TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP VỀ NHÀ MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #02: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐỆ QUY BẰNG NHIỀU PHƯƠNG PHÁP.

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm 6 thực hiện gồm các thành viên:

1. Sinh viên: Nguyễn Quốc Nam, 20520644
2. Sinh viên: Phan Châu Thắng, 20520929
3. Sinh viên: Nguyễn Nhật Hoàng, 20520516

TP Hồ Chí Minh, ngày 22 tháng 3 năm 2022

Bài 1: Thành lập phương trình đệ quy:

Câu a:

Hàm đệ quy:

```
float tien(int n)
{
  if(n==0)
    return 1000.0;
    return tien(n-1)*1.12;
}
```

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} 1000 & \text{, nếu n} = 0 \\ \mathrm{T(n-1)}, & \text{nếu n} > 0 \end{cases}$$

Câu b:

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} 1 & \text{, nếu n} = 0 \text{ hoặc n} = 1 \\ \mathrm{T(n-1)} + \mathrm{T(n-2)} & \text{, nếu n} > 1 \end{cases}$$

Câu c:

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} \mathrm{C_1} & \text{nếu n} = 1 \\ 2\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right) + \mathrm{C_2} & \text{nếu n} > 1 \end{cases}$$

Câu d:

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} \mathrm{C_1} & \text{nếu n} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} T(n-i) + C_2 & \text{nếu n} \geq 1 \end{cases}$$

Câu e:

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} \mathrm{C_1} & \text{nếu n} = 0 \\ 3\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right) + \frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}\mathrm{C_2} & \text{nếu n} > 0 \end{cases}$$

Câu f:

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} \mathrm{C_1} & \text{nếu n} < 1 \\ T(n-3) + n^2 C_2 & \text{nếu n} \geq 1 \end{cases}$$

Câu g:

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{nếu } n = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} T(k) + nC_2 & \text{nếu } n \geq 1 \end{cases}$$

Câu h:

Ta có hàm đệ quy

```
void tower_of_hn(int n,char from_red,char to_red, char aux_red){
        if(n==0) return ;
        tower_of_hn(n-1,from_red,to_red,aux_red)
        tower of hn(n-1,aux_red,to_red,from_red)
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 2T(n-1) + C_2 & \text{nếu } n \geq 1 \end{cases}$$

Bài 2: Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi

Câu 1: T(1) = 0

$$T(n) = T(n-1) + 5 = [T(n-2) + 5] + 5 = T(n-2) + 2 * 5 = T(n-i) + i * 5$$

Kết quả dừng khi $n - i = 1$ hay $i = n - 1$.

Khi đó:

$T(n) = T(1) + (n-1) * 5 = (n-1) * 5$ = 5n – 5

Vậy phương trình đệ quy: T(n) = 5n - 5

Câu 2: T(1) = 1

$T(n) = T(n-1) + n$ = T(n -2) + 2n – 1

= T(n – 3) 3n – 3

...

= T(n – i) + in - $\sum_{k=1}^{i-1} k$

Kết quả dừng lại khi $n - i = 1$ hay $i = n - 1$.

Khi đó:

$$T(n) = T(1) + n(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Vậy phương trình đệ quy: T(n) = $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

Câu 3: T(1) = 4

$$T(n) = 3T(n-1) + 1 = 3[3T(n-2) + 1] + 1$$

$$= 9T(n-2) + 3 + 1$$

$$= 9[3T(n-3) + 1] + 3 + 1$$

$$= 27T(n-3) + 9 + 3 + 1$$

$$= 3^i T(n-i) + \sum_{k=0}^{i} 3^i$$

$$= 3^i T(n-i) + \frac{3^i - 1}{2}$$

Quá trình dừng lại khi $n - i = 1$ hay $i = n - 1$.

$$T(n) = 3^{n-1}T(1) + \frac{3^{n-1} - 1}{2} = 3^{n-1} * 4 + \frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{9 * 3^{n-1} - 1}{2}$$

Vậy phương trình đệ quy: T(n) = $\frac{9*3^{n-1}-1}{2}$

Câu 4: T(1) = 1

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right] + 1$$

$$= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 3$$

$$= 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + 1\right] + 3$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 7$$

$$= 2^i\, T\left(\frac{n}{2^i}\right) + (2^i - 1)$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1$ hay $i = \log_2 n$

Từ đó suy ra T(n) = $2^{\log_2 n} * T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + (2^{\log_2 n} - 1) = n\,T(1) + (n - 1) = 2n - 1$

Câu 5: T(1) = 1

$\mathrm{T(n)} = 2\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right) + \mathrm{n}$

= $4\mathrm{T}(\frac{n}{4}) + 2\mathrm{n}$

= $8\mathrm{T}(\frac{n}{8}) + 3\mathrm{n}$

...

= $2^i * T\left(\frac{n}{2^i}\right) + ni$

Quá trình dừng lại khi $\frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{i}}} = 1$ hay $\mathrm{i} = \log_2 n$

Từ đó suy ra $\mathrm{T(n)} = 2^{\log_2 n}\, \mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2^{\log_2 n}}\right) + n\log_2 n = \mathrm{nT(1)} + n\log_2 n = (\log_2 n + 1)n$

Vậy phương trình đệ quy: T(n) = $(\log_2 n + 1)n$

Câu 6: T(1) = 1

$\mathrm{T(n)} = 2\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right) + n^2$

$= 2\left[2\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{4}\right) + \frac{n^2}{4}\right] + n^2$

$= 4\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{4}\right) + \frac{n^2}{2} + n^2$

$= 4\left[2\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{8}\right) + \frac{n^{\ 2}}{16}\right] + \frac{n^2}{2} + n^2$

$= 8\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{8}\right) + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} + n^2$

...

$= 2^{\mathrm{i}}\,\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{i}}}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^k}$

= $2^{\mathrm{i}}\,\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{i}}}\right) + 2 - \frac{1}{2^{i-1}}$

Quá trình dừng lại khi $\frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{i}}} = 1$ hay $\mathrm{i} = \log_2 n$

Từ đó suy ra T(n)= $2^{\log_2 n}\, \mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2^{\log_2 n}}\right) + 2 - \frac{1}{2^{\log_2 n-1}} = \mathrm{n} + 2 - \frac{2}{n}$

Vậy phương trình đệ quy: T(n) = $\mathrm{n} + 2 - \frac{2}{n}$

Câu 7: T(1) = 1

$\mathrm{T(n)} = 2\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right) + \log(n)$

= $4T(\frac{n}{4})$ + $2\log\frac{n}{2}$ + $\log n$

= $8T(\frac{n}{8})$ + $4\log\frac{n}{4}$ + $2\log\frac{n}{2}$ + $\log n$

...

= 2^i $T(\frac{n}{2^i})$ + $\sum_{k=0}^{i-1}(2^k * \log\frac{n}{2^k})$

= 2^i $T(\frac{n}{2^i})$ + $(2^i - 1)\log n$ - $\sum_{k=0}^{i-1}[2^k \log(2^k)]$

Quá trình dừng lại khi $\frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{i}}} = 1$ hay $\mathrm{i} = \log_2 n$

=> T(n) = nT(1) + (n-1)$\log n$ - $\sum_{k=0}^{\log_2 n-1}[2^k \log(2^k)]$ = n + (n-1)$\log n$ - $\sum_{k=0}^{\log_2 n-1}[2^k \log(2^k)]$

Vậy phương trình đệ quy: T(n) = n + (n-1)$\log n$ - $\sum_{k=0}^{\log_2 n-1}[2^k \log(2^k)]$

Bài 3: Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi:

Câu 1:

$\mathrm{T(n)} = 3\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right) + n^2 = 3\left[3\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{4}\right) + n^2\right] + n^2$

= $9T(\frac{n}{4})$ + $\frac{3}{4}n^2$ + n^2

= $27T(\frac{n}{8})$ + $\frac{9}{16}n^2$ + $\frac{3}{4}n^2$ + n^2

= $81T(\frac{n}{16})$ + $\frac{27}{64}n^2$ + $\frac{9}{16}n^2$ + $\frac{3}{4}n^2$ + n^2

...

= 3^i T(1) + $\sum_{k=0}^{i-1}(\frac{3^k}{4^k}n^2)$

= 3^i T(1) + $4n^2$ - $4n^2 * (\frac{3}{4})^i$

Quá trình dừng lại khi $\frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{i}}} = 1$ hay $\mathrm{i} = \log_2 n$

Khi đó:

$\mathrm{T(n)} = 3^{\log_2 n}$ T(1) + $4n^2$- $4n^2 * \frac{3^{\log_2 n}}{n^2}$ = $4n^2 - 3 * 3^{\log_2 n}$

Vậy phương trình đệ quy: T(n) = $4n^2 - 3 * 3^{\log_2 n}$

Câu 2:

$\mathrm{T(n)} = 8\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right) + n^3$

= 8^2 $T(\frac{n}{4})$ + $2n^3$

$= 8^3\ T(\frac{n}{8}) + 3n^3$

...

$= 8^i\ T(\frac{n}{2^i}) + in^3$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1$ hay $i = \log_2 n$

Từ đó suy ra:

$T(n) = 8^{\log_2 n}\ T(1) + n^3 \log_2 n = (\log_2 n + 1)n^3$

Vậy phương trình đệ quy: $T(n) = (\log_2 n + 1)n^3$

Câu 3:

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$= 4^2\ T(\frac{n}{3^2}) + \frac{4}{3}n + n$

$= 4^3\ T(\frac{n}{3^3}) + (\frac{4}{3})^2 n + \frac{4}{3}n + n$

...

$= 4^i\ T(\frac{n}{3^i}) + \sum_{k=0}^{i-1}[n(\frac{4}{3})^k]$

$= 4^i\ T(\frac{n}{3^i}) + 3n(\frac{4}{3})^i - 3n$

Phương trình dừng lại khi $i = \log_3 n$

Khi đó:

$T(n) = 4^{\log_3 n}\ T(1) + 3n(\frac{4}{3})^{\log_3 n} - 3n = 4^{\log_3 n} + 3*4^{\log_3 n} - 3n$

Vậy phương trình đệ quy: $T(n) = 4^{\log_3 n} + 3*4^{\log_3 n} - 3n$

Câu 4:

$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

$= 9^2\ T(\frac{n}{3^2}) + 2n^2$

$= 9^3\ T(\frac{n}{3^3}) + 3n^2$

...

$= 9^i\ T(\frac{n}{3^i}) + in^2$

Phương trình dừng lại khi $i = \log_3 n$

Khi đó:

$\mathrm{T(n)} = 9^{\log_3 n}\,\mathrm{T}(1) + \mathrm{n}^2 \log_3 n = (\log_3 n + 1)n^2$

Vậy phương trình đệ quy: T(n) = $(\log_3 n + 1)n^2$

***Câu 5:* T(2) = 0**

$$\mathrm{T(n)} = 2\mathrm{T}(\sqrt{n}) + 1 = 2[2\mathrm{T}(\sqrt{\sqrt{n}}) + 1] + 1 = 4\mathrm{T}(\sqrt[4]{n}) + 1 + 2 = 2^{\mathrm{i}}\mathrm{T}\left(\sqrt[2^i]{n}\right) + \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{i}-1}(2^{\mathrm{k}})$$
$$= 2^{\mathrm{i}}\mathrm{T}\left(\sqrt[2^i]{n}\right) + 2^{\mathrm{i}} - 1$$

Quá trình dừng lại khi: $\sqrt[2^i]{n} = 2 \Leftrightarrow$ i = $\log_2(\log_2 n)$

Khi đó T(n) = $2^{\log_2(\log_2 n)}\mathrm{T}(2) + 2^{\log_2(\log_2 n)} - 1$ = $\log_2 n - 1$

Bài 4: Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp dùng phương trình đặc trưng:

Câu 1:

Xét phương trình $\mathrm{T(n)} = 4\mathrm{T(n-1)} + 3\mathrm{T(n-2)}$

Đặt $\mathrm{T(n)} = X^n$ ta có được phương trình mới: $X^n - 4X^{n-1} + 3X^{n-2} = 0$

Xét phương trình đặc trưng: $X^2 - 4\mathrm{X} + 3 = 0$

Ta có 2 nghiệm đơn $\mathrm{X} = 1$ hoặc $\mathrm{X} = 3$

T(n) có dạng: $\mathrm{T(n)} = \mathrm{C}_1 1^n + \mathrm{C}_2 3^n = 0$

Xét:

$$\begin{cases} \mathrm{T}(0) = 1 \\ \mathrm{T}(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 = 1 \\ C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\mathrm{T(n)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * 3^{\mathrm{n}}$

Câu 2:

Xét phương trình: $\mathrm{T(n)} - 10\mathrm{T(n-1)} + 33\mathrm{T(n-2)} + 36\mathrm{T(n-3)} = 0$

Đặt $\mathrm{T(n)} = X^n$ ta có được phương trình mới:

$$X^n - 10X^{n-1} + 33X^{n-2} - 36X^{n-3} = 0$$

Ta có phương trình đặc trưng:

$$X^3 - 10X^2 + 33X - 36 = 0\ (1) \text{ hay } (X-3)^2(X-4) = 4$$

Phương trình (1) có 1 nghiệm kép là 3 và 1 nghiệm kép là 4

Suy ra T(n) có dạng:

$$T(n) = C_1 3^n + C_2 4^n + C_3 n 4^n$$

Với $T(0) = 0, T(1) = 1, T(2) = 7$, ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ 3C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 1 \\ 9C_1 + 16C_2 + 64C_3 = 7 \end{cases} => C1 = -1, C2 = 1, C3 = 0$$

Suy ra $T(n) = -3^n + 4^n$

Câu 3:

Xét phương trình: $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$

Đặt $T(n) = X^n$ ta có được:

$$X^n - X^{n-1} - X^{n-2} = 0$$

Ta có phương trình đặc trưng:

$$X^2 - X - 1 = 0$$

Ta có 2 nghiệm đơn $X = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

T(n) có dạng:

$$T(n) = C_1 * \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 * (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

Với $T(0) = 1$ và $T(1) = 1$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 + C_2 * (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 = 1 \end{cases} => C_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, C_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

Suy ra:

$$T(n) = \frac{5-\sqrt{5}}{10} * \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

--- *HẾT* ---