Biến đổi Wavelet và ứng dụng trong giảm nhiễu ảnh sử dụng Matlab

Bùi Thái Dương, Vũ Nhật Tân, Phạm Huỳnh Quốc Thiện và Phan Xuân Thịnh Bộ môn Viễn Thông, Khoa Điện – Điện tử

ABSTRACT - Bất cứ một bức ảnh nào thu nhận được từ các thiết bị quang, quang điện hoặc điện tử đều bị xuống cấp. Các xuống cấp có thể do nhiễu, mờ, do không đúng tiêu cự của camera, do sự di chuyển tương đối của vật cần chụp với camera... Có rất nhiều phương pháp khác nhau để nâng cao chất lượng ảnh. Bài báo cáo này trình bày về kỹ thuật biến đổi Wavelet để sử dụng khử nhiễu cho ảnh nhằm nâng cao chất lượng ảnh. Kết quả thu được bức ảnh sau khi đã khử nhiễu Speckle, Gaussian, nhiễu mối tiêu và nhiễu Poisson tác động lên ảnh.

KEYWORDS – Xử lí ảnh, Biến đổi Wavelet, CWT, DWT, BayesShrink, nhiễu ảnh

I. GIỚI THIỆU

Nhiễu là những tín hiệu không mong muốn hoặc ngẫu nhiên chen vào kênh thông tin, khác với tín hiệu mang thông tin mà ban mong muốn, trong thực tế một tín hiệu luôn tồn tại nhiễu có thể là nhiễu trên đường truyền hay nhiễu do môi trường xung quanh tác động vào tín hiệu. Vì vậy mọi kênh thông tin đều có tạp nhiễu nếu tín hiệu nhiễu quá lớn sẽ làm dữ liệu trong kênh thông tin bị lấn át thậm chí mất dữ liệu. Do vậy phải loại bỏ được những thành phần nhiễu không mong muốn này. Ảnh số là ma trân các số thực và số phức được biểu diễn bởi các bịt hữu hạn. Ảnh có thể được biểu diễn dưới dạng tương tư hoặc số. Ảnh xám 8-bit được biểu diễn bởi 256 giá tri. Ảnh màu cách biểu diễn cũng tương tự có 3 màu cơ bản là: Red, Green, Blue (RGB). Đồ họa tập tin lưu trữ hình ảnh RGB như hình ảnh 24-bit nơi mỗi thành phần RGB là 8 bit. Mỗi ảnh là một ma trận số thực có chứa các điểm ảnh vì vậy mà mỗi bức ảnh đều chứa đựng các thông tin một cách có tổ chức và có trật tự. Vì vậy nếu bóc tách được trật tự của một bức ảnh, xem được thông tin trong một bức ảnh, biết được trong một bước ảnh đâu là thông tin quan trọng nhất nói lên thông tin trong bức ảnh thì khi biểu diễn ta chỉ cần biểu diễn các thông tin quan trong những thông tin khác có thể được loại bỏ trong đó có những thông tin do nhiễu mang lại đều có thể được loại bỏ. Tuy khử nhiễu ảnh là đề tài không mới nhưng biến đổi Wavelet đại diện cho một mức đô biến đổi cao của tín hiệu. Biến đổi Wavelet do tính linh động tuyệt vời đã nhanh chóng trở thành công cụ không thể thiếu trong xử lý tín hiệu và hình ảnh. Ứng dụng của khử nhiễu ảnh được dùng ngày càng nhiều trong các lĩnh vực như Y học, địa chất, khí tượng học, hình sư, ...

Nội dung của bài báo cáo được cấu trúc như sau: Phần I: Giới thiệu, phần II: Mô hình hệ thống, phần III: Giải pháp thực hiện - ở phần này sẽ nói các phép biến đổi Wavelet và các tính chất của Wavelet họ wavelet Daubechies và vấn đề nhiễu, phần tiếp theo trình bày kết quả thực hiện của nhóm, phần cuối cùng là kết luận kết thúc báo cáo.

II. MÔ HÌNH HỆ THỐNG

Có nhiều nguồn nhiễu trong hình ảnh và những nhiễu này đến từ nhiều khía canh khác nhau như thu nhân, truyền và nén

hình ảnh. Về mặt công thức hóa một ảnh nhiễu s(n) được tạo thể hiện là tổng của ảnh gốc không chứa nhiễu f(n) và hàm lỗi e(n) như sau:

$$s(n) = f(n) + \sigma e(n)$$

Mục đích hướng đến của các phương pháp khử nhiễu là giảm nhiễu trong hình ảnh tự nhiên đồng thời giảm thiểu việc mất các tính năng gốc và cải thiện độ nhiễu tín hiệu (SNR). Để giải quyết vấn đề này, khá nhiều phương pháp khử nhiễu đã được đề xuất và sử dụng. Ở đây, nhóm em trình bày phương pháp lọc nhiễu dùng họ Wavelet Daubechies và phương pháp đặt ngưỡng Bayes.

III. GIẢI PHÁP THỰC HIỆN

Để tìm hiểu về phương pháp lọc nhiễu dùng họ Wavelet Daubechies, ở phần này sẽ đi từ việc tìm hiểu các phép biến đổi wavelet đến các tính chất và sau đó là họ Wavelet Daubechies cũng như phương pháp đặt ngưỡng Bayes.

A. Biến đổi Wavelet

Biến đổi Wavelet liên tục (CWT)
 1.1 Phép biến đổi Wavelet thuận

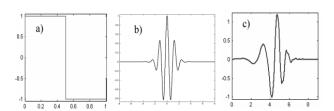
Gọi f(x) là tín hiệu 1-D, phép biến đổi wavelet liên tục của f(x) sử dụng hàm wavelet Ψ_0 được biểu diễn bởi:

$$W(s,b) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \Psi_0^* \left(\frac{x-b}{s}\right) dx \tag{1}$$

Trong đó:

- W (s, b) là hệ số biến đổi wavelet liên tục của f(x), với s là tỉ lệ (nghịch đảo của tần số) và b là dịch chuyển đặt trung vị trí.
- $\Psi_0^*(x)$ là hàm liên hiệp phức của wavelet $\Psi_0(x)$ được gọi là hàm wavelet phân tích.

Phương trình (1.1) cho thấy phép biến đối wavelet là 1 ánh xạ chuyển từ hàm một biến f(x) thành hàm W(s, b) phụ thuộc hai biến số là biến tỉ lệ s và biến dịch chuyển b. Hệ số chuẩn hóa $\frac{1}{\sqrt{s}}$ đảm bảo cho sự chuẩn hóa song wavelet với các tỉ lệ phân tích s khác nhau $\|\Psi_{0(s,b)}\| = \|\Psi_0\|$



Hình 1. Ba dạng hàm wavelet

- a) Wavelet Harr, b) Wavelet Daubechies, c) Wavelet Morlet
 - 1.2 Các tính chất của hàm wavelet

Bao gồm 2 tính chất là tính chất song và đặc trưng về năng lượng.

1.3 Biểu diễn hệ số wavelet

Có hai cách biểu diễn các hệ số wavelet. Thứ nhất, biểu diễn các hệ số wavelet W(s, b) trong hệ toa độ ba truc vuông góc (x, y, z) với trục x biểu diễn tham số dịch chuyển (vị trí) b, truc v biểu diễn tham số tỉ lê (là nghich đảo tần số) s và truc thẳng đứng z biểu diễn hệ số wavelet W. Thứ hai, biểu diễn các hệ số W (s, b) trong mặt phẳng không gian - tỉ lệ (x, s) (gọi là tỉ lệ đồ) ở dạng các đường đẳng trị hay ở dạng ảnh; cách biểu diễn này thông dụng trong xử lý ảnh.

1.4 Phép biến đổi wavelet nghịch

Tương tự như phép biển đổi Fourier, phép biển đổi wavelet liên tục có tính thuận nghịch. Nếu phép biến đổi wavelet thuận có dạng (1.1) thì phép biến đôi wavelet nghịch có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{c_g} \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} W(s, b) \Psi_0\left(\frac{x - b}{s}\right) ds \qquad (2)$$

 cg là hằng số phụ thuộc vào hàm wavelet được sử dụng. Công thức (1.2) cho phép khôi phục lại tín hiệu nguyên thủy từ các hệ số biển đối wavelet bằng phép tính tích phân theo toàn bộ các tham số tỉ lệ s và dịch chuyển b. Trong (1.2), hàm wavelet Ψ_0 được sử dụng thay cho hàm liên hiệp phức của nó trong biểu thức (1.1).

1.5 Phép biến đổi wavelet liên tục hai chiều và nhiều chiều

Phép biến đổi wavelet 2- D được cho bởi phương trình:

$$W(s,B) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(R) \cdot \Psi_0^* \left(\frac{R-B}{s}\right) dR$$
 (3)

- $R\ (x_1,\,x_2)$ là vecto tọa độ gồm 2 thành phần x_1 và x_2 thỏa hệ thức $R^2 = x_1^2 + x_2^2$
- B (b_1, b_2) là vecto vị trí, có 2 thành phần b_1 và b_2 thỏa hệ thức $B^2 = b_1^2 + b_2^2$
- Hệ số (1/s) để chuẩn hóa năng lượng của sóng wavelet 2-D, được suy ra từ trường hợp 1-D. Tín hiệu f(R) là hàm theo hai biển không gian là x_1 và x_2 .

Phép biến đổi wavelet nghịch 2- D được viết dưới dạng:

$$f(R) = \frac{1}{c_g} \int_{-\infty}^{+\infty} dB \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{s^3} W(s, B) \Psi_0\left(\frac{R-B}{s}\right) ds \quad (4)$$

Phép biến đổi wavelet n chiều (n > 2) có thể xây dựng đơn giản bằng cách mở rộng số phần tử trong các vecto R và B đến n giá trị theo cách biểu diễn: $R(x_1, x_2, ... x_n)$ và $B(b_1, ... x_n)$

Để đảm bảo sự bảo toàn năng lượng của sóng wavelet, trong phép biến đổi wavelet n-D, cần hiệu chỉnh lại số hạng trước tích phân dưới dạng $1/s^{(n/2)}$. Do đó, hàm wavelet $\Psi_{0(s,h)}$

$$\Psi_{0(s,B)}(R) = \frac{1}{\frac{n}{s}} \Psi_0\left(\frac{R-B}{s}\right) \tag{5}$$

(R) trong không gian n-D được viết ở dạng:
$$\Psi_{0(s,B)}(R) = \frac{1}{s^{\frac{n}{2}}} \Psi_0\left(\frac{R-B}{s}\right) \tag{5}$$
Nên phép biển đổi wavelet trong n – D được viết lại:
$$W(s,B) = \frac{1}{s^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(R) \cdot \Psi_0^*\left(\frac{R-B}{s}\right) dR \tag{6}$$

Và phép biến đổi wavelet nghịch của nó có dạng:

$$f(R) = \frac{1}{c_g} \int_{-\infty}^{+\infty} dB \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{s^{n+1}} W(s, B) \Psi_0\left(\frac{R-B}{s}\right) ds$$
(7)

1.6 Tiêu chuẩn chọn hàm wavelet

Các tiêu chuẩn chọn hàm wavelet bao gồm: trực giao hay không trưc giao; phức hay thực; độ rộng; chẵn hay lẻ; các momen triệt tiêu và đẳng hướng hay không đẳng hướng.

1.7 Rời rạc hóa phép biến đổi wavelet liên tục

Để tính các hệ số của phép biến đổi wavelet liên tục trên máy tính, hai tham số tỉ lê và tinh tiến không thể nhân các giá trị liên tục mà nó phải là các giá trị rời rạc

1.8 Hiệu ứng biên

Khi lấy biến đổi wavelet của tín hiệu hữu hạn và rời rạc, do ảnh hưởng bởi tích trong của hàm wavelet với các giá trị lân cận trên các biên của tín hiệu nên giá trị của hệ số wavelet bị biến đối khá mạnh, hiện tượng này gọi là hiệu ứng biên. Sự biến dạng do hiệu ứng biên càng lớn khi thực hiện phép biến đôi wavelet ở các tỉ lệ lớn

- 2. Biển đổi Wavelet rời rạc (DWT)
 - 2.1 Phép biến đổi wavelet rời rạc và phân tích đa phân giải

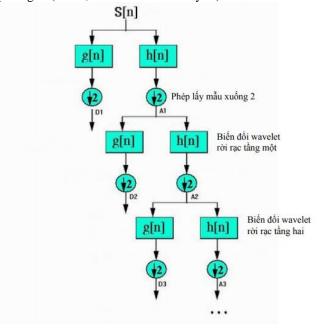
Mối quan hệ giữa hàm tỉ lệ và hàm wavelet được cho bởi: $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot \Phi(2x - k)$

$$\Phi(x) = \sum_{k=0} c_k \cdot \Phi(2x - k) \tag{8}$$

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k c_k \cdot \Phi(2x + k - N + 1)$$
 (9)

Các phép lọc được tiến hành nhiều tầng (level) khác nhau và để khối lượng tính toán không tang, khi qua mỗi bộ lọc, tín hiệu được lấy mẫu xuống 2.

Ứng với mỗi tầng, tín hiệu có độ phân giải khác nhau. Do đó, phép biến đổi wavelet rời rạc được gọi là phân tích đa phân giải (MRA, mutiresolution analysis).



Hình 2. Phân tích đa phân giải sử dụng biến đổi wavelet rời rac

Tại mỗi tầng lọc, biểu thức của phép lọc được cho bởi công thức:

$$y_{high^{(n)}} = \sum_{n} S(n). g(2k - n)$$
 (10)

$$y_{low}(n) = \sum_{n} S(n) \cdot h(2k - n)$$
 (11)

Trong đó, S(n) là tín hiệu, h(n) là đáp ứng xung của các bộ lọc thông thấp tương ứng với hàm tỉ lệ $\Phi(n)$ và g(n) là đáp ứng xung của các bộ lọc thông cao ứng với hàm wavelet $\Psi(n)$. Hai bộ lọc này liên hệ với nhau theo hệ thức

$$h(N-1-n) = (-1)^n g(n)$$
 (12)

Trong đó, N là số mẫu trong tín hiệu.

Tín hiệu S(n) có thể được tái tạo theo các bước ngược lại gọi là phép biến đổi wavelet rời rac nghịch (IDWT) được cho

$$S(n) = \sum_{k} (y_{high}(k) \cdot g(2k - n)) + (y_{low}(k) \cdot h(2k - n))$$
(13)

Trong đó, y_{high}(k) và y_{low}(k) lần lượt là tín hiệu ngõ ra sau khi đi qua các bộ lọc thông cao và bộ lọc thông thấp.

2.2 Phép biến đổi wavelet rời rạc 2 chiều

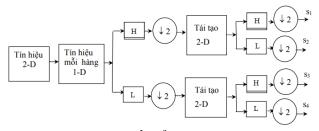
Gọi x và y là hai trục tọa độ tín hiệu 2-D, L là phép lọc thông thấp, H là phép lọc thông cao, phép biến đổi wavelet 2-D được tính như sau:

$$\Phi^{(1)}(x,y) = \Phi(x)\Phi(y)$$
: LL (14)

$$\Psi^{(2)}(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$$
: LH (15)

$$\Psi^{(3)}(x,y) = \Psi(x)\Phi(y): HL$$

$$\Psi^{(4)}(x,y) = \Psi(x)\Psi(y)$$
: HH (17)



Hình 3. Phép biến đổi wavelet rời rạc 2-D

2.3 Lọc nhiễu

Phép biến đổi wavelet rời rạc được áp dụng rỗng rãi trong việc lọc nhiễu. Như đã nói trên, phép biến đổi wavelet rời rạc khai triển dữ liệu gốc thành hai nhóm hệ số: các hệ số xấp xỉ và các hệ số chi tiết trên mỗi tầng và nhiễu nằm trong các hệ số chi tiết của mỗi tầng. Giả sử chúng ta thực hiện phép biến đổi wavelet rời rạc đến tầng k và giả sử rằng hệ số xấp xỉ ở tầng thứ k hầu như đã loại nhiễu hoàn toàn. Tuy nhiên, trong các nhiễu bị loại có cả những thành phần tần số cao ứng với các cấu trục địa phương có ích. Do đó nếu lấy hệ số xấp xỉ thứ k đem phục hồi (sử dung IDWT) sẽ nhận được các dữ liệu đã lọc nhiễu thô nhưng không còn các thành phần tần số cao có ích.

B. Úng dụng của phép biến đổi Wavelet trong giảm nhiễu hình ảnh

1. Quá trình khử nhiễu

Mô hình của tín hiệu nhiễu là $s(n) = f(n) + \sigma e(n)$. Quá trình khử nhiễu tiến hành như sau:

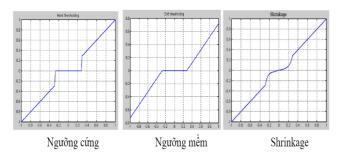
Bước 1: Phân tách tín hiệu. Chọn wavelet thích hợp và chọn mức phân tách N. Sử dụng DWT phân tích.

Bước 2: Đặt ngưỡng cho tín hiệu để cho kết quả thử tốt nhất

Bước 3: Tái tạo tín hiệu.

2. Phương pháp đặt ngưỡng tín hiệu 2. 1 Lý thuyết ngưỡng

- Đặt ngưỡng cứng: đặt các giá trị về 0 các phần tử mà giá trị tuyệt đối thấp hơn ngưỡng
- Đặt ngưỡng mềm: đầu tiên thiết lập về 0 các giá trị tuyệt đối thấp hơn ngưỡng và sau đó hạ dần các hệ số khác về 0
- Phương pháp wavelet shrinkage là quá trình khử nhiễu hình ảnh phi tuyến để loại bỏ nhiễu bằng cách thu hẹp lại hệ số wavelet trong miền wavelet.



Hình 4. Phương pháp đặt ngưỡng

Ở bài báo cáo này, nhóm em sẽ trình bày phương pháp chon ngưỡng BayesShrink (BS)

2. 2 Phương pháp BayesShrink (BS)

2.2.1 Ngưỡng thích nghi cho BayesShrink

Trong BayesShrink đã xác định ngưỡng giả sử cho mỗi subband là một phân phối Gaussian tổng quát (GGD). GGD được cho bởi

$$GG_{\sigma X}, \beta(x) = C(\sigma_X, \beta) \exp\{-[\alpha(\sigma_X, \beta)|x|]^{\beta}\}$$

$$-\infty < x < \infty, \sigma_X > a, \beta > 0, v\acute{\sigma}i$$
(18)

$$-\infty < x < \infty, \sigma_X > \alpha, \beta > 0, \text{ v\'oi}$$

$$\alpha(\sigma_X, \beta) = \sigma_X^{-1} \left[\frac{\Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} \right]^{1/2}$$
(19)

(16)

$$C(\sigma_{X}, \beta) = \frac{\beta.\alpha(\sigma_{X}, \beta)}{2\Gamma(1/\beta)}$$
 (20)

 $C(\sigma_{X}, \beta) = \frac{\beta.\alpha(\sigma_{X}, \beta)}{2\Gamma(1/\beta)}$ (20) $Va \Gamma(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-u} u^{t-1} du \ la ham gamma$ Giá trị dự kiến của sai số bình phương trung bình MSE (mean square error):

$$\tau(T) = E(\widehat{X} - X)^2 = E_X E_{Y|X} (\widehat{X} - X)^2$$
 (21)

Giá trị ngưỡng
$$T_{BS}(\sigma_X) = \frac{\sigma_V^2}{\sigma_X}$$
 (22)

(thean square entor): $\tau(T) = E(\widehat{X} - X)^2 = E_X E_{Y|X} (\widehat{X} - X)^2 \qquad (21)$ Giá trị ngưỡng $T_{BS}(\sigma_X) = \frac{\sigma_V^2}{\sigma_X} \qquad (22)$ Uớc tính ngưỡng $T_B = \frac{\sigma^2}{\sigma_X}$ không chỉ gần tối ưu mà còn trực quan. Khi $\sigma/\sigma_X << 1$ tín hiệu mạnh hơn nhiều nhiễu, T_b/σ được chọn nhỏ để duy trì hầu hết các tín hiệu và loại bỏ một số nhiễu; khi $\sigma/\sigma_X >> 1$ nhiễu chiếm ưu thế và ngưỡng chuẩn được chọn lớn để loại bỏ nhiễu đã tràn ngập tín hiệu. Như vậy, lựa chọn ngưỡng này để điều chỉnh những đặc điểm tín hiệu và nhiều như được phản ánh trong các tham số σ và σ_X .

2.2.2 Ước lượng tham số để xác định ngưỡng

Các mô hình quan sát được thể hiện như sau: Y = X+V

Ở đây Y là biến đổi wavelet của hình ảnh xuống cấp, X là biến đổi wavelet của hình ảnh ban đầu và V là biến đổi wavelet của thành phần nhiễu theo các phân phối Gaussian $N(0, \sigma_V^2)$.

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_V^2 \tag{23}$$

- Đạo hàm của nhiễu chuẩn σ_V^2 có thể được ước tính chính xác từ mức phân tách đầu tiên HH₁ của subband chéo bằng ước tính trung vị

$$\hat{\sigma}_v = \frac{\text{Median}(|HH_1|)}{0.6745} \tag{24}$$

- Sự đánh giá phương sai của hình ảnh xuống cấp Y: Các phương sai của hình ảnh xuống cấp có thể được ước tính như

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M A_m^2 \tag{25}$$

 $\sigma_Y^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M A_m^2 \qquad (25)$ Với A_m là các bậc của wavelet trong mỗi tỉ lệ, M là tổng hệ số của wavelet

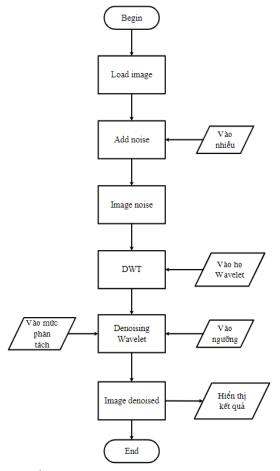
- Giá trị nguồng T:
$$T_{BS}(\sigma_X) = \frac{\hat{\sigma}_V^2}{\hat{\sigma}_X}$$
 (26)

Với
$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{max(\hat{\sigma}_Y^2 - \hat{\sigma}_V^2)}$$
 (27)

Trong trường hợp $\hat{\sigma}_V^2 > \hat{\sigma}_V^2$, $\hat{\sigma}_X$ được giữ bằng 0, nghĩa là T_{BS} tiến đến vô cùng, trong thực tế có thể chọn T_{BS}= $max(|A_m|)$.

Tóm lai, phương pháp BayesShrink là phương pháp thực hiện đặt ngưỡng mềm với mức đô phu thuộc gần ngưỡng tối ưu

$$T_{BS} = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{V}^{2}}{\hat{\sigma}_{X}}, khi \ \hat{\sigma}_{V}^{2} < \hat{\sigma}_{Y}^{2} \\ \max(|A_{m}|), con \ lai \end{cases}$$
 (28)



B. Kết quả mô phỏng

Sự ảnh hưởng của các loại nhiễu tới phương pháp đặt ngưỡng (ảnh lena.png, phân tách level 3)

Loại nhiễu	SNR
Gaussian (0.02)	22.3489
Speckle (0.02)	24.1682
Poisson	26.5489
Salt & Pepper (0.02)	19.6320

KÉT QUẢ MÔ PHỎNG/THỰC HIỆN

A. Lưu đồ thuật toán

_ Ảnh hưởng của các loại Wavelet Daubechies tới đầu ra (ảnh lena.png, mức phân tách level 3 so sánh 3 loại wavelet db2, db5, db6 với nhiễu gaussian (0.02))

Wavelet	SNR
db2	22.0547
db5	22.3717
db6	22.3318

Anh hưởng của các mức phân tách tới đầu ra (ảnh lena.png, mức phân tách từ 1 tới 5, với nhiễu poisson)

Mức phân tách	SNR
1	25.7197
2	26.6514
3	26.5536
4	26.2378
5	25.9881

V. KÉT LUÂN

Bài báo cáo trình bày các lý thuyết tổng quan về xử lý ảnh, các phép biến đổi wavelet rời rạc, liên tục và ứng dụng của biến đổi wavelet trong giảm nhiều ảnh. Bài báo cáo đưa ra chương trình mô phỏng phương pháp chọn ngưỡng Bayes. Kết quả cho thấy khả năng rất mạnh của biến đổi wavelet trong xử lí ảnh nói riêng và xử lí tín hiệu nói chung. Kết quả nghiên cứu có thể ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như xử lí ånh trong lĩnh vực an ninh, y sinh,...

REFERENCES

- Lê Tiến Thường (2016), Xử lý số tín hiệu và Wavelets, NXB Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, chương 11
- Nguyễn Vĩnh An, Analysis the Statistical Parameters of the Wavelet Coefficients for Image Denoising, VNU Journal of Natural Sciences and Technology, Vol. 29, No. 3 (2013) 1-7
- S.Grace Chang, Bin Yu and M.Vattereli, "Adaptive Wavelet Thresholding for Image Denoising and Compression", IEEE Trans Image Processing, vol.9,pp.1532-1546, Sept 2000
- Matlab6.1 -Image Processing Toolbox http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/images/