрезках оснащенного разбиения (в нашем случае, это либо левые точки, либо правые, либо центральные). Заметим, что в выражении $\frac{l}{n} \cdot f(\xi_i)$, $\frac{l}{n}$ можно предстваить, как $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dx$. Тогда, $R_i = |I_i - S_i| = \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)dx \right| = |\text{по св-ву интеграла Римана}| = |\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i))dx|$. По формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа при $n = 0$: $f(x) = f(\xi_i) + f'(c_i)(x - \xi_i)$, где $c_i \in (\xi_i, x)$ (для определенности будем считать, что $x > \xi_i$). Тогда: $|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i))dx| = |\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f'(c)(x - \xi_i)dx| = |f'(c_i) \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \xi_i)dx| = |f'(c_i) \cdot \frac{(x-\xi_i)^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}| = |f'(c_i) \cdot \frac{1}{2} \left((x_{i+1} - \xi_i)^2 - (x_i - \xi_i)^2\right)| = |f'(c_i) \cdot \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2 + 2\xi_i(x_i - x_{i+1})}{2}| = |f'(c_i) \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i - 2\xi_i)}{2}|$. Общая погрешность рассчитывается, как $R = \sum\limits_{i=0}^{n} R_i$, тогда: $|R| \leq max(|f'(c_i)|) \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}+x_i-2\xi_i)}{2}$

Если выбраны левые точки, то $\xi_i = x_i$, то

$|R| \leq max(|f'(c_i)|) \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} = max(|f'(c_i)|) \frac{(b-a)^2}{2n} = max(|f'(c_i)|) \frac{2}{n} = \frac{24}{n}$

Если выбраны правые точки, то $\xi_i = x_{i+1}$, то

$|R| \leq max(|f'(c_i)|) \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} = \frac{24}{n}$ аналогично первому случаю

Для центральных точек воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Лагранжа при n = 1, то:

$f(x) = f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x - \xi_i) + \frac{f''(c_i)(x-\xi_i)^2}{2}$, где $c_i \in (\xi_i, x)$

$f(x) - f(\xi_i) = f'(\xi_i)(x - \xi_i) + \frac{f''(c_i)(x-\xi_i)^2}{2}$

$R_i = \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i))dx \right| = \left| f'(\xi_i) \frac{(x-\xi_i)^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{f''(c_i)}{6}(x - \xi_i)^3 \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right| = |\text{учитывая } \xi_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}| = \left| \frac{f''(c_i)}{6} \right| \left| \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^3 + \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^3 \right| = \left| \frac{f''(c_i)(x_{i+1}-x_i)^3}{24} \right|$

$|R| = \sum\limits_{i=0}^{n} R_i \leq max(|f''(c_i)|) \frac{8}{24n^2} = \frac{4}{n^2}$

Теперь, если мы посмотрим на все полученные погрешности, то убедимся, что они удовлетворяют полученным оценкам.