SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ LỚP 12
NĂM HỌC 2018 - 2019
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút *(không kể thời gian giao đề)*
(Đề thi có 50 câu, 04 trang)

Câu 1. Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $R\sqrt{3}$ thì diện tích xung quanh của nó bằng

A. $2\sqrt{3}\pi R^2$. **B.** πR^2. **C.** $2\pi R^2$. **D.** $\sqrt{3}\pi R^2$.

Câu 2. So sánh ba số $a=0,2^{2019}$; $b=e^{2019}$ và $c=\pi^{2019}$.

A. $b<a<c$. **B.** $a<b<c$. **C.** $a<c<b$. **D.** $c<b<a$.

Câu 3. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{2-x}$ có phương trình là

A. $y=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $y=-1$. **D.** $x=4$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=\log_2\dfrac{2-x}{x}$ là

A. $(0;2]$. **B.** $(-\infty;0)\cup(2;\infty)$. **C.** $(-\infty;0)\cup[2;\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 5. Đường sinh của một khối nón có độ dài bằng $2a$ và hợp với đáy một góc $60°$ Thể tích của khối nón đó bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{1}{3}\pi a^3$. **D.** $\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 6. Hàm số $y=x^4-4x^3$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$. **B.** $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$.

C. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx$. **D.** $\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$.

Câu 8. Nếu tăng bán kính một khối cầu lên 5 lần thì thể tích của khối cầu tăng lên

A. 125 lần. **B.** 25 lần. **C.** 5 lần. **D.** 10 lần.

Câu 9. Giả sử $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x+3}=\ln\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số tự nhiên có ước chung lớn nhất bằng 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a-b>2$. **B.** $a^2-b^2=41$. **C.** $a+2b=14$. **D.** $3a-b<12$.

Câu 10: Trong không gian cho hình vuông (H). Hỏi hình (H) có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 11. Một cấp số nhân với công bội bằng -2, có số hạng thứ ba bằng 8 và số hạng cuối bằng -1024. Hỏi cấp số nhân đó có bao nhiêu số hạng?

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=3$ và $(\vec{a},\vec{b})=30^0$. Độ dài vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 54.

Câu 13. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 6a^3$. **B.** $V = \dfrac{5a^3}{2}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \dfrac{9a^3}{2}$.

Câu 14. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

A. $m \le 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \le 1$. **D.** $m < 2$.

Câu 15. Một khối chóp tam giác có đường cao bằng 10cm và các cạnh đáy bằng 20cm, 21cm, 29cm. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $700\,\text{cm}^3$. **B.** $2100\,\text{cm}^3$. **C.** $20\sqrt{35}\,\text{cm}^3$. **D.** $700\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

Câu 16. Giả sử $\int\limits_1^{16} f(x)\text{d}x = 2020$, khi đó giá trị của $\int\limits_1^{2} x^3.f(x^4)\text{d}x$ bằng

A. 2020^4. **B.** $\sqrt[4]{2020}$. **C.** 8080. **D.** 505.

Câu 17. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a^{\log_3 7} = 27$, $b^{\log_7 11} = 49$, $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức $S = \sqrt[3]{a^{(\log_3 7)^2}} + \sqrt{b^{(\log_7 11)^2}} + c^{(\log_{11} 25)^2}$.

A. $S = 25$. **B.** $S = 20$. **C.** $S = 22$. **D.** $S = 23$.

Câu 18. Một khối cầu ngoại tiếp khối lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\pi\sqrt{3}}{8}$.

Câu 19. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \le 32$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+y$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1)$, $N(-1;-1;0)$, $P(3;1;-1)$. Tìm tọa độ điểm I thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho I cách đều ba điểm M, N, P.

A. $I(2;1;0)$. **B.** $I\left(-\dfrac{7}{4};2;0\right)$. **C.** $I\left(2;\dfrac{7}{4};0\right)$. **D.** $I\left(2;-\dfrac{7}{4};0\right)$.

Câu 21. Cho hình trụ (T) có hai hình tròn đáy là (O) và (O'). Xét hình nón (N) có đỉnh O', đáy là hình tròn (O) và đường sinh hợp với đáy một góc α. Biết tỉ số giữa diện tích xung quanh hình trụ (T) và diện tích xung quanh hình nón (N) bằng $\sqrt{3}$. Tính số đo góc α.

A. $\alpha = 45°$. **B.** $\alpha = 60°$. **C.** $\alpha = 30°$. **D.** $\alpha = 75°$.

Câu 22. Trên ba cạnh OA, OB, OC của khối chóp $O.ABC$ lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $2OA' = OA$, $4OB' = OB$ và $3OC' = OC$. Tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $O.A'B'C'$ và $O.ABC$ là

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{24}$. **C.** $\dfrac{1}{32}$. **D.** $\dfrac{1}{16}$.

Câu 23: Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \le 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$.

A. $\dfrac{a}{6} - 1$. **B.** $\dfrac{2a}{3} + 1$. **C.** $\dfrac{a}{6} + 1$. **D.** $\dfrac{2a}{3} - 1$.

Câu 24: Cho $\log_5 7 = a$ và $\log_5 4 = b$. Biểu diễn $\log_5 560$ dưới dạng $\log_5 560 = m.a + n.b + p$, với m, n, p là các số nguyên. Tính $S = m + n.p$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 5$.

Câu 25. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+x-3$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là

A. $y=x+4$. **B.** $y=x-4$. **C.** $y=9x+4$. **D.** $y=-7x-12$.

Câu 26. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1}{x^2-3x}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 27. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn, có ba chữ số đôi một khác nhau được lấy từ các chữ số $1;2;3;4;5;6$?

A. 180. **B.** 720. **C.** 60. **D.** 120.

Câu 28. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-5x^2+4x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $-\dfrac{74}{27}$. **D.** -1.

Câu 29: Điều kiện cần và đủ để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ (với a, b, c là các tham số) có ba cực trị là:

A. $ab\le 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\ge 0$.

Câu 30: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-1$ và $u_5=9$. Tìm u_3.

A. $u_3=4$. **B.** $u_3=3$. **C.** $u_3=5$. **D.** $u_3=6$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-8;+\infty)$ để phương trình sau có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt $x^2+x(x-1)2^{x+m}+m=(2x^2-x+m)2^{x-x^2}$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 32. Trong không gian cho tam giác ABC có $AB=2R, AC=R, \widehat{CAB}=120^0$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính R. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

A. $4R$. **B.** $6R$. **C.** $R\sqrt{19}$. **D.** $2R\sqrt{7}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=x(x^2-1)\sqrt{x^2+3}$. Giả sử a, b là hai số thực thay đổi sao cho $a<b\le 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(a)-f(b)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}-64}{15}$. **B.** $\dfrac{33\sqrt{3}-64}{15}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $-\dfrac{11\sqrt{3}}{5}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;3;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(-6;2;4)$ và $D(2;1;7)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là một mặt cầu (S). Xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I\left(\dfrac{4}{3};1;\dfrac{2}{3}\right)$, $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, $R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $I\left(1;\dfrac{14}{3};\dfrac{8}{3}\right)$, $R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $I\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{10}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 35: Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng qua gốc tọa độ là:

A. $(-\infty;-1)\cup(0;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Câu 36: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy (ABC) bằng 60^0. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$, tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 37. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int\limits_{-2}^{2} f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_{1}^{5}\frac{f\left(x\right)}{x^2}\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_{1}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -15. **B.** -2. **C.** -13. **D.** 0.

Câu 38. Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Tính theo a thể tích của khối đa diện có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chóp đã cho.

A. $\frac{5a^3}{24}$. **B.** $\frac{5a^3}{12}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 39: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của $AB, B'C'$ và DD'. Thể tích của khối tứ diện $C'MNP$ bằng

A. $\frac{V}{32}$. **B.** $\frac{V}{8}$. **C.** $\frac{V}{16}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Câu 40: Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left|\tan^4 x-\frac{2}{\cos^2 x}\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m=3$. **B.** $2<m<3$. **C.** $2\le m\le 3$. **D.** $m=2$.

Câu 41. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 42. Cho phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-\left(m+2\right).5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$, với m là tham số. Giá trị nguyên dương lớn nhất của tham số m để phương trình trên có nghiệm là:

A. 5 **B.** 26. **C.** 25. **D.** 6.

Câu 43. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\cos x+1}{\cos^2 x+\cos x+1}\cdot$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2M=3m.$ **B.** $M-m=\frac{2}{3}.$ **C.** $M-m=1\cdot$ **D.** $M-m=\frac{3}{2}.$

Câu 44. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-4x^2$. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x|-1\right)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 6 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S_1\right)$ có tâm $I_1\left(1;0;1\right)$, bán kính $R_1=2$ và mặt cầu $\left(S_2\right)$ có tâm $I_2=\left(1;3;5\right)$, bán kính $R_2=1$. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$ lần lượt tại A và B. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn AB. Tính $P=M.m$.

A. $P=2\sqrt{6}.$ **B.** $P=8\sqrt{5}.$ **C.** $P=4\sqrt{5}.$ **D.** $P=8\sqrt{6}.$

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3\left(m+1\right)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại .

A. $m\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right].$ **B.** $m\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\{-1\}.$

C. $m\in\left[\frac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right).$ **D.** $m\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}.$

Câu 47. So sánh ba số $a=1000^{1001}$, $b=2^{2^{64}}$ và $c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}$?

A. $c<a<b$. **B.** $b<a<c$. **C.** $c<b<a$. **D.** $a<c<b$.

Câu 48. Cho các hàm số $f(x)=x^2-4x+m$ và $g(x)=(x^2+1)(x^2+2)^2(x^2+3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3;+\infty)$ là

A. $[3;4)$. **B.** $[0;3)$. **C.** $[4;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+2f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực x. Giả sử $f(2)=m$, $f(-3)=n$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-2)-f(3)$.

A. $T=m+n$. **B.** $T=n-m$. **C.** $T=m-n$. **D.** $T=-m-n$.

Câu 50. Cho các số thực dương x, y thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x>y>1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\log^2_{\frac{x}{y}}(x^2)+3\log_y\dfrac{x}{y}$ là

A. 19. **B.** 13. **C.** 14. **D.** $T=15$.

-------------------------- Hết --------------------------

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	A	B	C	A	D	A	B	C	D	A	A	D	D	C	C	D	B	B	A	A	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	C	A	B	A	B	C	B	C	A	D	C	B	C	B	B	C	C	C	D	D	A	D	B	D

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $R\sqrt{3}$ thì diện tích xung quanh của nó bằng

A. $2\sqrt{3}\pi R^2$. **B.** πR^2. **C.** $2\pi R^2$. **D.** $\sqrt{3}\pi R^2$.

Lời giải

Chọn A.

Theo công thức tính diện tích xung quanh hình trụ ta có: $S_{xq}=2\pi Rh=2\pi R.R\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi R^2$.

Câu 2. So sánh ba số $a=0,2^{2019}$; $b=e^{2019}$ và $c=\pi^{2019}$.

A. $b<a<c$. **B.** $a<b<c$. **C.** $a<c<b$. **D.** $c<b<a$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $0<0,2<e<\pi \Rightarrow 0,2^{2019}<e^{2019}<\pi^{2019} \Rightarrow a<b<c$.

Câu 3. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{2-x}$ có phương trình là

A. $y=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $y=-1$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-4}{2-x}=-1$ suy ra đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=-1$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=\log_2 \dfrac{2-x}{x}$ là

A. $(0;2]$. **B.** $(-\infty;0)\cup(2;\infty)$. **C.** $(-\infty;0)\cup[2;\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

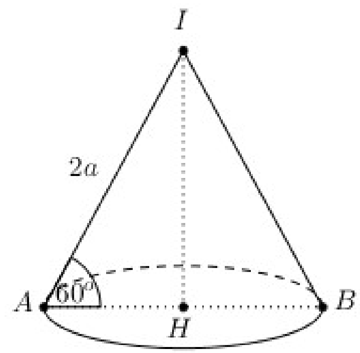
Chọn D

Điều kiện $\dfrac{2-x}{x}>0 \Leftrightarrow 0<x<2$. Vậy tập xác định của hàm số $y=\log_2 \dfrac{2-x}{x}$ là $(0;2)$.

Câu 5. Đường sinh của một khối nón có độ dài bằng $2a$ và hợp với đáy một góc $60°$ Thể tích của khối nón đó bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{1}{3}\pi a^3$. **D.** $\sqrt{3}\pi a^3$.

Lời giải



Chọn A

Tam giác IAB cân tại I có góc $\widehat{IAB}=60°$ nên là tam giác đều.

$\Rightarrow AH=\dfrac{1}{2}AB=a$ và $IH=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Vậy $V=\dfrac{1}{3}\pi.AH^2.IH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$.

Câu 6. Hàm số $y=x^4-4x^3$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-12x^2$

Cho $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx$. **B.** $\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)dx=0$.

C. $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx$. **D.** $\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)dx=2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.

Lời giải

Chọn C

C. Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=0\Rightarrow t=1 \end{cases}$.

Ta có: $\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=-\int\limits_1^0 f\left(t\right)dt=\int\limits_0^1 f\left(t\right)dt$.

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.

Câu 8. Nếu tăng bán kính một khối cầu lên 5 lần thì thể tích của khối cầu tăng lên

A. 125 lần. **B.** 25 lần. **C.** 5 lần. **D.** 10 lần.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ $\Rightarrow$ Nếu tăng bán kính R lên 5 lần thì thể tích V tăng lên $5^3=125$ lần.

Câu 9. Giả sử $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+3}=\ln\frac{a}{b}$, với a,b là các số tự nhiên có ước chung lớn nhất bằng 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a-b>2$. **B.** $a^2-b^2=41$. **C.** $a+2b=14$. **D.** $3a-b<12$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\ln\frac{a}{b}=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+3}=\int\limits_1^2 \frac{d\left(x+3\right)}{x+3}=\ln\left(x+3\right)\Big|_1^2=\ln\frac{5}{4}$

Suy ra: $\begin{cases} a=5 \\ b= \end{cases}\Rightarrow 3a-b=15-4=11<12$.

Câu 10: Trong không gian cho hình vuông $\left(H\right)$. Hỏi hình $\left(H\right)$ có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Trong không gian hình vuông $\left(H\right)$ có bao 5 trụcđối xứng gồm: Hai đường chéo, hai đường trung bình (đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối diện) và trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông.

Câu 11. Một cấp số nhân với công bội bằng -2, có số hạng thứ ba bằng 8 và số hạng cuối bằng -1024. Hỏi cấp số nhân đó có bao nhiêu số hạng?

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Xét cấp số nhân (u_n) có công bội $q=-2$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}u_3=8\\u_n=-1024\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.q^2=8\\u_1.q^{n-1}=-1024\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\(-2)^{n-1}=-512\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\n=10\end{cases}$

Vậy cấp số nhân đó có 10 số hạng.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=3$ và $(\vec{a},\vec{b})=30^0$. Độ dài vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 54.

Lời giải

Chọn C

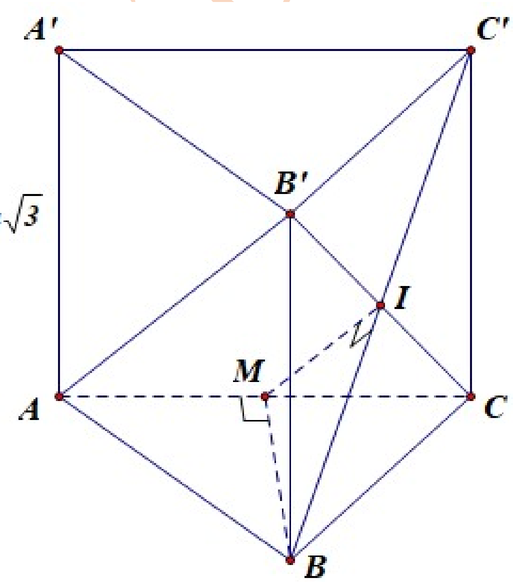
Ta có: $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=9.\left(\vec{a}\right)^2-12.\vec{a}.\vec{b}+4\left(\vec{b}\right)^2=36$. Độ dài vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ bằng 6

Câu 13. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=6a^3$. **B.** $V=\dfrac{5a^3}{2}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\dfrac{9a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC'. Ta có $MI\,//\,AB'$ nên $\left(\widehat{AB',BC'}\right)=\left(\widehat{MI,BC'}\right)=\widehat{MIB}=90^\circ$.

Mà $AB'=BC'$ suy ra ΔBIM vuông cân tại I.

Đặt $AB=x$, $(x>0)$. Ta có

$IM=\dfrac{1}{2}AB'=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+BB'^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3a^2}$.

$BM^2=IB^2+IM^2=2IM^2=\dfrac{1}{2}\left(x^2+3a^2\right)$ (1).

ΔABM vuông tại M nên $BM^2 = AB^2 - AM^2 = x^2 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{3x^2}{4}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{2}\left(x^2+3a^2\right) = \dfrac{3x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 6a^2$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{9a^3}{2}$.

Câu 14. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

A. $m \le 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \le 1$. **D.** $m < 2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \dfrac{2\sqrt{x^2+1} - (2x+m).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{-mx+2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$, $\forall x > 0$.

$\Leftrightarrow -mx+2 \ge 0$, $\forall x > 0$ $\Leftrightarrow m \le \dfrac{2}{x}$, $\forall x > 0$.

Mà $\dfrac{2}{x} > 0$, $\forall x > 0$

Vậy $m \le 0$.

Câu 15. Một khối chóp tam giác có đường cao bằng 10cm và các cạnh đáy bằng 20cm, 21cm, 29cm. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $700\,\text{cm}^3$. **B.** $2100\,\text{cm}^3$. **C.** $20\sqrt{35}\,\text{cm}^3$. **D.** $700\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức Herong ta tính được diện tích đáy:

$p = \dfrac{20+21+29}{2} = 35$

$S = \sqrt{35(35-20)(35-21)(35-29)} = 210$

Thể tích của khối chóp đó bằng

$V = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3}.210.10 = 700\ \ cm^3$

Câu 16. Giả sử $\int\limits_1^{16} f(x)\mathrm{d}x = 2020$, khi đó giá trị của $\int\limits_1^2 x^3.f\left(x^4\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2020^4. **B.** $\sqrt[4]{2020}$. **C.** 8080. **D.** 505.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^4 \Rightarrow dt=4x^3dx$

$x=1 \Rightarrow t=1$

$x=2 \Rightarrow t=16$

$$I=\int_1^2 x^3.f\left(x^4\right)\mathrm{d}x=\int_1^{16} f(t)\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int_1^{16} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.2020=505$$

Câu 17. Cho các số thực dương a,b,c thỏa $a^{\log_3 7}=27,\ \ b^{\log_7 11}=49,\ \ c^{\log_{11}25}=\sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức $S=\sqrt[3]{a^{(\log_3 7)^2}}+\sqrt{b^{(\log_7 11)^2}}+c^{(\log_{11}25)^2}$.

A. $S=25$. **B.** $S=20$. **C.** $S=22$. **D.** $S=23$.

Lời giải

Chọn D

$$S=\sqrt[3]{a^{(\log_3 7)^2}}+\sqrt{b^{(\log_7 11)^2}}+c^{(\log_{11}25)^2}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7}}+\sqrt{\left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11}}+\left(c^{\log_{11}25}\right)^{\log_{11}25}=\sqrt[3]{27^{\log_3 7}}+\sqrt{49^{\log_7 11}}+\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11}25}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(3^{\log_3 7}\right)^3}+\sqrt{\left(7^{\log_7 11}\right)^2}+\left(11^{\log_{11}25}\right)^{\frac{1}{2}}=7+11+5=23.$$

Câu 18. Một khối cầu ngoại tiếp khối lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\pi\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử độ dài cạnh hình lập phương bằng 1. Khi đó thể tích khối lập phương là $V_1=1$.

Khối cầu ngoại tiếp khối lập phương có đường kính là đường chéo của khối lập phương do đó khối cầu có bán kính $R=\frac{1}{2}.\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối cầu là $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là: $\frac{V_2}{V_1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+y$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $P=x+y$.

Ta có $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32 \Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-8y+16+2xy\le 32$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-8(x+y)\le 0 \Leftrightarrow P^2-8P\le 0 \Leftrightarrow 0\le P\le 8$.

Vậy $\min P=0, \max P=8$. Do đó, tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+y$ bằng 8.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1)$, $N(-1;-1;0)$, $P(3;1;-1)$. Tìm tọa độ điểm I thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho I cách đều ba điểm M,N,P.

A. $I(2;1;0)$. **B.** $I\left(-\frac{7}{4};2;0\right)$. **C.** $I\left(2;\frac{7}{4};0\right)$. **D.** $I\left(2;-\frac{7}{4};0\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Điểm $I \in (Oxy) \Rightarrow I(a;b;0)$.

Vì I cách đều ba điểm M,N,P nên $IM = IN = IP$.

Ta có $\begin{cases} IM = \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+1} = \sqrt{a^2+b^2-2a-2b+3} \\ IN = \sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2} = \sqrt{a^2+b^2+2a+2b+2} \\ IP = \sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2+1} = \sqrt{a^2+b^2-6a-2b+11} \end{cases}$.

Do đó ta có hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2-2a-2b+3} = \sqrt{a^2+b^2+2a+2b+2} \\ \sqrt{a^2+b^2-2a-2b+3} = \sqrt{a^2+b^2-6a-2b+11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+4b=1 \\ 4a=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\dfrac{7}{4} \end{cases}.$$

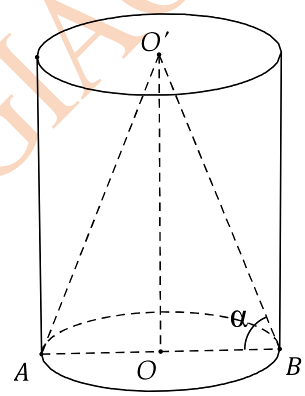
Vậy $I\left(2;-\dfrac{7}{4};0\right)$.

Câu 21. Cho hình trụ (T) có hai hình tròn đáy là (O) và (O'). Xét hình nón (N) có đỉnh O', đáy là hình tròn (O) và đường sinh hợp với đáy một góc α. Biết tỉ số giữa diện tích xung quanh hình trụ (T) và diện tích xung quanh hình nón (N) bằng $\sqrt{3}$. Tính số đo góc α.

A. $\alpha = 45^\circ$. **B.** $\alpha = 60^\circ$. **C.** $\alpha = 30^\circ$. **D.** $\alpha = 75^\circ$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử trụ có chiều cao h, bán kính đáy r. Suy ra đường sinh của nón $l = \sqrt{r^2+h^2}$.

Tỉ số giữa diện tích xung quanh hình trụ (T) và diện tích xung quanh hình nón (N) bằng

$\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{2\pi rh}{\pi rl} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{2h}{\sqrt{r^2+h^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 4h^2 = 3(r^2+h^2) \Leftrightarrow h^2 = 3r^2 \Leftrightarrow h = r\sqrt{3}$.

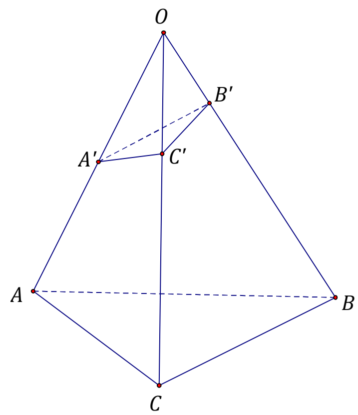
$\tan\alpha = \dfrac{OO'}{OB} = \dfrac{h}{r} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Câu 22. Trên ba cạnh OA, OB, OC của khối chóp $O.ABC$ lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $2OA' = OA$, $4OB' = OB$ và $3OC' = OC$. Tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $O.A'B'C'$ và $O.ABC$ là

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{24}$. **C.** $\dfrac{1}{32}$. **D.** $\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn B



$$\frac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}}=\frac{OA'}{OA}.\frac{OB'}{OB}.\frac{OC'}{OC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$$

Câu 23: Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a(x-x^2) & \text{khi } x>0.\end{cases}$ Tính $\int_{-1}^{1} f(x)dx.$

A. $\frac{a}{6}-1.$ **B.** $\frac{2a}{3}+1.$ **C.** $\frac{a}{6}+1.$ **D.** $\frac{2a}{3}-1.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} 2x\,dx+\int_{0}^{1} a(x-x^2)dx=x^2\Big|_{-1}^{0}+a\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}$

$=\frac{a}{6}-1$.

Câu 24: Cho $\log_5 7=a$ và $\log_5 4=b$. Biểu diễn $\log_5 560$ dưới dạng $\log_5 560=m.a+n.b+p$, với m, n, p là các số nguyên. Tính $S=m+n.p$.

A. $S=3.$ **B.** $S=4.$ **C.** $S=2.$ **D.** $S=5.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_5 560=\log_5 7.4^2.5=\log_5 7+2\log_5 4+1=a+2b+1$

$m=1, n=2, p=1\Rightarrow S=3$

Câu 25. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+x-3$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là

A. $y=x+4$. **B.** $y=x-4$. **C.** $y=9x+4$. **D.** $y=-7x-12$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=x^4-2x^2+x-3\Rightarrow y'=4x^3-4x+1; y(-1)=-5; y'(-1)=1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=1(x+1)-5\Leftrightarrow y=x-4$.

Câu 26. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1}{x^2-3x}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)\setminus\{3\}$.

Ta có:

*) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1}{x^2-3x}=+\infty$

$$\left(\text{do }\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1\right)=19+\sqrt{77}\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-3x\right)=0\\ x^2-3x>0,\text{ khi } x\to 3^+\end{cases}\right).$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=3$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}+2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}+2+\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)}=2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}+2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}+2+\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)}=2.$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 27. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn, có ba chữ số đôi một khác nhau được lấy từ các chữ số $1;2;3;4;5;6$?

A. 180. **B.** 720. **C.** 60. **D.** 120.

Lời giải

Chọn C

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$, $\begin{cases}a_1\ne a_2\ne a_3\\ a_3\in\{2;4;6\}\end{cases}$.

+) a_3 có 3 cách chọn.

+) Có $A_5^2=20$ cách chọn $\overline{a_1a_2}$.

$\Rightarrow$ có $3.20=60$ (số)

Vậy có 60 số tự nhiên chẵn thỏa đề.

Câu 28. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-5x^2+4x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $-\frac{74}{27}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=2x^3-5x^2+4x-2$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

$$y' = 6x^2 - 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = \dfrac{2}{3} \in [0;2] \end{array} \right.$$

+) $y(0) = -2$.

+) $y\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{26}{27}$.

+) $y(1) = -1$.

+) $y(2) = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng -2.

Câu 29: Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (với a, b, c là các tham số) có ba cực trị là:

A. $ab \le 0$. **B.** $ab < 0$. **C.** $ab > 0$. **D.** $ab \ge 0$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị là: $y' = 4ax^3 + 2bx = 0$ có ba nghiệm phân biệt và đổi dấu qua nghiệm.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{-b}{2a} \end{array} \right.$

Khi đó để $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{-b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$.

Câu 30: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -1$ và $u_5 = 9$. Tìm u_3.

A. $u_3 = 4$. **B.** $u_3 = 3$. **C.** $u_3 = 5$. **D.** $u_3 = 6$.

Lời giải

Chọn A

Vì (u_n) là cấp số cộng nên: $4 = \dfrac{-1+9}{2} = \dfrac{u_1 + u_5}{2} = \dfrac{u_1 + u_1 + 4d}{2} = u_1 + 2d = u_3$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-8; +\infty)$ để phương trình sau có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt $x^2 + x(x-1)2^{x+m} + m = (2x^2 - x + m)2^{x-x^2}$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 + m) + (x^2 - x)2^{(x^2+m)-(x^2-x)} = \left[(x^2 + m) + (x^2 - x)\right]2^{x-x^2}\ (1).$$

Đặt $x^2 + m = a; x^2 - x = b$ ta có phương trình (1) trở thành

$$a + b.2^{a-b} = (a+b).2^{-b} \Leftrightarrow a.2^b + b.2^a = a + b \Leftrightarrow a(2^b - 1) + b(2^a - 1) = 0\,(2).$$

Trường hợp 1: Nếu $ab \ne 0$ thì phương trình $(2) \Leftrightarrow \dfrac{2^a - 1}{a} + \dfrac{2^b - 1}{b} = 0\,(3)$.

+ Nếu $a > 0 \Rightarrow 2^a - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{2^a - 1}{a} > 0$.

+ Nếu $a<0 \Rightarrow 2^a-1<0 \Rightarrow \dfrac{2^a-1}{a}>0$.

Do đó $\dfrac{2^a-1}{a}>0,\;$ với $a \neq 0$.

Tương tự ta có $\dfrac{2^b-1}{b}>0,\;$ với $b \neq 0$. Do vậy phương trình (3) vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $ab=0$ thì phương trình $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-m \\ x^2-x=0 \end{array}\right.$.

Phương trình (1) có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m^2-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<0.$

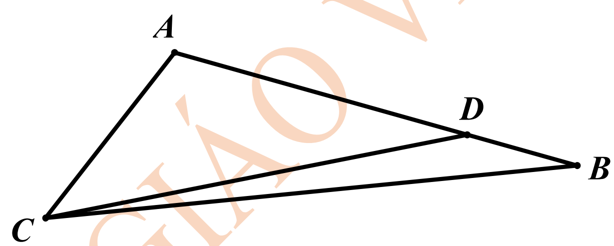
Do m nguyên và $m \in (-8;+\infty)$ nên có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Trong không gian cho tam giác ABC có $AB=2R, AC=R, \widehat{CAB}=120^0$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính R. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

A. $4R$. **B.** $6R$. **C.** $R\sqrt{19}$. **D.** $2R\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $MA^2=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}^2\right)=\left(\dfrac{BA}{MB}\overrightarrow{MB}+\dfrac{MB}{BA}\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(2\overrightarrow{MB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)^2$.

$\Rightarrow MA^2=\left|2\overrightarrow{MB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right|^2 \Rightarrow MA=2\left|\overrightarrow{MB}+\dfrac{\overrightarrow{BA}}{4}\right|$.

Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD}=\dfrac{\overrightarrow{BA}}{4}$, khi đó $MA=2\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right|=2\left|\overrightarrow{MD}\right|=2MD$.

Do đó $MA+2MC=2(MC+MD) \geq 2CD$.

Lại có $CD^2=AC^2+AD^2-2AC.AD\cos 120°=\dfrac{19}{4}R^2 \Rightarrow CD=R\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đoạn CD với mặt cầu tâm B bán kính R.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là $R\sqrt{19}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=x\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+3}$. Giả sử a, b là hai số thực thay đổi sao cho $a<b \leq 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(a)-f(b)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}-64}{15}$. **B.** $\dfrac{33\sqrt{3}-64}{15}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $-\dfrac{11\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(b)-f(a)=\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b x\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{x^2+3}=t\Rightarrow x^2+3=t^2\Rightarrow x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Suy ra: $f(b)-f(a)=\int\limits_{\sqrt{a^2+3}}^{\sqrt{b^2+3}}\left(t^2-4\right).t.\mathrm{d}t$

$$=\int\limits_{\sqrt{a^2+3}}^{\sqrt{b^2+3}}\left(t^4-4t^2\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}\right)\right|_{\sqrt{a^2+3}}^{\sqrt{b^2+3}}$$

$$=\left[\frac{\left(b^2+3\right)^2\sqrt{b^2+3}}{5}-\frac{4\left(b^2+3\right)\sqrt{b^2+3}}{3}\right]-\left[\frac{\left(a^2+3\right)^2\sqrt{a^2+3}}{5}-\frac{4\left(a^2+3\right)\sqrt{a^2+3}}{3}\right].$$

Như vậy:

$$f(a)-f(b)=\left(\frac{\left(a^2+3\right)^2\sqrt{a^2+3}}{5}-\frac{4\left(a^2+3\right)\sqrt{a^2+3}}{3}\right)-\left(\frac{\left(b^2+3\right)^2\sqrt{b^2+3}}{5}-\frac{4\left(b^2+3\right)\sqrt{b^2+3}}{3}\right).$$

Xét hàm $g(u)=\frac{u^5}{5}-\frac{4u^3}{3}$.

\+ Với $u=\sqrt{a^2+3}$. Vì $a<1$ nên $u\geq\sqrt3$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $g(u)$ trên $\left[\sqrt3;+\infty\right)$.

Ta có: $g'(u)=u^4-4u^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=-2\\u=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

u	$\sqrt3$		2		$+\infty$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$	$-\frac{11\sqrt3}{5}$	$\searrow$	$-\frac{64}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\min\limits_{\left[\sqrt3;+\infty\right)}g(u)=g(2)=-\frac{64}{15}$. Khi $u=2\Rightarrow\sqrt{a^2+3}=2\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$. Vì $a<1$ nên $a=-1$.

Với $a=-1$ ta có $-1<b\leq1$, suy ra $\sqrt3\leq\sqrt{b^2+3}\leq2$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của $g(u)$ trên $\left[\sqrt3;2\right]$. Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy

$\max\limits_{\left[\sqrt3;2\right]}g(u)=g\left(\sqrt3\right)=-\frac{11\sqrt3}{5}$. Khi đó $\sqrt{b^2+3}=\sqrt3\Leftrightarrow b=0$.

Vậy $f(a)-f(b)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{64}{15}-\left(-\frac{11\sqrt{3}}{5}\right)=\frac{33\sqrt{3}-64}{15}$ khi $a=-1$; $b=0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;3;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(-6;2;4)$ và $D(2;1;7)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là một mặt cầu (S). Xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I\left(\frac{4}{3};1;\frac{2}{3}\right)$, $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $I\left(\frac{1}{3};\frac{14}{3};\frac{2}{3}\right)$, $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $I\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)$, $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

D. $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$, $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$AB=\sqrt{(4-5)^2+(-1-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{21}$.

Gọi $K(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn điều kiện $3\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$.

Suy ra: $\begin{cases}3(5-x)-2(4-x)+(-6-x)+(2-x)=0\\3(3-y)-2(-1-y)+(2-y)+(1-y)=0\\3(1-z)-2(3-z)+(4-z)+(7-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\frac{14}{3}\\z=\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow K\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Ta lại có: $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

$\Leftrightarrow\left|3\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)-2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC}\right)+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD}\right)\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$

$\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MK}+\left(3\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)\right|=BA\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MK}+\vec{0}\right|=BA$

$\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MK}\right|=BA\Leftrightarrow 3MK=BA\Leftrightarrow MK=\frac{BA}{3}\Leftrightarrow MK=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Từ đó tập hợp điểm M là mặt cầu (S) tâm $I\equiv K\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Câu 35: Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng qua gốc tọa độ là:

A. $(-\infty;-1)\cup(0;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn A.

Gọi $M(x_0;y_0)$, $N(-x_0;-y_0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Ta có:

$y_0=x_0^3-3mx_0^2+3(m^2-1)x_0+1-m^2\quad(1)$

$-y_0=-x_0^3-3mx_0^2-3(m^2-1)x_0+1-m^2\quad(2)$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có: $-6mx_0^2+2-2m^2=0\quad(*)$.

Điều kiện cần: Đồ thị hàm số tồn tại M, N thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Do vậy ta có :

$\frac{m^2-1}{-3m}>0 \Leftrightarrow \frac{m^2-1}{m}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$.

Điều kiện đủ: Với m thỏa mãn điều kiện trên suy ra phương trình (*) có hai nghiệm $x_1=\sqrt{\frac{1-m^2}{3m}};x_2=-\sqrt{\frac{1-m^2}{3m}}$

$$\Rightarrow y_1=\left(\frac{1-m^2}{3m}\right)\sqrt{\frac{1-m^2}{3m}}+3\left(m^2-1\right)\sqrt{\frac{1-m^2}{3m}}.$$

$$y_2=-\left(\frac{1-m^2}{3m}\right)\sqrt{\frac{1-m^2}{3m}}-3\left(m^2-1\right)\sqrt{\frac{1-m^2}{3m}}$$

Vậy $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$.

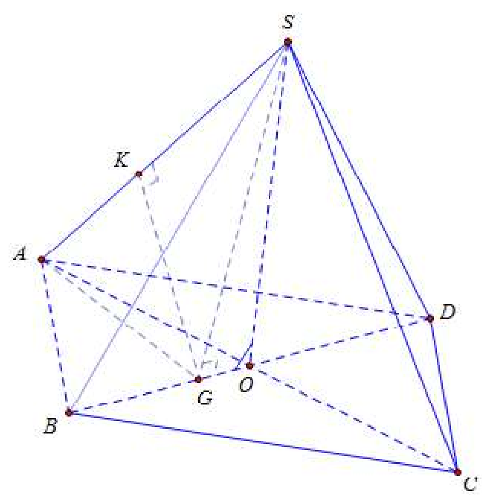
Chọn đáp án A.

Câu 36: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy (ABC) bằng 60^0. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$, tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải:

Chọn D.



Gọi O là trung điểm AC, x là cạnh của tam giác đều, G là trọng tâm tam giác ABC.

+) Ta có $SO\perp AC$; $BO\perp AC$ nên góc giữa *(SAC)* và *(ABC)* là $\widehat{SOB}=60^0$.

Vì SABC là chóp đều nên $SG\perp(ABC)\Rightarrow SG\perp GO$.

Xét tam giác vuông SAG có

$$SG=\tan 60^0.OG=\sqrt{3}.\frac{1}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{2}$$

+) Từ A kẻ $AD//BC$ suy ra:

$d\left(BC;SA\right)=d\left(BC;\left(SAD\right)\right)=d\left(B;\left(SAD\right)\right)$.

Mặt khác ta có $d\left(G;\left(SAD\right)\right)=\frac{3}{4}d(B;(SAD))$ (*)

Vì $\widehat{BAD}=120^0$; $\widehat{BAG}=30^0\Rightarrow\widehat{GAD}=90^0$

hay $AG \perp AD$ (1).

Lại có $SG \perp AD$ (2).

$\Rightarrow AD \perp (AGS)$.Kẻ $GK \perp SA$ (3) $\Rightarrow GK \perp AD$ (4) .

Từ (3) và (4) suy ra $GK \perp (SAD) \Rightarrow d(G;(SAD)) = GK$.

Do đó $d(G;(SAD)) = GK$.

Xét tam giác vuông SGA ta có:

$$\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{GS^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{7}{x^2} \Rightarrow GK = \frac{x\sqrt{7}}{7}$$

Từ (*) ta có $\frac{x\sqrt{7}}{7} = \frac{2}{3}\frac{3a\sqrt{7}}{14} \Rightarrow x = a$. Vậy $SG = \frac{a}{2}$ và $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SG.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án D.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int_{-2}^{2} f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x = 1$, $\int_{1}^{5}\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

A. -15. **B.** -2. **C.** -13. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t = \sqrt{x^2+5} - x \Rightarrow x = \frac{5-t^2}{2t} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Ta có: $1 = \int_{1}^{5} f(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{1}^{5} f(t)\mathrm{d}t + \frac{5}{2}\int_{1}^{5}\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{5}{2}\int_{1}^{5}\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{5}{2}.3 = -\frac{13}{2}$$

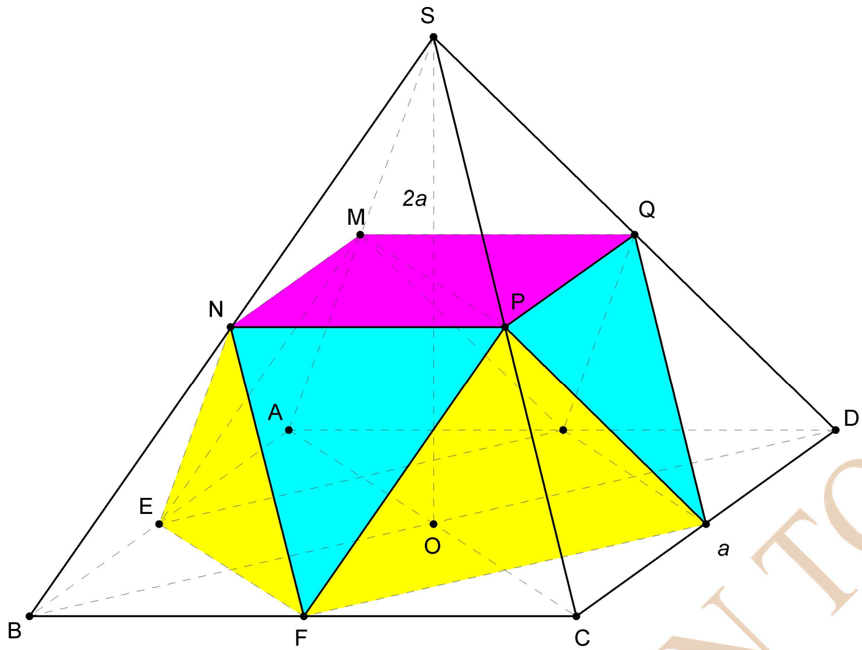
$$\Rightarrow \int_{1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = -13$$

Câu 38. Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Tính theo a thể tích của khối đa diện có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chóp đã cho.

A. $\frac{5a^3}{24}$. **B.** $\frac{5a^3}{12}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.2a.a^2=\frac{2a^3}{3}\quad\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{3}$.

• $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\quad\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{1}{8}V_{S.ABC}=\frac{a^3}{24}$.

$$\Rightarrow V_{S.MNPQ}=2V_{S.MNP}=\frac{a^3}{12}.$$

• $\frac{V_{B.EFN}}{V_{B.ACS}}=\frac{BE}{BA}.\frac{BF}{BC}.\frac{BN}{BS}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{B.EFN}=\frac{1}{8}V_{S.ABC}=\frac{a^3}{24}$.

• Thể tích khối đa diện cần tìm là:

$$V=V_{S.ABCD}-V_{S.MNPQ}-4.V_{B.EFN}=\frac{2a^3}{3}-\frac{a^3}{12}-4.\frac{a^3}{24}=\frac{5a^3}{12}.$$

Câu 39: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của $AB,B'C'$ và DD'. Thể tích của khối tứ diện $C'MNP$ bằng

A. $\frac{V}{32}$. **B.** $\frac{V}{8}$. **C.** $\frac{V}{16}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Lời giải

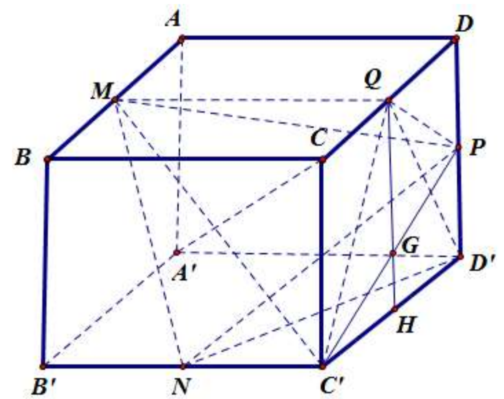
Chọn C

Gọi M,Q,H là trung điểm $AB,CD,C'D'$ và G là giao điểm của QH và $C'P$.

Ta có:

$$V_{C'MNP}=V_{MC'NP}=V_{QC'NP}=3V_{HC'NP}=\frac{3}{2}V_{D'C'NP}=\frac{3}{2}V_{PNC'D'}=\frac{3}{2}.\frac{1}{3}d\left(P;\left(NC'D'\right)\right).S_{NC'D'}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}d\left(D;\left(NC'D'\right)\right).S_{NC'D'}=\frac{1}{4}.\frac{1}{4}d\left(D;\left(NC'D'\right)\right).S_{A'B'C'D'}=\frac{V}{16}.$$



Câu 40: Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left|\tan^4 x-\dfrac{2}{\cos^2 x}\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m=3$. **B.** $2<m<3$. **C.** $2\le m\le 3$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left|\tan^4 x-\dfrac{2}{\cos^2 x}\right|=m\Leftrightarrow\left|\tan^4 x-2\left(\tan^2 x+1\right)\right|=m\Leftrightarrow\left|\tan^4 x-2\tan^2 x-1\right|=m\ (*)$.

Đặt $t=\tan^2 x\Rightarrow t'=2\tan x(\tan^2 x+1)$.

$t'=0\Leftrightarrow \tan x=0\Leftrightarrow x=0$ với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

BBT

x	$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra với mỗi $t\in(0;+\infty)$ cho ta hai nghiệm $x\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $t=0$ cho ta một nghiệm $x\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Với cách đặt trên ta có $\left|t^2-2t-1\right|=m\ (**)$

Phương trình $(*)$ có sáu nghiệm phân biệt $x\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì phương trình $(**)$ có ba nghiệm phân biệt $t\in(0;+\infty)$

Đặt $f(t)=t^2-2t-2, t\in(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=2t-2, t\in(0;+\infty)\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow 2t-2=0\Leftrightarrow t=1$.

BBT

x	0		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$			
$f'(t)$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đây ta suy ra BBT của hàm $\left|f(t)\right|$

x	0		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$\left\|f(t)\right\|'$		$-$	0	$+$			
$\left\|f(t)\right\|$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta suy ra $2 < m < 3$.

Câu 41. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tương đương $3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \dfrac{\ln\left(2|x-m|+2\right)}{\ln\left(x^2-2x+3\right)}$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln\left(x^2-2x+3\right) = 3^{2|x-m|+2}.\ln\left(2|x-m|+2\right) \text{ (*)}.$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t.\ln t, t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra $\Leftrightarrow x^2-2x+3 = 2|x-m|+2 \Leftrightarrow g(x) = x^2-2x-2|x-m|+1 = 0$.

Có $g(x) = \begin{cases} x^2-4x+2m+1 \text{ } khi \text{ } x \geq m \\ x^2-2m+1 \quad khi \text{ } x \leq m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x-4 \text{ } khi \text{ } x \geq m \\ 2x \quad khi \text{ } x \leq m \end{cases}$

và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ } khi \text{ } x \geq m \\ x = 0 \text{ } khi \text{ } x \leq m \end{array}\right.$.

Xét các trường hợp sau:

TH1: $m \leq 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		m		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thoả mãn.

TH2: $m \geq 2$ tương tự.

TH3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		m		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2m+1$	$\nearrow$	$(m-1)^2$	$\searrow$	$2m-3$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có 3 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}(m-1)^2=0\\ -2m+1=0>2m-3\\ -2m+1<0=2m-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{1}{2}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Cả 3 giá trị trên đều thoả mãn, nên tổng của chúng bằng 3.

Câu 42. Cho phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2).5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$, với m là tham số. Giá trị nguyên dương lớn nhất của tham số m để phương trình trên có nghiệm là:

A. 5 **B.** 26. **C.** 25. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1+\sqrt{1-x^2}$ với $x\in[-1;1]$ ta được $t\in[1;2]$.

Phương trình trở thành $5^{2t}-(m+2).5^t+2m+1=0$ với $t\in[1;2]$.

Đặt $a=5^t \Rightarrow a\in[5;25]$ và $m=\dfrac{a^2-2a+1}{a-2}$.

Hàm $f(a)=\dfrac{a^2-2a+1}{a-2}$ đồng biến trên $[5;25]$ nên để phương trình có nghiệm thì

$f(5)\le m\le f(25)$ suy ra $m\in\left[\dfrac{16}{3};\dfrac{576}{23}\right]$.

Vậy giá trị nguyên dương lớn nhất của m bằng 25.

Câu 43. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\cos x+1}{\cos^2 x+\cos x+1}\cdot$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2M=3m.$ **B.** $M-m=\dfrac{2}{3}.$ **C.** $M-m=1\cdot$ **D.** $M-m=\dfrac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\cos x, t\in[-1;1]$.

Ta có $y=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$, $y'=\dfrac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)}$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.$

$y(-1)=0,\ y(0)=1, y(1)=\dfrac{2}{3}.$

Vậy $M=1$ và $m=0\Rightarrow M-m=1\cdot$

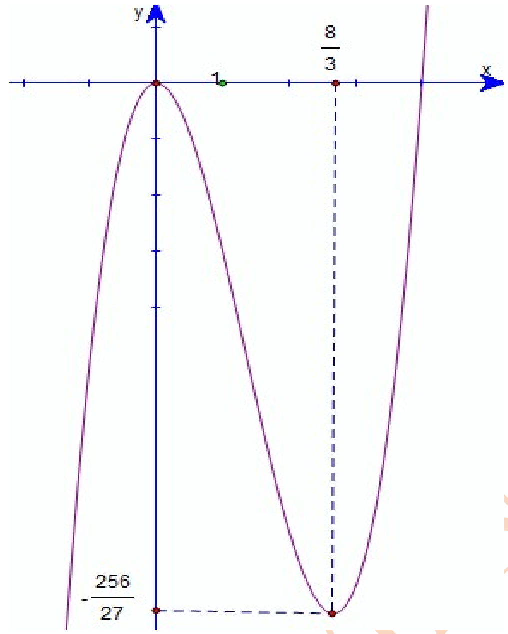
Câu 44. Cho hàm số $f(x)=x^3-4x^2$. Hỏi hàm số $g(x)=f(|x|-1)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 6 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

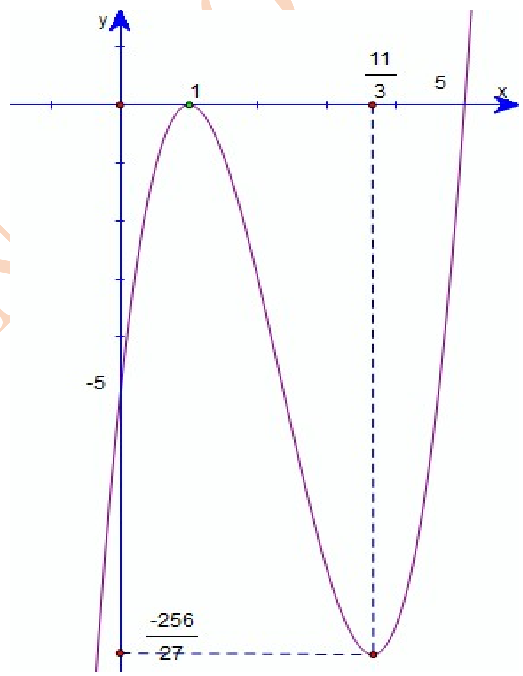
Chọn C

Ta có hàm số $f(x)=x^3-4x^2$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $h(x)=f(x-1)$ có đồ thị suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)=x^3-4x^2$

Bằng cách: Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)=x^3-4x^2$ sang phải một đơn vị.

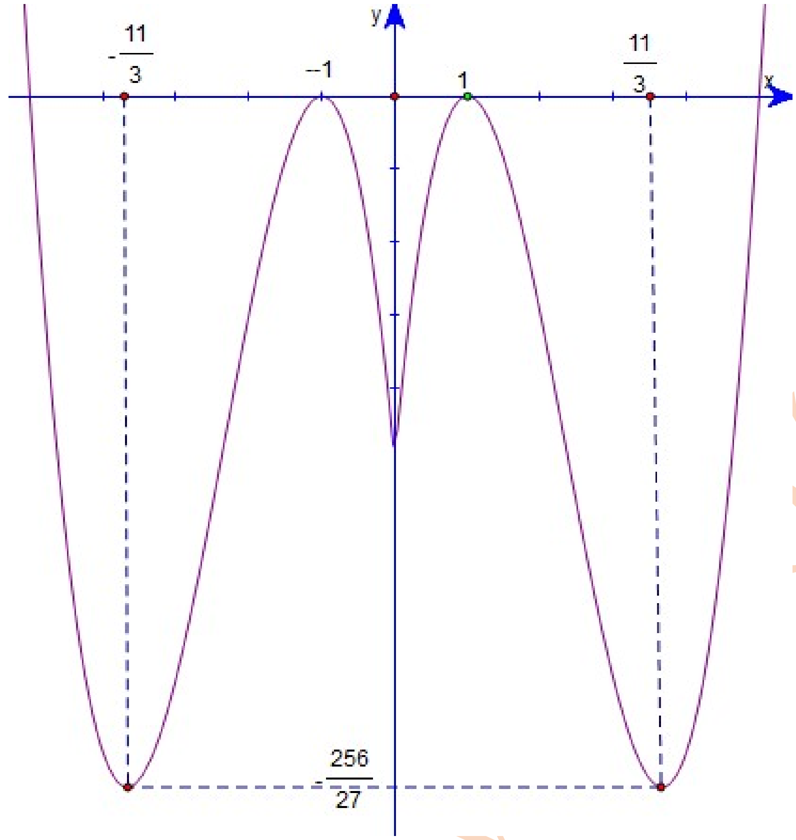


Hàm số $g(x)=f(|x|-1)$ có đồ thị suy ra từ đồ thị hàm số $h(x)=f(x-1)$

Bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $h(x)=f(x-1)$ bên phải trục tung gọi là (C_1).

- Lấy đối xứng (C_1) qua trục tung.



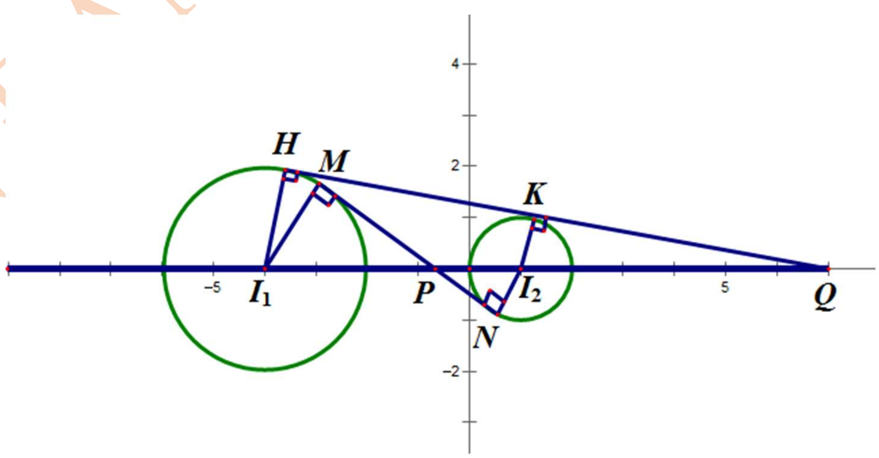
Vây đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|-1)$ có 5 cực trị.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;0;1)$, bán kính $R_1=2$ và mặt cầu (S_2) có tâm $I_2=(1;3;5)$, bán kính $R_2=1$. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (S_1), (S_2) lần lượt tại A và B. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn AB. Tính $P=M.m$.

A. $P=2\sqrt{6}$. **B.** $P=8\sqrt{5}$. **C.** $P=4\sqrt{5}$. **D.** $P=8\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có : $I_1I_2=5>R_1+R_2=3$.

Gọi P,Q lần lượt là tâm vị tự trong và ngoài của hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$. Qua P và Q lần lượt kẻ hai tiếp tuyến chung với hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$là MN và HK với M,N,H,K là các tiếp điểm của tiếp tuyến d với hai mặt cầu.

Khi đó $AB_{\min}=MN$, $AB_{\max}=HK$.

Ta có: $\dfrac{PN}{PM}=\dfrac{PI_2}{PI_1}=\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}PN=\dfrac{1}{2}PM\\ PI_2=\dfrac{1}{2}PI_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}PI_1=\dfrac{10}{3}\\ PI_2=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}PN=\dfrac{4}{3}\\ PM=\dfrac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow MN=MP+PN=4$.

Ta có: $\dfrac{QI_2}{QI_1}=\dfrac{QK}{QH}=\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}QI_2=\dfrac{1}{2}QI_1\\ QK=\dfrac{1}{2}QH\end{cases}\Rightarrow QI_2=I_1I_2=5$.

Ta có: $QH=\sqrt{I_1Q^2-R_1^2}=\sqrt{10^2-2^2}=4\sqrt{6}\Rightarrow HK=2\sqrt{6}$.

Do đó : $M.m=HK.MN=2\sqrt{6}.4=8\sqrt{6}$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại .

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$.

B. $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\{-1\}$.

C. $m\in\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$.

D. $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=4x^3+12mx^2+6(m+1)x$.

+ TH1 : $m=-1$, ta có: $y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 2x^2+6mx+3m+3=0(*)\end{array}\right.$

+ TH2 : $m\neq-1$

Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình $(*)$ không có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow(3m)^2-2(3m+3)\le0\Leftrightarrow\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\le m\le\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Câu 47. So sánh ba số $a=1000^{1001}$, $b=2^{2^{64}}$ và $c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}$?

A. $c<a<b$. **B.** $b<a<c$. **C.** $c<b<a$. **D.** $a<c<b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $1^1<1000^{1000}$; $2^2<1000^{1000}$ ...$999^{999}<1000^{1000}$

$\Rightarrow c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}<1000.1000^{1000}\Leftrightarrow c<a$

Mặt khác: $2^{10}>1000$

$\Rightarrow 2^{64}.\ln 2 = \dfrac{2^4}{10}.\left(2^{10}\right)^6.\ln 2^{10} > 1000^6.\ln 1000 > 1001.\ln 1000 \Rightarrow 2^{2^{64}} > 1000^{1001} \Leftrightarrow a < b$

Vậy $c < a < b$.

Câu 48. Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$ và $g(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3;+\infty)$ là

A. $[3;4)$. **B.** $[0;3)$. **C.** $[4;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = x^2 - 4x + m$, $g(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)^3 = a_{12}x^{12} + a_{10}x^{10} + ... + a_2x^2 + a_0$.

Suy ra $f'(x) = 2x - 4$, $g'(x) = 12a_{12}x^{11} + 10a_{10}x^9 + ... + 2a_2x$.

Và $\left[g(f(x))\right]' = f'(x)\left[12a_{12}(f(x))^{11} + 10a_{10}(f(x))^9 + ... + 2a_2f(x)\right]$

$= f(x)f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + ... + 2a_2\right)$.

Dễ thấy $a_{12}; a_{10}; ...; a_2; a_0 > 0$ và $f'(x) = 2x - 4 > 0$, $\forall x > 3$.

Do đó $f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + ... + 2a_2\right) > 0$, $\forall x > 3$.

Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3;+\infty)$ khi $\left[g(f(x))\right]' \ge 0$, $\forall x > 3 \Rightarrow f(x) \ge 0$, $\forall x > 3$.

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + m \ge 0$, $\forall x > 3 \Leftrightarrow m \ge 4x - x^2$, $\forall x > 3 \Rightarrow m \ge \max\limits_{[3;+\infty)}\left(4x - x^2\right) = 3$.

Vậy $m \in [3;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + 2f'(-x) = \dfrac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ với mọi số thực x. Giả sử $f(2) = m$, $f(-3) = n$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(-2) - f(3)$.

A. $T = m + n$. **B.** $T = n - m$. **C.** $T = m - n$. **D.** $T = -m - n$.

Lời giải

Chọn B

Với mọi số thực x, thay x bởi $-x$ vào biểu thức $f'(x) + 2f'(-x) = \dfrac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ (1), ta được

$f'(-x) + 2f'(x) = \dfrac{2|-x|}{(-x)^6 + (-x)^2 + 1}$ hay $2f'(x) + f'(-x) = \dfrac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ (2).

Nhân hai vế của (2) với 2 sau đó trừ theo vế cho (1), rút gọn suy ra $f'(x) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ với mọi số thực x.

Xét $I = \int\limits_{-3}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{2} \dfrac{2}{3}.\dfrac{|x|}{x^6 + x^2 + 1}\mathrm{d}x$. Đặt $u = -x$, khi đó ta được $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Khi $x = -3 \Rightarrow u = 3$ và $x = 2 \Rightarrow u = -2$.

Ta được

$I = \int\limits_{3}^{-2} \dfrac{2}{3}.\dfrac{|-u|}{(-u)^6 + (-u)^2 + 1}(-\mathrm{d}u) = \int\limits_{-2}^{3} \dfrac{2}{3}.\dfrac{|u|}{u^6 + u^2 + 1}\mathrm{d}u = \int\limits_{-2}^{3} \dfrac{2}{3}.\dfrac{|x|}{x^6 + x^2 + 1}\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Mà $I=\int\limits_{-3}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=f(2)-f(-3)$ (3) và $I=\int\limits_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(-2)$ (4).

Từ (3) và (4), ta được $f(2)-f(-3)=f(3)-f(-2)$ suy ra

$f(-2)-f(3)=f(-3)-f(2)=n-m$.

Câu 50. Cho các số thực dương x, y thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x>y>1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\log_{\frac{x}{y}}^2\left(x^2\right)+3\log_y\frac{x}{y}$ là

A. 19. **B.** 13. **C.** 14. **D.** $T=15$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $T=\left(2\log_{\frac{x}{y}}x\right)^2+3\left(\log_y x-1\right)=\dfrac{4}{\left(1-\log_x y\right)^2}+3\left(\dfrac{1}{\log_x y}-1\right)$.

Đặt $t=\log_x y$ vì $1<y<x\Rightarrow t\in(0;1)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(t)=\dfrac{4}{(1-t)^2}+\dfrac{3}{t}-3$ với $t\in(0;1)$.

Dễ thấy hàm số $f(t)$ liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f'(t)=\dfrac{3t^3-t^2+9t-3}{t^2(1-t)^3}=\dfrac{(3t-1)\left(t^2+3\right)}{t^2(1-t)^3}$,

$f'(t)=0\Rightarrow 3t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=+\infty$; $\lim\limits_{t\to 1^-}f(t)=+\infty$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	15	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(0;1)}f(t)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=15$. Vậy $\min P=15$ đạt được khi và chỉ khi

$\log_x y=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow y^3=x$ trong đó $1<y<x$.

------------------------- Hết -------------------------