EE202 MATLAB Exercise 2

20160042 구인용

본 보고서는 EE202 MATLAB 과제 2에 대한 나의 해답을 서술하는 보고서이다. 각 문제에 대한 답의 소스 코드, 출력되는 결과값, 그리고 그에 대한 토의를 제시할 것이다.

문제 1 Discrete-time Fourier Series

Consider a discrete-time periodic square wave $x[n]$ with the period of N, defined by

$$x\,[n] = \begin{cases} 1 & \text{if} -N_1 \le n \le N_1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Where $2N_1 + 1 \le N$.

(a) Plot the stem graph of $x[n]$ where $2N_1 + 1 = 5$ and $N = 11$.

(b) First, derive the Fourier coefficient a_k for $x[n]$ by hand and plot the stem graph of a_k for (a). Second, compute $a_k$by implementing the computation of the Fourier coefficients in eq. (3.95) in O&W textbook, and plot the stem graph of a_k. Plot two graphs in the same window and compare them.

(c) Compute a_k for $x[n]$ where $2N_1 + 1 = 5$ and $N = 10{,}20$ and 40 and plot them in one figure window.

"Eq.(3.95) in O&W textbook"은 다음과 같다.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

제시된 문제에 대한 소스 코드는 다음과 같다.

```
%%%%%%%%%%%%%%% prob_2_1_sol.m file for MATLAB Exercise #2 %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FILL THE CODE AND TEST HERE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% (1) Plot the signal x[n]
clear
close all

%Set Domain (-D~D)
D=50;
n=-50:50;

N = 11;
N1 = 2;

x=1*(mod(n+N1,N)<=2*N1);

fg1 = figure;
fg1.Name = 'Answer for Problem 1-(a)';
h=stem(n,x);
title('x[n] (2N_1 +1 = 5, N = 11)')
xlabel('n');
ylabel('x[n]');
%adjust graphics
h.Color = 'k';
h.Marker = '.';

% (2) Compute the Fourier coefficients ak (1) by hand and (2) by
% implementing computeDTFS function, and plot them.
fg2 = figure;
fg2.Name = 'Answer for Problem 1-(b)';
maxind = 50;

%Computation by hand
k=-maxind:maxind;
for ind = k
    if mod(ind,N)==0
        a(ind+maxind+1)=(2*N1+1)/N;
    else
        a(ind+maxind+1)=1/N*sin(2*pi*ind*(N1+.5)/N)/sin(pi*ind/N);
    end
end
subplot(2,1,1);
h2_1=stem(k,a);
title('a_k computed by hand');
xlabel('k');
ylabel('a_k');
%adjust graphics
h2_1.Color = 'k';
h2_1.Marker = '.';

%Computation by computeDTFS function
a11= computeDTFS(2,11,50);
subplot(2,1,2);
h2_2=stem(k,a11);
title('a_k computed by computeDTFS function');
xlabel('k');
ylabel('a_k');
%adjust graphics
h2_2.Color = 'k';
h2_2.Marker = '.';

% (3) Plot Fourier coefficients for N=10,20,40.
fg3 = figure;
fg3.Name = 'Answer for Problem 1-(c)';
%(3)-1 N=10
a10 = computeDTFS(2,10,50);
subplot(3,1,1);
h3_1=stem(k,a10);
title('a_k (N=10)');
```

```
xlabel('k');
ylabel('a_k');
%adjust graphics
h3_1.Color = 'k';
h3_1.Marker = '.';

%(3)-2 N=20
a20 = computeDTFS(2,20,50);
subplot(3,1,2);
h3_2=stem(k,a20);
title('a_k (N=20)');
xlabel('k');
ylabel('a_k');
%adjust graphics
h3_2.Color = 'k';
h3_2.Marker = '.';

%(3)-3 N=40
a40 = computeDTFS(2,40,50);
subplot(3,1,3);
h3_3=stem(k,a40);
title('a_k (N=40)');
xlabel('k');
ylabel('a_k');
%adjust graphics
h3_3.Color = 'k';
h3_3.Marker = '.';
```

2-(b), (c)를 해결하기 위해 computeDTFS function을 만들었다. computeDTFS.m의 코드는 다음과 같다.

```
function [a] = computeDTFS(N1,N,maxind)
%computeDTFS function compute Fourier coefficients using eq 3.95 of
%O&W textbook.
n=-50:50;
x = 1*(mod(n+N1,N)<=2*N1);
k = -maxind:maxind;
a=zeros(size(k));
for ind = k
    sum=0;
    for indn = -floor(N/2):floor(N/2)
        sum = sum + x(n==indn)*exp(-1i*ind*2*pi*indn/N);
    end
    a(ind+maxind+1) = sum/N;
end
end
```

출력 결과는 다음과 같다.

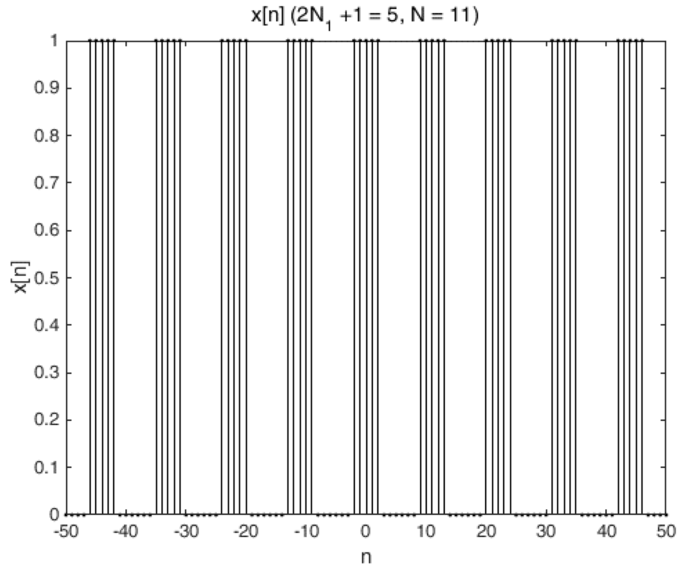

그림 1 Answer for Problem 1-(a)

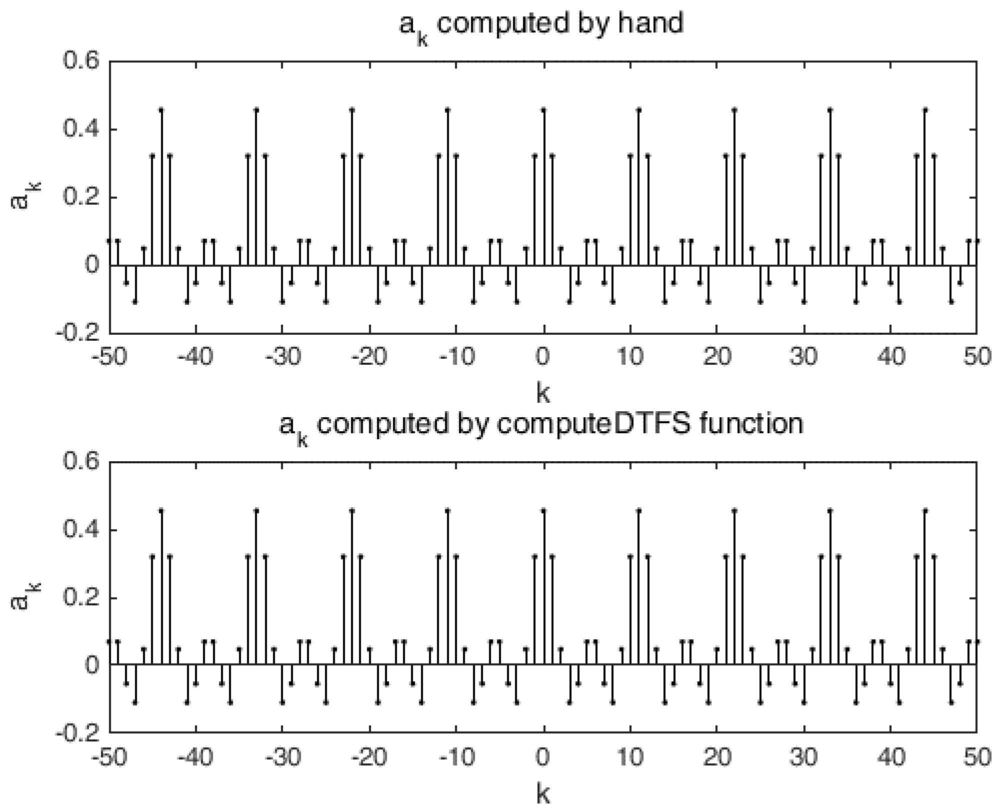

그림 2 Answer for Problem 1-(b)

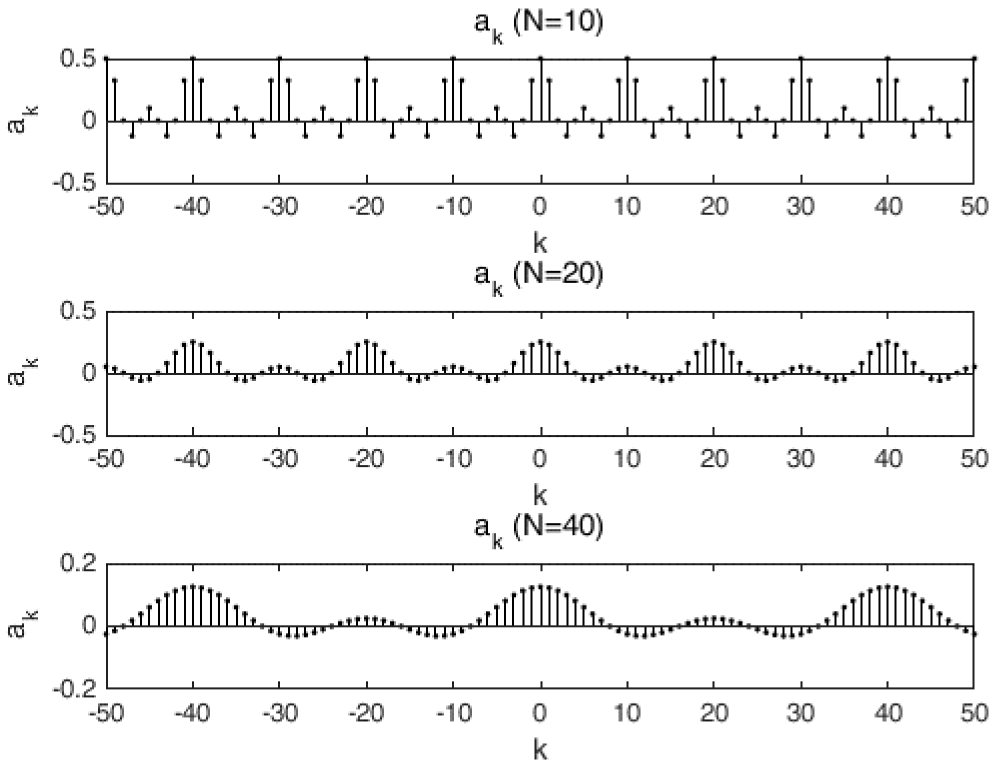

그림 3 Answer for Problem 1-(c)

1-(b)에서 a_k를 손으로 계산한 결과는 다음과 같다.

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)} & else \end{cases}$$

(자세한 계산 과정은 O&W textbook 220pg Example 3.12 에 나와있다.)

그림 2 에서 본 것과 같이, 손으로 계산한 결과와 computeDTFS 함수를 활용한 결과가 같게 나타난다.

그림 3 에서의 결과에서 나타난 결과 역시 O&W textbook 221pg 의 결과와 같게 나타남을 알 수 있다.

문제 2 Discrete-time Filters by Difference Equations

Consider an LTI system described by the first-order difference equation

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

Where a=0.268. Compute $y[n]$ for $x[n] = e^{j\pi n/5}$ by either hand or code. To validate your result, compute $\hat{x}[n] = y[n] - ay[n-1]$ using the computed $y[n]$. Plot the stem graphs of $x[n]$ and $\hat{x}[n]$ and compare them.

```
%%%%%%%%%%%%%%% prob_2_2_sol.m file for MATLAB Exercise #2 %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FILL THE CODE AND TEST HERE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear
close all

%Set domain (-D~D)
D = 25;
n = -D:D;

%Define the signal x[n]
x = exp(1i*pi*n/5);

fg = figure;
fg.Name = 'Answer for Problem 2';

subplot(2,1,1);
hx= stem(n,x);
title('x[n]=e^{-j {pi} n/5}');
xlabel('n');
ylabel('x[n]');
xlim([-20 20]);
%adjust graphics
hx.Color = 'k';
hx.Marker = '.';

%Compute y[n]
a = 0.268;
zp = D+1;
y(zp) = 0; %since y is LTI system.
for ind = 1:D
    y(zp+ind) = a*y(zp+ind-1)+x(zp+ind);
    y(zp-ind) = (y(zp-ind+1)-x(zp-ind+1))/a;
end

%Compute xhat[n]
xhat = zeros(size(n));
for ind = 2:size(n,2)
    xhat(ind) = y(ind) - y(ind-1)*a;
end
subplot(2,1,2);
hxhat=stem(n,xhat);
title('xhat[n] = y[n]-ay[n-1]');
xlabel('n');
ylabel('xhat[n]');
xlim([-20 20]);
%adjust graphics
hxhat.Color = 'k';
hxhat.Marker = '.';
```

출력 결과는 다음과 같다.

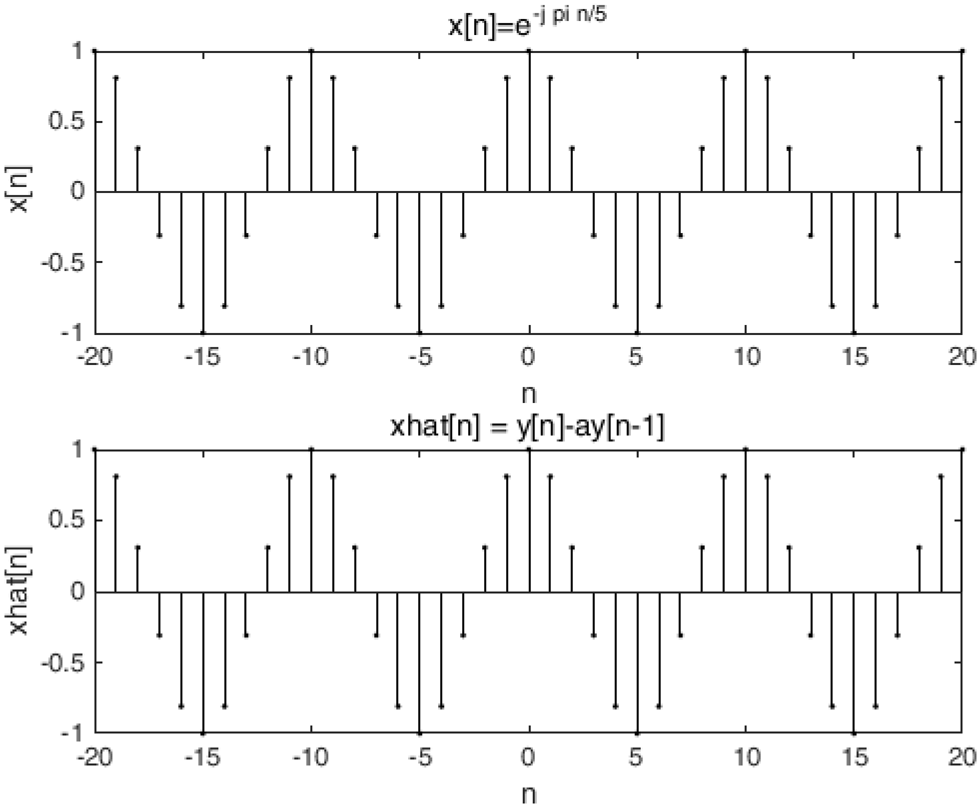

그림 4 Answer for Problem 2

그림 4에서 $x[n]$와 $\hat{x}[n]$이 같게 나타남을 알 수 있다. 이 때 유의할 것은 y가 0 이하의 범위에서 발산함에 따라 $x[n]$와 $\hat{x}[n]$이 -35 부근에서 다르게 나타나는데, 이는 y가 -10^23 범위 이상으로 되면서 int 범위 밖으로 벗어남에 따라 계산 오류가 나타나는 것으로 생각할 수 있었다.

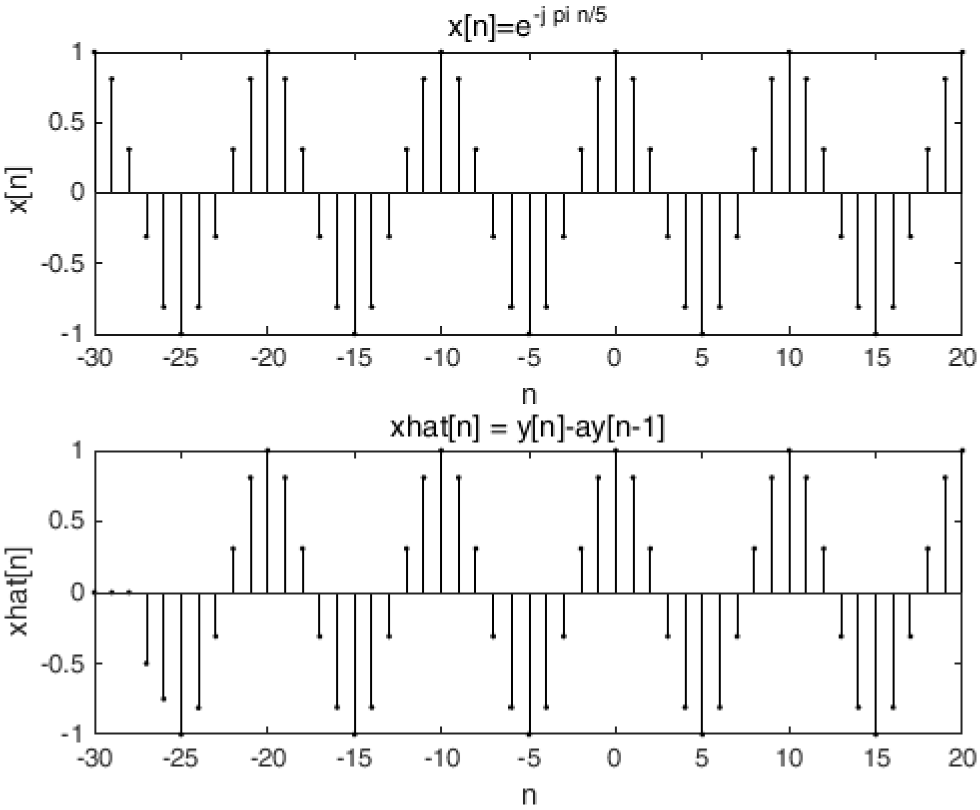

그림 5 -25 이하에서 xhat[n]이 달라진다