PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I -PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1 - Phương trình logarit cơ bản

Với a > 0, a ≠ 1: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

2 - Một số phương pháp giải phương trình logarit

a) Đưa về cùng cơ số

Với a > 0, a ≠ 1: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \quad (\text{hay } g(x) > 0) \end{cases}$

b) Mũ hoá

Với a > 0, a ≠ 1: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^b$

c) Đặt ẩn phụ

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

e) Đưa về phương trình đặc biệt

f) Phương pháp đối lập

Chú ý:

- *Khi giải phương trình logarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.*
- *Với a, b, c > 0 và a, b, c ≠ 1:* $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

- Khi giải các bất phương trình logarit ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số logarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình logarit:
  – Đưa về cùng cơ số.
  – Đặt ẩn phụ.
  – ….

Chú ý: *Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:*

$\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0$; $\dfrac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$

III - HỆ MŨ-LÔGARIT

Khi giải hệ phương trình mũ và logarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng đại số.
- Phương pháp đặt ẩn phụ.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I - PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Câu 1: Biết phương trình $\log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $a + b$?

A. 5 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

$$\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow \log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

Đk: $\begin{cases}x>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

Pt $\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)-\log_5 x=\log_3(x-1)^2-\log_3 4x$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)+\log_3 4x=\log_5 x+\log_3(x-1)^2 \quad (1)$

Đặt $t=2\sqrt{x}+1\Rightarrow 4x=\left(t-1\right)^2$

(1) có dạng $\log_5 t+\log_3(t-1)^2=\log_5 x+\log_3(x-1)^2 \quad (2)$

Xét $f(y)=\log_5 y+\log_3(y-1)^2$, do $x>1\Rightarrow t>3\Rightarrow y>1$.

Xét $y>1$: $f'(y)=\dfrac{1}{y\ln 5}+\dfrac{1}{(y-1)^2\ln 3}.2(y-1)>0$

$\Rightarrow f(y)$ là hàm đồng biến trên miền $(1;+\infty)$

(2) có dạng $f(t)=f(x)\Leftrightarrow t=x\Leftrightarrow x=2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1+\sqrt{2}\\ \sqrt{x}=1-\sqrt{2}\quad (\text{vn})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3+2\sqrt{2}\ (tm)$.

Vậy $x=3+2\sqrt{2}$.

Chọn A

Câu 2: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$

A. 1 nghiệm **B.** 2 nghiệm **C.** 3 nghiệm **D.** Vô nghiệm

Lời giải

$\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$ (2) Điều kiện: $\begin{cases}x+1\neq 0\\4-x>0\\4+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<x<4\\x\neq -1\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow \log_2|x+1|+2=\log_2(4-x)+\log_2(4+x)\Leftrightarrow \log_2|x+1|+2=\log_2\left(16-x^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1|=\log_2\left(16-x^2\right)\Leftrightarrow 4|x+1|=16-x^2$

+ Với $-1<x<4$ ta có phương trình $x^2+4x-12=0\,(3)$; $(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-6\ (\text{loại})\end{array}\right.$

+ Với $-4<x<-1$ ta có phương trình $x^2-4x-20=0$ (4); $(4)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{24}\\x=2+\sqrt{24}\ (\text{loại})\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2$ hoặc $x=2\left(1-\sqrt{6}\right)$, chọn B

Câu 3: Phương trình $\log_3\left(x^2+x+1\right)=x(2-x)+\log_3 x$ có bao nhiêu nghiệm

A. 1 nghiệm **B.** 2 nghiệm **C.** 3 nghiệm **D.** Vô nghiệm

Chọn A

Lời giải

điều kiện x > 0

Phương trình tương đương với $\log_3\left(\dfrac{x^2+x+1}{x}\right)=2x-x^2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Ta có $2x-x^2=1-(x-1)^2\le 1$

Và $\log_3\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)=\log_3\left(x+\frac{1}{x}+1\right)=\log_3\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+3\right)\ge\log_3 3=1$

Do đó $\log_3\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)=2x-x^2\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0\\ \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Câu 4: Cho phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6};\frac{9\pi}{2}\right)$

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Điều kiện $\sin x>0,\cos x>0$. Đặt $u=\log_2(\cos x)$ khi đó $\begin{cases}\cot^2 x=3^u\\ \cos x=2^u\end{cases}$

Vì $\cot^2 x=\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$ suy ra $\frac{(2^u)^2}{1-(2^u)^2}=3^u\Leftrightarrow f(u)=\left(\frac{4}{3}\right)^u+4^u-1=0$

$f'(u)=\left(\frac{4}{3}\right)^u\ln\left(\frac{4}{3}\right)+4^u\ln 4>0,\forall u\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số f(u) đồng biến trên R, suy ra phương trình $f(u)=0$ có nhiều nhất một nghiệm, ta thấy $f(-1)=0$ suy ra $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Theo điều kiện ta đặt suy ra nghiệm thỏa mãn là $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$. Khi đó phương trình nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{6};\frac{9\pi}{2}\right)$ là $x=\frac{\pi}{3},x=\frac{7\pi}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6};\frac{9\pi}{2}\right)$.

Chọn C

Câu 5: Tìm số nghiệm của phương trình: $\log_{2x-1}(2x^2+x-1)+\log_{x+1}(2x-1)^2=4\ \ (1)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

ĐK: $\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ x\ne 1\end{cases}$. Phương trình:

$\Leftrightarrow\frac{\log_{x+1}(2x^2+x+1)}{\log_{x+1}(2x-1)}+2\log_{x+1}(2x-1)=4$

$\Leftrightarrow\frac{\log_{x+1}(2x-1)+\log_{x+1}(x+1)}{\log_{x+1}(2x-1)}+2\log_{x+1}(2x-1)=4$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\log_{x+1}(2x-1)}+2\log_{x+1}(2x-1)=4\quad(3)$

Đặt $t=\log_{x+1}(2x-1)$, khi đó (3) viết thành:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

$$2t+\frac{1}{t}-3=0 \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_{x+1}(2x-1)=1 \\ \log_{x+1}(2x-1)=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1=2x-1 \\ \sqrt{x+1}=2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{5}{4} \end{array}\right.$$

Chọn C

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Chọn B

ĐK: $x\neq 0;\ x\neq\sqrt{2}$.

Đặt $t=x^2-\sqrt{2}x \Rightarrow x^2-\sqrt{2}x+2=t+2$

$\Rightarrow \log_3|t|=\log_5(t+2)$.

Đặt $\log_3|t|=\log_5(t+2)=u$

$$\begin{cases} \log_3|t|=u \\ \log_5(t+2)=u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t|=3^u \\ t+2=5^u \end{cases}$$

$\Rightarrow \left|5^u-2\right|=3^u$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u-2=3^u \\ 5^u-2=-3^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u+3^u=2 \\ 3^u+2=5^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 5^u+3^u=2 & (1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^u+2\left(\frac{1}{5}\right)^u=1 & (2) \end{array}\right..$$

- Xét $(1): 5^u+3^u=2$

  Ta thấy $u=0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u=0$ là duy nhất.

  Với $u=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow x^2-\sqrt{2}x+1=0$, phương trình này vô nghiệm.

- Xét $(2): \left(\frac{3}{5}\right)^u+2\left(\frac{1}{5}\right)^u=1$

  Ta thấy $u=1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u=1$ là duy nhất.

  Với $u=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow x^2-\sqrt{2}x-3=0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x\neq 0;\ x\neq\sqrt{2}$.

BÌNH LUẬN:

Cho $f(x)=g(x)(1)$ nếu $f(x), g(x)$ đối nghịch nhau nghiệm ngặt hoặc $g(x)=const$ và $f(x)$ tăng, giảm nghiệm ngặt thì (1) có nghiệm duy nhất.

Câu 7: Biết rằng phương trình $(x-2)^{\log_2[4(x-2)]}=4.(x-2)^3$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1<x_2)$. Tính $2x_1-x_2$.

A. 1. **B.** 3. **C.** -5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

- Điều kiện $x>2$.
- Phương trình thành $(x-2)^{\log_2 4+\log_2(x-2)}=4.(x-2)^3$
- $\Leftrightarrow (x-2)^2.(x-2)^{\log_2(x-2)}=4.(x-2)^3$ hay $(x-2)^{\log_2(x-2)}=4.(x-2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

- Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được $\log_2(x-2).\log_2(x-2)=\log_2[4(x-2)]$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(x-2)=2+\log_2(x-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2(x-2)=-1\\ \log_2(x-2)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}\\ x=6\end{array}\right..$$

- Suy ra $x_1=\dfrac{5}{2}$ và $x_2=6$. Vậy $2x_1-x_2=2.\dfrac{5}{2}-6=-1$.

Câu 8: (Lương Thế Vinh Lần 3) Phương trình $\log_3\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=3x^2-8x+5$ có hai nghiệm là a và $\dfrac{a}{b}$ (với $a,\ b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của b là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}2x-1>0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}.$

Ta có: $\log_3\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=3x^2-8x+5$.

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{2x-1}{(x-1)^2}-1=3x^2-8x+4\Leftrightarrow \log_3\frac{2x-1}{3(x-1)^2}=3(x-1)^2-(2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1)+(2x-1)=\log_3\left(3(x-1)^2\right)+3(x-1)^2\ (1).$$

Xét hàm số: $f(t)=\log_3(t)+t$ với $t>0$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0\ \ \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow f(2x-1)=f\left(3(x-1)^2\right)$.

$$\Leftrightarrow 2x-1=3(x-1)^2\Leftrightarrow 3x^2-8x+4=0 \text{ hay } \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right..$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\dfrac{2}{3}$ suy ra $b=3$.

Câu 9: (ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019) Biết $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+5^{x^2-3x+1}=2$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a-2b$?

A. 5. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của phương trình: $x^2-3x+2\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 2\\ x\leq 1\end{array}\right..$

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+2}$ với $t\geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{(t+2)\ln 3}+2t.5^{t^2-1}\ln 5>0, \forall t\ge 0$.

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà $f(0)=\log_3 2-\dfrac{9}{5}<0$

Do đó phương trình $f(t)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Xét $t=1$ ta có $\log_3(1+2)+5^{1^2-1}-2=0$ (đúng)

Suy ra $t=1$ là nghiệm duy nhất.

$$t=1\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow x_1+2x_2=\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{5}\right).$$

Suy ra $a=9, b=5$. Vậy $a-2b=-1$.

Câu 10: **(Ba Đình Lần2)** Nghiệm dương của phương trình $\log_2\left(\sqrt{2x^2-3x}+1\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x}=2$ có dạng $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}(a,b,c\in\mathbb{N})$. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 20. **B.** 23. **C.** 24. **D.** 42.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $2x^2-3x\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge \dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Ta có: $\log_2\left(\sqrt{2x^2-3x}+1\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x}=2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2-3x}+1\right)+2^{2x^2-3x-1}=2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2-3x}+1\right)=2-2^{2x^2-3x-1}$ (*)

Đặt $t=\sqrt{2x^2-3x}; t\ge 0$. Khi đó phương trình (*) trở thành: $\log_2(t+1)=2-2^{t^2-1}$ (1).

Nhận thấy rằng phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=\log_2(t+1)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$ và $y=2-2^{t^2-1}$ luôn nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t=1$(nhận).

Từ đó ta có phương trình: $\sqrt{2x^2-3x}=1\Leftrightarrow 2x^2-3x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$.

Vậy $a=3; b=17; c=4$. $a+b+c=24$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Câu 11: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Phương trình $\log_2 \frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8} = x^2-4x+3$ có nghiệm các nghiệm $x_1; x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

A. 31 **B.** -31. **C.** 1 **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $3x^2-5x+8>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên đk của phương trình là: $x^2+3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>-1 \end{array}\right.$

$$\log_2 \frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8} = x^2-4x+3$$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+3x+2\right)-\log_2\left(3x^2-5x+8\right)=\frac{1}{2}\left[\left(3x^2-5x+8\right)-\left(x^2+3x+2\right)\right]$.

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+3x+2\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+3x+2\right)=\log_2\left(3x^2-5x+8\right)+\frac{1}{2}\left(3x^2-5x+8\right)$.

Xét hàm số

$f(t)=\log_2 t+\frac{1}{2}t, (t>0)$; $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+\frac{1}{2}>0\ \forall t>0$.

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập $(0;+\infty)$.

Mà phương trình có dạng : $f\left(x^2+3x+2\right)=f\left(3x^2-5x+8\right)$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$\left(3x^2-5x+8\right)=\left(x^2+3x+2\right) \Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ (t/m).

Vậy $A=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-5x_1.x_2=1$.

Câu 12: **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Chọn D

Điều kiện $x>0$

Đặt $t=x+\frac{1}{2x}$, $\left(t\ge\sqrt{2}\right)$.

Phương trình trở thành: $\log_2 t+2^t=5$ (1)

Xét $f\left(t\right)=\log_2 t+2^t$ với $t\ge\sqrt{2}$.

Ta có $f\left(2\right)=5$ nên $x=2$ là một nghiệm của phương trình (1).

$f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 2}+2^t\ln 2>0\ \ \forall t\ge\sqrt{2}$

$\Rightarrow f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ cắt đường thẳng $y=5$ nhiều nhất tại 1 điểm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Vậy $t=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Với $t=2$: $x+\dfrac{1}{2x}=2 \Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0\ (2)$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân bệt và tích tất cả các nghiệm thực của phương trình là $\dfrac{1}{2}$.

Câu 13: Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b}2^{1000}\right)\right)=0$. Giá trị lớn nhất của ab là:

A. 500. **B.** 375. **C.** 250. **D.** 125.

Lời giải

Chọn A

Ta có biến đổi mũ và loagarit

$\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b}2^{1000}\right)\right)=0 \Leftrightarrow \log_{2^a}\left(\log_{2^b}2^{1000}\right)=1 \Leftrightarrow \log_{2^b}2^{1000}=2^a \Leftrightarrow 2^{1000}=2^{b.2^a} \Leftrightarrow b.2^a=1000$

Do a,b là các số nguyên dương nên $1000 \vdots 2^a \Rightarrow a<3$.

+) Nếu $a=3 \Rightarrow b=125 \Rightarrow ab=375$.

+) Nếu $a=2 \Rightarrow b=250 \Rightarrow ab=500$.

+) Nếu $a=1 \Rightarrow b=500 \Rightarrow ab=500$.

Vậy giá trị lớn nhất của ab là 500.

Câu 14: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Biết rằng phương trình $\log_2\left(|2x-1|+m\right)=1+\log_3\left(m+4x-4x^2-1\right)$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(3;6)$. **D.** $m\in(6;9)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\log_2\left(|2x-1|+m\right)=\log_3\left[3\left(m+4x-4x^2-1\right)\right] \Leftrightarrow \log_2\left(|2x-1|+m\right)=\log_3\left[3\left(m-(2x-1)^2\right)\right]$.

Nếu $2x_0-1$ là nghiệm của phương trình thì $-\left(2x_0-1\right)$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì $2x_0-1=-\left(2x_0-1\right) \Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$.

Với $x_0=\dfrac{1}{2}$ thay vào phương trình ta có: $\log_2 m=\log_3 3m=t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=2^t \\ 3m=3^t \end{cases} \Rightarrow 3.2^t=3^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t=3 \Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}3 \Rightarrow m=2^{\log_{\frac{3}{2}}3}\approx 6,54$.

Câu 15: **(CỤM-CHUYÊN-MÔN-HẢI-PHÒNG)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho phương trình $\log_2\dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x-m+2$ có nghiệm?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2x^2-x+1=2\left(x^2-\dfrac{1}{2}x\right)+1=2\left(x^2-2.x.\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\right)+\dfrac{7}{8}=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện để phương trình xác định là $3x^2+3x+m+1>0$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với:

$\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)-\log_2\left(2x^2-x+1\right)=x^2-5x-m+2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+3x^2+3x+m+1=\log_2\left(2x^2-x+1\right)+1+4x^2-2x+2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+3x^2+3x+m+1=\log_2\left(4x^2-2x+2\right)+4x^2-2x+2$ (2)

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2 t+t$ trên $\left(0;+\infty\right)$, ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\quad \forall t\in\left(0;+\infty\right)$, do đó $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ nên $\left(2\right)\Leftrightarrow 3x^2+3x+m+1=4x^2-2x+2\Leftrightarrow m=x^2-5x+1$ (3)

Xét hàm số $\Leftrightarrow f\left(x\right)=x^2-5x+1$, $f'\left(x\right)=2x-5$, $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{21}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy (3) có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge-\dfrac{21}{4}$. khi đó $3x^2+3x+m+1=3x^2+3x+x^2-5x+1+1=4x^2-2x+2=3x^2+\left(x-1\right)^2+1>0$ nên $\left(1\right)$ đúng.

Vậy $m\ge-\dfrac{21}{4}$, mà m là số nguyên âm nên $m\in\left\{-5;-4;-3;-2;-1\right\}$.

Câu 16: (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho phương trình $\log_3^2 x-4\log_3 x+m-3=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_2-81x_1<0$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x-4\log_3 x+m-3=0\quad\left(1\right)$. Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x$ phương trình $\left(1\right)$ trở thành: $t^2-4t+m-3=0\ \left(2\right)$.

Phương trình $\left(1\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình $\left(2\right)$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow 4-m+3>0\Leftrightarrow m<7\ \left(i\right)$.

Gọi $x_1<x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $\left(1\right)$ thì phương trình $\left(2\right)$ có 2 nghiệm tương ứng là $t_1=\log_3 x_1;t_2=\log_3 x_2$. Vì $x_1<x_2$ nên $t_1<t_2$.

Mặt khác, $x_2-81x_1<0\Leftrightarrow 0<x_2<81x_1\Leftrightarrow \log_3 x_2<4+\log_3 x_1$

$\Leftrightarrow t_2<4+t_1\Leftrightarrow 0<t_2-t_1<4$

$\Leftrightarrow \left(t_2-t_1\right)^2<16\Leftrightarrow \left(t_2+t_1\right)^2-4t_1t_2<16$.

$\Leftrightarrow 4^2-4\left(m-3\right)<16\Leftrightarrow m>3\ \left(ii\right)$.

Từ $\left(i\right)$ và $\left(ii\right)$ suy ra $3<m<7$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 17: (SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2\log_2 x^4+\sqrt{2\log_2 x^8}-2m+2018=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;2\right]$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Chọn A

ĐK : $x \neq 0$

$2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8} + 2018 = 2m$.

Đặt $t = \sqrt{\log_2 x}$. Vì $x \in [1;2] \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in [0;1]$.

$\Rightarrow f(t) = 4t^2 + 2t + 1009 = m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$

$f'(t) = 8t + 2 > 0, \forall t \in [0;1]$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(t)$			$+$		
$f(t)$		1009	$\nearrow$	1015	

$\Rightarrow 1009 \le m \le 1015 \Rightarrow S = \{1009;1010;1011;1012;1013;1014;1015\}$.

Số phần tử của S là: 7.

Câu 18: (Hùng Vương Bình Phước) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$. **B.** $m \in (-\infty;0]$. **C.** $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m \in \left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x > 0$.

Cách 1: Ta có: $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 (*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0$

$\Leftrightarrow \log_2{}^2 x + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow m = -\log_2{}^2 x - \log_2 x$.

Đặt $\log_2 x = t$, với $x \in (0;1)$ thì $t < 0$. Phương trình đã cho trở $m = -t^2 - t(**)$.

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1) \Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có nghiệm $t < 0$.

Xét $f(t) = -t^2 - t$ với $t < 0$. Ta có $f'(t) = -2t - 1$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Vậy để phương trình $(**)$ có nghiệm $t < 0$ thì $m \le \frac{1}{4}$ hay $m \in \left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$.

Cách 2: Ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

$4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0(*)\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m=0\Leftrightarrow \log_2^{\,2}x+\log_2 x+m=0$

Đặt $\log_2 x=t$,với $x\in(0;1)$ thì $t<0$. Phương trình đã cho trở $t^2+\text{t}+\text{m}=0$ (**).

Để phương trình $(*)$có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)\Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $t<0\Leftrightarrow\Delta=1-4m\geq 0\Leftrightarrow m\leq\frac{1}{4}$.

Vì khi $\Delta\geq 0$ phương trình (**) có nghiệm $t_1;t_2$ thì theo Định lí Viet $t_1+t_2=-1$ nên luôn có ít nhất một nghiệm âm.

Vậy $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Câu 19: (HSG Bắc Ninh) Cho phương trình $\log_2^{\,2}x-2\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}=m(*)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ m+\log_2 x\geq 0\end{cases}$.

$\log_2^{\,2}x-2\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}=m\Leftrightarrow 4\log_2^{\,2}x-8\log_2 x-4\sqrt{m+\log_2 x}=4m$

$\Leftrightarrow 4\log_2^{\,2}x-4\log_2 x+1=4\sqrt{m+\log_2 x}+4(m+\log_2 x)+1$

$\Leftrightarrow(2\log_2 x-1)^2=\left(2\sqrt{m+\log_2 x}+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{m+\log_2 x}+1=2\log_2 x-1\\ 2\sqrt{m+\log_2 x}+1=-2\log_2 x+1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{m+\log_2 x}=\log_2 x-1\\ \sqrt{m+\log_2 x}=-\log_2 x\end{array}\right.$

* **TH1:** $\sqrt{m+\log_2 x}=-\log_2 x\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x\leq 0\\ m+\log_2 x=\log_2^{\,2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\leq 1\\ \log_2^{\,2}x-\log_2 x-m=0\,(1)\end{cases}$

Đặt: $t=\log_2 x(t\leq 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-t-m=0\Leftrightarrow t^2-t=m(2)$

Đặt: $g(t)=t^2-t(t\in(-\infty;0]$.Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t\leq 0$

Ta có: $g(t)=t^2-t\Rightarrow g'(t)=2t-1<0\forall t\leq 0$

Ta có BBT:

t	$-\infty$		0
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t\leq 0$ thì $m\geq 0$ (*)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

* **TH 2 :** $\sqrt{m+\log_2 x}=\log_2 x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x\ge 1\\ m+\log_2 x=\log_2{}^2 x-2\log_2 x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x\ge 1\\ \log_2{}^2 x-3\log_2 x+1-m=0\,(3)\end{cases}$

Đặt: $t=\log_2 x\,(t\ge 1)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-3t+1-m=0 \Leftrightarrow m=t^2-3t+1\,(4)$

Đặt: $g(t)=t^2-t+1,\ t\in[1;+\infty)$

Ta có: $g(t)=t^2-3t+1 \Rightarrow g'(t)=2t-3$

$g'(t)=0 \Leftrightarrow 2t-3=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}\in[1;+\infty)$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t\ge 1$

Ta có BBT:

t	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t\ge 1$ thì $m\ge -\dfrac{5}{4}$ (**)

Kết hợp (*) và (**), $m\in[-2019;2019] \Rightarrow m\in\{-1;0;1;2;...;2019\}$

Vậy có tất cả 2021 giá trị của m thỏa mãn ycbt

Câu 20: (CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN NĂM 2019) Xác định m để phương trình $2\log_{(m^2+2)}(x-1)=\log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$ có nghiệm

A. $m<1$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $m>1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $0<m^2+2\ne 1\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Phương trình $2\log_{(m^2+2)}(x-1)=\log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-1>0\\ \log_{(m^2+2)}(x-1)^2=\log_{(m^2+2)}(mx^2+1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\ (x-1)^2=mx^2+1\end{cases} \Leftrightarrow m=1-\dfrac{2}{x}$ với $x\in(1;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán trở thành định m để phương trình $m=1-\dfrac{2}{x}$ có nghiệm trên khoảng $(1;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=1-\dfrac{2}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

www.facebook.com/bdbaolong

Ta có $f'(x)=\dfrac{2}{x^2}>0\ \forall x\in(1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $-1<m<1$.

Câu 21: Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2).\log_3 x+3m-1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2=27$.

A. $m=1$.	**B.** $m=\dfrac{4}{3}$.	**C.** $m=25$.	**D.** $m=\dfrac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$\log_3^2 x-(m+2).\log_3 x+3m-1=0$ (1).

Điều kiện xác định: $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x$. Ta có phương trình: $t^2-(m+2)t+3m-1=0$ (2).

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 sao cho $x_1.x_2=27$.

Thì phương trình (2) có 2 nghiệm $t_1;t_2$ thỏa mãn $t_1+t_2=3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ m+2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-8m+8>0\\ m=1\end{cases} \Rightarrow m=1$.

Câu 22: (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x\log_3(x+1)=\log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(-1;0)$.	**B.** $m\in(-2;0)$.	**C.** $m\in(-1;+\infty)$.	**D.** $m\in[-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-1$.

Nhận thấy với $x=0$ thì phương trình đã cho trở thành $0=1$ (vô lí), nên $x=0$ không là nghiệm của phương trình với mọi m.

Xét $-1<x\neq 0$ ta có:

$x\log_3(x+1)=\log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]\Leftrightarrow \log_3(x+1)^x=\log_3\left[3(x+1)^m\right]$

$\Leftrightarrow (x+1)^{x-m}=3\Leftrightarrow x-m=\dfrac{\ln 3}{\ln(x+1)}$

$\Leftrightarrow m=x-\dfrac{\ln 3}{\ln(x+1)}$

Đặt $f(x)=x-\dfrac{\ln 3}{\ln(x+1)}$ với $-1<x\neq 0$

$\Rightarrow f'(x)=1+\dfrac{\ln 3}{(x+1)\ln^2(x+1)}>0,\ \forall x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ta lập được bảng biến thiên:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

x	-1			0			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình $m = x - \dfrac{\ln 3}{\ln(x+1)}$ có hai nghiệm thực phân biệt khi $m \in (-1; +\infty)$.

Câu 23: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20;20)$ để phương trình có nghiệm.

A. 15. **B.** 14. **C.** 19. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

• Đặt $5^x + m = \log_5(x-m) = t$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5^x + m = t \\ \log_5(x-m) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + m = t \\ x - m = 5^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + m = t \\ 5^t + m = x \end{cases}$.

Trừ hai vế ta được: $5^x - 5^t = t - x \Leftrightarrow 5^x + x = 5^t + t \Leftrightarrow f(x) = f(t)$.

• Với $f(x) = 5^x + x \Rightarrow f'(x) = 5^x.\ln 5 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = f(t)$ có nghiệm duy nhất $x = t$.

• Với $x = t$ ta có $5^x + m = x \Leftrightarrow 5^x - x = -m$.

Xét hàm số $g(x) = 5^x - x$.

$g'(x) = 5^x.\ln 5 - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5^x = \dfrac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow x = \log_5 \dfrac{1}{\ln 5}$.

x	$-\infty$		$\log_5 \dfrac{1}{\ln 5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\ln 5} - \log_5 \dfrac{1}{\ln 5}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ với $-m > \dfrac{1}{\ln 5} - \log_5 \dfrac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{\ln 5} + \log_5 \dfrac{1}{\ln 5}$.

Do m là số nguyên và $m \in (-20;20)$ nên $m \in \{-19; -18; ...; -1\}$.

Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 24: (Nguyễn Khuyến) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. **B.** 21. **C.** 9. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Ta có $5^x + m = \log_5(x-m)$ $(*)$. Đặt $t = 5^x + m$.

Suy ra $(*)$ $\Leftrightarrow t = \log_5(x-m) \Leftrightarrow x - m = 5^t \Leftrightarrow x = 5^t + m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t = 5^x + m \\ x = 5^t + m \end{cases} \Rightarrow t - x = 5^x - 5^t \Leftrightarrow x + 5^x = t + 5^t$ (1).

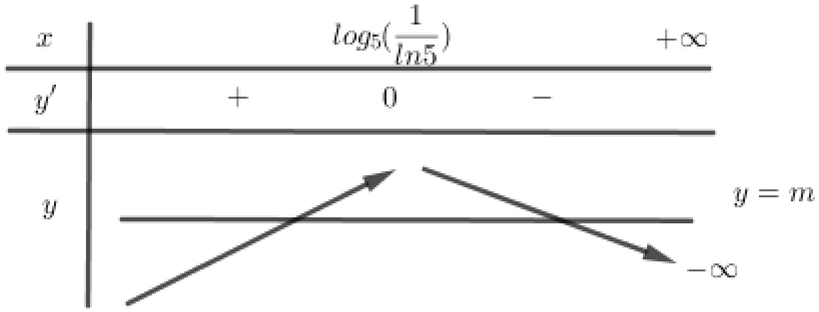
Xét hàm số $f(u) = u + 5^u$ có $f'(u) = 1 + 5^u.\ln 5 > 0$, $\forall u$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow x = t$. Khi đó ta được $x = 5^x + m \Leftrightarrow x - 5^x = m$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - 5^x$ và đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng trục hoành.

Xét $y = x - 5^x$ có $y' = 1 - 5^x \ln 5$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \le f\left(\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)\right) \in (-1;0)$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-20;20) \end{cases}$ nên $m \in \{-19;-18;...;-1\}$. Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 25: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho $0 \le x \le 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$ .Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên ?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0 \le x \le 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa .

Ta có $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 3y - 2^{3y}$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2^{\log_2(x+1)} = 3y + 2^{3y}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x + 1 = 2^{3y}$

$\Leftrightarrow y = \log_8(x+1)$.

Ta có $0 \le x \le 2020$ nên $1 \le x + 1 \le 2021$ suy ra $0 \le \log_8(x+1) \le \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ nên nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0;0)$, $(7;1)$,$(63;2)$,$(511;3)$.

www.facebook.com/bdbaolong

Câu 26: (Đặng Thành Nam Đề 9) Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-200;200)$ để phương trình $e^x+e^{x+a}=\ln(1+x)-\ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 399. **B.** 199. **C.** 200. **D.** 398.

Lời giải

Chọn B

Vì $e^x+e^{x+a}>0,\forall x$ nên $\ln(1+x)>\ln(1+x+a)\Leftrightarrow 1+x>1+x+a\Leftrightarrow a<0.$

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases}1+x>0\\1+x+a>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-1-a,\forall a<0.$

Phương trình tương đương với: $e^x+e^{x+1}-\ln(x+1)+\ln(x+a+1)=0.$

Xét hàm số $f(x)=e^x+e^{x+a}-\ln(x+1)+\ln(x+a+1).$

Ta có

$$f'(x)=e^x+e^{x+a}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+a+1}=e^x+e^{x+a}-\frac{a}{(x+1)(x+a+1)}>0\ \forall a<0,\forall x>-a-1.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(-1-a;+\infty)$ với $\forall a<0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-(a+1)^+}f(x)=-\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-1-a$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow f(x)=0$ luôn có một nghiệm thực duy nhất với mọi $a<0$.

Vì $a\in(-200;200)$ nên có 199 số a nguyên thỏa mãn.

Câu 27: (Sở Phú Thọ) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=(x+3y-9)-(3x+5y-10)$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}+3x+5y-10=e^{x+3y-9}+x+3y-9$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t,\ t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=e^t+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(t)=0$ có nghiệm là duy nhất. Tức là:

$3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thay vào phương trình thứ 2, ta được:

$\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$

$\Leftrightarrow\log_5^2(x+5)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0\ (1)$.

Đặt $\log_5(x+5)=t\ (t\in\mathbb{R},\ x>-5)$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$t^2-(m+6)t+m^2+9=0\ (2)$.

www.facebook.com/bdbaolong

Tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm, tức là:

$\Delta=(m+6)^2-4(m^2+9)\ge 0 \Leftrightarrow -3m^2+12m\ge 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 4$.

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho a, b là các số dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right)+\frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$, với m, n là các số nguyên dương. Tính $S=m+2n$.

A. 22209. **B.** 20190. **C.** 2019. **D.** 14133.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0 \Leftrightarrow 5\frac{\ln x}{\ln a}.\frac{\ln x}{\ln b}-4\frac{\ln x}{\ln a}-3\frac{\ln x}{\ln b}-2019=0$.

Đặt $t=\ln x$. Ta được phương trình: $\frac{5t^2}{\ln a.\ln b}-\left(\frac{3\ln a+4\ln b}{\ln a.\ln b}\right)t-2019=0$ (*)

Do $a, b>1 \Rightarrow \ln a.\ln b>0$. Vậy (*) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2. Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Mặt khác ta có: $t_1+t_2=\frac{3\ln a+4\ln b}{5}=\frac{3\ln a+4\ln(2019-a)}{5}$.

$\Rightarrow \ln(x_1.x_2)=\ln x_1+\ln x_2=t_1+t_2=\frac{3\ln a+4\ln(2019-a)}{5}$

Vì $a>1$, $b>1$ và $a+b=2019$ nên $a\in(1;2018)$.

Xét hàm số $f(u)=\frac{3\ln u+4\ln(2019-u)}{5}$ trên $(1;2018)$.

Ta có $f'(u)=\frac{6057-7u}{5u(2019-u)} \Rightarrow f'(u)=0 \Leftrightarrow u=\frac{6057}{7}$

Bảng biến thiên:

u	1		$\frac{6057}{7}$		2018
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$	$\frac{3}{5}\ln\frac{6057}{7}+\frac{4}{5}\ln\frac{8076}{7}$	$\searrow$	

Vậy giá trị lớn nhất của $\ln(x_1x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\frac{6057}{7}+\frac{4}{5}\ln\frac{8076}{7}$.

Do đó $m=6075$, $n=8076$ hay $S=m+2n=22209$.

Câu 29: Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m\cdot\ln(1-2^x)-x=m$ có nghiệm thuộc $(-\infty;0)$ là

A. $(\ln 2;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(1;e)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1-2^x>0 \Leftrightarrow x<0$.

FILE WORD ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/hdbaolong

Phương trình đã cho tương đương với: $m=\dfrac{x}{\ln\left(1-2^x\right)-1}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln\left(1-2^x\right)-1}$ với $x<0$. Có $f'=\dfrac{\ln\left(1-2^x\right)-1-x.\dfrac{-2^x.\ln 2}{1-2^x}}{\left(\ln\left(1-2^x\right)-1\right)^2}$

$=\dfrac{\left(1-2^x\right)\ln\left(1-2^x\right)-\left(1-2^x\right)1+x.2^x.\ln 2}{\left(1-2^x\right)\left(\ln\left(1-2^x\right)-1\right)^2}$. Vì $x<0$ nên $0<1-2^x<1$, do đó $f'\left(x\right)<0\ \ \forall x<0$.

Vậy $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\ 0\right)$.

Mặt khác, dễ thấy $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=0$. Ta có BBT sau:

x	$-\infty$		0
$f'\left(x\right)$		$-$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$		0

Vậy phương trình có nghiệm khi $m>0$.

Câu 30: (Đặng Thành Nam Đề 17) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2\left(2x+m\right)-2\log_2 x=x^2-4x-2m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\2x+m>0\end{cases}$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$\log_2(2x+m)-\log_2 x^2=x^2-4x-2m-1$.

$\Leftrightarrow \log_2 x^2+x^2=\log_2\left(2x+m\right)+4x+2m+1$.

$\Leftrightarrow \log_2 x^2+x^2=\log_2(4x+2m)+4x+2m\ \ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $D=(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \forall t>0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên D.

Suy ra phương trình (1) tương đương với phương trình: $x^2=4x+2m \Leftrightarrow x^2-4x-2m=0\ \ (2)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+2m>0\\4>0\\-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\m<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<0.$

Vậy có duy nhất số nguyên $m=-1$.

Câu 31: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5}=\log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6}\le m\le\sqrt{6}$. **B.** $-5\le m\le 5$. **C.** $5-\sqrt{6}\le m\le 5+\sqrt{6}$. **D.** $-\sqrt{6}\le m\le 5$.

www.facebook.com/bdbaolong

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5}=\log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}}{3^{|m|+5}}=\dfrac{\ln\left(|m|+5\right)}{\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}.\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)=3^{|m|+5}.\ln\left(|m|+5\right)$

Xét $f\left(t\right)=\ln\left(t\right).3^t,\forall t\ge 5$

$f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t}3^t+\ln\left(t\right)3^t\ln\left(3\right)>0,\forall t\ge 5$

Vậy hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến .

$f\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)=f\left(|m|+5\right)$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{5}\cos x+10=|m|+5$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{5}\cos x+5=|m|$

Mà $-\sqrt{6}\le \sin x+\sqrt{5}\cos x\le \sqrt{6}$

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có $5-\sqrt{6}\le m\le 5+\sqrt{6}$

Câu 32: (Sở Bắc Ninh) Cho phương trình $m\ln^2\left(x+1\right)-\left(x+2-m\right)\ln\left(x+1\right)-x-2=0$ $\left(1\right)$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $0<x_1<2<4<x_2$ là khoảng $\left(a;+\infty\right)$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $\left(3,8;3,9\right)$. **B.** $\left(3,6;3,7\right)$. **C.** $\left(3,7;3,8\right)$. **D.** $\left(3,5;3,6\right)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-1$.

Vì $x=0$ không thỏa mãn phương trình nên ta có

$$\left(1\right)\Leftrightarrow\left[m\ln\left(x+1\right)-x-2\right]\left[\ln\left(x+1\right)+1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ln\left(x+1\right)=x+2\\ \ln\left(x+1\right)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{x+2}{\ln(x+1)},\ (2)\\ x=\dfrac{1}{e}-1\end{array}\right..$$

Do nghiệm $x=\dfrac{1}{e}-1<0$ nên phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm thoả mãn $0<x_1<2<4<x_2$ khi và chỉ khi phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm phân biệt sao cho $0<x_1<2<4<x_2$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{\ln\left(x+1\right)}$ trên khoảng $\left(0\ ;+\infty\right)$ ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(x+1\right)-\dfrac{x+2}{x+1}}{\ln^2\left(x+1\right)}$.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(x+1\right)-\dfrac{x+2}{x+1}=0$, $\left(3\right)$.

Xét hàm số $h\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-\dfrac{x+2}{x+1}$ có $h'\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}>0$, $\forall x>0$ nên $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ do đó phương trình $f'\left(x\right)=0$ có không quá một nghiệm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Mà $f'(2).f'(4)<0$ và $f'(x)$ là hàm số liên tục trên $[2;4]$ suy ra phương trình (3) có duy nhất một nghiệm $x_0\in(2;4)$. Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0		2		x_0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{4}{\ln 3}$	↘		↗	$\frac{6}{\ln 5}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $0<x_1<2<4<x_2$ khi và chỉ khi $m>\dfrac{6}{\ln 5}\Leftrightarrow m\in\left(\dfrac{6}{\ln 5};+\infty\right)$.

Vậy $a=\dfrac{6}{\ln 5}\in(3,7;3,8)$.

Câu 33: (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho phương trình $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}\log_2\left(2|x-m|+2\right)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

A. 4036. **B.** 4034. **C.** 4038. **D.** 4040.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

$2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}\log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.\log_2\left[(x-1)^2+2\right]=2^{2|x-m|}\log_2\left(2|x-m|+2\right)$ (1).

Xét hàm số $y=2^t.\log_2(t+2)$ với $t\ge 0$.

Hàm số $y=2^t.\log_2(t+2)$ xác định và liên tục trên $[0;+\infty)$.

Ta có $y'=2^t.\log_2(t+2).\ln 2+\dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2}>0,\ \forall t\ge 0$.

Vậy hàm số $y=2^t.\log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Từ $(1)\Leftrightarrow f\left((x-1)^2\right)=f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-1)^2=2(x-m)\\-(x-1)^2=2(x-m)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2m=-x^2+4x-1 & (1)\\2m=x^2+1 & (2)\end{array}\right.\ (*)$.

□ Xét phương trình $2m=-x^2+4x-1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=-x^2+4x-1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbeolong

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m < 3 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ vô nghiệm khi $2m > 3 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

□ Xét phương trình $2m = x^2 + 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^2 + 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ vô nghiệm khi $2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

□ Khi $m = \frac{3}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có nghiệm $x = 2$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2}$. Vậy $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$
.

□ Khi $m = \frac{1}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = 2 \pm \sqrt{2}$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có nghiệm $x = 0$. Vậy $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

□ Xét phương trình $-x^2 + 4x - 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra không tồn tại m để phương trình (1) và (2) có cùng tập nghiệm gồm 2 phần tử. Vậy không tồn tại m để $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt .

□ Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt .

TH1: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{3}{2} \\ m < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$.

TH2: (2) có 2 nghiệm phân biệt và (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{2}$.

TH3: (1) có nghiệm $x = 2$ và (2) có nghiệm $x = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Kết hợp với điều kiện m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ ta có $m \in \left[-2019;\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2};2019\right]$.

Vì m nguyên nên nên ta có 4038 giá trị của m.

Câu 34: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1;8]$.

A. $3 \le m \le 6.$. **B.** $6 \le m \le 9.$. **C.** $2 \le m \le 6.$. **D.** $2 \le m \le 3.$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$

$\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x + 3 = m$

Đặt $t = \log_2 x$

Phương trình trở thành $t^2 - 2t + 3 = m \quad (1)$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in [1;8] \Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $x \in [0;3]$.

Đặt $g(t) = t^2 - 2t + 3$

$g'(t) = 2t - 2$. $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

BBT

x	0		1		3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

Từ BBT ta suy ra để phương trình đã có nghiệm $x \in [1;8]$ thì $2 \le m \le 6$.

Câu 35: Điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - (m-1)\log_2 x + 4 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;4]$ là

A. $3 < m \le 4$. **B.** $3 \le m \le \dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{10}{3} < m \le 4$. **D.** $3 < m \le \dfrac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x \in [1;4]$ nên $t \in [0;2]$.

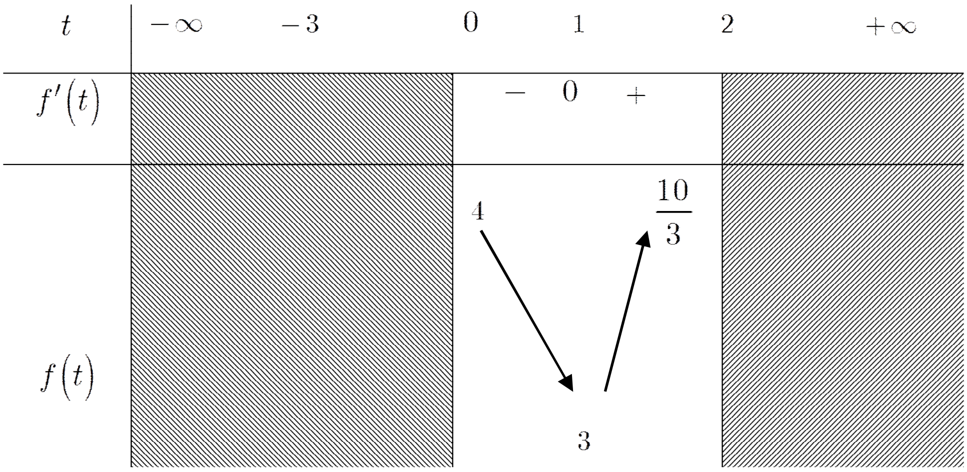
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Phương trình trở thành $t^2-(m-1)t+4-m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}=0 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;4]$ thì $3<m\le\dfrac{10}{3}$.

Câu 36: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. $\left\{\dfrac{1}{2};-1;\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $\left\{-\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$. **C.** $\left\{\dfrac{1}{2};1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)\ (1)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.log_2\left[(x-1)^2+2\right]=2^{2|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)\ (2)$

Xét hàm số $f(t)=2^t.log_2(t+2), t\ge 0$.

Vì $f'(t)>0, \forall t\ge 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó $(2)\Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right]=f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+1+2m=0\ (3) \\ x^2=2m-1\ (4) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(4)

$\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$, thay vào PT (4) thỏa mãn

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(3)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

$\Rightarrow m=\frac{1}{2}$, thay vào PT (3) thỏa mãn

+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

$(4)\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2m-1}$,với $\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$. Thay vào PT (3) tìm được $m=1$.

KL: $m\in\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$.

BÌNH LUẬN:

B1: Đưa phương trình về dạng $f(u)=f(v)$ với u,v là hai hàm theo x.

B2: Xét hàm số $f(t),t\in D$.

B3: Dùng đạo hàm chứng minh hàm số $f(t),t\in D$ tăng hoặc giảm nghiệm ngặt trên **D.**

B4: $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0$.

A. $\frac{-1}{4}<m<0$. **B.** $5\le m\le\frac{21}{4}$. **C.** $5<m<\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{-1}{4}\le m\le 2$.

Chọn C

Lời giải

$$\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2>0\\ \log_3(1-x^2)=\log_3(x+m-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-1;1)\\ 1-x^2=x+m-4\end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)=x^2+x+m-5=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\in(-1;1)$

Cách 1: Dùng định lí về dấu tam thức bậc hai.

Để thỏa yêu cầu bài toán ta phải có phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm thỏa: $-1<x_1<x_2<1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a.f(-1)>0\\ a.f(1)>0\\ \Delta>0\\ -1<\frac{S}{2}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-5>0\\ m-3>0\\ 21-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow 5<m<\frac{21}{4}.$$

Cách 2: Với điều kiện có nghiệm, tìm các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ rồi so sánh trực tiếp các nghiệm với 1 và -1.

Cách 3: Dùng đồ thị

Đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $\in(-1;1)$.

Cách 4: Dùng đạo hàm

Xét hàm số $f(x)=x^2+x-5\Rightarrow f'(x)=2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

Có $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{21}{4}$; $f(1)=-3$; $f(-1)=-5$

Ta có bảng biến thiên

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	$\searrow$	$-\frac{21}{4}$	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên, để có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi

$-\dfrac{21}{4} < -m < -5 \Rightarrow \dfrac{21}{4} > m > 5$.

Cách 5: Dùng MTCT

Sau khi đưa về phương trình $x^2 + x + m - 5 = 0$, ta nhập phương trình vào máy tính.

* Giải khi $m = -0,2$: không thỏa $\Rightarrow$ **loại A, D.**

* Giải khi $m = 5$: không thỏa $\Rightarrow$ **loại B.**

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m\left(\log_2 x^2 - 3\right)$ có nghiệm thuộc $[32;+\infty)$?

A. $m \in \left(1;\sqrt{3}\right]$. **B.** $m \in \left[1;\sqrt{3}\right)$ **C.** $m \in \left[-1;\sqrt{3}\right)$ **D.** $m \in \left(-\sqrt{3};1\right]$.

Lời giải

ĐK: $x > 0$. Khi đó phương trình tương đương:

$\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m\left(\log_2 x - 3\right)$

Đặt: $t = \log_2 x$, với $x \ge 32 \Rightarrow \log_2 x \ge \log_2 32 = 5$ hay $t \ge 5$.

Phương trình trở thành: $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t-3)$ $(*)$.

Khi đó bài toán trở thành tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \ge 5$.

Với $t \ge 5$ thì:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3).(t+1)} = m(t-3) \Leftrightarrow t-3\left(\sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3} = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}$

Ta có: $\dfrac{t+1}{t-3} = 1 + \dfrac{4}{t-3}$. Với $t \ge 5 \Rightarrow 1 < 1 + \dfrac{4}{t-3} \le 1 + \dfrac{4}{5-3} = 3$ hay:

$1 < \dfrac{t+1}{t-3} \le 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}} \le \sqrt{3}$

Suy ra $1 < m \le \sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm thỏa ycbt với $1 < m \le \sqrt{3}$.

Chọn A

Câu 39: Phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(mx - 6x^3\right) + 2\log_{\frac{1}{2}}\left(-14x^2 + 29x - 2\right) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi:

A. $m < 19$ **B.** $m > 39$ **C.** $19 < m < \dfrac{39}{2}$ **D.** $19 < m < 39$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

$\log_{\sqrt{2}}\left(mx-6x^3\right)+2\log_{\frac{1}{2}}\left(-14x^2+29x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(mx-6x^3\right)-\log_2\left(-14x^2+29x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow mx-6x^3=-14x^2+29x-2$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{6x^3-14x^2+29x-2}{x}$

$f(x)=\dfrac{6x^3-14x^2+29x-2}{x}\Leftrightarrow f'(x)=12x-14+\dfrac{2}{x^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow f(1)=19 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{39}{2} \\ x=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{121}{3}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên suy ra đáp án **C.**

Câu 40: Tìm m để phương trình : $(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$

A. $-3\le m\le\dfrac{7}{3}$.   **B.** $m\in\mathbb{R}$.   **C.** $m\in\varnothing$.   **D.** $-3<m\le\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

$4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2+t+1\right)=t^2+5t+1$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$

$\Leftrightarrow g(m)=f(t)$

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ với $t\in[-1;1]$

$f'(t)=\dfrac{4-4t^2}{\left(t^2+t+1\right)^2}\ge 0\ \forall t\in[-1;1]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$

Để phương trình có nghiệm khi hai đồ thị $g(m)$; $f(t)$ cắt nhau $\forall t\in[-1;1]$

$\Rightarrow f(-1)\le g(m)\le f(1)\Leftrightarrow -3\le m\le\dfrac{7}{3}$

BÌNH LUẬN:

Đây là dạng toán ứng dụng hàm số để giải bài toán chứa tham số. Đối với bài toán biện luận nghiệm mà chứa tham số thì phải tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ sau đó cô lập m rồi tìm max, min hàm số.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

Câu 41: Cho phương trình $4\log_9{}^2 x+m\log_{\frac{1}{3}} x+\frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x+m-\frac{2}{9}=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1<m<2$. **B.** $3<m<4$. **C.** $0<m<\frac{3}{2}$. **D.** $2<m<3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4\log_9{}^2 x+m\log_{\frac{1}{3}} x+\frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x+m-\frac{2}{9}=0$ Đk: $x>0$

$\Leftrightarrow 4\left(\log_{3^2} x\right)^2+m\log_{3^{-1}} x+\frac{1}{6}\log_{3^{\frac{-1}{2}}} x+m-\frac{2}{9}=0$

$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2-m\log_3 x-\frac{1}{3}\log_3 x+m-\frac{2}{9}=0$

$\Leftrightarrow \log_3{}^2 x-\left(m+\frac{1}{3}\right)\log_3 x+m-\frac{2}{9}=0 \quad (1)$

Đặt $t=\log_3 x$. Khi đó phương trình $(1)\Leftrightarrow t^2-\left(m+\frac{1}{3}\right)t+m-\frac{2}{9}=0 \quad (2)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=3\Leftrightarrow \log_3 x_1.x_2=1$

$\Leftrightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=1\Leftrightarrow t_1+t_2=1$

(Với $t_1=\log_3 x_1$ và $t_2=\log_3 x_2$)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình (2)

Ta có $t_1+t_2=1\Leftrightarrow \frac{-b}{a}=1\Leftrightarrow \left(m+\frac{1}{3}\right)=1\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}$

Vậy $0<m<\frac{3}{2}$ là mệnh đề đúng.

Câu 42: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$ .466666

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=25$. **C.** $S_{\min}=33$. **D.** $S_{\min}=17$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2>20a$.

Đặt $t=\ln x$, $u=\log x$ khi đó ta được $at^2+bt+5=0(1)$, $5u^2+bu+a=0(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x, một u thì có một x.

Ta có $x_1.x_2=e^{t_1}.e^{t_2}=e^{t_1+t_2}=e^{-\frac{b}{a}}$, $x_3.x_4=10^{u_1+u_2}=10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a}>-\frac{b}{5}\ln 10\Leftrightarrow a>\frac{5}{\ln 10}\Leftrightarrow a\geq 3$ (do a,b nguyên dương), suy ra $b^2>60\Rightarrow b\geq 8$.

Vậy $S=2a+3b\geq 2.3+3.8=30$, suy ra $S_{\min}=30$ đạt được $a=3,b=8$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}=m\left(\log_4 x^2-3\right)$ có nghiệm thuộc $[32;+\infty)$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

A. $m\in\left(1;\sqrt{3}\right]$. **B.** $m\in\left[1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\in\left[-1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $m\in\left(-\sqrt{3};1\right]$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$. Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}=m\left(\log_2 x-3\right)$.

Đặt $t=\log_2 x$ với $x\ge 32\Rightarrow \log_2 x\ge \log_2 32=5$ hay $t\ge 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2-2t-3}=m\left(t-3\right)\quad (*)$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: “Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t\ge 5$”

Với $t\ge 5$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{(t-3).(t+1)}=m\left(t-3\right)\Leftrightarrow \sqrt{t-3}.\left(\sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}=0\Leftrightarrow m=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}$

Ta có $\dfrac{t+1}{t-3}=1+\dfrac{4}{t-3}$. Với $t\ge 5\Rightarrow 1<1+\dfrac{4}{t-3}\le 1+\dfrac{4}{5-3}=3$ hay

$1<\dfrac{t+1}{t-3}\le 3\Rightarrow 1<\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}\le\sqrt{3}$

suy ra $1<m\le\sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1<m\le\sqrt{3}$.

BÌNH LUẬN:

Chúng ta có thể dùng hàm số để tìm max, min của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}, t\ge 5$

Câu 44: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}-2m-5=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1;2^{\sqrt{3}}\right]$.

A. $m\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[0;+\infty\right)$. **B.** $\left[-2;+\infty\right)$.

C. $m\in\left(-\infty;0\right)$. **D.** $m\in\left[-2;0\right]$.

Lời giải

Chọn D

$\log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}-2m-5=0\Leftrightarrow \log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}=2m+5$.

Xét $f\left(x\right)=\log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}$, $x\in\left[1;2^{\sqrt{3}}\right]$.

$$f'\left(x\right)=\frac{2\log_2 x}{x.\ln 2}+\frac{\dfrac{2\log_2 x}{x.\ln 2}}{2\sqrt{\log_2^2 x+1}}=\frac{2\log_2 x}{x.\ln 2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\log_2^2 x+1}}\right).$$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$ (Tm).

$f'\left(x\right)$ không xác định tại $x=0$ (loại).

BBT

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

x	1		$2^{\sqrt{3}}$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	5

Vậy phương trình có nghiệm khi: $1 \le 2m+5 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$.

Câu 45: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\log_2\left(5^x-1\right).\log_4\left(2.5^x-2\right)=m$ có nghiệm $x \ge 1$.

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\log_2\left(5^x-1\right).\log_4\left(2.5^x-2\right)=m \qquad (1)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right).\frac{1}{2}\log_2\left[\left(5^x-1\right)2\right]=m$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\left(5^x-1\right)\left[\log_2\left(5^x-1\right)+1\right]=m$

Đặt $t=\log_2\left(5^x-1\right)$, PTTT: $\frac{1}{2}t(t+1)=m \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t=m \qquad (2)$

PT (1)có nghiệm $x \ge 1$ khi và chỉ khi PT(2) có nghiệm $t \ge 2$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t$ $f'(t)=t+\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			
y		$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	

Dựa vào BBT, PT(2) có nghiệm $t \ge 2$ khi và chỉ khi $m \ge 3$.

Câu 46: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4=0$ có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{4};4\right]$:

A. $m<-3$. **B.** $-3 \le m \le \frac{7}{3}$.

C. $m>\frac{7}{3}$. **D.** $-3<m<\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

$(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4=0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2)+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4=0\,(*)$

Đặt $\log_2(x-2)=t$.

$x\in\left[\dfrac{5}{4};4\right]\Rightarrow 0\le x-2\le 2$ (Kết hợp với điều kiện). Vậy $t\le 1$.

Phương trình (*) có dạng: $\Leftrightarrow 4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4=0\,(**)$

Ta cần tìm m sao cho PT (**) có nghiệm thỏa mãn $t\le 1$.

$\Leftrightarrow (m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$.

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$; $f'(t)=\dfrac{-4t^2+4}{\left(t^2+t+1\right)^2}$.

Lập bảng biến thiên ta có

t	$-\infty$		-1		1	[redacted]
$f'(t)$		$-$	0	$+$		
$f(t)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\dfrac{7}{3}$	

Vậy $-3\le m\le\dfrac{7}{3}$ thì phương trình có nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $2\log_2|x|+\log_2|x+3|=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in\{0;2\}$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in\{2\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x\ne -3\\x\ne 0\end{cases}$

$2\log_2|x|+\log_2|x+3|=m\Leftrightarrow \log_2 x^2|x+3|=m\Leftrightarrow x^2|x+3|=2^m$

Xét hàm số: $y=x^2|x+3|$ với $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$

$\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2+6x & x>-3\\-3x^2-6x & x<-3\end{cases}$

Bảng biến
Thiên

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình có hai nghiệm khi: $\begin{cases} 2^m = 0 \\ 2^m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$

Câu 48: Cho m và n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình $8(\log_m x)(\log_n x) - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$. Khi P là một số nguyên, tìm tổng $m+n$ để P nhận giá trị nhỏ nhất?

A. $m+n=20$. **B.** $m+n=48$.

C. $m+n=12$. **D.** $m+n=24$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \log_m x$, lúc đó $x = m^t$

Phương trình trở thành

$8t\left(\log_n m^t\right) - 7t - 6\log_n m^t - 2017 = 0 \Leftrightarrow 8t^2\log_n m - 7t - 6t\log_n m - 2017 = 0$

$\Leftrightarrow 8(\log_n m)t^2 - (7 + 6\log_n m)t - 2017 = 0$

Ta có $\Delta = (7 + 6\log_n m)^2 + 4.2017.8\log_n m$

Lúc đó $x_1 = m^{t_1}; x_2 = m^{t_2}$

$x_1.x_2 = m^{t_1+t_2} = m^{\frac{7+6\log_n m}{8\log_n m}} = P$ nguyên

Lần lượt thử các đáp án ta chọn được đáp án **C.**

Câu 49: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_{\frac{3}{2}}|x-2| - \log_{\frac{2}{3}}(x+1) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m>3$. **B.** $m<2$. **C.** $m>0$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Điều kiện: $-1 < x \neq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_{\frac{3}{2}}|x-2| + \log_{\frac{3}{2}}(x+1) = m$

$\longleftrightarrow \log_{\frac{3}{2}}\left(|x-2|(x+1)\right) = m \longleftrightarrow |x-2|(x+1) = \left(\frac{3}{2}\right)^m$. $(*)$

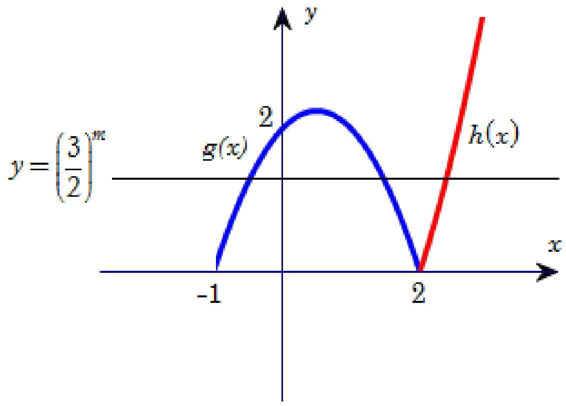
Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = |x-2|(x+1)$ và đường thẳng $y = \left(\frac{3}{2}\right)^m$ (cùng phương với trục hoành).

Xét hàm số $f(x) = |x-2|(x+1)$ xác định trên $(-1;2) \cup (2;+\infty)$.

Ta có $f(x) = |x-2|(x+1) = \begin{cases} h(x) = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 & \text{khi } x > 2 \\ g(x) = -(x-2)(x+1) = -x^2 + x + 2 & \text{khi } -1 < x < 2 \end{cases}$.

Đồ thị

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong



Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt khi $0<\left(\frac{3}{2}\right)^m<\max\limits_{(-1;2)} g(x)$

$\longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^m<\frac{9}{4}\longleftrightarrow m<2$.

Chọn B

Câu 50: Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân việt x_3,x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+3b$.

A. 25 **B.** 33 **C.** 30 **D.** 17

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện để hai phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$\begin{cases}\Delta_1=b^2-20a>0\\ \Delta_2=b^2-20a>0\end{cases}\Leftrightarrow b^2>20a$

Khi đó theo Vi-ét, ta có

Vậy theo giả thiết, ta có

$x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}\Leftrightarrow -\frac{b}{a}>-\frac{b}{5}\ln 10\Leftrightarrow a>\frac{5}{\ln 10}\approx 2{,}1714$

$\Rightarrow a\ge 3\Rightarrow b^2>20a\ge 20.3=60\Rightarrow b\ge 8\Rightarrow S\ge 2.3+3.8=24+6=30$.

Câu 51: Cho hai số thực a,b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m,n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x)-2\log_a x-3=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=mn$.

A. $\frac{279}{4}$ **B.** 90 **C.** $\frac{81}{4}$ **D.** $\frac{45}{2}$

Lời giải

Chọn A

Phương trình tương đương với

$(\log_a x)(\log_b a.\log_a x)-2\log_a x-3\log_b x-1=0$

$\Leftrightarrow \log_b a(\log_a x)^2-2\log_a x-3=0$.

Theo Vi-ét ta có

$\log_a m+\log_a n=\frac{2}{\log_b a}=2\log_a b=\log_a b^2\Leftrightarrow \log_a(mn)=\log_a b^2\Leftrightarrow mn=b^2$.

Vậy $P=b^2-9a=b^2+9(10-b)=\left(b-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{279}{4}\ge\frac{279}{4}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
www.facebook.com/bdbaolong