女好好喜欢 婕好

Date: Page: Weather:

1.在$R^4$中,求向量$x$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$下的坐标。设$\alpha_1=[1\ 1\ 1\ 1]^T$, $\alpha_2=[1\ 1\ -1\ -1]^T$, $\alpha_3=[1\ -1\ 1\ -1]^T$, $\alpha_4=[1\ -1\ -1\ 1]^T$, $x=[1\ 2\ 1\ 1]^T$.

解:设$x$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3,x_4)$

于是有 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=x$,即可得方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$$

对方程组的增广矩阵施行行初等变换:

$$B=[A\vdots b]=\left[\begin{array}{cccc:c} 1&1&1&1&1 \\ 1&1&-1&-1&2 \\ 1&-1&1&-1&1 \\ 1&-1&-1&1&1 \end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&-1&0 \\ 0&0&0&-4&1 \end{array}\right]$$

方程组有唯一解 $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{1}{4}$, $x_3=-\frac{1}{4}$, $x_4=-\frac{1}{4}$

故所求坐标为$(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$

2.已知$R^3$中的两个基:

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\ B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(1)求$B_1$到$B_2$的基变换矩阵;

(2)求在$B_1$, $B_2$下有相同坐标的所有向量。

解：(1) 设 $B_1$ 到 $B_2$ 的基变换矩阵为 $P$，则有 $B_2=B_1P$.

即 $P=B_1^{-1}B_2$.

所以 $$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&2&2\end{bmatrix}$$

(2) 设 $\xi$ 是所要求的向量，它在 $B_1$, $B_2$ 下的坐标向量均为 $x=[x_1,x_2,x_3]^T$，则有 $\xi=B_1x=B_2x$

即 $$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

解之得 $x=k[2,-1,0]^T$，$k$ 为任意实数

则 $$\xi=B_1x=k\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$$，$k$ 为任意实数.

3. 设 $R^4$ 中的向量 $x_1=[1,2,1,0]^T$，$x_2=[-1,1,1,1]^T$，$x_3=[2,-1,0,1]^T$，$x_4=[-1,-1,3,7]^T$ 分别张成子空间 $W_1=span\{x_1,x_2\}$ 和 $W_2=span\{x_3,x_4\}$ 求 $W_1+W_2$ 及 $W_1\cap W_2$ 的基和维数。

解：由题可知 $x_1$ 与 $x_2$ 线性无关，$x_3$，$x_4$ 也是线性无关

故 $\dim W_1 = 2$，$\dim W_2 = 2$

设 $\xi_1 \in W_1$，$\xi_2 \in W_2$，$\xi = \xi_1 + \xi_2$，则 $\xi \in W_1 + W_2$

$\xi_1$ 可表示为 $k_1x_1 + k_2x_2$，$\xi_2$ 可表示为 $k_3x_3 + k_4x_4$，$k_i\ (i=1,2,3,4)$ 为任意常数

故 $\xi = \xi_1 + \xi_2 = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4$

因为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -8 & -22 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　$r(A) = 4$，故 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 线性无关

所以 $W_1 + W_2$ 的基为 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，维数为 4.

由维数定理有 $\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

所以 $4 + \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2$，即 $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$

故 $W_1 \cap W_2$ 的~~基为空集~~，维数为0.

? 零空间，无基底

4. 设 $V_1$ 和 $V_2$ 分别是齐次方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 和 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间，证明：$R^n = V_1 \oplus V_2$

证明解：因为 $V_1$ 是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解空间，该齐次线性方程组的一个基础解系为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0, \cdots 0)^T$，$\alpha_2 = (-1, 0, 1, \cdots 0)^T$，$\cdots$，$\alpha_{n-1} = (-1, 0, \cdots, 1)^T$. 每一个向量只有1个分量为1，一个为-1，其余均为0.

求证 $V_1\oplus V_2=R^n$，即证 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

而 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的一个基础解系为 $\beta=(1,1,\cdots,1)^T$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta)=\begin{bmatrix}-1&-1&\cdots&-1&1\\1&0&\cdots&0&1\\0&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&-1&\cdots&-1&1\\0&-1&\cdots&-1&2\\0&0&\cdots&-1&3\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&&n\end{bmatrix}$$

易知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n-1},\beta)=n$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n-1},\beta$ 线性无关

$\dim(V_1+V_2)=n$，$\dim V_1=n-1$，$\dim V_2=1$

$R^n=V_1\oplus V_2$ 得证　$\therefore \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

$\therefore V_1\oplus V_2=R^n$

5. 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 $R^4$ 的一个基，$V_1=\mathrm{span}\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\}$，$V_2=\mathrm{span}\{\alpha_3-\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4\}$，证明：$R^4=V_1\oplus V_2$

证明：~~由于~~ 设 $2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4$ 线性相关，则存在不全为0的常数 $k_i\,(i=1,2,3,4)$ 使 $k_1(2\alpha_1+\alpha_2)+k_2\alpha_1+k_3(\alpha_3-\alpha_4)+k_4(\alpha_1+\alpha_4)=0$

即 $(2k_1+k_2+k_4)\alpha_1+k_1\alpha_2+k_3\alpha_3+(k_4-k_3)\alpha_4=0$ ①

又 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 $R^4$ 的一个基，故它们线性无关

由①式有 $2k_1+k_2+k_4=0$，$k_1=k_3=0$. $k_4-k_3=0$

即 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ 与假设矛盾

所以 $2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4$ 线性无关 为 $V_1+V_2$ 的一组基.

故 $V_1+V_2=(2k_1+k_2+k_4)\alpha_1+k_1\alpha_2+k_3\alpha_3+(k_4-k_3)\alpha_4=R^4$　$\dim(V_1+V_2)=4$

易知 $\dim V_1=2$，$\dim V_2=2$，$\dim(V_1+V_2)=4$

~~由维~~ 故 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

所以 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$

所以 $R^4=V_1\oplus V_2$ 得证.

对 $\forall k$，及 $\alpha,\beta\in V^n$，有 $T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta$，$T(k\alpha)=kT\alpha$，$\xi=T\alpha\in V^m$

Date　　　Page　　　Weather

$V^n\to V^m\to V^r$

6. 设 $T_1$ 是 $V^n$ 到 $V^m$ 的线性变换，$T_2$ 是 $V^m$ 到 $V^r$ 的线性变换，定义 $V^n$ 到 $V^r$ 的变换 $T_2\cdot T_1$ 为 $(T_2\cdot T_1)\alpha=T_2(T_1\alpha)$，$\forall\alpha\in V^n$。

证明：$T_2\cdot T_1$ 是线性变换。

证：1° 对 $\forall\alpha\in V^n$，$\beta\in V^n$ 由题有 $T_1(\alpha+\beta)=T_1\alpha+T_1\beta$，$T_2(T_1\alpha+T_1\beta)=T_2(T_1\alpha)+T_2(T_1\beta)$

$\cancel{(T_2\cdot T_1)(\alpha+\beta)=T_2[T_1(\alpha+\beta)]=T_2(T_1\alpha+T_1\beta)=T_2T_1\alpha+T_2T_1\beta}$

变换 $T_2\cdot T_1$ 满足 $(T_2\cdot T_1)(\alpha+\beta)=T_2(T_1\alpha)+T_2(T_1\beta)$

2° 对任意数 $k$ 有

$(T_2\cdot T_1)(k\alpha)=T_2[T_1k\alpha]=T_2(kT_1\alpha)=kT_2\cdot T_1\alpha$

$T_1(k\alpha)=kT_1\alpha$，$T_2(kT_1\alpha)=kT_2(T_1\alpha)$

由 1°、2° 可证 $T_2\cdot T_1$ 是线性变换。

$T_2\cdot T_1(k\alpha)=kT_2(T_1\alpha)$

7. 已知 $R^3$ 的线性变换 $T$ 在基 $B_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ 下的矩阵是 $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，

求 $T$ 在基 $B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ 下的矩阵。

解：设 $T$ 在基 $B_1$ 下的矩阵为 $A$，在 $B_2$ 下的矩阵为 $A_2$，

由题有 $T(B_1)=B_1A_1=B_2A_2$，故 $A_2=B_2^{-1}B_1A_1$

$$A_2=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\3&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&2&2\\-1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&3&-5\\-1&0&3\end{bmatrix}$$

所求矩阵为 $\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&3&-5\\-1&0&3\end{bmatrix}$

8. $V$ 的变换 $T$ 称为可逆的，如果存在 $V$ 的变换 $S$，使 $T\cdot S=S\cdot T=I$，这时 $S$ 称为 $T$ 的逆变换，记为 $T^{-1}$，证明 (1) 若线性变换 $T$ 是可逆的，则 $T^{-1}$ 也是线性变换；(2) $T$ 的特征值一定不为零、(3) 若 $\lambda$ 是 $T$ 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $T^{-1}$ 的特征值

$T^{-1}(T\alpha+T\beta)=T^{-1}\cdot T(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$

$=T^{-1}(T\alpha)+T^{-1}(T\beta)$

~~$\alpha+\beta=T^{-1}T(\alpha+\beta)=T^{-1}(T\alpha+T\beta)$~~

~~$=T^{-1}(T\alpha)+T^{-1}(T\beta)$~~

$T^{-1}(kT\alpha)=\cancel{kT^{-1}(T\alpha)}\ T^{-1}Tk\alpha=k\alpha$

$=kT^{-1}(T\alpha)$

又若T在基B下的矩阵是A，那么$T^{-1}$在B下的矩阵是什么？

证明：(1) $\forall \alpha,\beta\in V$ 有 $T^{-1}(\alpha+\beta)=T^{-1}(TT^{-1}\alpha+TT^{-1}\beta)$

$=T^{-1}TT^{-1}\alpha+T^{-1}TT^{-1}\beta=T^{-1}\alpha+T^{-1}\beta$

对任意数k，有 $T^{-1}(k\alpha)=T^{-1}(kTT^{-1}\alpha)=kT^{-1}TT^{-1}\alpha=kT^{-1}\alpha$

所以$T^{-1}$也是线性变换

(2) 假设T的特征值有一个为0. 对应特征向量为$\xi$. 且$\xi\neq 0$

进行逆变换

则有 $T\xi=\lambda\xi$，两边同 $T^{-1}$ 有 $T^{-1}T\xi=\lambda T^{-1}\xi$

即 $\xi=\lambda T^{-1}\xi$. 又$\lambda=0$. 故 $\xi=0$，矛盾

所以T的特征值一定不为零.

逆变换

(3) 设$\lambda$对应的特征值为$\xi_0$，则有 $T\xi_0=\lambda\xi_0$. 两边 $T^{-1}$

$\xi_0=\lambda T^{-1}\xi_0$. 于是 $T^{-1}\xi_0=\frac{1}{\lambda}\xi_0$

故 $\frac{1}{\lambda}$是 $T^{-1}$的特征值.

因为T在基B下的矩阵是A　　进行逆变换

故 $TB=BA$. 两边同时 $T^{-1}$ 有 $T^{-1}TB=T^{-1}BA$

即 $T^{-1}BA=B$.　~~$T^{-1}B=BA^{-1}$~~　~~$BAP=B$~~　$BAP=B$

~~所以$T^{-1}$在B下的矩阵是A~~　　$P=$　　$P=A^{-1}$

设$T^{-1}$在B下的矩阵为P

9. 设T是复数域上线性空间V的线性变换. 已知V的基B和T在B下的矩阵A如下，求T的特征值和特征向量.

(1) $B=[\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3]$，$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

(2) $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$，$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 1\\ 1 & \lambda+1 & -1\\ 1 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0 & 3-\lambda\\ 1 & \lambda+1 & -1\\ 1 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$

故 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$

$\lambda=3$ 时，$3E-A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解析 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$

$\lambda_1$ 对应的特征向量 $\xi_1=k_1(-1,1,3)^T$

$\lambda=-1$ 时，$-E-A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

$\lambda_2$ 对应的特征向量 $\xi_2=k_2(1,-1,1)^T$

$\lambda=1$ 时，$E-A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\lambda_3$ 对应的特征向量 $\xi_3=k_3(1,0,1)^T$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -4\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)-20=(\lambda-7)(\lambda+2)=0$

$\lambda_1=7$，$\lambda_2=-2$

$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -5 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\lambda_1$ 对应特征向量 $\xi_1=k_1(1,1)^T$

$\lambda_2E-A=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ -5 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\lambda_2$ 对应特征向量 $\xi_2=k_2(4,-5)$

10. 求下列方阵的最小多项式：

$\begin{pmatrix}3 & 1 & \\ & 3 & 1\\ & & 3\end{pmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & 1 & & \\ -4 & -1 & & \\ & & 2 & 1\\ & & -1 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ -4 & -1 & -1 & 1\\ & & 2 & 1\\ & & -1 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2 & 2 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 4 & 1\\ & & & 4\end{bmatrix}$

$(\lambda-1)(\lambda-4)$

$(\lambda-4)^2$

$(\lambda-3)^3$　　$(\lambda-1)^4$　　$(\lambda-1)(\lambda-4)^2$

$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$

$(\lambda-1)^2$

$(\lambda-1)^2$ $>(\lambda-1)^2$

11. 满足下述条件的方阵A是否可对角化

(1) A是幂零矩阵　(2) $A^k=I$ $(k\geq 2)$　(3) $A^2+A=2I$

(1) $A^k=0$ $(k>1)$　$m_A(\lambda)=\lambda^k$　有重根，不可对角化

(2) $A^k-I=0$　$m_A(\lambda)=\lambda^k-1$，令 $m_A(\lambda)=0$.

~~k为奇数时 没有~~ 没有重根，可对角化

(3) $A^2+A-2I=0$，$m_A(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$　令 $m_A(\lambda)=0$. 可对角化

$\lambda_1=-2, \lambda_2=1$

没有重根

12. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $g(A)=A^8-9A^6+A^4-3A^3+4A^2+I$

解：A的特征多项式

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

又 $g(\lambda)=\lambda^8-9\lambda^6+\lambda^4-3\lambda^3+4\lambda^2+1$. 用 $g(\lambda)$ 除 $f(\lambda)$ 有

$$g(\lambda)=(\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda-3)(\lambda^5+5\lambda^4+9\lambda^3+13\lambda^2+18\lambda+23)$$
$$+\ 32\lambda^2-107\lambda+70$$

13. $f(\lambda), m(\lambda)$ 分别表示矩阵A的特征多项式和最小多项式.

确定A的可能的Jordan标准形.

(1) $f(\lambda)=(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$  $m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$ ……

(2) $f(\lambda)=(\lambda-3)^3(\lambda+2)^3$.  $m(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+2)$

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & \\ & 3 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & -2 & 1 & \\ & & & & -2 & 1 \\ & & & & & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ & 3 & 1 & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & -2 & 1 & \\ & & & & -2 & 1 \\ & & & & & -2 \end{bmatrix}$

14. 求可逆P. 使 $P^{-1}AP$ 为Jordan矩阵. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

解:

$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

故A有两个特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$

对于 $\lambda_1=1$. 求解 $(A-I)x=0$ 解得其基础解系 $x_1=[1\ 0\ 2]^T$

对于 $\lambda_2=2$. 求解 $(A-2I)x=y$ (*)

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 2 & 0 & -1 & y_2 \\ 2 & 2 & -2 & y_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 2 & 0 & -1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}y_3-y_1 \end{array}\right]$

$r(A-2I)=2$.  $n-r(A-2I)=1<2$. 故 $\lambda_2$ 只有一个特征向量 $x_2=[1\ 1\ 2]^T$

上述齐次方程有解需要满足 $\frac{1}{2}y_3-y_1=0$. 即 $y_3=2y_1$, $x_2$ 中第1项. 3项满足

故令 $y=x_2$, ~~求得 $x_3=[1\ 1\ 1]^T$~~ 解*, 任取解

$x_3=[1\ 1\ 1]^T$

取 $P=[x_1\ x_2\ x_3]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则有 $AP=[x_1\ \ 2x_2\ \ x_2+2x_3]$

$=P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

15、$V^4$ 由函数 $e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}$ 张成的线性空间，求 $V^4$ 的线性变换 $D=\frac{d}{dx}$ 的 Jordan 标准型

解：$[De^x \quad Dxe^x \quad Dx^2e^x \quad De^{2x}] = [e^x, (x+1)e^x, (2x+x^2)e^x, 2e^{2x}]$

$$= [e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3(2-\lambda)$$

存在三重特征值1 和单重特征值2

$\lambda=2$ 时　特征向量为 $x_1=[0,0,0,1]^T$　　$Ax_1=2x_1$

$\lambda=1$ 时　$(A-I)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$r(A-I)=3$

有 $4-3=1$ 个特征向量.

$x_2=$ ~~$[0,0,1,0]^T$~~ $[1,0,0,0]^T$　　$Ax_2=x_2$