BÀI TẬP PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

1. Tìm các số x, y, z sao cho $\begin{bmatrix} -2 & -1 & x \\ 1 & x+2y^2 & 3 \\ z & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2x^2+y \\ 1 & y & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Tìm $s, t \in \mathbb{R}$ sao cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}$ là ma trận đối xứng.

3. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$,

   $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, và các số $\alpha = 4, \beta = \frac{1}{2}$. Tính các ma trận sau:

   a. $B+C, B^t+D, C-D^t, \alpha B^t - \alpha C^t, B^t + \alpha D - \beta C^t$.

   b. $AD, BE, AB^t, AE, E(\beta A), D(\alpha B + C), A(B^t + C^t)$.

4. Tính:

   a. $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

   b. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \right)$.

5. Tìm $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 38 \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ x & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -12 \\ 40 & 15 \\ 10 & y \end{bmatrix}$$

6.

   a. Cho $M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tính M^2.

b. Cho ma trận *A* cấp *n.* Chứng minh nếu $A^2 = A$ thì $(I_n - A)^2 = I_n - A$.

7. Cho ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và ma trận $Q = \frac{1}{4}(I_3 + P)$.

a. Tính PQ, QP theo *P.*

b. Chứng minh $Q^n = a_n I_3 + b_n P$, trong đó $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + b_n \end{cases}$.

8. Tính ma trận A^n (với *n* nguyên dương) trong các trường hợp sau:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a. Chứng minh *A* là nghiệm của $f(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

b. Chứng minh nếu $\exists k \in \mathbb{N}\ A^k = 0$ thì $A^2 = 0$.

c.

10. Nam mua 2 bó hoa gồm 3 loại: hoa hồng, hoa cẩm chướng và hoa li li. Số lượng mỗi loại hoa trong các bó hoa được cho bởi ma trận sau:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccc} \text{Hoa hồng} & \text{Hoa cẩm chướng} & \text{Hoa ly ly} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Bó hoa 1} \\ \text{Bó hoa 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mỗi hoa hồng giá 10.000đ, hoa cẩm chướng 3.000đ, và hoa lili 15.000đ. Viết số tiền Nam phải trả dưới dạng 1 ma trận tích, nếu Nam được giảm giá 50% cho bó hoa thứ 2.