Элементы теории функций комплексного переменного

Расчетно-графическая работа

Разбор типового варианта

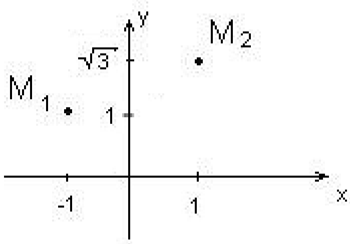
Задание 1.

1) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

2) Найти: а). $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$; б). z_2 / z_1; в). $\sqrt[3]{z_1}$

Решение.

1) Изобразим числа на комплексной плоскости. При этом числу $z_1 = -1 + i$ будет соответствовать точка $M_1(-1;\,1)$, числу $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ - точка $M_2(1;\,\sqrt{3})$.



Для нахождения модуля и аргумента заданных чисел воспользуемся формулами:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{при } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0,\ y > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Получим:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,,\ \varphi_1 = \arg z_1 = arctg\frac{-1}{1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}\,,$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2\,,\ \varphi_2 = \arg z_2 = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}\,.$$

Чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической и показательной применим формулы:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ \text{и} \ z = re^{i\varphi}\,.$$

Использовав ранее полученные результаты, получим:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\,,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\,.$$

2) а) $\bar{z}_1 \cdot z_2^2 = (-1-i)\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 = (-1-i)\cdot\left(1^2 + 2\sqrt{3}i + \left(\sqrt{3}i\right)^2\right) = (-1-i)\cdot\left(1+2\sqrt{3}i-3\right) =$

$$=(-1-i)\cdot\left(2\sqrt{3}i-2\right)=-2\sqrt{3}i+2-2\sqrt{3}i^2+2i=-2\sqrt{3}i+2+2\sqrt{3}+2i=$$
$$=\left(2+2\sqrt{3}\right)+\left(2-2\sqrt{3}\right)i;$$

б) $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{-1+i}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\dfrac{-1-i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i^2}{(-1)^2-i^2}=\dfrac{-1-i-\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{1+1}=$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i;$$

в) Применим формулу $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,(n-1).$

$$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right)$$

при $k=0$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi/4}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right);$

при $k=1$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi/4+2\pi}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right);$

при $k=2$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi/4+4\pi}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12}+i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right)=$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z)=\cos z,\ z_0=\dfrac{\pi}{3}+3i$;

б) $f(z)=Arctgz,\ z_0=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+3i\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos 3i-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin 3i=\dfrac{1}{2}\mathrm{ch}3-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sh}3;$

б) По определению $\operatorname{Arctg} z=-\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i-z}{i+z}$.

$$\frac{i-z}{i+z}=\frac{i-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=i\left(2+\sqrt{3}\right),$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{i-z}{i+z}=-\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,i\left(2+\sqrt{3}\right)=-\frac{i}{2}\left(\ln\left|i\left(2+\sqrt{3}\right)\right|+i\arg\left(i\left(2+\sqrt{3}\right)\right)+2\pi k i\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\left|i\left(2+\sqrt{3}\right)\right|=2+\sqrt{3}\\ \arg\left(i\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=-\frac{i}{2}\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-\frac{i}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z)=\sin z^2$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Решение.

Выделим действительную и мнимую часть функции $f(z)$:

$$f(z)=\sin z^2=\sin(x+iy)^2=\sin(x^2-y^2+i2xy)=\sin(x^2-y^2)\cos(i\cdot 2xy)+$$
$$+\cos(x^2-y^2)\sin(i\cdot 2xy)=\sin(x^2-y^2)ch(2xy)+i\cos(x^2-y^2)sh(2xy).$$

Таким образом, получим:

$$u=\sin(x^2-y^2)ch(2xy);$$
$$v=\cos(x^2-y^2)sh(2xy).$$

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ и выясним, в окрестности каких точек они существуют и непрерывны, а также в каких точках плоскости выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(\sin(x^2-y^2)ch(2xy))'_x=2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy)+2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=(\cos(x^2-y^2)sh(2xy))'_y=2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy)+2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy),$$

т.е. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ для любых действитедбных х и у, и эти частные производные непрерывны во всей плоскости R^2.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\sin(x^2-y^2)ch(2xy))'_y=-2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy)+2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=(\cos(x^2-y^2)sh(2xy))'_x=-2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy)+2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy),$$

т.е. $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ для любых действитедьных х и у, и эти частные производные непрерывны во всей плоскости R^2.

Так как условия Коши-Римана выполняются для любой пары действительных чисел (x,y) и частные производные $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности любой точки (x,y), то производная $f'(z)$ существует в любой точке $z=x+iy$ комплексной плоскости С.

Найдем эту производную:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy)+2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy)-$$
$$-i\cdot 2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy)+i\cdot 2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy)=$$

$= 2x(\cos(x^2 - y^2)\cos(i\cdot 2xy) - \sin(x^2 - y^2)\sin(i\cdot 2xy)) + 2iy(-\sin(x^2 - y^2)\sin(i\cdot 2xy) +$
$+ \cos(x^2 - y^2)\cos(i\cdot 2xy)) = 2x\cos(x^2 - y^2 + 2ixy) + 2yi\cos(x^2 - y^2 + 2ixy) =$
$= 2x\cos(x+iy)^2 + 2yi\cos(x+iy)^2 = 2(x+iy)\cos(x+iy)^2 = 2z\cos z^2.$

Итак, $f'(z) = (\sin z^2)' = 2z\cos z^2, \ \forall \ z \in C$.

Действительная часть производной:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos(x^2 - y^2)ch(2xy) + 2y\sin(x^2 - y^2)sh(2xy),$$

мнимая часть производной:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2x\sin(x^2 - y^2)sh(2xy) + 2y\cos(x^2 - y^2)ch(2xy).$$

Задание 4. Определить вид кривой $z = 5\mathrm{tg}t - 3i\sec t$.

Решение.

$$z(t) = x(t) + iy(t) = 5tgt - 3i\sec t.$$

Откуда $\begin{cases} x = 5\mathrm{tg}t, \\ y = -3\sec t. \end{cases}$

Выразим t из каждого уравнения: $\begin{cases} t = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{5}, \\ t = \arccos\left(-\dfrac{3}{y}\right). \end{cases}$

Исключим t из уравнений:

$\arccos\left(-\dfrac{3}{y}\right) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{5}.$

$\cos\left(\arccos\left(-\dfrac{3}{y}\right)\right) = \cos\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{5}\right),$

$\cos\left(\pi - \arccos\dfrac{3}{y}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + 5^2}}, \ -\dfrac{3}{y} = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+5^2}},$

$\dfrac{25y^2}{9} = x^2 + 25,$

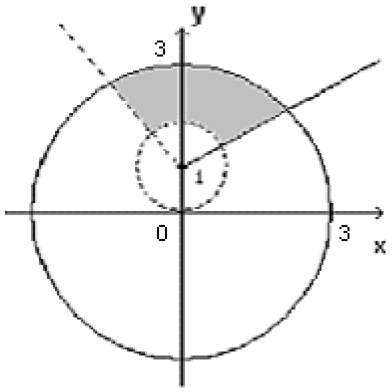
$\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{25} = 1$ - уравнение гиперболы.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами:

а). $\begin{cases} 1 < |z - i| \le 3, \\ \dfrac{\pi}{6} \le \arg(z - i) < \dfrac{2\pi}{3}; \end{cases}$

б). $\begin{cases} \left|z^2 - 4\right| \le 4, \\ \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$

а). Искомым множеством является пересечение кольца $1 < |z - i| \le 3$ и внутренней части угла $\frac{\pi}{6} \le \arg(z - i) < \frac{2\pi}{3}$:



б). Кривую $\left|z^2 - 4\right| \le 4$ запишем в декартовых координатах:

$$z^2 - 4 = (x + iy)^2 - 4 = x^2 + 2ixy - y^2 - 4 = (x^2 - y^2 - 4) + 2ixy$$

$$\left|z^2 - 4\right| = \sqrt{\left(x^2 - y^2 - 4\right)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{\left(x^2 - y^2\right)^2 - 8\left(x^2 - y^2\right) + 16 + 4x^2y^2} =$$

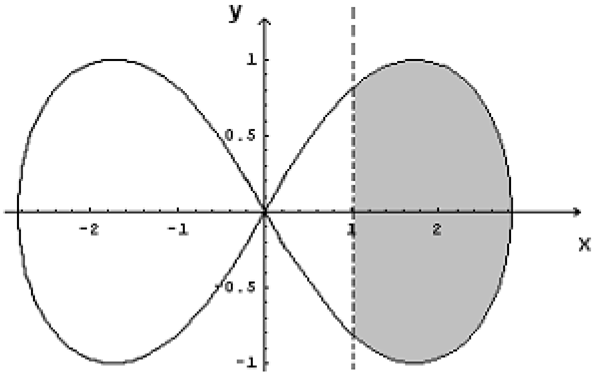
$$= \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^2 - 8\left(x^2 - y^2\right) + 16};$$

Итак, $\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^2 - 8\left(x^2 - y^2\right) + 16} = 4$.

Или $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 8\left(x^2 - y^2\right) = 0$,

$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8\left(x^2 - y^2\right)$ - Лемниската Бернулли.

Неравенство $\left|z^2 - 4\right| \le 4$ определяет точки, лежащие на лемнискате и внутри ее. Неравенство $\operatorname{Re} z > 1$ определяет точки, лежащие правее прямой $x = 1$. Искомым множеством является пересечение этих областей:



Задание 6. Проверить, может ли функция $u = e^{2x}\cos 2y$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Решение.

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4e^{2x}\cos 2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4e^{2x}\cos 2y.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{2x}\cos 2y - 4e^{2x}\cos 2y = 0,\ \forall\ (x, y) \in R^2.$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ гармоническая в плоскости C, и, значит существует такая аналитическая в C функция $f(z)$, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

В силу условий Коши-Римана имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{2x}\sin 2y. \qquad (2)$$

Интегрируем уравнение (1) по переменной y, находим мнимую часть с точностью до слагаемого $C(x)$:

$$v = e^{2x}\sin 2y + C(x). \qquad (3)$$

Продифференцируем (3) по x:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y + C'(x).$$

Сопоставляя результат с (2), получаем $C'(x) = 0$, откуда $C(x) = A$.

Таким образом, имеем

$$v = e^{2x} \sin 2y + A \text{ и}$$

$$f(z) = u + iv = e^{2x} \cos 2y + ie^{2x} \sin 2y + iA = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) + iA = e^{2x} e^{2iy} + iA =$$
$$= e^{2(x+iy)} + iA = e^{2z} + iA.$$

Учитывая условие $f(0) = 1$, получаем $A = 0$.

Итак, $f(z) = e^{2z}$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область $D: \begin{cases} |\operatorname{Re} z| \le 1, \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$ плоскости Z.

Решение.

Для того чтобы найти образ области D при отображении $w = f(z)$, нужно найти образ границы L области D, затем взять произвольную точку из области D и найти ее образ.

Правило для определения уравнения образа кривой.

Пусть в области z кривая задана $F(x, y) = 0$. Чтобы найти уравнение образа $\Phi(u, v) = 0$ этой кривой в плоскости w при отображении с помощью функции $w = f(z) = u + iv$, нужно исключить x и y из уравнений:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{или} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

то параметрические уравнения её образа при отображении $w = f(z) = u + iv$ будут

$$\begin{cases} u = u(x(t), y(t)) = U(t) \\ v = v(x(t), y(t)) = V(t) \end{cases}$$

В данном примере граница области D состоит из трех частей: $L_1: x = -1,\ y \ge 0,$ $L_2: x = 1,\ y \ge 0,$ $L_3: y = 0, -1 \le x \le 1$. Найдем ее образ при данном отображении.

Выделим и действительную и мнимую части функции.

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2};$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Возьмем первую часть границы и найдем ее образ. Составим систему (1):

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \Rightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{1}{1+y^2}, \\ v = -\dfrac{y}{1+y^2} \end{cases} \\ x = -1, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Возведем в квадрат первое и второе уравнения системы и сложим:

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{1+y^2} = -u \, .$$

$$y \geq 0 \Rightarrow v \leq 0,$$

$$u = -\frac{1}{1+y^2} \leq 0$$

Окончательное уравнение границы $(u+\dfrac{1}{2})^2 + v^2 = \dfrac{1}{4}$ при $u \leq 0, \ \ v \leq 0$.

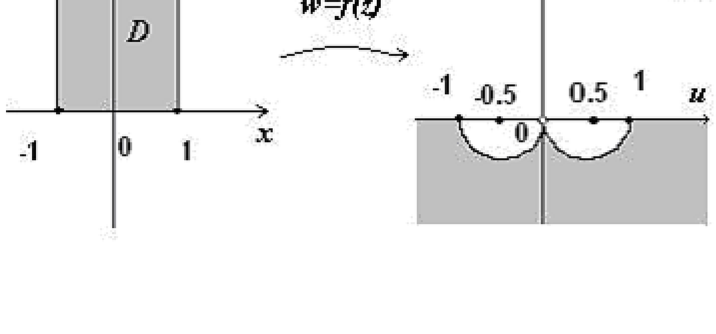
Аналогично находим образ L_2: $(u-\dfrac{1}{2})^2 + v^2 = \dfrac{1}{4}$ при $u \geq 0, \ \ v \leq 0$.

Образ L_3 находим из системы:

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{x}, \\ v = 0 \end{cases} \\ y = 0, \ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Следовательно, образ границы L_3: $v = 0, \ \ u \geq 1$ при $0 < x \leq 1$ и $u \leq -1$ при $-1 \leq x < 0$; $u \neq 0$. Изобразим образы границ $L_1, \ L_2, \ L_3$ на плоскости W.

Для изображения образа области D на плоскости W возьмем контрольную точку. Точка $z = i$ обратится в точку $w = -i$.



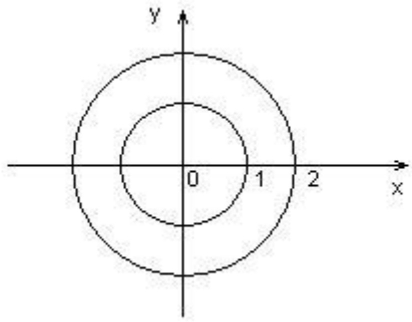
Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = 1$.

Решение.

а) Функция $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -2$. Отметим их на плоскости Z, проведем 2 окружности с центром в точке $z_0 = 0$, проходящие соответственно через точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -2$. Следовательно, имеется три области, в каждой из которых функция $f(z)$ является аналитической:



1) $|z| < 1$;

2) кольцо $1 < |z| < 2$;

3) область $|z| > 2$, являющаяся внешностью круга $|z| \le 2$.

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей, используя формулу

$$(1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots + t^n + \ldots$$

справедливую при $|t| < 1$.

Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

1) Рассмотрим круг $|z| < 1$. Запишем элементарные дроби $\dfrac{1}{z-1}$ и $\dfrac{1}{z+2}$ в виде $\dfrac{1}{1-t}$, где $|t| < 1$ при $|z| < 1$. Представим функцию $f(z)$ следующим образом:

$f(z) = -\dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}$. Теперь к таким дробям применима формула (1).

Так как в рассматриваемой области $|z| < 1$, то в силу формулы (1)

$\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots$. Так как $|z| < 1$ и тем более $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$ (если $|z| < 1$, то тем более $|z| < 2$), значит, в силу формулы (1) $\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}} = 1 - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^3}{8} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^n}{2^n} + \ldots$.

Следовательно,

$$-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=-1-z-z^2-z^3-\ldots-z^n-\ldots+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots=$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3-\ldots-\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n-\ldots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1)z^n$$

Полученное разложение содержит только правильную часть ряда Лорана.

2) Рассмотрим кольцо $1<|z|<2$. В этой области запишем рассматриваемую функцию в виде $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$. В знаменателях дробей мы записали выражения вида $1-t$, где $|t|<1$.

Так как $|z|>1$, то $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ и в силу формулы (1) $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots$. Так как $|z|<2$, то, как и в предыдущем случае, $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\ldots$.

Следовательно,

$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Полученное разложение содержит и правильную, и главную часть ряда Лорана.

3) Рассмотрим область $|z|>2$. В этой области $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, поэтому в силу формулы (1)

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots.$$

В рассматриваемой области $\left|\frac{z}{2}\right|>1$, значит $\left|\frac{2}{z}\right|<1$ и поэтому

$$\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots+(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\ldots.$$

Функцию $f(z)$ представим в виде $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$. В силу полученных разложений имеет место равенство

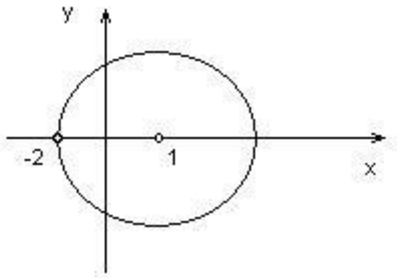
$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots+1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+..+(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{z^n}.$$

Полученное разложение содержит только главную часть ряда Лорана.

б) Функция $f(z)$ имеет 2 особые точки $z_1=1$ и $z_2=-2$, отметим их на плоскости Z. Точка $z_1=1$ совпадает с точкой $z_0=1$. Проводим окружность с центром в точке $z_0=1$, проходящую через точку $z_2=2$.

Следовательно существуют две области, в каждой из которых функция $f(z)$ является аналитической:



1) кольцо $1<|z-1|<3$

2) кольцо $|z-1|>3$

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей, используя формулу (1). Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}$$

1) Требуется получить разложение функции $f(z)$ по степеням z–1 в области $1<|z-1|<3$. Первая дробь уже представляет собой степень $z-1$. Для того, чтобы вторую дробь представить в искомом виде, сделаем замену $z-1=t$, тогда $z=t+1$ и $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}$. Дробь $\frac{1}{t+3}$ разложим по степеням t как в предыдущем примере. При $0<|t|<3$ воспользуемся представлением:

$$\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{9}-\frac{t^3}{27}+\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{3^n}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^n}{3^{n+1}};$$

Сделаем обратную замену. Получим, что при $0<|z-1|<3$ функция $f(z)$ представима в виде

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Полученное разложение содержит правильную и главную часть ряда Лорана.

2) Аналогично, сделав замену $z-1=t$, получаем представление дроби $\frac{1}{t+3}$ в области $|t|>3$

$$\frac{1}{t+3}=\frac{1}{t}\frac{1}{1+\frac{3}{t}}=\frac{1}{t}\left(1-\frac{3}{t}+\frac{9}{t^2}-\frac{27}{t^3}+\ldots+(-1)^n\frac{3^n}{t^n}+\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{t^n}$$

Сделав обратную замену, получаем, что при $|z-1|>3$ функция $f(z)$ представима в виде:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{(z-1)^n}=\frac{2}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{(z-1)^n}.$$

В первом случае главная часть ряда Лорана содержит только одно слагаемое, во втором случае ряд Лорана состоит только из одной главной части.

Задание 9. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$ в окрестности особой точки $z=1$.

Решение. Воспользуемся известным разложением:

$$f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}=e^{1+\frac{1}{z-1}}=e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}=e\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\ldots+\frac{1}{n!(z-1)^n}+\ldots\right)=e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}.$$

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}+\dfrac{2}{z}$;

б) $f(z)=\dfrac{1-\cos 6z}{z^2}$;

в) $f(z)=(z-i)^3\sin\dfrac{1}{2(z-i)}$.

Решение.

а). Особой точкой функции является точка $z_0=0$. Чтобы определить вид особой точки разложим функцию в ряд Лорана по степеням z:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}+\frac{2}{z}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}=$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}=\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots+\frac{2}{z}=$$

$$=\underbrace{\frac{5}{2z}+\frac{1}{1!z^2}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots}_{\text{правильная часть}}$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, значит $z_0=0$ - полюс. Порядок высшей отрицательной степени $(n=2)$ определяет порядок полюса. Следовательно, $z_0=0$ - полюс кратности 2. Вычет найдем, используя формулу $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$, тогда $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{5}{2}$.

б). Особой точкой функции является точка $z_0=0$. Чтобы определить вид особой точки используем признак поведения функции в особой точке.

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos 6z}{z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2\sin^2 3z}{z^2}=18$, значит $z_0=0$ устранимая точка и, следовательно $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=0$.

в). Особой точкой функции является точка $z_0=i$. Чтобы определить вид особой точки используем разложение функции в ряд Лорана по степеням $z-i$:

$$f(z)=(z-i)^3\sin\frac{1}{2(z-i)}=(z-i)^3\left(\frac{1}{2(z-i)}-\frac{1}{3!(2(z-i))^3}+\frac{1}{5!(2(z-i))^5}-\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(2(z-i))^{2n+1}}+\ldots\right)=\frac{(z-i)^2}{2}-\frac{1}{2^3 3!}+\underbrace{\frac{1}{5!2^5(z-i)^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!2^{2n+1}(z-i)^{2n-2}}+\ldots}_{\text{главная часть}}.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, значит $z_0=i$ - существенно особая точка. Тогда $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z)=C_{-1}=0$, т.к. коэффициент при $\dfrac{1}{z-i}$ равен нулю.

Задание 11. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

а) $\int\limits_{AB} z^3dz$, где AB - отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=i$.

б) $\int\limits_{ABC} \bar{z}\,dz$, где ABC - ломаная, $z_A=0$, $z_B=i$, $z_c=1+i$.

в) $\int\limits_{L} z^2\,dz$, где L - дуга окружности $|z|=1,\ 0\le \arg z\le\pi$.

г) $\int\limits_{L} e^{\bar{z}}\,dz$, где L - отрезок прямой $y=-x$, соединяющий точки A и B, $z_A=0$ и $z_B=\pi-i\pi$.

Решение.

а) Так как подынтегральная функция $f(z)=z^3$ аналитична всюду, то можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница: $\int\limits_{AB} z^3dz=\int\limits_0^i z^3dz=\left.\dfrac{z^4}{4}\right|_0^i=\dfrac{i^4}{4}-0=\dfrac{1}{4}$.

б) Подынтегральная функция $f(z)=\bar{z}$ определена и непрерывна всюду, ломаная ABC представляет собой кусочно-гладкую кривую, поэтому искомый интеграл сводится к вычислению двух криволинейных интегралов по координатам по формуле:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\int\limits_{\Gamma} udx-vdy+i\int\limits_{\Gamma} vdx+udy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{ABC}\bar{z}\,dz=\int\limits_{ABC}(x-iy)(dx+idy)=\int\limits_{ABC} xdx+ydy+i\int\limits_{ABC}-ydx+xdy.$$

Воспользуемся свойством аддитивности криволинейного интеграла:

$$\int\limits_{ABC} f(z)dz=\int\limits_{AB} f(z)dz+\int\limits_{BC} f(z)dz.$$

На отрезке AB $x=0$, значит $dx=0$, $y\in[0,1]$. Поэтому $\int\limits_{AB}\bar{z}\,dz=\int\limits_{AB} y\,dy=\left.\dfrac{y^2}{2}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}$.

На отрезке BC $y=1$, $dy=0$, $0\le x\le 1$. Поэтому

$$\int\limits_{BC} \bar{z}\,dz = \int\limits_{BC} x\,dx + i\int\limits_{BC}(-1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - ix\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - i\,.$$

Искомый интеграл $\int\limits_{ABC} \bar{z}\,dz$ равен $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - i = 1 - i$.

в) Положим $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$. Следовательно,

$$\int\limits_L z^2\,dz = \int\limits_0^{\pi} e^{2i\varphi} ie^{i\varphi} d\varphi = \left.\frac{1}{3}e^{3i\varphi}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{3}e^{3i\pi} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^{i\pi} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\cos\pi + i\sin\pi) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\,.$$

г) Зададим линию L параметрическими уравнениями: $x = t$, $y = -t$, $z = t - it$, $0 \le t \le \pi$.

Для кривой, заданной параметрическими уравнениями $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, справедлива формула $\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt$.

Поэтому $\int\limits_L e^{\bar{z}}\,dz = \int\limits_0^{\pi} e^{t+it}(1-i)dt = \left.\frac{1-i}{1+i}e^{(1+i)t}\right|_0^{\pi} = -i\big(e^{\pi}(\cos\pi + i\sin\pi) - 1\big) = (e^{\pi} + 1)i$.

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

а) $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3}$;

б) $\oint\limits_{|z|=2\pi} \frac{z\cos z\,dz}{z^2 - \pi^2}$.

Решение.

а). Подынтегральная функция имеет внутри контура интегрирования две особые точки $z = 0$ и $z = -1$. Тогда $\oint\limits_L \frac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}\limits_{z=-1} f(z)\right)$.

Определим вид особых точек и найдем в них вычеты.

$\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z+1)^3} = 1$, следовательно $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) = 0$.

$\lim\limits_{z\to -1} \frac{\sin z}{z(z+1)^3} = \infty$, следовательно $z = -1$ - полюс.

Так как $\lim\limits_{z\to -1} \frac{\sin z}{z(z+1)^3}(z+1)^3 = 1$, то $z = -1$ - полюс порядка $n = 3$.

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=-1} f(z) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)^3\frac{\sin z}{z(z+1)^3}\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{\sin z}{z}\right]'' = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z\cdot\cos z - \sin z}{z^2}\right]' =$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2(\cos z - z\sin z-\cos z)-2z(z\cdot\cos z-\sin z)}{z^4}\right]=-\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2\cdot\sin z+2z\cos z-2\sin z}{z^3}\right]=$$
$$=\frac{\sin 1-2\cos 1}{2}.$$

Таким образом, $\oint\limits_L \frac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3}=2\pi i\left(\frac{\sin 1-2\cos 1}{2}\right)=\pi i(\sin 1-2\cos 1)$.

б). Подынтегральная функция имеет внутри контура интегрирования две особые точки $z=\pi$ и $z=-\pi$. Тогда $\oint\limits_L \frac{z\cos z\,dz}{z^2-\pi^2}=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-\pi} f(z)\right)$.

Так как $z=\pi$ и $z=-\pi$ - полюсы первого порядка, то для вычисления вычетов применим формулу $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, где $\varphi(z)=z\cos z$, $\psi(z)=z^2-\pi^2$, $\psi'(z)=2z$.

$\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)=\left.\frac{z\cos z}{2z}\right|_{z=\pi}=-\frac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}_{z=-\pi} f(z)=\left.\frac{z\cos z}{2z}\right|_{z=-\pi}=-\frac{1}{2}$

Таким образом, $\oint\limits_L \frac{z\cos z\,dz}{z^2-\pi^2}=2\pi i\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-2\pi i$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

а) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin 5x}{x^2+4}dx$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.

Решение.

а) Сформулируем правило, позволяющее вычислять несобственные интегралы от рациональной функции действительного переменного с помощью теории функций комплексного переменного:

Пусть $R(x)$ - рациональная функция, $R(x)=\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}$, где $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ - многочлены степени k и n соответственно. Если функция $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $n\ge k+2$, т.е. степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx=2\pi i\,\sigma$$

где σ *означает сумму вычетов функции* $R(z)=\dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ *по всем полюсам, расположенным в верхней полуплоскости.*

Так как подынтегральная функция $R(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$ четная, то $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$. Построим функцию $R(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$, которая на действительной оси (при $z=x$) совпадает с подынтегральной функцией $R(x)$. Особые точки функции $R(z)$ - это точки $z_1=i$ и $z_2=-i$. Из них в верхней полуплоскости находится точка $z_1=i$, которая является полюсом второго порядка. Вычет функции $R(z)$ относительно полюса i равен $\operatorname{Re}sR(i)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d}{dz}\left(R(z)(z-i)^2\right)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z^2}{(z+i)^2}\right) = \lim\limits_{z\to i}\dfrac{2iz}{(z+i)^3}=\dfrac{1}{4i}$. Так как в верхней полуплоскости только одна особая точка, то $\sigma=\dfrac{1}{4i}$. Следовательно, $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\dfrac{1}{4i}=\dfrac{\pi}{4}$.

б) Сформулируем правило, позволяющее вычислить рассматриваемый несобственный интеграл с помощью теории функций комплексного переменного:

Пусть $R(x)$ *- рациональная функция,* $R(x)=\dfrac{P_k(x)}{Q_n(x)}$, *где* $P_k(x)$ *и* $Q_n(x)$ *- многочлены степени* k *и* n *соответственно. Если функция* $R(x)$ *непрерывна на всей действительной оси,* $n\ge k+1$, λ *- произвольное действительное число, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx=\operatorname{Re}\{2\pi i\sigma_1\};\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx=\operatorname{Im}\{2\pi i\sigma_1\}$$

где σ_1 *означает сумму вычетов функции* $R(z)\cdot e^{i\lambda z}$ *по всем полюсам, расположенным в верхней полуплоскости.*

Так как подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{x\sin 5x}{x^2+4}$ является четной, то $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\sin 5x}{x^2+4}dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin 5x}{x^2+4}dx$. Построим функцию $f(z) = R(z)\cdot e^{5iz}$ такую, что $R(z)$ на действительной оси (при $z=x$) совпадает с $R(x)$: $f(z)=\dfrac{x}{x^2+4}\cdot e^{5iz}$. Отметим, что при $z=x$ справедливо равенство $\operatorname{Im} f(z)=f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка в точке $z=2i$. Вычет функции $f(z)$ относительно этого полюса равен $\operatorname{Re}sf(2i)=\lim\limits_{z\to 2i}\left(\dfrac{z\,e^{5iz}}{z^2+4}\cdot(z-2i)\right)=\dfrac{1}{2}e^{-10}$. Следовательно, $\sigma_1=\dfrac{1}{2}e^{-10}$ и $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\sin 5x}{x^2+4}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\cdot\dfrac{1}{2}\cdot e^{-10}\right\}=\pi\,e^{-10}$.

в) Сформулируем правило, позволяющее вычислить определенный интеграл функции, зависящей рационально от тригонометрических функций с помощью теории функций комплексного переменного:

Пусть R *- рациональная функция аргументов* $\sin x$ *и* $\cos x$ *,* $x \in [0, 2\pi]$ *и функция* R *непрерывна внутри промежутка интегрирования. Полагаем* $z = e^{ix}$ *, тогда* $dx = \dfrac{dz}{iz}$, $\cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz}$, $|z| = 1$. *В этом случае*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint_{|z|=1} F(z)dz = 2\pi i \sigma$$

где σ *есть сумма вычетов функции* $F(z)$ *относительно полюсов, заключенных внутри окружности* $|z| = 1$.

В рассматриваемом интеграле применим подстановку $z = e^{ix}$ и после преобразований получим: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2} = \frac{4}{i} \oint_{|я|=1} \frac{z\,dz}{(z^2+4z+1)^2}$. Внутри круга радиуса 1 с центром в начале координат содержится только одна особая точка подынтегральной функции $F(z) = \dfrac{z}{(z^2+4z+1)^2}$ - это точка $z_1 = -2+\sqrt{3}$, которая является полюсом второго порядка. Вычет функции $F(z)$ относительно точки $z_1 = -2+\sqrt{3}$ равен $\operatorname{Re} sF(-2+\sqrt{3}) = \lim\limits_{z \to -2+\sqrt{3}} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z(z+2-\sqrt{3})^2}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{3^3}}$. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2} = 2\pi i \cdot \frac{4}{i} \cdot \frac{1}{2\sqrt{27}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Вариант №1

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 1-2i$ и $z_2 = 4-2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^{-3} \cdot z_2^2$, z_1 / z_2, $\sqrt[3]{z_2 - \overline{z}_1}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \cos z,\ z_0 = \dfrac{\pi}{3}i - 1$;

б) $f(z) = e^z,\ z_0 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi}{2}i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \cos z^2$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 3\sec t + i2\mathrm{tg}t$

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z-1| \le 1, \\ |z+1| > 2. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \mathrm{Im}\left(z - \overline{z}\right) \ge 1, \\ z\overline{z} - \left(z + \overline{z}\right) > 0, \\ z\overline{z} - \left(z + \overline{z}\right) \le 3. \end{cases}$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = x^2 - y^2 + x$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область D: $\begin{cases} |z| = 1 \\ 0 \le \arg z \le \pi \end{cases}$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1+2i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z\cos\frac{1}{z-2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{(z+1)^2}{\left(z^2-3z+2\right)^2}$;

б) $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z^5}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz$; $AB:\{y = x^2; z_A = 0; z_B = 1+i\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z+i|=3} \dfrac{\sin z\, dz}{(z+1)^3}$;

б) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{e^z}{z-\pi i} dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$
2. $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2} dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{\left(1+\sqrt{\frac{10}{11}}\cos x\right)^2}$

Вариант №2

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 4+4i$ и $z_2 = 2-2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot z_2^2$, z_2 / z_1, $\sqrt[4]{z_1 - 1}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = Lnz,\ z_0 = \dfrac{1+i}{1-i}$;

б) $f(z) = chz$, $z_0 = 1 - \dfrac{\pi}{3} i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \operatorname{sh}\dfrac{z}{3}$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 2\sec t - i3\operatorname{tg} t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+i| \ge 1, \\ |z| < 2. \end{cases}$;

б) $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \left|1 - \dfrac{\bar{z}}{2}\right|$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = x^3 - 3xy + 1$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область D: $\begin{cases} 0 \le \operatorname{Re} z \le 2 \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{z-4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 2 - 3i$

Задание 9. Функцию $f(z) = \sin\dfrac{z}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos(z-1)}{(z-1)^4}$.

Задание 11. **В**ычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_L (z+1)e^z\,dz$; $L:\{|z|=1; \operatorname{Re} z \geq 0\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\oint\limits_{|z|=1} z\,tg\pi z\,dz$;

б) $\oint\limits_{|z-1-i|=2} \dfrac{z\,dz}{(z-2)^2(z^2+1)}$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{4+\sqrt{15}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{(\sqrt{5}+\cos x)^2}$

Вариант №3

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3-4i$ и $z_2 = -4+3i$ Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[4]{\bar{z}_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = shz$, $z_0 = 2+\frac{\pi}{4}i$;

б) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 4\sqrt{3}+4i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = e^{i(z+1)}$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = -\sec t + i3\mathrm{tg}t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z-3|-|z+3| \le \sqrt{5}, \\ |\mathrm{Re}\, z| < \sqrt{5}. \end{cases}$;

б) $\mathrm{Re}\left(z^2 - \bar{z}^2\right) \le 0.$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = e^x(y\cos y + x\sin y)$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0)=0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w=\frac{1}{z}$ область $D: \begin{cases} |z| \le 1 \\ \frac{\pi}{2} \le \arg z \le 2\pi \end{cases}$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z-z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z)=\frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -3-2i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=ze^{\frac{z}{z-5}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 5$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{(z+\pi)^3}{\left(z^2-\pi^2\right)^3}$;

б) $f(z)=z^4 \sin\dfrac{3}{z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz$; АВ – отрезок прямой $z_A=0; z_B=2+2i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{1-2\sin^2 z}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^5-4z^3}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5+2\sqrt{6}\sin x}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(1+\sqrt{\frac{6}{7}}\cos x)^2}$

Вариант №4

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 7+i$ и $z_2 = 1+7i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = ctgz$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2} i + 2$;

б) $f(z) = e^z$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{2} i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \ln z$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 4\text{tg}t - i3\sec t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z-1-i| < 1, \\ |\arg z| \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \sqrt{1+(\operatorname{Re} z)^2} \ge \operatorname{Im} z, \\ |\operatorname{Re} z| < 2. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = x^2 - y^2 - 2y$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1-z}{z}$ область D: $|z| = 1$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{2z-16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -2+i$

Задание 9. Функцию $f(z)=\sin\dfrac{2z-7}{z+2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-2$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$;

б) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{AB}(z^2+7z+1)dz$; AB – отрезок прямой $z_A=1; z_B=1-i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z-1|=1}\dfrac{dz}{z^4+1}$;

б) $\int\limits_{|z|=2} z^2\cos\dfrac{2-\pi z}{2z}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{6+\sqrt{35}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos x)^2}$

Вариант №5

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3+i$ и $z_2 = 1-3i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, z_1 / z_2, $\sqrt{\overline{z_1 + z_2}}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = tgz$, $z_0 = \dfrac{\pi}{6}i - 2$;

б) $f(z) = Arc\sin z$, $z_0 = \sqrt{3}$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = 2i\sin z$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 3\mathrm{tg}t + i4\sec t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z-i| \le 1, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg(z-i) < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$;

б) $z^2 + \bar{z}^2 > 3(\operatorname{Re} z)^2 - 4$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область D: $\begin{cases} |z| \ge 1 \\ \operatorname{Re} z \ge 0 \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{5z-50}{2z^3 + 5z^2 - 25z}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1+3i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=\cos\frac{3z}{z-i}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=i$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\frac{z^2+4}{\left(z^2+3z+2\right)^2}$;

б) $f(z)=z^3\operatorname{ch}\frac{2}{z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{ABC}|z|dz$; ABC – ломаная $z_A=0; z_B=-1+i; z_C=1+i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z|=1,5}\frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$;

б) $\int\limits_{|z-1|=5} ctg\,z\,dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{7+4\sqrt{3}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos x)^2}$

Вариант №6

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 7+24i$ и $z_2 = 24-7i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot \bar{z}_2^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[4]{\bar{z}_1 - z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = 1$;

б) $f(z) = e^z$, $z_0 = -1 - \frac{2\pi}{3} i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \cos iz$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = -4\operatorname{tg} t - i2\sec t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+i| \le 2, \\ |z-i| > 2. \end{cases}$;

б) $(z \cdot \bar{z})^3 \le (z - \bar{z})^2$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(1) = 1+i$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \frac{1}{z}$ область D : $\begin{cases} 0 \le \operatorname{Re} z \le 1 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 2 \end{cases}$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 2-i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = \sin \frac{5z}{z-2i}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2i$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4-1}$;

б) $f(z)=\left(z^2-2z+1\right)\operatorname{sh}\dfrac{2}{z-1}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{AB}(12z^5+4z^3+1)dz$; АВ – отрезок прямой $z_A=1; z_B=1+i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=2}\frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos z-1}dz$

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5-4\sin x}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(4+\cos x)^2}$

Вариант №7

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 4+3i$ и $z_2 = 3+4i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot z_2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[5]{z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = Arcshz$, $z_0 = i$;

б) $f(z) = \cos z$, $z_0 = -\frac{\pi}{2}i - \frac{3}{2}$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \operatorname{ch}\frac{z}{i}$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 3\operatorname{cosec}t + i3\operatorname{ctg}t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z-1-i| \le 1, \\ \operatorname{Im} z > 1, \\ \operatorname{Re} z \ge 1. \end{cases}$;

б) $\bar{z}^2 + z^2 \le 8 - 4(\operatorname{Im} z)^2$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = e^{-y}\sin x + y$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z + \frac{2}{z}$ область D: $|z| = 1$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{7z-98}{2z^3 + 7z^2 - 49z}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -1+2i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=\sin\frac{3z-i}{3z+i}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-i/3$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\sin z^3}{\left(z^2-\frac{\pi}{8}z\right)^3}$;

б) $f(z)=z^3 e^{-\frac{1}{z_2}}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{AB}\bar{z}^2dz$; AB – отрезок прямой $z_A=0; z_B=1+i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z|=0,5} z^2\sin\frac{1}{z}dz$;

б) $\int\limits_{|z-i|=1,5}\dfrac{dz}{(z^3+z)(z^2+4)}$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x^4+10x^2+9}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{5-3\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(4+3\cos x)^2}$

Вариант №8

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -4-4i$ и $z_2 = 2+3i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, ${z_2}/{z_1}$, $\sqrt[3]{z_1+2z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} i$;

б) $f(z) = Arcthz$, $z_0 = i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \sin(z+i)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 4\mathrm{cosec}t - i2\mathrm{ctg}t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} \left|z-\sqrt{2}\right| + \left|z+\sqrt{2}\right| > 4, \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |z-1| \le 1+\mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Re}\, z \le 5. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = e^x \cos y$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1+i$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z - \frac{1}{z}$ область $D: |z| = 4$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -2-3i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z\cos\frac{1}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz$; ABC – ломаная $z_A = i; z_B = 1; z_C = 0$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z-i|=3} \dfrac{e^{z^2}-1}{z^3 - iz^2} dz$;

б) $\int\limits_{|z|=1} z^3 \cos\dfrac{2i}{z} dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x^3-2)\cos\frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{8-3\sqrt{7}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos x)^2}$

Вариант №9

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ и $z_2 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \overline{z}_2$, $\overline{z}_2 / z_1$, $\sqrt{z_1 - z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = shz$, $z_0 = 2 - \dfrac{\pi}{2} i$;

б) $f(z) = Lnz$, $z_0 = 2 - 2i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \ln z^3$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \mathrm{ctg}t - i2\mathrm{cosec}t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z - 2 - i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z \ge 3, \\ \operatorname{Im} z < 1. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} z\overline{z} \ge \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z, \\ |\operatorname{Im} z| < 2. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z - \dfrac{4}{z}$ область D: $|z| = 4$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z + 3}{z^2 - 1}$, $z_0 = 2 + i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z \sin \dfrac{1}{z - 1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{1-\cos 2z}{z^2(z+3)}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z}-e^{3/z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_{ABC} \operatorname{Re}\dfrac{\bar{z}}{z}dz$; $ABC:\{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, BC- отрезок $z_B=1, z_C=2$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \dfrac{\sin \pi z}{z^2-z}dz$;

б) $\int\limits_{|z+i\sqrt{2}|=2} \dfrac{ze^{2z}}{z^4-+8z^2-9}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2}{(x^2+3)^2}dx$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{9-4\sqrt{5}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{(\sqrt{7}+2\cos x)^2}$

Вариант №10

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3+2i$ и $z_2 = -5+5i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot z_2^2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[4]{\bar{z}_1 - i}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} i$;

б) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 2\sqrt{3} - 2i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \operatorname{Arctg} z$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = -\operatorname{ctg} t + i 3 \operatorname{cosec} t$.

Задание 5. Построить область плоскости z , определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z-1-i| \ge 1, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 2, ; \\ 0 < \operatorname{Im} z \le 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{z} < \frac{1}{4}, \\ |\arg(z+i)| \ge \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = y - \frac{y}{x^2+y^2}$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(1) = 2$.

Задание 7. Найти область плоскости W , в которую отображается с помощью функции $w = z + \frac{3}{z}$ область D: $|z| = 3$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 3-i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=(z-3)\cos\pi\dfrac{z-3}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{(z+\pi i)^3}{(z^2+\pi^2)^3}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z^2}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{ABC}(z^2+\cos z)dz$; ABC – ломаная $z_A=0; z_B=1; z_C=i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z+1|=4}\dfrac{zdz}{e^z+3}$;

б) $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2+\cos z}{z^3}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{4-\sqrt{7}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(4+\sqrt{7}\cos x)^2}$

Вариант №11

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -3-4i$ и $z_2 = -3+4i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\overline{z_1}/z_2$, $\sqrt[5]{z_1 + z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = chz$, $z_0 = -1 + \frac{\pi}{4} i$;

б) $f(z) = \ln z$, $z_0 = \frac{1+2i}{-1+2i}$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = e^{z^2/2}$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 3\operatorname{ch}2t + i2\operatorname{sh}2t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+i| < 2, \\ 0 < \operatorname{Re} z \le 1. \end{cases}$;

б) $\operatorname{Re}^4 z + 8\operatorname{Im}^2 \overline{z} < 4z\overline{z}.$

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = e^{-y}\cos x$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z + \frac{4}{z}$ область D: $|z| = 2$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{11z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \frac{z+3}{z^2 - 1}$, $z_0 = -2 + 3i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\cos \pi z}{z^4-1}$;

б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}(z+i)}{(z+i)^3}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_L \dfrac{\bar{z}}{z}dz$; L –граница области: $\{1<|z|<2, \operatorname{Re} z>0\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{z\ dz}{(z-1)^3(z+2)}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=0,5} \frac{e^z-\sin z}{z^2}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3-\sqrt{5}\sin x}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(3+\sqrt{5}\cos x)^2}$

Вариант №12

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ и $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\overline{z_1 \cdot z_2}$, z_1^2 / z_2, $\sqrt[3]{z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = 2i$;

б) $f(z) = e^z$, $z_0 = 2 + \dfrac{\pi}{3}i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \operatorname{ch} 2iz$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 2\operatorname{ch}3t - i3\operatorname{sh}3t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z - i| \le 1, \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$;

б) $4 + \operatorname{Re} z > \operatorname{Re}\left(\overline{z^{-2}} + z\right)$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = y - 2xy$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{2}{z}$ область D: $|z + 1| = 1$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$

а) $f(z) = \dfrac{6z - 144}{z^4 + 6z^3 - 72z^2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z + 3}{z^2 - 1}$, $z_0 = -2 - 2i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z + 2i}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -2i$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{\left(z^2-\pi z\right)^3}$;

б) $f(z)=\dfrac{z^2}{e^{1/z}}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного: $\int\limits_{ABC}(chz+\cos iz)dz$; $ABC-$ ломаная, $z_A=0,\ z_B=-1,\ z_C=i$.

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=0,5}\frac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{1-\sin 1/z}{z}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{3-2\sqrt{2}\sin x}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(3+2\sqrt{2}\cos x)^2}$

Вариант №13

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 4-3i$ и $z_2 = 1-7i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^3 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[3]{z_1 - z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \cos z$, $z_0 = -\frac{\pi}{2}i - \frac{3}{2}$;

б) $f(z) = \ln z$, $z_0 = -2-2i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \sin z^2$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 5\operatorname{sh}4t + i4\operatorname{ch}4t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+2| + |z-2| > 4\sqrt{2}, \\ 0 < \operatorname{Im} z < 2. \end{cases}$;

б) $4|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = x^2 - y^2 + 2x + 1$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = i$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z - \frac{3}{z}$ область D: $|z| = 1$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{13z - 338}{2z^3 + 13z^2 - 169z}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = 2 + i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = \cos\frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{z^2+2iz-1}{z^2\left(z^2+1\right)}$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{z^4}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_L |z|\bar{z}dz;\ L:\{|z|=4,\ \operatorname{Re} z\geq 0\}$.

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\oint\limits_{|z-i|=3}\dfrac{e^z dz}{z^2(z+9)}$;

б) $\oint\limits_{|z+i|=1}\dfrac{\cos iz-1}{z^3}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^3\sin x}{(x^2+9)^2}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{4-2\sqrt{3}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos x)^2}$

Вариант №14

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -3+3i$ и $z_2 = 2+i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot z_2$, $z_1^2 / \bar{z}_2$, $\sqrt[5]{z_1 - \bar{z}_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = thz$, $z_0 = 1 - \dfrac{\pi}{2}i$;

б) $f(z) = Lnz$, $z_0 = \dfrac{2+i}{2-i}$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \operatorname{Arctg}(z+i)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = -4\operatorname{sh}5t - i5\operatorname{ch}5t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+i| > 1, \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z < 0. \end{cases}$;

б) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = x^2 - y^2 - 2x + 1$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z - \dfrac{2}{z}$ область D : $|z| = 3$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$

а) $f(z) = \dfrac{7z - 196}{z^4 + 7z^3 - 98z^2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = 1 - 2i$

Задание 9. Функцию $f(z) = \sin\dfrac{z+i}{z-i}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = i$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\mathrm{ctg} z}{16z^2-\pi^2}$;

б) $f(z)=z^5\sin\dfrac{1}{z^2}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$$\int_L (chz+\bar{z})dz;\ L:\{|z|=1,\ \mathrm{Im}\, z\le 0\}$$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int_{|z-2{,}5|=1}\frac{dz}{(z-0{,}5)(z-3)^2}$;

б) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z-\sin z}{z^4}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$
3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5-\sqrt{21}\sin x}$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{6}+\cos x)^2}$

Вариант №15

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3+3i$ и $z_2 = 4-3i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, $\left({z_1}/{z_2} \right)^2$, $\sqrt[4]{z_1 + \bar{z}_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = shz$, $z_0 = 1 + \dfrac{\pi}{2} i$;

б) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = \dfrac{3+4i}{5}$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = 2^z$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \dfrac{2}{\mathrm{ch}\, 2t} + i4\mathrm{th}\, 2t$.

Задание 5. Построить область плоскости z , определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+1| \geq 1, \\ |z+i| < 1. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |z-1| \leq 1 + \mathrm{Re}\, z \\ |z+1| + |z-1| > 2\sqrt{2}. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = 3x^2y - y^3 - y$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W , в которую отображается с помощью функции $w = z + \dfrac{1}{z}$ область D : $|z| = 1$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{15z - 450}{2z^3 + 15z^2 - 225z}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 + i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\sin^3 z}{\left(z^2-z\right)^3}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2z^2}-e^{1/z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_L |z|\operatorname{Re} z^2 dz;\ L:\{|z|=R,\ \operatorname{Im} z\ge 0\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{z+1}{e^z+3}dz$;

б) $\int\limits_{|z+1|=1{,}5}\dfrac{z^5-3z^3+5z}{z^4}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{6-4\sqrt{2}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos x)^2}$

Вариант №16

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = \sqrt{3} + 2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot z_2^2$, z_2 / z_1, $\sqrt[5]{z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{3} i + 3$;

б) $f(z) = Archz$, $z_0 = -2$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \ln\left(\dfrac{z}{i}\right)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \dfrac{4}{\text{ch}4t} + i2\text{th}4t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z| < 2, \\ -\dfrac{\pi}{6} \le \arg(z-1) \le \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 0 \le 1 + \operatorname{Im} z < |z - i|, \\ -2 < \operatorname{Re} z \le 2. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = 2xy + y$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область D: $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{8z - 256}{z^4 + 8z^3 - 128z^2}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 - 2i$

Задание 9. Функцию $f(z)=z\operatorname{sh}\dfrac{1}{z-2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(4z^2-\pi^2\right)^2}$;

б) $f(z)=\dfrac{e^{2z+i}}{2z+i}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_{AB}(3z^2+2z)dz \quad AB:\{y=x^2;z_A=0;z_B=1+i\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z-2|=1,5}\dfrac{dz}{(z-1)(z-2)^2}$;

б) $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2e^{1/z^2}dz}{z}$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$
2. $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\cos 2x}{(x^2+\frac{1}{4})^2}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{8-2\sqrt{15}\sin x}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos x)^2}$

Вариант №17

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 3-i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\overline{(z_1 \cdot z_2)}^2$, ${z_1}/{z_2}$, $\sqrt[5]{z_1 - z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = Lnz,\ z_0 = -1+i$;

б) $f(z) = Arc\cos z$, $z_0 = -5$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \mathrm{cth}(zi)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \mathrm{th}5t + \dfrac{5i}{\mathrm{ch}5t}$.

Задание 5. Построить область плоскости z , определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z| \le 1, \\ |\arg(z+i)| > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \operatorname{Im} z > |z| - 3, \\ \operatorname{Im} z \le 3 - |z|. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = 3x^2 y - y^3$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W , в которую отображается с помощью функции $w = z + \dfrac{2}{z}$ область D : $|z| = 3$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{z+2}{z + z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = 4 \cdot \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0 = -2 + 2i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = e^{\frac{z}{z-3}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{(z-3)^2}{\left(z^2-5z+6\right)^2}$;

б) $f(z)=z^3\cos\dfrac{4-2\pi z}{4z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_L z\,\mathrm{Re}\,z^2 dz;\ L:\{|z|=R,\ \mathrm{Im}\,z\geq 0\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=3}\frac{e^z dz}{z^2\left(z^2-9\right)}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{2z}-z}{z^2}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$
2. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{3}\sin x-2}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{2}+\cos x)^2}$

Вариант №18

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 5 - 6i$ и $z_2 = -2 + 2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1 + \frac{\pi}{3} i$;

б) $f(z) = chz$, $z_0 = 2 + \frac{\pi}{2} i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \sin^2 z$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \frac{1}{\mathrm{sh} t} - i\,\mathrm{cth} t$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} 1 < |z - 1| \le 2, \\ \operatorname{Im} z \ge 0, \\ \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \\ \left|\bar{z}^2 - 3\right| \le 3. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z - \frac{1}{z}$ область D: $|z| = 2$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{z + 4}{2z^2 + z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = 4 \cdot \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 3)}$, $z_0 = 1 - 3i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=\sin\dfrac{2z}{z-4}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=4$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^3+2z^2}$;

б) $f(z)=\dfrac{3}{z^4e^z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{ABC}(z^2+1)dz$; ABC – ломаная $z_A=0; z_B=-1+i; z_C=i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{z+1}{z^2+4}dz$;

б) $\int\limits_{|z-0{,}5|=1} z\,tg2z\,dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx$
2. $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\cos x}{(x^2+9)(x^2+16)}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{\sqrt{15}\sin x-4}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{5}+2\cos x)^2}$

Вариант №19

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 4-4i$ и $z_2 = 3+2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, ${z_1}/{z_2}$, $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} i$;

б) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1+i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \cos^2(zi)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 2e^{it} + \dfrac{1}{2e^{it}}$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} 1 \le |z-i| < 2, \\ \operatorname{Re} z \le 0, \\ \operatorname{Im} z > 1. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |z+\bar{z}| \ge 2 \operatorname{Im} \bar{z}^{-2}, \\ \dfrac{\pi}{6} \le \arg z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = 2xy + 2x$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область D: $\begin{cases} |z| \ge 1 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \\ \operatorname{Im} z \le 0 \end{cases}$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-3-i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\mathrm{sh} z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$;

б) $f(z)=\dfrac{e^{2z}-3}{z^3}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\,\mathrm{Im}\, z dz$; AB – отрезок прямой $z_A=1+i; z_B=0$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-\pi i|=\pi}\frac{\mathrm{ch} z\ dz}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$;

б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^{1/z}+1}{z}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{2\sqrt{6}\sin x-5}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(3+\cos x)^2}$

Вариант №20

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot \overline{z}_2$, $\left(z_2 / z_1 \right)^2$, $\sqrt[5]{\overline{z}_1}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = shz$, $z_0 = 2 + \dfrac{\pi}{4} i$;

б) $f(z) = Arc\sin z$, $z_0 = \dfrac{-3 + i}{4}$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = e^{iz/2}$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}}$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z| < 2, \\ \operatorname{Re} z \geq 1, \\ |\arg z| < \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$;

б) $\operatorname{Re}\left(z^2 + \overline{z}^{-2} \right) > 4 \operatorname{Re} z - 2 \operatorname{Im} z.$

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = 1 - \sin y \cdot e^x$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1 + i$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область $D: \begin{cases} |z| \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \\ \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{2z + 16}{8z^2 + 2z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=\operatorname{ch}\dfrac{4z-2z^2}{(z-1)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{(z^2+9)^2}{(z-3i)^2(z^2+4)}$;

б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}3z\text{-}1}{z^2}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_L(\sin iz+z)dz;\ L:\{|z|=1,\ \operatorname{Re}z\geq 0\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\sin\frac{1}{z^2}\,dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+7x^2+12}$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{35}\sin x-6}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos x)^2}$

Вариант №21

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = \sqrt{3} + i$ и $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $z_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[4]{z_2 - z_1}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{6} i + 2$;

б) $f(z) = Archz$, $z_0 = 3i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = 2i \ln z$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = -2e^{it} + \dfrac{1}{e^{it}}$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} 1 < |z - 1| \le 2, \\ \operatorname{Im} z \ge 0, \\ \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$;

б) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) \le 2 - \operatorname{Im} z.$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 2$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область $D: \begin{cases} |z| \le 1 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{5z + 50}{25z + 5z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = 4 \cdot \dfrac{z + 2}{(z - 1)(z + 3)}$, $z_0 = -1 - 2i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = ze^{\frac{z}{(z-3i)^2}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3i$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\sin^2 \pi z}{\left(z^2-\pi^2\right)^2}$;

б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^4}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz$ AB – отрезок прямой $z_A = 0; z_B = 1+2i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

б) $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{\cos z + z}{z^2} dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2+4}{(x^2+9)^2} dx$
2. $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2+4} dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{4\sqrt{3}\sin x - 7}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{(\sqrt{3}+\cos x)^2}$

Вариант №22

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -4+3i$ и $z_2 = 3-4i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\left(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\right)^2$, ${z_2}/{z_1}$, $\sqrt[5]{z_1 + z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = Lnz,\ z_0 = 1-i$;

б) $f(z) = Arctgz,\ z_0 = -\dfrac{i}{3}$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \operatorname{sh}(i-z)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 2e^{2it} - \dfrac{1}{e^{2it}}$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z-1| > 1, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 3, \\ -1 \le \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$;

б) $\left|1 - \dfrac{\bar{z}}{4}\right| \ge |z - 0{,}25|$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = 1 - \dfrac{y}{x^2+y^2}$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(1) = 1+i$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область D: $\begin{cases} -4 \le \operatorname{Re} z \le 4 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 8 \end{cases}$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{3z+36}{18z^2 + 3z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = 4 \cdot \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0 = 3+i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{z-\pi}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \pi$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z) = \dfrac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2}$;

б) $f(z) = \dfrac{2}{z} + \sin\dfrac{2}{z}$.

Задание 11. **В**ычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{AB} (2x+1)dz \quad AB: \{y = x^3; z_A = 0; z_B = 1+i\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=2} \frac{\cos z/2}{z^2 - 4} dz$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{ze^z - z - 1}{z^3} dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{4\sin x + 5}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \sqrt{3}\cos x)^2}$

Вариант №23

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -2-2i$ и $z_2 = 1+3i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\bar{z}_1 \cdot z_2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[4]{z_2^3}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = tgz$, $z_0 = \frac{\pi}{3} + i$;

б) $f(z) = e^z$, $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \mathrm{Arctg}(iz)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \frac{1+t}{1-t} + i\frac{2+t}{2-t}$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+i| < 1, \\ -\frac{3\pi}{4} \le \arg z \le -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |z| - 2 \le \operatorname{Re} z, \\ 2 - |z| > \operatorname{Re} z. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = e^{-y}\cos x + x$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \frac{1}{z}$ область D: $\begin{cases} -1 \le \operatorname{Re} z \le 1 \\ -2 \le \operatorname{Im} z \le 0 \end{cases}$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{7z+98}{49z + 7z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0 = 2-2i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z\sin\pi\frac{z+2}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^6 + 4z^5 + 4z^4}$;

б) $f(z) = \cos\frac{1}{z} - \sin\frac{2-\pi z}{2z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{ABC} z\bar{z}dz$ $AB: \{|z| = 1; \operatorname{Re} z \ge 0; \operatorname{Im} z \ge 0\}$ BC- отрезок $z_B = 1, z_C = 0$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2 + chz}{z^3} dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2+x+1)^2}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3\sin x + 5}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{13} + 2\sqrt{3}\cos x)^2}$

Вариант №24

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3-2i$ и $z_2 = 1-i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\overline{(z_1 \cdot z_2)}^2$, z_1 / z_2 , $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} - 5i$;

б) $f(z) = Lnz$, $z_0 = -1-i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \mathrm{ch}^2(iz)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \dfrac{t-1+it}{t(t-1)}$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+1| < 1, \\ |z-i| \le 1. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |z+i| < 1 + \operatorname{Im} z, \\ 0 < \arg(z+i) \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{Im} z \le 2. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = e^{-y}\sin x$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ область D: $\begin{cases} -1 \le \operatorname{Re} z \le 1 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 4 \end{cases}$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{4z+64}{32z^2 + 4z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = 4 \cdot \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0 = -2 - i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z\cos\pi\frac{z+3}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z) = \frac{\mathrm{ch} z}{\left(z^2 + \pi^2\right)^3}$;

б) $f(z) = 3z\cos\frac{5}{z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_L (\cos iz + 3z^2)dz;\ L: \{|z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z-1|=\sqrt{2}} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2 - 1\right)^2} dz$;

б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 8x + 17)^2}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x)\sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3\sqrt{7}\sin x + 8}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}$

Вариант №25

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 5-5i$ и $z_2 = 2-i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\overline{z}_1 \cdot z_2^2$, $\overline{z}_2 / z_1$, $\sqrt[5]{z_1 - z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = Arc\cos z$, $z_0 = -3i$;

б) $f(z) = e^z$, $z_0 = \dfrac{3\pi}{4}i + 2$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \operatorname{th}(iz)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{t}{1-t}(2-4i)$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z+1| - |z-1| > 4, \\ \operatorname{Re} z \le 5. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \operatorname{Re} z < \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + 1}, \\ |\arg z| \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = 2xy + x$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z - \dfrac{4}{z}$ область D: $|z| = 5$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{9z + 162}{81z + 9z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = -1-3i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z^2 \sin\dfrac{z+3}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z) = \dfrac{\cos z}{\left(z^2 - \pi^2\right)^3}$;

б) $f(z) = (z-1)\operatorname{ch}\dfrac{3}{z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_L |z|dz;\ L: \{|z| = \sqrt{2},\ 3\pi/4 \le \arg z \le 5\pi/4\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{(z+1)dz}{z^2+2z-3}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2}dx$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos x}{x^4+10x^2+9}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{5}\sin x+9}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$

Вариант №26

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = \sqrt{3} - i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $(z_1 \cdot z_2)^2$, z_1 / z_2, $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{4} i + 1$;

б) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = 2 - i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \cos(2iz)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = \frac{2+t}{2-t} + i\frac{1+t}{1-t}$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z - 1 + i| \geq 1, \\ \operatorname{Re} z < 1, \\ \operatorname{Im} z \leq -1. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |z - 2| \geq |z + 2i|, \\ |z + 3| < |z - 5|. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = \frac{x}{(x^2 + y^2)} + x$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(1) = 2$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z + \frac{3}{z}$ область D: $|z| = 5$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \frac{5z + 100}{50z^2 + 5z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = -3 + 2i$.

Задание 9. Функцию $f(z)=z\sin\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\frac{\sin z}{\left(z^2-\pi^2\right)^2}$;

б) $f(z)=\frac{\mathrm{sh}(2z)}{z^2}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{ABC}(z^9+1)dz$; ABC – ломаная $z_A=0; z_B=1+i; z_C=i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z-1|=3}\frac{\sin z}{(z-\pi)^5}dz$;

б) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^{2z}+3z}{z^2}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+1)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{7}\sin x+4}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}$

Вариант №27

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 2+5i$ и $z_2 = -3-4i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^3 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[3]{z_1 - \bar{z}_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0, ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = shz$, $z_0 = 1 - \dfrac{\pi}{3} i$;

б) $f(z) = Lnz,\ z_0 = \sqrt{3} + i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \sin^2(2iz)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = t^2 - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} -\dfrac{5\pi}{6} \le \arg z \le -\dfrac{\pi}{6}, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg(z+2i) \le \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$;

б) $\operatorname{Re}(z+1) = |z|$.

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = x^2 - y^2 - x$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z - \dfrac{3}{z}$ область D: $|z| = 4$ плоскости Z.

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{11z + 242}{121z + 11z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = 2 + 3i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z-3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{\mathrm{tg}z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\cos\dfrac{1}{z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_{ABC}(\sin z+z^5)dz$; ABC – ломаная $z_A=0; z_B=1; z_C=2i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1}\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{i}{z^2}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+15)^2}$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{5}\sin x+3}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{10}+3\cos x)^2}$

Вариант №28

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ и $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, z_1^2 / z_2 , $\sqrt[5]{z_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = tgz$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i$;

б) $f(z) = Arcshz$, $z_0 = -4i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = ie^{z^2}$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$.

Задание 5. Построить область плоскости z , определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |\operatorname{Re} z| \geq 2, \\ |\operatorname{Im} z| < 3. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2 \geq |2 - z^2|, \\ |\operatorname{Re} z| < 1. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = -2xy - 2y$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = i$.

Задание 7. Найти область плоскости W , в которую отображается с помощью функции $w = z - \dfrac{2}{z}$ область D : $|z| = 2$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{6z + 144}{72z^2 + 6z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = 3 + 2i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z \sin \pi \dfrac{z-1}{z-2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{z^2+4}{z^5+4iz^4-4z^3}$;

б) $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$ AB – отрезок прямой $z_A=0; z_B=1+i$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}dz$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{shz-z^2}{z^3}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^3}dx$
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{2}\sin x+3}$
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x)^2}$

Вариант №29

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 5-3i$ и $z_2 = -2+i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot z_2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[4]{z_1 - \bar{z}_2}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \dfrac{3\pi}{2} + i$;

б) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \ln\left(z^2 - i\right)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = 2t^2 + 2t + 1 - i\left(t^2 + t + 4\right)$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} |z-1-i| \ge 2, \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |3i+z| \le |3-z|, \\ |\arg z| < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Задание 6. Проверить, может ли функция $v = 2xy - 2y$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 1$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z + \dfrac{1}{z}$ область D: $|z| = 5$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{13z + 338}{169z + 13z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = -1 + 3i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = ze^{\frac{z}{z-4}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 4$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{e^{z}}{\left(z^{2}+\pi^{2}\right)^{2}}$;

б) $f(z)=z^{4}\cos\dfrac{2-\pi z}{2z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_{L}(z^{3}+\sin z)dz;\ L:\{|z|=1,\ \operatorname{Re} z\geq 0\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z+i|=2}\dfrac{\sin z}{z^{2}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz$;

б) $\int\limits_{|z+i|=2}(z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^{2}-10x+29)^{2}}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x^{2}+x)\sin x}{x^{4}+13x^{2}+36}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{2\sqrt{3}\sin x+4}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos x)^{2}}$

Вариант №30

Задание 1.

а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 5+6i$ и $z_2 = 1-3i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot \bar{z}_2^2$, z_1 / z_2, $\sqrt[3]{z_2 - \bar{z}_1}$.

Задание 2. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0 , ответ представить в алгебраической форме комплексного числа:

а) $f(z) = chz$, $z_0 = 2 - \pi i$;

б) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = 2 + i$.

Задание 3. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \operatorname{th}\left(\frac{z}{i}\right)$ и вычислить производную. Выделить действительную и мнимую часть полученной производной.

Задание 4. Определить вид кривой $z = t^2 - 2t + 3 + i\left(t^2 - 2t + 1\right)$.

Задание 5. Построить область плоскости z, определяемую данными неравенствами.

а) $\begin{cases} \left|\dfrac{z+2i}{3-4i}\right| \le 1, \\ \left|\arg z\right| < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$;

б) $2z\bar{z} + (z+i)z + (2-i)\bar{z} < 2.$

Задание 6. Проверить, может ли функция $u = x^3 - 3xy^2 - x$ быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, если да – восстановить ее, при условии $f(0) = 0$.

Задание 7. Найти область плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = z + \dfrac{4}{z}$ область D: $|z| = 5$ плоскости Z .

Задание 8. Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z) = \dfrac{7z + 196}{98z^2 + 7z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = 2 + 2i$.

Задание 9. Функцию $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z-5}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 5$.

Задание 10. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^3 - z^5}$;

б) $f(z) = (z-2)\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

Задание 11. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:
$\int\limits_L z|z|dz;\ L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$

Задание 12. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах.

а) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{ctg\, z}{4z-\pi}\,dz$;

б) $\int\limits_{|z|=1} z^3 \sin\dfrac{1}{z}\,dz$.

Задание 13. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2}{(x^2+11)^2}dx$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx$
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{\sqrt{21}\sin x+5}$
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{(\sqrt{7}+\cos x)^2}$