$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
I - PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Câu 1: Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} = 4$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Chọn D

Điều kiện $x \neq 0$

- Nếu $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} \geq 1$, dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 1$,

dấu bằng xảy ra khi $x = 2$ suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} > 4, \forall x > 0$

- Nếu $x < 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{4x} \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} \leq -1 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{4x}} \leq \frac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = -\frac{1}{2}$

và $-\frac{x}{4} - \frac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \leq -1 \Rightarrow 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = 2$

Suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} < 1, \forall x < 0$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bình luận:

Sử dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Câu 2: Phương trình $2^{x-3} = 3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, hãy chọn phát biểu đúng?

A. $3x_1 - 2x_2 = \log_3 8$. **B.** $2x_1 - 3x_2 = \log_3 8$.

C. $2x_1 + 3x_2 = \log_3 54$. **D.** $3x_1 + 2x_2 = \log_3 54$.

Lời giải

Logarit hóa hai vế của phương trình (theo cơ số 2) ta được: $(3) \Leftrightarrow \log_2 2^{x-3} = \log_2 3^{x^2-5x+6}$

$$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 2 = (x^2-5x+6)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-3) - (x-2)(x-3)\log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3).[1-(x-2)\log_2 3] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ 1-(x-2)\log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ (x-2)\log_2 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x-2 = \dfrac{1}{\log_2 3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x = \log_3 2 + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x = \log_3 2 + \log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x = \log_3 18 \end{array}\right.$$

Câu 3: Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$$3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \quad (7)$$

$$(7) \Leftrightarrow 27.3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81.3^x + \frac{81}{3^x} = 10^3 \Leftrightarrow 27.\left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}}\right) + 81.\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = 10^3 \quad (7')$$

Đặt $t = 3^x + \frac{1}{3^x} \overset{Côsi}{\geq} 2\sqrt{3^x.\frac{1}{3^x}} = 2$

$$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^3 = 3^{3x} + 3.3^{2x}.\frac{1}{3^x} + 3.3^x.\frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$$

Khi đó: $(7') \Leftrightarrow 27(t^3-3t)+81t=10^3 \Leftrightarrow t^3=\frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t=\frac{10}{3}>2 \quad (N)$

Với $t=\frac{10}{3} \Rightarrow 3^x+\frac{1}{3^x}=\frac{10}{3} \quad (7'')$

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó: $(7'') \Leftrightarrow y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \quad (N) \\ y=\frac{1}{3} \quad (N) \end{array}\right.$

Với $y=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Với $y=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

Câu 4: Phương trình $3^{2x}+2x(3^x+1)-4.3^x-5=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

$3^{2x}+2x(3^x+1)-4.3^x-5=0 \Leftrightarrow (3^{2x}-1)+2x(3^x+1)-(4.3^x+4)=0$

$\Leftrightarrow (3^x-1)(3^x+1)+(2x-4)(3^x+1)=0 \Leftrightarrow (3^x+2x-5)(3^x+1)=0 \Leftrightarrow 3^x+2x-5=0$

Xét hàm số $f(x)=3^x+2x-5$, ta có : $f(1)=0$.

$f'(x)=3^x\ln 3+2>0; \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x=1$

BÌNH LUẬN

Có thể đặt $t=3^x>0$ sau đó tính delta theo x

Câu 5: Tìm số nghiệm của phương trình $2^x+3^x+4^x+...+2016^x+2017^x=2016-x$.

A. 1. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $2^x+3^x+4^x+...+2016^x+2017^x=2016-x$ (*) có:

Vế trái (*): $2^x+3^x+4^x+...+2016^x+2017^x=f(x)$ là hàm số đồng biến trên R.

Vế phải (*): $2016-x=g(x)$ là hàm số nghịch biến trên R.

Khi đó phương trình (*) có không quá 1 nghiệm.

Mà $f(0)=2016=g(0)$ nên suy ra (*) có 1 nghiệm duy nhất là $x=0$.

Câu 6: **(Sở Ninh Bình Lần1)** Số nghiệm của phương trình $50^x+2^{x+5}=3.7^x$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $50^x+2^{x+5}=3.7^x \Leftrightarrow 50^x+2^{x+5}-3.7^x=0$.

Xét hàm số $f(x)=50^x+2^{x+5}-3.7^x$

$f'(x)=50^x\ln 50+2^{x+5}\ln 2-3.7^x\ln 7$

$f''(x)=50^x(\ln 50)^2+2^{x+5}(\ln 2)^2-3.7^x(\ln 7)^2$

Khi $x\ge 0$ thì $f''(x)=7^x\left(\left(\frac{50}{7}\right)^x(\ln 50)^2-3(\ln 7)^2\right)+2^{x+5}(\ln 2)^2$

$f''(x)\ge 7^x\left(\left(\frac{50}{7}\right)^0(\ln 50)^2-3(\ln 7)^2\right)+2^{x+5}(\ln 2)^2>0$

Khi $x<0$ thì $f''(x)=7^x\left(\left(\frac{2}{7}\right)^x 32(\ln 2)^2-3(\ln 7)^2\right)+50^x(\ln 50)^2$

$f''(x)>7^x\left(\left(\frac{2}{7}\right)^0 32(\ln 2)^2-3(\ln 7)^2\right)+50^x(\ln 50)^2>0$

Suy ra $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Nên $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$ nên $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 7: **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x=5^{x+1}+27x+23$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $x=\frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình, do đó

$15x.5^x=5^{x+1}+27x+23\Leftrightarrow 5^{x+1}=\frac{27x+23}{3x-1}$

Xét hai hàm số $f(x)=5^{x+1}$ và $g(x)=\frac{27x+23}{3x-1}$ trên tập $D=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$

Ta có $f'(x)=5^{x+1}.\ln 5>0,\forall x\neq\frac{1}{3}$ và $g'(x)=\frac{-96}{(3x-1)^2}<0,\forall x\neq\frac{1}{3}$.

Do vậy hàm số $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ là hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định nên phương trình có tối đa 02 nghiệm.*(xem thêm phần đồ thị minh hoạ)*

Nhận thấy $x=\pm 1$ là hai nghiệm của phương trình tren.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 0.

Câu 8: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{2^{2(x^2+2)}-2^{x^2+3}+1}$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

$2^{x^2+4}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{2^{2(x^2+2)}-2^{x^2+3}+1}\Leftrightarrow 8.2^{x^2+1}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{4.2^{2(x^2+1)}-4.2^{x^2+1}+1}$

Đặt $t=2^{x^2+1}\,(t\ge 2)$, phương trình trên tương đương với

$8t=t^2+\sqrt{4t^2-4t+1}\Leftrightarrow t^2-6t-1=0\Leftrightarrow t=3+\sqrt{10}$ (vì $t\ge 2$). Từ đó suy ra

$$2^{x^2+1}=3+\sqrt{10}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}} \\ x_2=-\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}} \end{array}\right.$$

Vậy tổng hai nghiệm bằng 0.

Câu 9: Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của phương trình

$$4^{x-1}+2^x.\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+2=2^x+2.\sin\left(2^{x-1}+y-1\right).$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<x_0<7$. **B.** $x_0>7$. **C.** $-2<x_0<4$. **D.** $-5<x_0<-2$.

Lời giải

Phương trình $\leftrightarrow \dfrac{4^x}{4}+2^x.\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+2=2^x+2.\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)$

$\leftrightarrow \left(2^x-2\right)^2+4\left(2^x-2\right)\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+4=0$

$\leftrightarrow \left[\left(2^x-2\right)+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]^2+4-4\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0$

$\leftrightarrow \left[\left(2^x-2\right)+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]^2+4\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \left(2^x-2\right)+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)=0 & (1) \\ \cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0 & (2) \end{cases}.$$

Phương trình $(2)\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(2^{x-1}+y-1\right)=1\xrightarrow{(1)}2^x=0\ (\text{loại}). \\ \sin\left(2^{x-1}+y-1\right)=-1\xrightarrow{(1)}2^x=4\leftrightarrow x=2. \end{array}\right.$

Chọn C.

Câu 10: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1).16^x-2(2m-3).4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Đặt $t=4^x, t>0$, phương trình đã cho trở thành:

$(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}$ (*).

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$.

Đặt $f(t)=-\dfrac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{10t^2-2t-56}{\left(t^2-4t+6\right)^2}$. Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{561}}{10}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{561}}{10}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		||		$-$		0	$+$	
$f(x)$					$-\frac{5}{6}$ ↘		-4	↘	$\approx -11,67$	↗	-1

Từ bảng biến thiên, ta có phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi $-4 < m < -1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Cách 2:

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5 = 0$ (*).

Đặt $f(x) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

Điều đó xảy ra khi: $\begin{cases} (m+1) f(1) < 0 \\ (m+1) f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(3m+12) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < -1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > -\frac{5}{6} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1.$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Câu 11: **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để phương trình $2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left(\cos^3 x + 6\sin^2 x + 9\cos x + m - 6\right)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1$ có nghiệm thực . Khi đó tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập S bằng

A. 28. **B.** 21. **C.** 24. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

$2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left(\cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + m\right)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1$.

$\Leftrightarrow 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left[(\cos x - 2)^3 + 8 + m - 3\cos x\right]2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1$.

$\Leftrightarrow 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left[(\cos x - 2)^3 + m - 3\cos x\right]2^{\cos x - 2} = 1$.

Đặt $\cos x - 2 = a$ và $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = b$.

Ta có phương trình : $2^{a+b} + \left(a^3 + b^3\right)2^a = 1 \ (1)$.

Nhận thấy $a + b = 0$ thỏa mãn phương trình (1).

Nếu $a + b > 0$ thì $2^{a+b} > 2^0 = 1$ và $\left(a^3 + b^3\right)2^a > 0$ nên phương trình (1) vô nghiệm .

Nếu $a + b < 0$ thì $2^{a+b} < 1$ và $\left(a^3 + b^3\right)2^a < 0$ nên phương trình (1) cũng vô nghiệm .

Vậy $a + b = 0$ suy ra $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = 2 - \cos x \Leftrightarrow -\cos^3 x + 6\cos^2 x - 9\cos x + 8 = m$.

Đặt $\cos x = t$ với điều kiện $t \in [-1;1]$, suy ra $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 8 = m$.

Dễ thấy $\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=4$ và $\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=24$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\in[4;24]$. Suy ra $S=\{4;5;...;24\}$ nên tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của S bằng 28 .

Cách khác : Ta có $2^{\cos x-2+\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left[(\cos x-2)^3+m-3\cos x\right]2^{\cos x-2}=1$.

$\Leftrightarrow\ 2^{\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left(\sqrt[3]{m-3\cos x}\right)^3=2^{2-\cos x}+(2-\cos x)^3$.

Xét hàm số đặc trưng $f(u)=2^u+u^3$, đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó ta cũng suy ra được $\sqrt[3]{m-3\cos x}=2-\cos x$.

Câu 12: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Cho hàm số $f(x)=3^{x-4}+(x+1).2^{7-x}-6x+3$. Giả sử $m_0=\frac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{Z},\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+2m-1=0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b^2$.

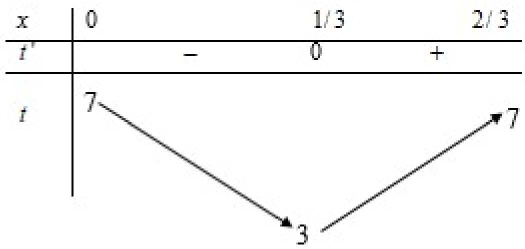
A. $P=11$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=9$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=7-4\sqrt{6x-9x^2}$ (1) thì $f(t)=1-2m$ (2) .

$t'=\dfrac{-4(6-18x)}{2\sqrt{6x-9x^2}}\Rightarrow t'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.



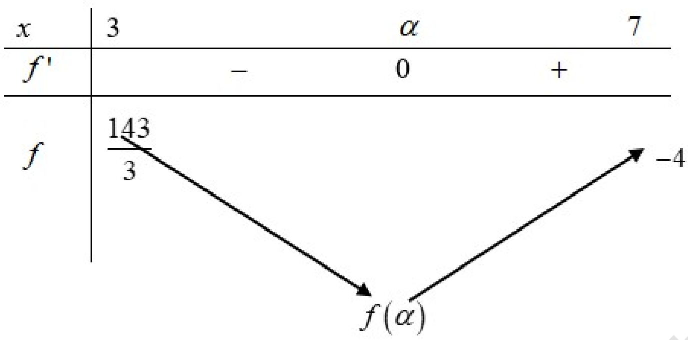
Từ BBT suy ra nếu $t\in(3;7]$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x.

Xét hàm số $f(x)=3^{x-4}+(x+1).2^{7-x}-6x+3$

$f'(x)=3^{x-4}\ln 3+2^{7-x}-(x+1)2^{7-x}\ln 2-6$

$f''(x)=3^{x-4}\ln^2 3+\left(2^{7-x}\ln 2\right)\left[(x+1)\ln 2-2\right]>0\forall x\in(3;7]$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(3;7)$. Mặt khác, $f'(6).f'(7)<0$ nên phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm $x=\alpha\in(6;7)$.



Vậy, phương trình $f(t)=1-2m$ có nhiều nghiệm nhất khi

$f(\alpha)<1-2m\le -4 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\le m<\frac{1-f(\alpha)}{2}$

Kết luận, GTNN của m là $\frac{5}{2}\Rightarrow a=5, b=2$.

Câu 13: Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=3$?

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Ta có: $4^x-m.2^{x+1}+2m=0 \Leftrightarrow (2^x)^2-2m.2^x+2m=0 \quad (*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn 2^x có: $\Delta'=(-m)^2-2m=m^2-2m$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2-2m\ge 0 \Leftrightarrow m(m-2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le 0 \end{array}\right.$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $2^{x_1}.2^{x_2}=2m \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2m$

Do đó $x_1+x_2=3 \Leftrightarrow 2^3=2m \Leftrightarrow m=4$.

Thử lại ta được $m=4$ thỏa mãn.

Chọn A

Bình luận:

Do phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn $2^x>0$ có thể có nghiệm $2^x<0$ (vô lí) nên khi giải ra tham số $m=4$ thì phải thử lại.

Câu 14: **(THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019)** Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-(2m+3)2^x+64=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=24$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $\left(\frac{21}{2};\frac{29}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{11}{2};\frac{19}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $t=2^x$ $(t>0)$. Ta có phương trình ẩn t: $t^2-(2m+3)t+64=0$ (*). Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2-256>0 \\ 2m+3>0 \\ 64>0, \forall m \end{cases}$

Gọi hai nghiệm của phương trình (*) là t_1, t_2.

Khi đó: $x_1=\log_2 t_1$; $x_2=\log_2 t_2$. Từ giả thiết $(x_1+2)(x_2+2)=24$

$\Leftrightarrow (\log_2 t_1+2)(\log_2 t_2+2)=24 \Leftrightarrow \log_2 t_1.\log_2 t_2+2(\log_2 t_1+\log_2 t_2)=20$

$\Leftrightarrow \log_2 t_1.\log_2 t_2=8 \Leftrightarrow x_1x_2=8 \Rightarrow x_1+x_2=6$

$\Leftrightarrow x_1x_2=8 \Rightarrow x_1+x_2=6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow t_1+t_2=20 \Leftrightarrow 2m+3=20 \Leftrightarrow m=\frac{17}{2}$. (TM).

Câu 15: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $5^{\sqrt{x+2}-x}-5m=0$ có nghiệm thực.

A. $\left(0;5\sqrt[4]{5}\right]$. **B.** $\left[5\sqrt[4]{5};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left[0;5\sqrt[4]{5}\right]$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $m>0$.

$5^{\sqrt{x+2}-x}-5m=0\Rightarrow\sqrt{x+2}-x=1+\log_5 m\ \ (1)\ (x\geq -2)$.

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+2}-x\ \left(x\geq -2\right)$ với đường thẳng $y=1+\log_5 m$.

Xét hàm số $y=\sqrt{x+2}-x\ \left(x\geq -2\right)$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-1;\ y'=0\Rightarrow x=-\dfrac{7}{4}$.

Bảng biến thiên

x	-2		$-\frac{7}{4}$		$+\infty$
y'	||	$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Để phương trình ban đầu có nghiệm thực thì $1+\log_5 m\leq\dfrac{9}{4}\Rightarrow 0<m\leq 5\sqrt[4]{5}$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m+e^{\frac{x}{2}}=\sqrt[4]{e^{2x}+1}$ có nghiệm thực:

A. $0<m\leq\dfrac{2}{e}$. **B.** $\dfrac{1}{e}\leq m<1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $-1<m<0$.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi phương trình về dạng $m=\sqrt[4]{\left(e^x\right)^2+1}-\sqrt{e^x}$. Đặt $t=e^x;(t>0)$ ta xét hàm số $y=\sqrt[4]{t^2+1}-\sqrt{t}$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

$$y'=\frac{t}{2.\sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}}-\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{t^3}-\sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}}{2.\sqrt{t}.\sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}}=\frac{\sqrt[4]{\left(t^2\right)^3}-\sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}}{2.\sqrt{t}.\sqrt[4]{\left(t^2+1\right)^3}}<0\ (\forall t>0)$$

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	1	$\searrow$	0

Vậy điều kiện cần tìm là $0 < m < 1$

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-3x+2}+3^{4-x^2}=3^{6-3x}+m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt. $\begin{cases} 3^{x^2-3x+2}=u \\ 3^{4-x^2}=v \end{cases} \Rightarrow u.v=3^{6-3x}$. Khi đó phương trình trở thành

$mu+v=uv+m \Leftrightarrow m(u-1)-v(u-1)=0 \Leftrightarrow (u-1)(m-v)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ v=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2-3x+2}=1 \\ 3^{2-x^2}=m(m>0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ 4-x^2=\log_3 m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x^2=4-\log_3 m \end{array}\right.$

Để phương trình có ba nghiệm thì $x^2=4-\log_3 m$ có một nghiệm khác $1;2$. Tức $4-\log_3 m=0 \Leftrightarrow m=81$.

Chọn A

Câu 18: Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$. **B.** $[2;4]$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(3;4)$.

Chọn C.

Ta có: $6^x+(3-m)2^x-m=0\ (1) \Leftrightarrow \dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}=m$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có

$f'(x)=\dfrac{12^x.\ln 3+6^x.\ln 6+3.2^x.\ln 2}{\left(2^x+1\right)^2}>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra $0<x<1 \Leftrightarrow f(0)<f(x)<f(1) \Leftrightarrow 2<f(x)<4$ vì $f(0)=2,\ f(1)=4.$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m\in(2;4)$.

Câu 19: Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Đặt $t=2^{(x-1)^2}\quad (t\ge 1)$

Phương trình có dạng: $t^2-2mt+3m-2=0(*)$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-3m+2}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ \sqrt{m^2-3m+2}<m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ m-1\ge 0 \\ m^2-3m+2<m^2-2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow m>2$$

Chọn D

Bình luận:

Trong bài này do đề bài yêu cầu phương trình có 4 nghiệm phân biệt nên ta cần chú ý mỗi $t\ge 1$ thì ta nhận được bao nhiêu giá trị x

Từ phương trình (*) chúng ta có thể cô lập m và ứng dụng hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình thỏa đề bài.

Câu 20: Tìm các giá trị của m để phương trình: $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}=m$ có 2 nghiệm phân biệt:

A. $\sqrt{3}+\sqrt{5}<m<4$. **B.** $2\sqrt{2}<m<4$.

C. $2\sqrt{2}<m<\sqrt{3}$. **D.** $m>2\sqrt{2}$.

Lời giải

ĐK: $x\le\log_3 5$

Đặt: $f(x)=\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}$ với $x\le\log_3 5$.

$$f'(x)=\frac{3^x\ln 3}{2\sqrt{3^x+3}}-\frac{3^x\ln 3}{2\sqrt{5-3^x}}=\frac{3^x\ln 3\left(\sqrt{5-3^x}-\sqrt{3^x+3}\right)}{2\left(\sqrt{3^x+3}\right)\left(\sqrt{5-3^x}\right)}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{5-3^x}=\sqrt{3^x+3}\Leftrightarrow x=0$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

BBT

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}+\sqrt{5}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Chọn A

Câu 21: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in(1;3)$. Chọn đáp án đúng.

A. $S=-35$. **B.** $S=20$. **C.** $S=25$. **D.** $S=-21$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m\Leftrightarrow 4^x-8.2^x=m^2+6m-7\,(1)$.

Đặt $2^x=t$, với $x\in(1;3)$ thì $t\in(2;8)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-8t=m^2+6m-7(2)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-8t, t\in(2;8)$.

Ta có $f'(t)=2t-8;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=4\in(2;8)$.

Lại có $f(2)=-12;\ \ f(4)=-16;\ \ f(8)=0.$

Mà hàm $f(t)$ xác định và liên tục trên $t\in(2;8)$ nên $-16\le f(t)<0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm trên $t\in(2;8) \Leftrightarrow -16\le m^2+6m-7<0 \Leftrightarrow -7<m<1$.

Vậy $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Do đó $S=-21$.

Câu 22: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in(1;3)$. Chọn đáp án đúng.

A. $S=-35$. **B.** $S=20$. **C.** $S=25$. **D.** $S=-21$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m \Leftrightarrow 4^x-8.2^x=m^2+6m-7 (1)$.

Đặt $2^x=t$, với $x\in(1;3)$ thì $t\in(2;8)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-8t=m^2+6m-7 (2)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-8t, t\in(2;8)$.

Ta có $f'(t)=2t-8;\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4\in(2;8)$.

Lại có $f(2)=-12;\quad f(4)=-16;\quad f(8)=0.$

Mà hàm $f(t)$ xác định và liên tục trên $t\in(2;8)$ nên $-16\le f(t)<0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm trên $t\in(2;8) \Leftrightarrow -16\le m^2+6m-7<0 \Leftrightarrow -7<m<1$.

Vậy $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Do đó $S=-21$.

Câu 23: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x-2^x-2^m+1=0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

A. $\log_2\frac{3}{4}<m\le 0$. **B.** $\log_{\frac{3}{4}}2<m<0$. **C.** $\log_2\frac{3}{4}<m<0$. **D.** $\frac{3}{4}<m<1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2-t-2^m+1=0 \Leftrightarrow t^2-t+1=2^m\ (*)$.

Ta có $x<0 \Leftrightarrow t<1$. Do đó, bài toán trở thành tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$ (vì mỗi giá trị x sẽ cho một giá trị t và ngược lại).

Xét hàm $f(t)=t^2-t+1$ với $t\in(0;1)$.

Ta có $f'(t)=2t-1$ và $f'(t)=0 \Leftrightarrow 2t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in(0;1)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên $(0;1)$ như sau

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $\frac{3}{4}<2^m<1 \Leftrightarrow \log_2\frac{3}{4}<m<0$.

Vậy giá trị m cần tìm là $\log_2\frac{3}{4}<m<0$.

Câu 24: Cho phương trình: $m2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m\ \ (1)$. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in(0;2)\setminus\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$.
B. $m\in(0;2)\setminus\left\{\frac{1}{7};\frac{1}{256}\right\}$.
C. $m\in(0;2)\setminus\left\{\frac{1}{6};\frac{1}{256}\right\}$.
D. $m\in(0;2)\setminus\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{256}\right\}$.

Lời giải

Viết phương trình lại dưới dạng:

$$m2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m$$

$$\Leftrightarrow m2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2^{x^2-5x+6+1-x^2}+m$$

$$\Leftrightarrow m2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2^{x^2-5x+6}.2^{1-x^2}+m$$

Đặt $\begin{cases}u=2^{x^2-5x+6}\\ v=2^{1-x^2}\end{cases};u,v>0$. Khi đó phương trình tương đương:

$$mu+v=uv+m\Leftrightarrow(u-1)(v-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=1\\ v=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^2-5x+6}=0\\ 2^{1-x^2}=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=2\\ 2^{1-x^2}=m(*)\end{array}\right.$$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân bieeth khác 2 và 3.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 1-x^2=\log_2 m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ x^2=1-\log_2 m\end{cases}$$

Khi đó ĐK là:

$$\begin{cases}m>0\\ 1-\log_2 m>0\\ 1-\log_2 m\neq 0\\ 1-\log_2 m\neq 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>0\\ m<2\\ m\neq\frac{1}{8}\\ m\neq\frac{1}{256}\end{cases}\Leftrightarrow m\in(0;2)\setminus\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$$

Chọn A

Câu 25: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}+m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=6\ \ (1)$$

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t>0\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=\frac{1}{t}$

$$(1)\Leftrightarrow t+m.\frac{1}{t}=6\Leftrightarrow t^2-6t+m=0\qquad(2)$$

Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

$(2) \Leftrightarrow m=-t^2+6t$. Xét hàm số $f(t)=-t^2+6t$ trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=-2t+6;\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên:

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m<5$ hoặc $m=9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m\in(-10;10)$ nên $m=\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;9\}$.

Suy ra có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 26: **(Chuyên Bắc Giang)** Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình sau có nghiệm?

$$e^m+e^{3m}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right).$$

A. 2. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện : $x\in[-1;1]$.

Xét phương trình: $e^m+e^{3m}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ (1).

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}$.

Ta có $t^2=1+2x.\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x.\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$e^m+e^{3m}=2t\left(1+\frac{t^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow e^m+e^{3m}=t\left(t^2+1\right) \Leftrightarrow \left(e^m\right)^3+e^m=t^3+t\ \ (2).$$

Xét hàm số: $g(u)=u^3+u$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(u)=3u^2+1>0,\ \forall u\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(2) \Leftrightarrow g\left(e^m\right)=g(t) \Leftrightarrow e^m=t$.

Khi đó ta có $(1) \Leftrightarrow e^m=x+\sqrt{1-x^2}$ (3)

Xét hàm số: $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$. TXĐ: $[-1;1]$.

Ta có: $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 1-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$

$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-1 \nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow 1$	

Phương trình (1) có nghiệm $x\in[-1;1] \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow -1\le e^m \le \sqrt{2} \Leftrightarrow m\le \ln\sqrt{2}$.

Do $m\in\mathbb{N}$ nên $m\in\{0\}$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m<\frac{1}{16}$. **B.** $0\le m<\frac{1}{16}$. **C.** $-\frac{1}{2}<m\le\frac{1}{16}$. **D.** $\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}<m\le 0\\ m=\frac{1}{16}\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

PT $\Leftrightarrow \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}+m\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}=\frac{1}{2}$.

Đặt $t=\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}\in(0;1]$. Khi đó PT $\Rightarrow 2t^2-t+2m=0 \Leftrightarrow 2m=t-2t^2=g(t)$ (1).

Ta có $g'(t)=1-4t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

PT đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$(1) có đúng 1 nghiệm $t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m=\frac{1}{8}\\ -1<2m\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\frac{1}{16}\\ -\frac{1}{2}<m\le 0\end{array}\right..$$

Bình luận:

Trong bài này các em cần lưu ý tìm điều kiện đúng cho t và mối quan hệ số nghiệm giữa biến cũ và biến mới, tức là mỗi $t\in(0;1)$ cho ta hai giá trị x.

Câu 28: Cho phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có nghiệm.

A. $4\le m\le \frac{64}{7}$ **B.** $4\le m\le 8$ **C.** $3\le m\le \frac{64}{7}$ **D.** $m\ge \frac{64}{7}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=3^{1+\sqrt{1-x^2}}\rightarrow t\in[3;9]$

Phương trình có dạng $t^2-(m+2)t+2m+1=0\leftrightarrow m=\frac{t^2-2t+1}{t-2}$ (do $t\in[3;9]$).

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-2t+1}{t-2}$ trên $t\in[3;9]$

Ta có: $f'(t)=\frac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}>0,\forall t\in[3;9]$, nên hàm số đồng biến trên $[3;9]$. Vậy để phương trình có nghiệm thì $\min\limits_{[3;9]} f(t)\le m\le \max\limits_{[3;9]} f(t)\leftrightarrow f(3)\le m\le f(9)\leftrightarrow 4\le m\le \frac{64}{7}$.

Câu 29: Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $3^x+3=m.\sqrt{9^x+1}$ (1)có đúng 1 nghiệm.

A. $(1,3]$ **B.** $(3;\sqrt{10})$ **C.** $\{\sqrt{10}\}$ **D.** $(1;3)\cup\{\sqrt{10}\}$

Lời giải

Phương trình (1) tương đương: $\frac{3^x+3}{\sqrt{9^x+1}}=m$ đặt $t=3^x$ $(t>0)$

Phương trình (1) trở thành: $\frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}=m$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=\frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ với($t>0$)

Ta có: $y'=\frac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=0\leftrightarrow t=\frac{1}{3}$

Dựa vào đồ thì ta có: $m\in(1,3]$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'			$+$	0	$-$	
y		3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

1

Chọn A

Câu 30: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0 \Leftrightarrow 3^{x+1}+\frac{1}{3^{x+1}}-\frac{m}{3}\left(4\sqrt{|x+1|}+3m+3\right)=0$ (1)

Đặt $t=x+1$, phương trình (1) thành $3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{m}{3}\left(4\sqrt{|t|}+3m+3\right)=0 \quad (2)$.

Bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t=0$.

Với $t=0$ thay vào phương trình (2) ta có $-m^2-m+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Thử lại:

+) Với $m=-2$ phương trình (2) thành $3^t+\frac{1}{3^t}+\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)=0$

Ta có $3^t+\frac{1}{3^t}\ge 2$, $\forall t\in\mathbb{R}$ và $\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)\ge -2, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra $3^t+\frac{1}{3^t}+\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)\ge 0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t=0$ nên loại $m=-2$.

+) Với $m=1$ phương trình (2) thành $3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{|t|}+6\right)=0 \quad (3)$

Dễ thấy phương trình (3) có 3 nghiệm $t=-1, t=0, t=1$.

Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có 3 nghiệm $t=-1, t=0, t=1$. Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm phương trình (3) nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0;+\infty)$.

Trên tập $[0;+\infty)$, $(3)\Leftrightarrow 3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{t}+6\right)=0$.

Xét hàm $f(t)=3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{t}+6\right)$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3-3^{-t}.\ln 3-\frac{2}{3\sqrt{t}}$, $f''(t)=3^t\ln^2 3+3^{-t}.\ln^2 3+\frac{1}{3.\left(\sqrt{t}\right)^3}>0, \forall t>0$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow f'(t)=0$ có tối đa 1 nghiệm $t>0 \Rightarrow f(t)=0$ có tối đa 2 nghiệm $t\in[0;+\infty)$. Suy ra trên $[0;+\infty)$, phương trình (3) có 2 nghiệm $t=0, t=1$.

Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng 3 nghiệm $t=-1, t=0, t=1$. Vậy chọn $m=1$.

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm này, sau khi loại được $m=-2$ ta có thể kết luận đáp án C do đề không có phương án nào là không tồn tại *m*.

Câu 31: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(a;b)$. Tính giá trị biểu thức $T=b^2-a^2$

A. $T=36$. **B.** $T=48$. **C.** $T=64$. **D.** $T=72$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+(x-2)^3+8+m-3x=2^3+2^{2-x}$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+m-3x=2^{2-x}+(2-x)^3$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+3t^2>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f\left(\sqrt[3]{m-3x}\right)=f(2-x)\Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x}=2-x\Leftrightarrow m-3x=(2-x)^3$

$\Leftrightarrow m=-x^3+6x^2-9x+8$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+8$ và đường thẳng $y=m$.

Xét hàm số $g(x)=-x^3+6x^2-9x+8$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=-3x^2+12x-9; g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4<m<8$. Suy ra $a=4;b=8$.

Vậy $T=b^2-a^2=48$

Câu 32: **(Hải Hậu Lần1)** Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $2^x+3=m\sqrt{4^x+1}$ có hai nghiệm thực phân biệt là $\left(a;\sqrt{b}\right)$. Tính $S=2a+3b$

A. $S=29$. **B.** $S=28$. **C.** $S=32$. **D.** $S=36$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^x+3=m\sqrt{4^x+1}\Leftrightarrow m=\dfrac{2^x+3}{\sqrt{4^x+1}}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2^x+3}{\sqrt{4^x+1}}$ trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(1-3.2^x).2^x\ln 2}{(4^x+1)\sqrt{4^x+1}}=0\Leftrightarrow x=\log_2\dfrac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\log_2\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Từ bản biến thiên suy ra $m\in\left(3;\sqrt{10}\right)$. Do đó $\begin{cases}a=3\\b=10\end{cases}\Rightarrow S=2.3+3.10=36$.

Câu 33: **(Sở Hưng Yên Lần1) (Sở Hưng Yên Lần1)** Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. 2017. **B.** 2016. **C.** 4035. **D.** 4037.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

+) Ta có $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0\Leftrightarrow 2^{2(x^2-2x+1)}-2m.2^{x^2-2x+1}+3m-2=0$. (1)

Đặt $t=2^{x^2-2x+1}$. Ta có $t=2^{x^2-2x+1}=2^{(x-1)^2}\ge 2^0=1,\forall x$. Suy ra $t\ge 1$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-2m.t+3m-2=0$. (2)

+) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1>t_2>1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\(t_1-1)(t_2-1)>0\\t_1+t_2>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\t_1t_2-(t_1+t_2)+1>0\\t_1+t_2>2\end{cases}$. (3)

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases}t_1+t_2=2m\\t_1.t_2=3m-2\end{cases}$.

+) Khi đó $(3)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\3m-2-2m+1>0\\2m>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\m<1\end{array}\right.\\m>1\end{cases}\Leftrightarrow m>2$.

Mà m nguyên và $m\in(-2019;2019)$ nên ta có $m\in\{3;4;...;2018\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Cách 2:

+) Ta có $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0\Leftrightarrow 2^{2(x^2-2x+1)}-2m.2^{x^2-2x+1}+3m-2=0$. (1)

Đặt $t=2^{x^2-2x+1}$. Ta có $t=2^{x^2-2x+1}=2^{(x-1)^2}\ge 2^0=1,\forall x$. Suy ra $t\ge 1$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-2m.t+3m-2=0\Leftrightarrow(2t-3).m=t^2-2$ (2).

Vì $t=\dfrac{3}{2}$ không là nghiệm của (2) nên $(2)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2}{2t-3}$ $(*)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{t^2-2}{2t-3}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

$y'=\dfrac{2t^2-6t+4}{(2t-3)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
y'	1	$-$	‖ $+\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y		↘	$-\infty$ ‖	↘	2	↗	

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 $\Leftrightarrow m>2$.

Mà m nguyên và $m\in(-2019;2019)$ nên ta có $m\in\{3;4;...;2018\}$.

Vậy có 2016 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 34: **(Ba Đình Lần 2)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}}-4.3^{\sqrt{4x-x^2}}+2m-1=0$ có nghiệm?

A. 27. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

ĐKXĐ: $x\in[0;4]$.

Đặt $t=\sqrt{4x-x^2}$ với $x\in[0;4]$ thì $t\in[0;2]$

Đặt $u=3^t$ với $t\in[0;2]$ thì $u\in[1;9]$

Khi đó, tìm m đề phương trình $u^2-4u+2m-1=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;9]$.

$\Leftrightarrow 2m=-u^2+4u+1$, với $u\in[1;9]$

Xét hàm số $f(u)=-u^2+4u+1$.

$f'(u)=-2u+4=0\Leftrightarrow u=2$.

Ta có, $f(1)=4$, $f(2)=5$, $f(9)=-44$.

Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-44\le 2m\le 5\Leftrightarrow -22\le m\le\frac{5}{2}$.

Vậy có 25 số nguyên của tham số m.

Câu 35: **(Quỳnh Lưu Nghệ An)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|}=m^4-m^2+1$ có 4 nghiệm thực phân biệt

A. $m\le 1$.   **B.** $0<m\le 1$.

C. $m\in(-1;0)\cup(0;1)$.   **D.** $-1\le m\le 1$.

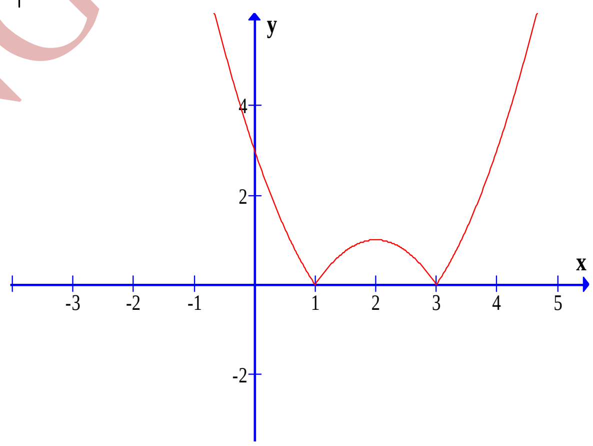
Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|}=m^4-m^2+1\Leftrightarrow |x^2-4x+3|=\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)$

Xét đồ thị $y=|x^2-4x+3|$ có dạng như hình vẽ:



Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình (1) có 4 nghiệm khi hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)$ giao nhau tại 4 điểm phân biệt.

Khi đó $0<\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)<1\Leftrightarrow 1>m^4-m^2+1>\frac{1}{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^4 - m^2 < 0 \\ m^4 - m^2 + \frac{1}{4} + \frac{11}{20} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2\left(m^2 - 1\right) < 0 \\ \left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{20} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Đồ thị nên có đánh dấu mốc trên trục tung $y = 1$ vì ta cần dùng mốc này để kết luận bài toán, cũng nên nói thêm $m^4 - m^2 + 1 > \frac{1}{5}$ luôn đúng

Câu 36: **(THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019;\, 2019]$ để phương trình

$2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0$. Có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Ta có

$$2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{m(x-2)-1}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{x-2} = -m. \qquad (*)$$

Đặt $f(x) = 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{x-2}$. Khi đó

$$f'(x) = 2019^x \ln 2019 + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \quad \forall x \in D.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (*) có 3 nghiệm thực phân biệt thì

$$-m > 2 \Rightarrow m < -2.$$

Mà $m \in [-2019;\, 2019]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 37: **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Tìm số nghiệm của phương trình $\left(|x|-1\right)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0$.

A. 3. **B.** 4 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

$\left(|x|-1\right)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0 \Leftrightarrow \left(|x|-1\right)^2 e^{(|x|-1)} = \log 2$, (1) Đặt $t = |x| - 1$, điều kiện $t \geq -1$ khi đó phương trình trở thành $t^2e^t = \log 2$, (2)

Đặt $f(t) = t^2e^t$, $f'(t) = (t^2)' e^t + t^2 (e^t)' = (t^2 + 2t)e^t$.

Ta có

+) $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t)e^t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right.$, ($t = -2$ loại vì $t \geq -1$).

+) $f'(t) > 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t)e^t > 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t > 0 \Leftrightarrow t \in (0; +\infty)$, (vì $t \geq -1$)

+) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} t^2e^t = +\infty$

Từ đó thu được bảng biến thiên của hàm số $y = f(t) = t^2e^t$ trên $[-1; +\infty)$ như sau:

t	-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
					$y = \log 2$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $-1 < t_1 < t_2$. Ứng với mỗi nghiệm này cho ta được hai nghiệm x nên phương trình (1) có 4 nghiệm.

Câu 38: Cho số thực $a > 1, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biện x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.

A. 4 **B.** $3\sqrt[3]{2}$ **C.** $3\sqrt[3]{4}$ **D.** $\sqrt[3]{4}$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^2 - 1 + x\log_b a = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\log_b a \\ x_1x_2 = -1 \end{array}\right.$.

Khi đó

Câu 39: Cho các số nguyên dương a,b lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1} = b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$.

A. 12 **B.** 46 **C.** 44 **D.** 22

Lời giải

Chọn B

Với $a^{x^2+1} = b^x$, lấy logarit cơ số a hai vế ta được:

$x^2 + 1 = x\log_a b \Leftrightarrow x^2 - x\log_a b + 1 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$\Delta = (\log_a b)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \log_a b > 2 \Leftrightarrow b > a^2$.

Tương tự $b^{x^2-1}=(9a)^x \Leftrightarrow x^2-1=x\log_b(9a) \Rightarrow \Delta=\left(\log_b(9a)\right)^2+4>0$.

Khi đó theo Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=\log_a b \\ x_3+x_4=\log_b(9a) \end{cases} \Rightarrow \log_a b\log_b(9a)<3 \Leftrightarrow \log_a(9a)<3 \Leftrightarrow 9a<a^3 \Rightarrow a\ge 4.$$

Vì vậy $b>16 \Rightarrow S>3.4+2.17=46$.

Câu 40: Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a4^x-b.2^x+50=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $9^x-b.3^x+50a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $x_3+x_4>x_1+x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+3b$.

A. 49 **B.** 51 **C.** 78 **D.** 81

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} \Delta_1>0; S_1>0; P_1>0 \\ \Delta_2>0; S_2>0; P_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2-200a>0$.

Khi đó $\begin{cases} 2^{x_1+x_2}=2^{x_1}.2^{x_2}=\dfrac{50}{a} \Leftrightarrow x_1+x_2=\log_2\dfrac{50}{a} \\ 3^{x_3+x_4}=2^{x_3}.2^{x_4}=50a \Leftrightarrow x_3+x_4=\log_3(50a) \end{cases}$.

Vì vậy

$$x_3+x_4>x_1+x_2 \Leftrightarrow \log_3(50a)>\log_2\left(\frac{50}{a}\right) \Rightarrow a\ge 3 \Rightarrow b^2>200a>600 \Rightarrow b\ge 25 \Rightarrow S=2a+3b\ge 81$$

Câu 41: **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $a>0; a\ne 1$ biết phương trình $a^x-\dfrac{1}{a^x}=2\cos bx$ có 7 nghiệm thực phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $a^{2x}-2a^x(\cos bx+2)+1=0$?

A. 28. **B.** 14. **C.** 0. **D.** 7.

Lời giải

$$a^{2x}-2a^x(\cos bx+2)+1=0 \Leftrightarrow a^x+\frac{1}{a^x}-2=2\cos 2x+2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right)^2=4\cos^2\frac{b\,x}{2} \Leftrightarrow \left|a^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right|=2\left|\cos\frac{b\,x}{2}\right|$$

Đặt $t=\dfrac{x}{2}$ ta có phương trình $\left|a^t-\dfrac{1}{a^t}\right|=2|\cos bt|$

$$\left|a^t-\frac{1}{a^t}\right|=2|\cos bt| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^t-\dfrac{1}{a^t}=2\cos bt\,(1) \\ a^t-\dfrac{1}{a^t}=-2\cos bt\,(2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^t-\dfrac{1}{a^t}=2\cos bt\,(1) \\ -a^t+\dfrac{1}{a^t}=2\cos(-bt)\,(2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^t-\dfrac{1}{a^t}=2\cos bt\,(1) \\ a^{-t}-\dfrac{1}{a^{-t}}=2\cos(-bt)\,(2) \end{array}\right.$$

Nếu t_0 là nghiệm (1) thì $-t_0$ là nghiệm (2). Dễ thấy phương trình (1) có nghiệm khác 0 nên theo giả thiết (1) có 7 nghiệm phân biệt có thể suy ra được phương trình (2) cũng có bảy nghiệm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có 14 nghiệm phân biệt

Câu 42: **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Tìm tham số m để tổng các nghiệm của phương trình sau đạt giá trị nhỏ nhất: $1+\left[2x^2-m(m+1)x-2\right].2^{1+mx-x^2}=\left(x^2-mx-1\right).2^{mx(1-m)}+x^2-m^2x.$

A. 0. **B.** 2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$1+\left[2x^2-m(m+1)x-2\right].2^{1+mx-x^2}=\left(x^2-mx-1\right).2^{mx(1-m)}+x^2-m^2x$

$\Leftrightarrow\left[\left(x^2-mx-1\right)+\left(x^2-m^2x-1\right)\right].2^{-\left(x^2-mx-1\right)}=\left(x^2-mx-1\right).2^{\left(x^2-m^2x-1\right)-\left(x^2-mx-1\right)}+\left(x^2-m^2x-1\right).$

Đặt $a=\left(x^2-mx-1\right), b=\left(x^2-m^2x-1\right)$ thì phương trình trên trở thành

$$(a+b).2^{-a}=a.2^{b-a}+b\Leftrightarrow a+b=a.2^b+b.2^a\Leftrightarrow a\left(2^b-1\right)+b\left(2^a-1\right)=0\ (*).$$

Nếu $a=0$ hoặc $b=0$ thì phương trình (*) thỏa mãn.

Nếu $a\neq 0$ và $b\neq 0$ thì phương trình (*) tương đương $\frac{2^b-1}{b}+\frac{2^a-1}{a}=0$ (**).

Nhận xét:

Với $a>0$ thì $2^a>1$, tức là $2^a-1>0$ nên $\frac{2^a-1}{a}>0$.

Với $a<0$ thì $2^a<1$, tức là $2^a-1<0$ nên $\frac{2^a-1}{a}>0$.

Suy ra $\frac{2^a-1}{a}>0, \forall a\neq 0$.

Tương tự: $\frac{2^b-1}{b}>0, \forall b\neq 0$.

Nên $\frac{2^b-1}{b}+\frac{2^a-1}{a}>0, \forall a\neq 0, b\neq 0$. Suy ra phương trình (**) vô nghiệm.

Do đó: (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.$.

Tức là phương trình đã cho tương đương $\left[\begin{array}{l}x^2-mx-1=0\\ x^2-m^2x-1=0\end{array}\right.$.

Hai phương trình $x^2-mx-1=0$ và $x^2-m^2x-1=0$ có ít nhất 1 nghiệm trùng nhau khi $m=0$ hoặc $m=1$.

Nếu $m=0$ thì hai phương trình đều là $x^2-1=0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_1=0$.

Nếu $m=1$ thì hai phương trình đều là $x^2-x-1=0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_2=1$.

Khi $m\neq 0$ và $m\neq 1$ thì hai phương trình $x^2-mx-1=0$ và $x^2-m^2x-1=0$ không có nghiệm nào trùng nhau.

Phương trình bậc hai $x^2 - mx - 1 = 0$ có $a.c < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_1 + x_2 = m$.

Phương trình bậc hai $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có $a.c < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_3 + x_4 = m^2$.

Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt và tổng của chúng là

$$T_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + m^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \ge -\frac{1}{4}.$$

$T_3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$, nên $\min T_3 = -\frac{1}{4}$.

So sánh $T_1, T_2, \min T_3$ thì được giá trị nhỏ nhất của tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $-\frac{1}{4}$ và đạt tại $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 43: **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left(x^3 - 9x^2 + 24x + m\right).3^{x-3} = 3^x + 1$ có ba nghiệm phân biệt bằng

A. 45. **B.** 38. **C.** 34. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

Phương trình tương đương với

$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + \left(x^3 - 9x^2 + 24x + m\right) = 27 + 3^{3-x} \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 3t^2 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.

$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 3 - x \Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x$

$\Leftrightarrow m = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27$.

Đặt $g(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	11	$\searrow$	$-\infty$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $7 < m < 11 \Rightarrow m \in \{8;9;10\}$. Vậy tổng các giá trị m bằng 27.

Câu 44: Cho các phương trình:

$x^{2017} + x^{2016} + ... + x - 1 = 0 (1)$

$x^{2018} + x^{2017} + ... + x - 1 = 0 (2)$

Biết rằng phương trình (1),(2) có nghiệm duy nhất lần lượt là a và b. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a.e^b = b.e^a$. **B.** $a.e^b > b.e^a$. **C.** $a.e^b < b.e^a$. **D.** $a.e^a < b.e^b$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^{2017}+x^{2016}+...+x-1$ trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$ ta có:

$f\left(x\right)=2017x^{2016}+2016x^{2015}+...+1>0,\forall x\geq 0$ nên hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$

Mặt khác $f\left(0\right).f\left(1\right)=-2016<0\Rightarrow f\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất $a\in\left(0;1\right)$.

Chứng minh tương tự với hàm số $g\left(x\right)=x^{2018}+x^{2017}+...+x-1$ thì $g\left(x\right)=0$ có nghiệm dương duy nhất $b\in\left(0;1\right)$.

Ta có $g\left(a\right)=a^{2018}+f\left(a\right)=a^{2018}>0=g\left(b\right)\Rightarrow a>b\Rightarrow a.e^{a}>b.e^{b}$.

Để so sánh $a.e^{b}$ và $b.e^{a}$ ta xét hiệu $a.e^{b}-b.e^{a}=ab\left(\dfrac{e^{b}}{b}-\dfrac{e^{a}}{a}\right)=ab\left(h\left(b\right)-h\left(a\right)\right)>0$.

Trong đó $h\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{x},0<x<1$, ta có $h'\left(x\right)=\dfrac{e^{x}.x-e^{x}}{x^{2}}<0\Rightarrow h\left(a\right)<h\left(b\right)$.

Vậy $a.e^{b}>b.e^{a}$

Câu 45: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Gọi S là tập chứa các giá trị nguyên của m để phương trình $e^{3x^{3}-18x+30-m}+e^{x^{3}-6x+10-m}-e^{2m}=1$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. 110. **B.** 106. **C.** 126. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x^{3}-6x+10$.

Ta có phương trình $e^{3t-m}+e^{t-m}-e^{2m}=1\Leftrightarrow e^{3t}+e^{t}=e^{3m}+e^{m}$ (1).

Xét hàm số $f(x)=e^{3x}+e^{x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=3e^{3x}+e^{x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $\left(1\right)$, ta có $f(t)=f(m)$, suy ra $t=m$ hay $x^{3}-6x+10=m$ (2).

Phương trình $e^{3x^{3}-18x+30-m}+e^{x^{3}-6x+10-m}-e^{2m}=1$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có 3 nghiệm thực phân biệt.

Xét hàm số $g(x)=x^{3}-6x+10$ với $x\in\mathbb{R}$.

$g'(x)=3x^{2}-6=3\left(x^{2}-2\right)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10+4\sqrt{2}$	$\searrow$	$10-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (2) có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $10-4\sqrt{2}<m<10+4\sqrt{2}$.

Ta có $10-4\sqrt{2}\approx 4,34$ và $10+4\sqrt{2}\approx 15,66$. Suy ra $S=\{5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$.

Tổng các phần tử của S là $\dfrac{11}{2}\left(5+15\right)=110$.

Câu 46: **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\left|2^{x+1}-8\right|=\frac{1}{2}x^2+m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với: $m=\left|2^{x+1}-8\right|-\frac{1}{2}x^2(*)$.

Xét hàm số:

$$f(x)=\left|2^{x+1}-8\right|-\frac{1}{2}x^2=\begin{cases}2^{x+1}-8-\frac{1}{2}x^2 & (x\ge 2)\\ 8-2^{x+1}-\frac{1}{2}x^2 & (x<2)\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g(x)=2^{x+1}\ln 2-x & (x>2)\\ h(x)=-2^{x+1}\ln 2-x & (x<2)\end{cases}.$$

(Hàm số không có đạo hàm tại điểm x = 2).

Ta có:

- $g'(x)=2^{x+1}\ln^2 2-1>2^{2+1}\ln^2 2-1>0,\forall x>2\Rightarrow g(x)>g(2)=2^3\ln 2>0,\forall x>2$ (1).
- $h'(x)=-2^{x+1}\ln^2 2-1<0,\forall x<2$ và $\begin{cases}h(-1)=-\ln 2+1>0\\ h(0)=-2\ln 2<0\end{cases}\Rightarrow h(0).h(-1)<0$ do đó $h(x)=0$

có nghiệm duy nhất $x_0\in(-1;0)$. Dùng máy tính tìm được $x_0\approx-0,797563$ lưu nghiệm này vào biến nhớ A, ta có $f\left(x_0\right)=f(A)\approx 6,53131$.

Vậy ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0\in(-1;0)$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_0)$	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi:
$-2<m<f(x_0)\approx 6,53131$.

Do m là số nguyên nên $m\in\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$.

Có tất cả 8 số nguyên thoả mãn yêu cầu.

Câu 47: **(THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

A. $\left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$ **C.** $\left(0;\frac{1}{e}\right)$ **D.** $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$

Lời giải

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1+2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$.

Ta có $t'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}},t'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

x	-1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
t'		$+$	0	$-$	
t	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Vậy $t \in \left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Phương trình trở thành $e^{3m}+e^{m}=2t\left(1+\frac{t^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow e^{3m}+e^{m}=t^3+t \Leftrightarrow e^{m}=t$. (sử dụng hàm đặc trưng).

Phương trình có nghiệm khi và chi khi $-1 \le e^{m} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow m \le \ln\sqrt{2} \Leftrightarrow m \in (-\infty;\frac{1}{2}\ln 2]$.

Câu 48: **(CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho số thực α sao cho phương trình $2^x-2^{-x}=2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x+2^{-x}=4+2\cos(\alpha x)$ là

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 4037. **D.** 4038.

Lời giải

Ta có

$$2^x+2^{-x}=4+2\cos(\alpha x) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)^2=4\cos^2\frac{\alpha x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=2\cos\frac{\alpha x}{2} & (1) \\ 2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=-2\cos\frac{\alpha x}{2} & (2) \end{array}\right.$$

Nhận xét

Phương trình (1) có 2019 nghiệm khác 0 (do giả thiết và 0 không là nghiệm).

x_0 là nghiệm của phương trình (1) khi và chỉ khi $-x_0$ là nghiệm của phương trình (2) vì

$$2^{\frac{x_0}{2}}-2^{-\frac{x_0}{2}}=2\cos\frac{\alpha x_0}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{(-x_0)}{2}}-2^{-\frac{(-x_0)}{2}}=-2\cos\frac{\alpha(-x_0)}{2}.$$

Hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung vì

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=2\cos\frac{\alpha x}{2} \\ 2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=-2\cos\frac{\alpha x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\alpha x}{2}=0 \\ 2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 0=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Vậy số nghiệm của phương trình $2^x+2^{-x}=4+2\cos(\alpha x)$ là 4038.

Câu 49: **(Sở Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$-$			0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{15}{13}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{15}{13}$	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của m để phương trình: $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$.

A. e^5. **B.** $e^{\frac{15}{13}}$. **C.** e^3. **D.** e^4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m \Leftrightarrow 2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}=\ln m$.

Đặt $g(x)=2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}$.

$g'(x)=f'(x)\left[6f^2(x)-13f(x)+7\right]$.

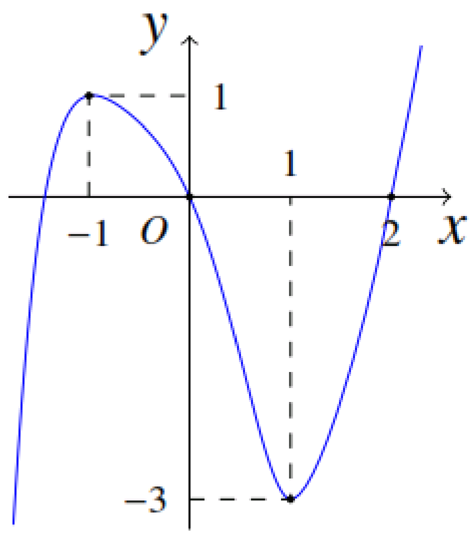
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=1 \\ f(x)=\frac{7}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; x=3 \\ x=1; x=a>3 \\ x=b<0 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên trên đoạn $[0;2]$:

x	$-\infty$	b	0		1		2	3	$+\infty$
$g'(x)$		0		$+$	0	$-$		0	
$g(x)$				$\nearrow$	4	$\searrow$			

Giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là: $\ln m=4 \Leftrightarrow m=e^4$.

Câu 50: **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có

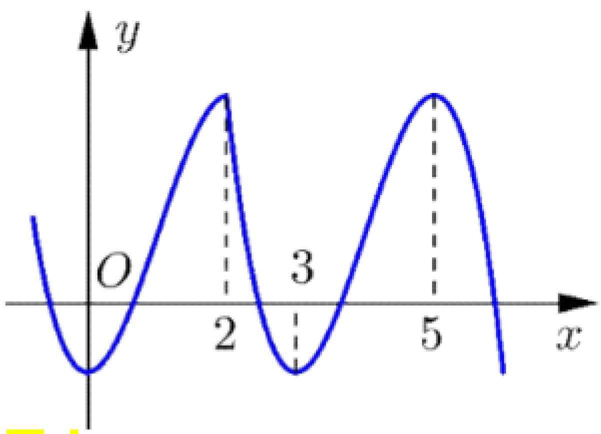
$$f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+f\left(e^x\right)=-1 \\ 2+f\left(e^x\right)=a\ ,(2<a<3) \end{array}\right.$$

$$2+f\left(e^x\right)=-1 \Leftrightarrow f\left(e^x\right)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x=1 \\ e^x=b<-1(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

$$2+f\left(e^x\right)=a \Leftrightarrow f\left(e^x\right)=a-2,(0<a-2<1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x=c<-1 \\ e^x=d<0 \\ e^x=t>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Câu 51: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Cho số thực m và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình có $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = t(x) = 2^x + 2^{-x}$ với $x \in [-1;2]$.

Hàm số $t = t(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ có $t'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2$ và $t'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^{-x} \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		2
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$

Nhận xét: Dựa vào bảng biến thiên với mỗi $t \in \left(2;\frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị của x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$

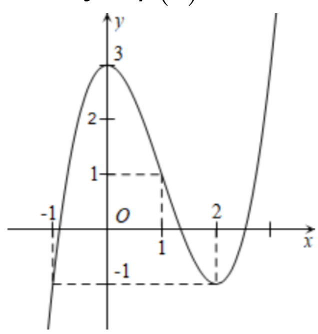
và với mỗi $t \in \{2\} \cup \left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$.

Xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị phương trình $f\left(2^x + 2^{-x}\right) = m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 trong đó có: $t_1 \in \left(2;\frac{5}{2}\right]$ và $t_2 \in \left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$.

Vậy phương trình $f\left(2^x + 2^{-x}\right) = m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$.

Câu 52: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $\left[f\left(e^{\sqrt{x}}\right)\right]^2 - f\left(e^{\sqrt{x}}\right) - 2 = 0$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \ge 0$.

Đặt $t = e^{\sqrt{x}}$. Do $\sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow t \ge 1$ và ứng với mỗi giá trị $t \ge 1$ chỉ cho một giá trị $x \ge 0$.

Ta có phương trình trở thành: $\left[f(t)\right]^2 - f(t) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = -1 \\ f(t) = 2 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên $[1;+\infty)$ suy ra phương trình $f(t)=-1$ có 1 nghiệm và phương trình $f(t)=2$ có 1 nghiệm khác với nghiệm của phương trình $f(t)=-1$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 53: **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn $2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019$.

A. $m\in\left(2\sqrt{6};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)$.

B. $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.

C. $m\in\left[2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.

D. $m\in\left(3\sqrt{3};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left\{2\sqrt{6}\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019$ (1). Điều kiện: $x\ge -1$.

Đặt $\begin{cases} a=2x+\sqrt{x+1} \\ b=2+\sqrt{x+1}\end{cases}\Rightarrow a-b=2(x-1)\Rightarrow x-1=\frac{a-b}{2}$.

Bất phương trình (1) thành:

$2018^a-2018^b+2019\frac{a-b}{2}\le 0\Leftrightarrow 2(2018)^a+2019a\le 2(2018)^b+2019b$ (2).

Xét hàm số $f(t)=2(2018)^t+2019t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=2.2018^t\ln 2018+2019>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình $(2)\Leftrightarrow f(a)\le f(b)\Leftrightarrow a\le b\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Với $-1\le x\le 1$, ta có:

$5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$

$\Leftrightarrow 3(x+2)^2+2(x^2+2)=m(x+2)\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow 3\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}+2\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}=m$ (3).

Đặt $t=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ với $x\in[-1;1]$.

$t'=\frac{2-2x}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}\ge 0,\forall x\in[-1;1]$ nên hàm t đồng biến trên $[-1;1]$, suy ra $\frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\sqrt{3}$.

Do hàm t đơn điệu trên $[-1;1]$ nên ứng với mỗi giá trị của $t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$ ta tìm được đúng một giá trị của $x\in[-1;1]$ và ngược lại.

Viết lại phương trình (3) theo ẩn t:

$3t+\frac{2}{t}=m$ (4) với $\frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\sqrt{3}$.

(3) có 2 nghiệm thực phân biệt $x\in[-1;1]$ $\Leftrightarrow$ (4) có 2 nghiệm thực phân biệt $t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$ (*).

Xét hàm số $g(t)=3t+\frac{2}{t}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

$g'(t)=3-\frac{2}{t^2}$. Cho $g'(t)=0\Leftrightarrow t^2=\frac{2}{3}\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2}{3}}\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{3}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có (*) $\Leftrightarrow$ $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$

Vậy $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 54: **(CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Cho hàm số $f(x)=3^{x-4}+(x+1).2^{7-x}-6x+3$. Giả sử $m_0=\frac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{Z},\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+2m-1=0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b^2$.

A. $P=11$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=9$.

Lời giải

Đặt $t=7-4\sqrt{6x-9x^2}$ (1) thì $f(t)=1-2m(2)$.

$t'=\frac{-4(6-18x)}{2\sqrt{6x-9x^2}}\Rightarrow t'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

x	0		$1/3$		$2/3$
t'		$-$	0	$+$	
t	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	7

Từ BBT suy ra nếu $t\in(3;7]$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x.

Xét hàm số $f(x)=3^{x-4}+(x+1).2^{7-x}-6x+3$

$f'(x)=3^{x-4}\ln 3+2^{7-x}-(x+1)2^{7-x}\ln 2-6$

$f''(x)=3^{x-4}\ln^2 3+\left(2^{7-x}\ln 2\right)\left[(x+1)\ln 2-2\right]>0\forall x\in(3;7]$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(3;7)$. Mặt khác, $f'(6).f'(7)<0$ nên phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm $x=\alpha\in(6;7)$.

x	3		α		7
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{143}{3}$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	-4

Vậy, phương trình $f(t)=1-2m$ có nhiều nghiệm nhất khi

$f(\alpha)<1-2m\le -4 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\le m<\frac{1-f(\alpha)}{2}$

Kết luận, GTNN của m là $\frac{5}{2}\Rightarrow a=5,b=2.$

Câu 55: **(THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01)** Cho hệ phương trình $\begin{cases}2^{x-y}-2^y+x=2y\\ 2^x+1=\left(m^2+2\right)2^y\sqrt{1-y^2}\end{cases}(1)$, m là tham số. Gọi S là tập giá trị m nguyên để hệ (1) có nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử.

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

ĐK: $-1\le y\le 1$

Ta có: $2^{x-y}-2^y+x=2y \Leftrightarrow 2^{x-y}+x-y=2^y+2y \Leftrightarrow f(x-y)=f(y)(*)$

Trong đó $f(t)=2^t+t, t\in\mathbb{R}$.

Lại có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)=2^t+t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow x-y=y \Leftrightarrow x=2y$. Với $x=2y$ thì phương trình $2^x+1=\left(m^2+2\right)2^y\sqrt{1-y^2}$

được viết lại thành: $2^{2y}+1=\left(m^2+2\right)2^y\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{m^2+2}=\frac{2^y\sqrt{1-y^2}}{2^{2y}+1}(2)$

+) Nếu y_0 là nghiệm của (2) thì $-y_0$ cũng là nghiệm của (2). Suy ra (2) có nghiệm duy nhất

khi $y_0=-y_0 \Leftrightarrow y_0 \Rightarrow \frac{1}{m^2+2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow m=0$.

+) Với $m=0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{2^y\sqrt{1-y^2}}{2^{2y}+1} \Leftrightarrow 2^{2y}+1-2.2^y\sqrt{1-y^2}=0$

$\Leftrightarrow \left(2^y-\sqrt{1-y^2}\right)^2+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ 2^y-\sqrt{1-y^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow y=0$.

Vậy $m=0$ thì (2) có nghiệm duy nhất. Suy ra hệ (1) có nghiệm duy nhất.

Câu 56: **(KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019)** Gọi a, b lần lượt là các nghiệm dương của phương trình $x^{2018}+x^{2017}+x^{2016}+...+x-1=0$ (1) và $x^{2019}+x^{2018}+x^{2017}+...+x-1=0$ (2). Khẳng định nào sau đây **đúng**:

A. $b>a+1$ **B.** $a>b+1$ **C.** $a\ln b>b\ln a$ **D.** $b\ln a>a\ln b$

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=x^{2018}+x^{2017}+x^{2016}+...+x-1$, $g(x)=x^{2019}+x^{2018}+x^{2017}+...+x-1$.

+ Khi $x \geq 1$: $\begin{cases} f(x) \geq 2017 > 0 \\ g(x) \geq 2018 > 0 \end{cases}$ nên (1) và (2) vô nghiệm trên $(1;+\infty)$

+ Ta có $f(x), g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ mà $\begin{cases} f(0).f(1) = -2017 < 0 \\ g(0).g(1) = -2018 < 0 \end{cases}$ nên $f(x), g(x)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0,1)$.

+ $\begin{cases} f'(x) = 2018x^{2017} + 2017x^{2016} + 2016x^{2015} + ... + 2x + 1 > 0, \ \forall x > 0 \\ g'(x) = 2019x^{2018} + 2018x^{2017} + 2017x^{2016} + ... + 2x + 1 > 0, \ \forall x > 0 \end{cases}$ nên $f(x), g(x)$ đồng biến trên $(0,+\infty)$. Do đó *a, b* là nghiệm dương duy nhất của (1) và (2) và $a, b \in (0,1)$

$\begin{cases} a^{2018} + a^{2017} + a^{2016} + ... + a - 1 = 0 \ \ (3) \\ b^{2019} + b^{2018} + b^{2017} + ... + b - 1 = 0 \ \ (4) \end{cases}$. Trừ vế theo vế của (*4*) và (*3*) ta được:

$b^{2019} + \left(b^{2018} - a^{2018}\right) + \left(b^{2017} - a^{2017}\right) + \left(b^{2016} - a^{2016}\right) + (b - a) = 0$

$\Leftrightarrow b^{2019} = \left(a^{2018} - b^{2018}\right) + \left(a^{2017} - b^{2017}\right) + \left(a^{2016} - b^{2016}\right) + (a - b) \ (*)$.

Vì $b \in (0,1) \Rightarrow b^{2019} > 0 \Rightarrow VP(*) > 0$ hay $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$.

Xét hàm số $y = h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ trên $(0,1)$. Có $h'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} > 0, \forall x \in (0,1)$ nên *h(x)* đồng biến trên $(0,1)$. Mà $a > b \Rightarrow h(a) > h(b) \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} > \dfrac{\ln b}{b} \Leftrightarrow b \ln a > a \ln b$.

II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Câu 57: Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì $b-2a$ bằng

A. 6 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 16

Lời giải

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133\sqrt{10^x}$ chia hai vế bất phương trình cho 5^x ta được: $50+\dfrac{20.2^x}{5^x}\le\dfrac{133\sqrt{10^x}}{5^x}\Leftrightarrow 50+20.\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\le 133.\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x$ (1)

Đặt $t=\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x,(t\ge 0)$ phương trình (1) trở thành: $20t^2-133t+50\le 0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\le t\le\dfrac{25}{4}$

Khi đó ta có: $\dfrac{2}{5}\le\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x\le\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\le\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\le\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4}\Leftrightarrow -4\le x\le 2$ nên $a=-4,b=2$

Vậy $b-2a=10$

Bình luận

Phương pháp giải bất phương trình dạng $ma^{2\alpha}+n(ab)^{\alpha}+pb^{2\alpha}>0$: chia 2 vế của bất phương trình cho $a^{2\alpha}$ hoặc $b^{2\alpha}$.

Câu 58: Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+3\le 3^{x^2}+3^{\sqrt{x-1}}$.

A. $2\le x$. **B.** $1\le x\le 2$. **C.** $2\le x\le 7$. **D.** $2\le x\le 4$.

Lời giải

ĐK: $x\ge 1$

Ta có: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+3\le 3^{x^2}+3^{\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow 3^{x^2+\sqrt{x-1}}+9-3.3^{x^2}-3.3\sqrt{x-1}\le 0$

$\Leftrightarrow\left(3^{x^2}-3\right)\left(3^{\sqrt{x-1}}-3\right)\le 0$

+với $x=1$, thỏa mãn;

+Với $x>1$:$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x-1}}\le 3\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\le 1\quad\Leftrightarrow\ 1\le x\le 2$

Chọn B

Câu 59: Tập nghiệm của bất phương trình: $81.9^{x-2}+3^{x+\sqrt{x}}-\dfrac{2}{3}.3^{2\sqrt{x}+1}\ge 0$ là:

A. $S=[1;+\infty)\cup\{0\}$. **B.** $S=[1;+\infty)$.

C. $S=[0;+\infty)$. **D.** $S=[2;+\infty)\cup\{0\}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge 0$.

BPT $\Leftrightarrow 81.\dfrac{9^x}{81}+3^x.3^{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{3}.3.3^{2\sqrt{x}}\ge 0$.

$\Leftrightarrow 3^{2x}+3^x.3^{\sqrt{x}}-2.3^{2\sqrt{x}}\ge 0\Leftrightarrow\left(3^x-3^{\sqrt{x}}\right)\left(3^x+2.3^{\sqrt{x}}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 3^x-3^{\sqrt{x}}\ge 0\ \left(do\ \ 3^x+2.3^{\sqrt{x}}>0,\ \forall x\ge 0\right)$

$\Rightarrow 3^x\ge 3^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x\ge\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}\ge 1\\ \sqrt{x}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x=0\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm cảu BPT là $S=[1;+\infty)\cup\{0\}$.

Chọn A

Câu 60: **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right).2019^{x-2}\geq 1$ là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $b-a$.

A. 5. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

TH1: $x^2-4\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 2\\x\leq -2\end{array}\right.$.

Khi đó ta có $\begin{cases}9^{x^2-4}\geq 9^0=1\\2019^{x-2}>0\end{cases}\Rightarrow 9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right).2019^{x-2}\geq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-4=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

TH2: $x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2$

Khi đó ta có $\begin{cases}9^{x^2-4}<9^0=1\\0<2019^{x-2}<2019^0=1\end{cases}\Rightarrow 9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right).2019^{x-2}<1$.

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Khi đó tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right).2019^{x-2}\geq 1$ là khoảng $\left(-2;2\right)$.

Suy ra $a=-2;b=2$.

Vậy $b-a=4$.

Câu 61: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy}\leq\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{xy+5y^2}$. Hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy}\leq\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{xy+5y^2}\Leftrightarrow\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy}\leq\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{-\left(xy+5y^2\right)}{2}}$

$\Leftrightarrow 2x^2-5xy\leq\frac{-\left(xy+5y^2\right)}{2}$

$\Leftrightarrow 4x^2-9xy+5y^2\leq 0\quad(*)$.

Với $x,y>0$, chia cả hai vế của $(*)$ cho y^2 ta được $4\left(\frac{x}{y}\right)^2-9\frac{x}{y}+5\leq 0\Leftrightarrow 1\leq\frac{x}{y}\leq\frac{5}{4}$.

Ta có $\frac{x}{y}=1$ khi $x=y=t$ với $t>0$ và $\frac{x}{y}=\frac{5}{4}$ khi $x=5t$, $y=4t$ với $t>0$.

Suy ra $m=\min\left(\frac{x}{y}\right)=1$, $M=\max\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{5}{4}$ khi $x,y>0$. Vậy $M-m=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$.

Câu 62: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Cho hàm số $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}\left(e^x-e^{-x}\right)$. Có bao nhiêu số nguyên dương m thỏa mãn bất phương trình $f(m-7)+f\left(\dfrac{12}{m+1}\right)\le 0$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có $f(x)=e^{x+\sqrt{x^2+1}}-e^{-x+\sqrt{x^2+1}}$ và $f(-x)=e^{-x+\sqrt{x^2+1}}-e^{x+\sqrt{x^2+1}}=-\left(e^{x+\sqrt{x^2+1}}-e^{-x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-f(x)$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Ta có $f'(x)=\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{x+\sqrt{x^2+1}}+\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{-x+\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$f(m-7)+f\left(\dfrac{12}{m+1}\right)\le 0\Leftrightarrow f(m-7)\le -f\left(\dfrac{12}{m+1}\right)=f\left(-\dfrac{12}{m+1}\right)$.

$\Leftrightarrow m-7\le -\dfrac{12}{m+1}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le m\le 5\\ m<-1\end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên dương nên $m\in\{1,2,3,4,5\}$.

Câu 63: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Số các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2019^{\sin^2 x}+2018^{\cos^2 x}\ge m.2019^{\cos^2 x}$ có nghiệm là

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2019^{\sin^2 x}+2018^{\cos^2 x}\ge m.2019^{\cos^2 x}\Leftrightarrow \dfrac{2019^{\sin^2 x}+2018^{\cos^2 x}}{2019^{\cos^2 x}}\ge m$ (*)

Đặt $t=\cos^2 x\,(0\le t\le 1)$. Khi đó

(*) $\Leftrightarrow m\le \dfrac{2019^{1-t}+2018^t}{2019^t}=2019^{1-2t}+\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^t$ có nghiệm $t\in[0;1]$ nên

$m\le \max\limits_{t\in[0;1]}\left\{2019^{1-2t}+\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^t\right\}$

Xét hàm số $g(t)=2019^{1-2t}+\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^t$ trên đoạn $[0;1]$.

Vì $g'(t)=-2.2019^{1-2t}\ln 2019+\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^t\ln\dfrac{2018}{2019}<0;\forall t\in[0;1]$ nên hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$.

Vậy $m\le \max\limits_{t\in[0;1]}\{g(t)\}=g(0)=2020$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1,2,...,2020\}$. Do đó số giá trị nguyên dương của tham số m để thỏa mãn điều kiện bài toán là 2020.

Câu 64: **(THPT Nghèn Lần1)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $5.4^x+m.25^x-7.10^x\le 0$ có nghiệm. Số phần tử của S là

A. 3.   **B.** Vô số.   **C.** 2.   **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5.4^x + m.25^x - 7.10^x \le 0 \Leftrightarrow 5.\left(\frac{4}{25}\right)^x - 7.\left(\frac{2}{5}\right)^x + m \le 0 \Leftrightarrow 5.\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 7.\left(\frac{2}{5}\right)^x + m \le 0$.

Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$, $t > 0$. Bất phương trình trở thành: $5t^2 - 7t + m \le 0 \Leftrightarrow m \le -5t^2 + 7t = g(t)$.

Ta lại có: $g'(t) = -10t + 7 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{10}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{7}{10}$		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{49}{20}$	$\searrow$	$-\infty$

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{t\in(0;+\infty)} g(t) = \frac{49}{20}$ khi $t = \frac{7}{10}$.

Để bất phương trình đề bài cho thỏa mãn điều kiện có nghiệm $\Leftrightarrow m \le \max\limits_{t\in(0;+\infty)} g(t) = \frac{49}{20}$.

Do m là số nguyên dương nên $m \in \{1;2\}$.

Câu 65: **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Cho bất phương trình $m\cdot 3^{x+1} + (3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty;0)$.

A. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$.   **B.** $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.   **C.** $m \ge \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.   **D.** $m \ge -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $m\cdot 3^{x+1} + (3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$

$\Leftrightarrow 3m\cdot 3^x + (3m+2)\frac{9^x}{\left(4+\sqrt{7}\right)^x} + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$

$\Leftrightarrow \left(4+\sqrt{7}\right)^{2x} + 3m\cdot\left(4+\sqrt{7}\right)^x\cdot 3^x + (3m+2)\cdot 3^{2x} > 0\ (1)$.

Vì $3^{2x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^{2x} + 3m\cdot\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x + 3m + 2 > 0\ (2)$.

Đặt $\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x = t$. Vì $x \in (-\infty;0)$ và $\frac{4+\sqrt{7}}{3} > 1$ nên $t \in (0;1)$.

Bất phương trình (2) trở thành $t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+2}{t+1} > -3m\ (*)$ (vì $t \in (0;1)$ nên $t + 1 > 0$).

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+2}{t+1}$ trên $(0;1)$.

Ta có $f'(t)=1-\dfrac{3}{(t+1)^2}$.

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{3}-1 \\ t=-\sqrt{3}-1 \end{array}\right..$$

Vì $t\in(0;1)$ nên $t=\sqrt{3}-1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)$ trên $(0;1)$.

t	0		$\sqrt{3}-1$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	$-2+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;1)} f(t)=f\left(\sqrt{3}-1\right)=-2+2\sqrt{3}$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$

$\Leftrightarrow$ Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \min\limits_{(0;1)} f(t)>-3m$

$\Leftrightarrow -2+2\sqrt{3}>-3m$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 66: Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x+(2-m)6^x+3^x<0$ có nghiệm đúng $\forall x>0$ là:

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $2^x=t$. Do $x>0\Rightarrow t>1$.

Khi đó ta có: $(3m+1)t^2+(2-m)t+1<0,\ \forall t>1$

$\Leftrightarrow (3t^2-t)m<-t^2-2t-1\ \ \forall t>1 \Leftrightarrow m<\dfrac{-t^2-2t-1}{3t^2-t}\ \ \forall t>1$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2-2t-1}{3t^2-t}$ trên $(1;+\infty)\Rightarrow f'(t)=\dfrac{7t^2+6t-1}{(3t^2-t)^2}>0\ \ \forall t\in(1;+\infty)$

BBT

t	1	$+\infty$
f'(t)	$+$	

f(t)	-2 ↗ $-\dfrac{1}{3}$

Do đó $m \le \lim\limits_{t\to 1^+} f(t) = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bình luận

Sử dụng
$+\ m \ge f(x)\forall x \in D \Leftrightarrow m \ge \max f(x)\forall x \in D$
$+\ m \le f(x)\forall x \in D \Leftrightarrow m \le \min f(x)\forall x \in D$

Câu 67: Tìm m để bất phương trình $m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \le 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;1)$.

A. $0 \le m \le 6$ **B.** $m \le 6$. **C.** $m \ge 6$. **D.** $m \le 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \le 0 \Leftrightarrow m.\left(\dfrac{9}{4}\right)^x - (2m+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^x + m \le 0$.

Đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$. Vì $x \in (0;1)$ nên $1 < t < \dfrac{3}{2}$

Khi đó bất phương trình trở thành $m.t^2 - (2m+1)t + m \le 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{t}{(t-1)^2}$.

Đặt $f(t) = \dfrac{t}{(t-1)^2}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-t-1}{(t-1)^3}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Bảng biến thiên.

t	-1		1		$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	$+\ 0$	$-$	‖	$-$	
$f(t)$			‖	$+\infty$ ↘ 6	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \le \lim\limits_{t\to \frac{3}{2}} f(t) = 6$.

Câu 68: Số các giá trị nguyên dương để bất phương trình $3^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} \ge m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

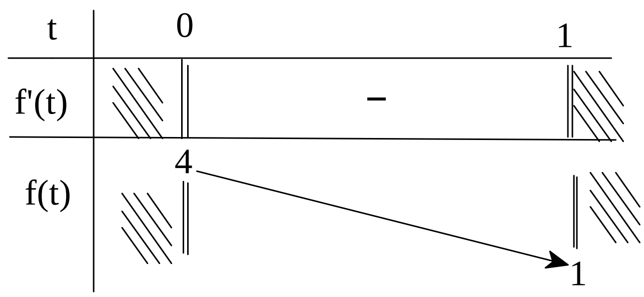
Chọn A

Đặt $\sin^2 x = t\ (0 \le t \le 1)$

$3^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} \ge m.3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 3^{(1-t)} + 2^t \ge 3^t \Leftrightarrow \dfrac{3}{3^t} + 2^t \ge m.3^t \Leftrightarrow \dfrac{3}{(3^t)^2} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^t \ge m$

Đặt: $y = \dfrac{3}{9^t} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^t\ (0 \le t \le 1)$

$y' = 3.\left(\dfrac{1}{9}\right)^t.\ln\dfrac{1}{9} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^t.\ln\dfrac{2}{3} < 0 \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \le 1$ thì phương trình có nghiệm
Suy ra các giá trị nguyên dương cần tìm $m = 1$.

Câu 69: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là $(-\infty;0]$: $m2^{x+1} + (2m+1)\left(1-\sqrt{5}\right)^x + \left(3+\sqrt{5}\right)^x < 0$.

A. $m \le -\frac{1}{2}$. **B.** $m \le \frac{1}{2}$. **C.** $m < \frac{1}{2}$. **D.** $m < -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương

$2m + (2m+1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x < 0$ (1). Đặt $t = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0$, ta được:

$2m + (2m+1)\frac{1}{t} + t < 0 \Leftrightarrow \mathrm{f}(t) = t^2 + 2mt + 2m + 1 < 0$ (2)

BPT (1) nghiệm đúng $\forall x \le 0$ nên BPT (2) có nghiệm $0 < t \le 1$, suy ra
Phương trình $f(t) = 0$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa $t_1 \le 0 < 1 < t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \le 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \le 0 \\ 4m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -0,5 \\ m < -0,5 \end{cases}$ vaayj $m < \frac{-1}{2}$ thỏa Ycbt.

Chọn D

Câu 70: **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in [1513;2019)$. **B.** $m_0 \in [1009;1513)$. **C.** $m_0 \in [505;1009)$. **D.** $m_0 \in [1;505)$.

Lời giải

Chọn B

Phân tích:

+ Bài toán nếu thế vào: $P(m) = 2^m - 2^{-m} + 2^{2m-2^{12}} - 2^{-2m+2^{12}} < 0$

+ Biểu thức $P(m)$ *khá phức tạp. Điều này chứng tỏ bài toán cho hàm số* $y = f(x)$ *chắc chắn có tính chất đặc biệt.*

+ Nhìn yếu tố xuất hiện hàm số $y = f(x) = 2^x - 2^{-x}$. *Ta có hàm số lẻ và tăng trên* $\mathbb{R}$. *Đây chính là chìa khóa ta giải quyết bài toán.*

Lời giải

Ta có hàm số $y = f(x) = 2^x - 2^{-x}$ hàm số lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f\left(2m - 2^{12}\right) < -f(m) = f(-m) \Leftrightarrow 2m - 2^{12} < m \Leftrightarrow m < \frac{2^{12}}{3}$

m nguyên lớn nhất là: $m = \left[\frac{2^{12}}{3}\right] = 1365$

Bài toán tổng quát:

Giải bất phương trình: $f\left(u\left(x,m\right)\right)+f\left(v\left(x,m\right)\right)<0$ *(*)*

Với $f(x)$ *là hàm số lẻ và tăng (hoặc giảm) trên tập* D_f

Con đường sáng tạo bài toán: (VD: Một vài hàm đặc trưng f)

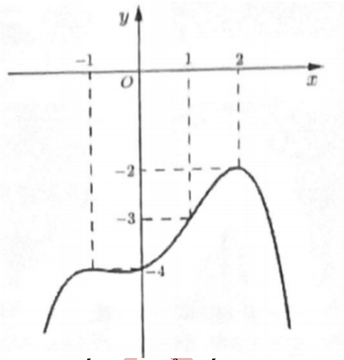
- $f(x)=a^x-a^{-x}\ ,0<a\neq 1$
- $f\left(x\right)=x^3+ax\ ,a>0$
- $f\left(x\right)=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$

....

Ta có (*) $\Leftrightarrow u\left(x,m\right)<-v\left(x,m\right)$

Đây là nguồn gốc chúng ta tạo lớp bài toán này.

Câu 71: **(Sở Phú Thọ)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$9.6^{f(x)}+\left(4-f^2\left(x\right)\right).9^{f(x)}\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$

đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

$$9.6^{f(x)}+\left(4-f^2\left(x\right)\right).9^{f(x)}\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}\ (*)$$

Đặt $t=f\left(x\right)\in\left(-\infty;-2\right]$.

Bất phương trình (*) theo t : $9.6^t+\left(4-t^2\right).9^t\leq\left(-m^2+5m\right).4^t$

$$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(4-t^2\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\leq -m^2+5m\ (**)$$

Đặt: $g\left(t\right)=9.\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(4-t^2\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}=\left(\frac{3}{2}\right)^t.\left[9+\left(4-t^2\right).\left(\frac{3}{2}\right)^t\right]$, $t\in\left(-\infty;-2\right]$.

Xét hàm số: $h\left(t\right)=9+\left(4-t^2\right).\left(\frac{3}{2}\right)^t$ với $t\in\left(-\infty;-2\right]$

$$h'\left(t\right)=-2t.\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(4-t^2\right).\left(\frac{3}{2}\right)^t.\ln\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^t.\left[-2t+\left(4-t^2\right).\ln\frac{3}{2}\right].$$

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1+\sqrt{1+4\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)^2}}{\ln\dfrac{3}{2}}>-2 \\ t=\dfrac{-1-\sqrt{1+4\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)^2}}{\ln\dfrac{3}{2}}<-2 \end{array}\right.$$

Ta có BBT:

t	$-\infty$		$\dfrac{-1-\sqrt{1+4\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)^2}}{\ln\dfrac{3}{2}}$		-2
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	9	$\searrow$		$\nearrow$	9

Từ BBT $\Rightarrow$ $h(t)\le 9\ \forall t\in(-\infty;-2]$ (1).

Vì $t\in(-\infty;-2]\Rightarrow 0<\left(\dfrac{3}{2}\right)^t\le\dfrac{4}{9}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $g(t)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t.\left[9+(4-t^2).\left(\dfrac{3}{2}\right)^t\right]\le 4\ \forall t\in(-\infty;-2]$

$\Rightarrow \max\limits_{(-\infty;-2]} g(t)=4$. (Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=-2$).

Bất phương trình (*) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Bất phương trình (**) đúng với $\forall t\in(-\infty;-2]$ $\Leftrightarrow -m^2+5m\ge\max\limits_{(-\infty;-2]} g(t)\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên của m là: $1+2+3+4=10$.

Cách 2

Bất phương trình: $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}$ (1)

Từ đồ thị suy ra $f(x)\le -2\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}=4\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác, do $f(x)\le -2\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 4-f^2(x)\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\left(4-f^2(x)\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $g(x)=9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 4\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \max_{\mathbb{R}} g(x)=4$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -m^2+5m\ge \max_{\mathbb{R}} g(x)$

$\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4\Leftrightarrow 1\le m\le 4\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m là $1+2+3+4=10$.

Câu 72: **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=e^{f(1+x-x^2)}$, tập nghiệm của bất phương trình $g'(x)>0$ là

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(1-2x).f'\left(1+x-x^2\right).e^{f\left(1+x-x^2\right)},\forall x\in\mathbb{R}$

Yêu cầu của bài toán $g'(x)>0\Leftrightarrow(1-2x)f'\left(1+x-x^2\right)e^{f\left(1+x-x^2\right)}>0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}1-2x>0\\ f'\left(1+x-x^2\right)>0\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}1-2x<0\\ f'\left(1+x-x^2\right)<0\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Xét trường hợp 1: $\begin{cases}1-2x>0\\ f'\left(1+x-x^2\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ -1<1+x-x^2<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ x^2-x-2<0\\ x^2-x+2>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ -1<x<2\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{2}$.

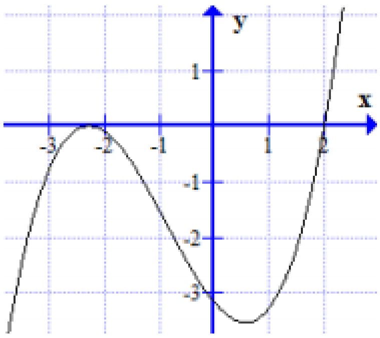
Xét trường hợp 2: $\begin{cases}1-2x<0\\ f'\left(1+x-x^2\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}-x^2+x+1<-1\\ -x^2+x+1>3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x^2-x-2>0\\ -x^2+x-2>0\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ x^2-x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Kết hợp hai trường hợp ta được $\left[\begin{array}{l} -1 < x < \dfrac{1}{2} \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(-1;\dfrac{1}{2}\right) \cup (2;+\infty)$.

Câu 73: **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x\left(m - 2^{f(\sin x)}\right) + 2.2^{f(\sin x)} + m^2 - 3\right].\left(2^{f(x)} - 1\right) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét phương trình $2^{f(x)} - 1 = 0$ có một nghiệm đơn $x = 2$ nên biểu thức sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 2$. Do đó để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $x\left(m - 2^{f(\sin x)}\right) + 2.2^{f(\sin x)} + m^2 - 3 = 0$ phải có một nghiệm $x = 2 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Thử lại với $m = 1$ ta có:

$\left[x\left(1 - 2^{f(\sin x)}\right) + 2.2^{f(\sin x)} - 2\right]\left(2^{f(x)} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)\left(1 - 2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)} - 1\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2^{f(\sin x)} \leq 1 \Leftrightarrow f(\sin x) \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 2$ luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn ycbt.

Thử lại với $m = -3$ ta có:

$\left[x\left(-3 - 2^{f(\sin x)}\right) + 2.2^{f(\sin x)} + 6\right]\left(2^{f(x)} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 2)\left(3 + 2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)} - 1\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2^{f(\sin x)} \leq 0$ (vô lý) $\Rightarrow m = -3$ không thỏa mãn ycbt.

Vậy $S = \{1\}$. Số tập con của S là 2 đó là $\{1\}$ và $\varnothing$.

Câu 74: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m > f(-1) - \dfrac{1}{e}$. **B.** $m \geq f(1) - e$. **C.** $m > f(1) - e$. **D.** $m \geq f(-1) - \dfrac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có: $m > f\left(x\right)-\mathrm{e}^{x}=g\left(x\right),\forall x\in\left(-1;1\right)\,(*)$.

Xét hàm số $g\left(x\right)$ trên $\left(-1;1\right)$ ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-\mathrm{e}^{x}$. Ta có hàm số $y=\mathrm{e}^{x}$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ nên: $\mathrm{e}^{x}>\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0,\forall x\in\left(-1;1\right)$. Mà $f'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(-1;1\right)$.

Từ đó suy ra $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-\mathrm{e}^{x}<0,\forall x\in\left(-1;1\right)$. Nghĩa là hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có: $m\geq g\left(-1\right)\Leftrightarrow m\geq f\left(-1\right)-\dfrac{1}{e}$.

Câu 75: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Bất phương trình $f(x)<3\mathrm{e}^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in\left(-2;2\right)$ khi và chỉ khi:

A. $m\geq f\left(-2\right)-3$. **B.** $m>f\left(2\right)-3e^{4}$. **C.** $m\geq f\left(2\right)-3e^{4}$. **D.** $m>f\left(-2\right)-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)<3\mathrm{e}^{x+2}+m\Leftrightarrow f(x)-3\mathrm{e}^{x+2}<m$.

Đặt $h\left(x\right)=f(x)-3\mathrm{e}^{x+2}\Rightarrow h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-3e^{x+2}$.

Vì $\forall x\in\left(-2;2\right), f'\left(x\right)\leq 3$ và $x\in\left(-2;2\right)\Rightarrow x+2\in\left(0;4\right)\Rightarrow 3e^{x+2}\in\left(3;3e^{4}\right)$

Nên $h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-3e^{x+2}<0,\forall x\in\left(-2;2\right)\Rightarrow f(2)-3e^{4}<h\left(x\right)<f(-2)-3$.

Vậy bất phương trình $f\left(x\right)<3e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in\left(-2;2\right)$ khi và chỉ khi $m>f\left(2\right)-3e^{4}$.

Câu 76: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f\left(x\right)>2^{\cos x}+3m$ đúng với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\leq\dfrac{1}{3}\left[f\left(0\right)-2\right]$. **B.** $m<\dfrac{1}{3}\left[f\left(0\right)-2\right]$. **C.** $m\leq\dfrac{1}{3}\left[f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-1\right]$. **D.** $m<\dfrac{1}{3}\left[f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-1\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right)>2^{\cos x}+3m\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-2^{\cos x}>3m\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

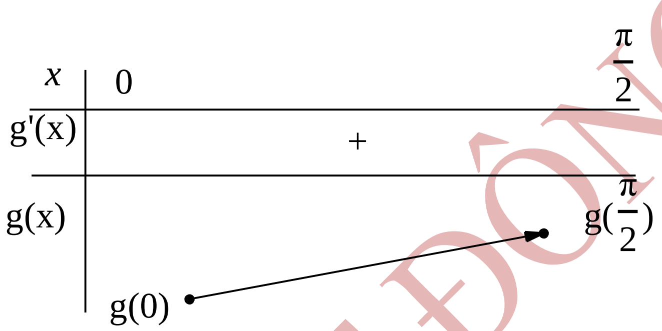
Xét hàm $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2^{\cos x}$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+2^{\cos x}\sin x.\ln 2$

Vì $f'\left(x\right)\geq 1\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\sin x>0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 2^{\cos x}\sin x.\ln 2>0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên ta suy ra

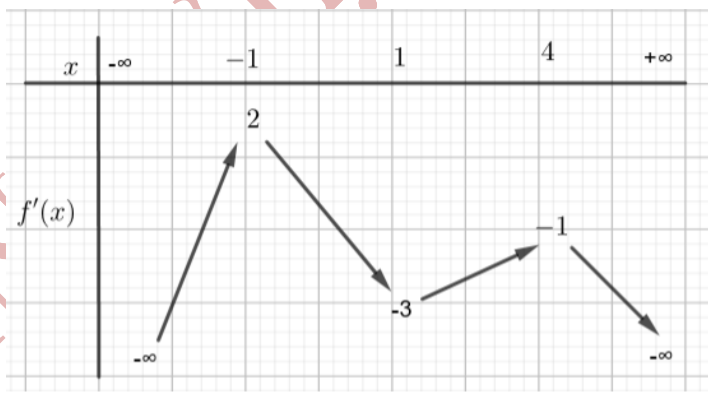
$g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+2^{\cos x}\sin x.\ln 2>0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vậy ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có ycbt $\Leftrightarrow g\left(0\right)\geq 3m\Leftrightarrow 3m\leq f\left(0\right)-2\Leftrightarrow m\leq\dfrac{1}{3}\left[f\left(0\right)-2\right]$.

Câu 77: **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điều kiện của m để bất phương trình $f(x+2)-xe^x<m$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x\in\left[-1;1\right]$.

A. $m>f(1)+\dfrac{1}{e}$. **B.** $m>f(3)+2e$. **C.** $m>f(-1)+\dfrac{1}{e}$. **D.** $m>f(3)-2e$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(x+2)-xe^x$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$

Ta có: $g'(x)=f'(x+2)-(x+1)e^x$

Với mọi $x\in\left[-1;1\right]$, ta có:

$0\leq(x+1)e^x$

Và $1\leq x+2\leq 3$ suy ra $f'(x+2)<-1$

Do đó, ta có $g'(x)<0,\forall x\in[-1;1]$. Vì vậy $g(1)\le g(x)\le g(-1)=f(1)+\frac{1}{e},\forall x\in[-1;1]$.

Suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$ khi và chỉ khi

$$m>\max_{[-1;1]} g(x)\Rightarrow m>f(1)+\frac{1}{e}$$

Câu 78: **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(0)-1$. **B.** $m>f(-1)-e$. **C.** $m>f(0)-1$. **D.** $m\ge f(-1)-e$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)<e^{x^2}+m\Leftrightarrow f(x)-e^{x^2}<m$

Xét hàm số: $g(x)=f(x)-e^{x^2}$; $g'(x)=f'(x)-2xe^{x^2}$.

Trên khoảng $(-1;0)$ ta có $\begin{cases}f'(x)>0\\-2x>0\end{cases}\Rightarrow g'(x)>0,\ \forall x\in(-1;0)$.

Trên khoảng $(0;1)$ ta có $\begin{cases}f'(x)<0\\-2x<0\end{cases}\Rightarrow g'(x)<0,\ \forall x\in(0;1)$.

Tại điểm $x=0$ ta có $\begin{cases}f'(x)=0\\-2xe^{x^2}=0\end{cases}\Rightarrow g'(x)=0$.

Suy ra bảng biến thiên của $g'(x)$:

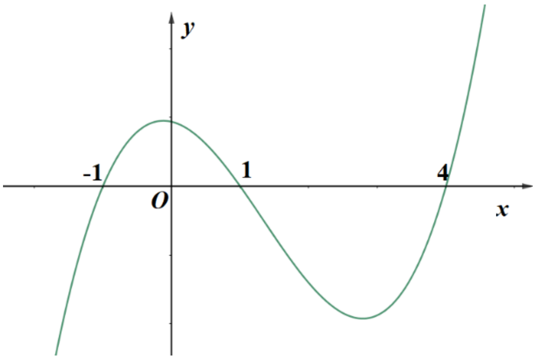
x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f(0)-1$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(-1;1)} g(x)=f(0)-1$.

Do đó bất phương trình $m>g(x)$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

$m>\max_{(-1;1)} g(x)=f(0)-1$.

Câu 79: **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Bất phương trình $f(1-x)<e^{x^2}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi



A. $m \geq f(1)-1$. **B.** $m \geq f(1)-e^2$. **C.** $m > f(-1)-e^2$. **D.** $m > f(1)-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(1-x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ tương đương với $m > f(1-x) - e^{x^2}$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$. Xét $g(x) = f(1-x) - e^{x^2}$ với $x \in (-1;1)$.

Ta có $g'(x) = -f'(1-x) - 2x.e^{x^2} = -\left(f'(1-x) + 2xe^{x}\right)$.

Nhận xét:

+) Với $-1 < x < 0$ thì $1 < 1-x < 2$ nên $f'(1-x) < 0$ và $xe^{x^2} < 0$ suy ra $g'(x) > 0$.

+) Với $0 < x < 1$ thì $0 < 1-x < 1$ nên $f'(1-x) > 0$ và $xe^{x^2} > 0$ suy ra $g'(x) < 0$.

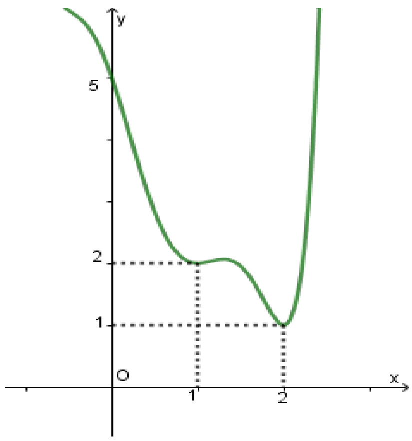
+) Với $x = 0$ thì $1-x = 1$ nên $f'(1-x) = 0$ và $xe^{x^2} = 0$ suy ra $g'(x) = 0$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$f(2)-e$	$\nearrow$	$f(1)-1$	$\searrow$	$f(0)-e$

Để $m > f(1-x) - e^{x^2}$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;1)$ suy ra $m > f(1) - 1$.

Câu 80: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình

$3.12^{f(x)}+\left(f^2(x)-1\right).16^{f(x)}\ge\left(m^2+3m\right).3^{2f(x)}$ có nghiệm với mọi x?

A. 5. **B.** Vô số. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

$3.12^{f(x)}+\left(f^2(x)-1\right).16^{f(x)}\ge\left(m^2+3m\right).3^{2f(x)}$, $\forall x$

$\Leftrightarrow\left[f^2(x)-1\right]\left(\frac{16}{9}\right)^{f(x)}+3.\left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)}\ge m^2+3m$, $\forall x$. (1)

Mà $f(x)\ge1$, $\forall x$ nên $\left[f^2(x)-1\right]\left(\frac{16}{9}\right)^{f(x)}\ge0$, $\forall x$ và $3.\left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)}\ge4$, $\forall x$.

Đặt $h(x)=\left[f^2(x)-1\right]\left(\frac{16}{9}\right)^{f(x)}+3\left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)}$.

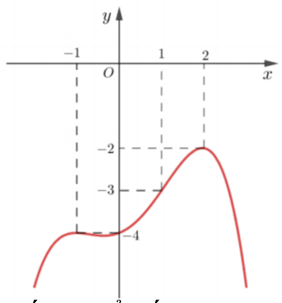
Mà $h(x)\ge4$, $\forall x$.

Suy ra $\min\limits_{\mathbb{R}}h(x)=4\Leftrightarrow x=2$.

Khi đó $m^2+3m\le h(x)$, $\forall x\Leftrightarrow m^2+3m\le\min\limits_{\mathbb{R}}h(x)\Leftrightarrow m^2+3m\le4\Leftrightarrow-4\le m\le1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$.

Câu 81: **(Sở Phú Thọ)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



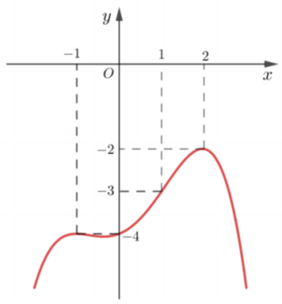
Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A



Từ đồ thị ta suy ra $f(x)\le-2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Từ bất phương trình $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$

nhân hai vế của bất phương trình với $\frac{1}{4^{f(x)}}$

ta có $9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le -m^2+5m$.

Đặt $t=f(x)\ (t\le -2)\Rightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{t}+\left(4-t^2\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\le -m^2+5m$.

Đặt $g(t)=9.\left(\frac{3}{2}\right)^{t}+\left(4-t^2\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\Rightarrow -m^2+5m\ge \max\limits_{(-\infty;-2]} g(t)$.

Tìm $\max\limits_{(-\infty;-2]} g(t)$ như sau :

Với $t\le -2\Rightarrow 4-t^2\le 0\Rightarrow \left(4-t^2\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\le 0$.

$\left(\frac{3}{2}\right)^{t}\le \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{9}\Rightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{t}\le 9.\frac{4}{9}=4$.

Suy ra $g(t)=9.\left(\frac{3}{2}\right)^{t}+\left(4-t^2\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\le 9.\frac{4}{9}+0=4$.

$\Rightarrow \max\limits_{(-\infty;-2]} g(t)=g(-2)=4$.

Khi đó $-m^2+5m\ge g(t)\Leftrightarrow -m^2+5m\ge \max\limits_{(-\infty;-2]} g(t)\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4\Leftrightarrow -m^2+5m-4\ge 0$

$\Leftrightarrow 1\le m\le 4$, vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $\left[\begin{array}{l} m=1\\ m=2\\ m=3\\ m=4\end{array}\right.$

Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $1+2+3+4=10$.

Sai lầm học sinh mắc phải

Nhìn đồ thị $y=f(x)$ phức tạp nên dễ tìm sai miền giá trị.

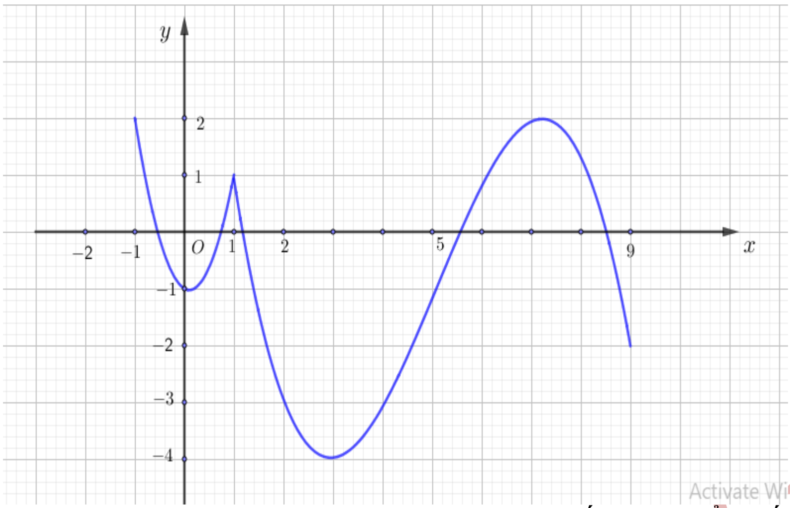
Đưa bất phương trình về phương trình bậc hai với $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}$ thì bài toán tìm max sẽ phức tạp hơn.

Khi giải bài toán tìm max, ta hay nghĩ đến xét hàm số ở vế trái và dùng công cụ đạo hàm. Ở bài toán này cách đó khá dài, không phù hợp với trắc nghiệm.

Khai thác bài toán tương tự

Mấu chốt ở đây là miền giá trị của hàm $f(x)$ và cơ số $\frac{3}{2}$, ta biến đổi một chút các con số đó ta sẽ có vô vàn bài toán mới.

Câu 82: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\geq\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc đoạn $[-1;9]$?

A. 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta suy ra $-4\leq f(x)\leq 2\quad\forall x\in[-1;9]$.

Đặt $t=f(x)$, $t\in[-4;2]$.

Ta tìm m sao cho bất phương trình $16.3^t-\left[t^2+2t-8\right].4^t\geq\left(m^2-3m\right).6^t$ đúng với $\forall t\in[-4;2]$

$bpt\Leftrightarrow\dfrac{16}{2^t}-\left[t^2+2t-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\geq m^2-3m$ với $\forall t\in[-4;2]$ (*).

Ta có $\dfrac{16}{2^t}\geq 4,\ \forall t\in[-4;2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t=2$.

Lại có $t^2+2t-8\leq 0$ với $\forall t\in[-4;2]$.

Do đó $\left(t^2+2t-8\right).\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\leq 0,\ \forall t\in[-4;2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t=2\vee t=-4$.

Như vậy $\dfrac{16}{2^t}-\left[t^2+2t-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\geq 4\ \forall t\in[4;-2]$. Mà $\dfrac{16}{2^t}-\left[t^2+2t-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\geq m^2-3m$ với $\forall t\in[-4;2]$.

Suy ra $m^2-3m\leq 4\Leftrightarrow -1\leq m\leq 4$. Như vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.